贝尔参数的单对测量

S.Virzì,[1] E. Rebufello,[1] F. Atzori,[1,2] A. Avella,[1] F. Piacentini,[1*] R. Lussana,[3], I. Cusini,[3]F.Madonini,[3] F. Villa,[3] M. Gramegna,[1] E. Cohen,[4] I. P. Degiovanni,[1] M. Genovese[11]*INRIM*，意大利都灵 *Cacce* 路 *91* 号，*I-10135*[2]都灵理工大学，意大利都灵阿布鲁齐公爵大道 *24* 号，*I-10129*[3]米兰理工大学，电子、信息与生物工程系，意大利米兰莱昂纳多·达·芬奇广场 *32* 号，*20133*[4]工程学院和纳米技术与先进材料研究所，巴伊兰大学，以色列拉马特甘，以及

*通信请联系；电子邮箱：*f.piacentini@inrim.it*（日期：）

arXiv:2303.04787v1 [quant-ph] 8 Mar 2023

摘要

贝尔不等式是量子基础的基石之一，也是量子技术的基本工具。近年来，全球科学界为此付出了大量努力，最终实现了无漏洞实验。尽管如此，迄今为止，没有任何实验测试能够从每个纠缠对中提取完整不等式的信息，因为波函数坍缩使得无法在同一量子态上执行评估整个贝尔参数所需的所有测量。本文介绍了首个单对贝尔不等式测试，能够为检测到的每个纠缠对获得一个贝尔参数值。通过利用序贯弱测量，这一测试得以实现；序贯弱测量允许在同一状态下依次测量非对易可观测量，并对每个纠缠粒子进行测量。这种方法不仅赋予了前所未有的测量能力，还消除了在不同测量基之间进行选择的必要，从而从根本上消除了自由选择漏洞，并拓展了反事实确定性的概念，因为它能够在原本未选择的测量基上进行测量。我们还展示了，在测量贝尔参数后，受测的纠缠对仍保有相当程度的纠缠，这证明波函数并未发生（完全）坍缩，并使我们能够将这一量子资源用于后续协议。

I. 引言

自贝尔不等式提出以来 [1], ，它一直是量子基础和量子信息的支柱之一，也是量子技术（例如量子通信 [2]）中极为重要的工具。其重要性源于它能够检验量子力学，而不仅仅是与某一种替代理论进行比较，还能与一整类替代理论进行比较。在这些称为局域隐变量理论（LHVTs）的（经典）理论中 [3], ，所有测量结果都由某些隐变量预先决定，并且不允许超光速信号传输。自贝尔不等式问世以来，相关研究经历了漫长历程，最终取得了确凿的贝尔不等式违背 [3, 4] ；这一成果荣获2022年诺贝尔奖 [5–7]。在此过程中，值得一提的有最早的测试 [8–10] ，以及首次采用类空分离测量的实验 [11]。然而，迄今为止进行的实验都无法从每一对

被测量的纠缠对中提取关于整个贝尔不等式的信息，因为波函数坍缩使得人们无法在同一个量子态上完成所有测量，从而一次性推断出完整的贝尔参数。这意味着，进行测试的实验者必须逐对随机选择两颗纠缠粒子的测量基。为避免这些选择在测试中造成漏洞，它们必须相互独立（“自由选择”漏洞），而且这些测量之间不得进行通信（“局域性”漏洞）。

在此，我们展示了这一视角中的一次真正范式转变：我们通过实验证明，可以从每个经过测量的纠缠对中提取完整贝尔参数的信息，同时在测量后仍保留该纠缠对的大部分纠缠。实现这一点的方法是依次对构成纠缠对的每个粒子实施两次弱测量[12–15]，从而能够同时完成贝尔不等式检验所需的全部测量；代价是使纠缠态产生少量退相干，而非令其波函数完全坍缩。

弱测量已成为量子基础实验的一种工具，例如用于研究量子情境性 [21–23]，非定域性 [24, 25]，Leggett-Garg不等式 [26, 27]以及爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论 [28]。我们的结果展示了弱测量的一项突破性应用：弱测量首次使人们能够针对每个探测到的纠缠对，分别评估完整的贝尔参数（尽管不确定性很大，这是弱测量的典型特点）。

通过同时对评估贝尔不等式所需的所有偏振基进行测量，我们的协议从根本上消除了自由选择漏洞，因为 Alice 和 Bob 不再需要针对产生的每个纠缠对随机选择特定的测量基。此外，值得注意的是，由于采用了弱相互作用方案，纠缠态在贝尔参数测量后不会坍缩，因此可以将态中的残余纠缠用作量子资源，以开展进一步实验，或最终用于量子信息协议。

II. 实验实现

我们的目标是测量 Clauser-Horne-Shimony-Holt（CHSH）不等式的违背程度[30]

$$|\mathcal{S}| = |C(\alpha_1, \beta_1) - C(\alpha_1, \beta_2) + C(\alpha_2, \beta_1) + C(\alpha_2, \beta_2)| \leq 2 \,, \tag{1}$$

其中 $C(\alpha_j, \beta_k) = \langle \hat{\sigma}_z(\alpha_j) \otimes \hat{\sigma}_z(\beta_k) \rangle$, $j, k = 1, 2$ 和 $\hat{\sigma}_z(\theta) = U(\theta)\sigma_z U^\dagger(\theta)$，其中 $U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$，而 σ_z 是第三个泡利矩阵。我们通过产生偏振纠缠光子对，并利用基于弱相互作用的测量对其连续进行两次测量来实现这一点。具体而言，Alice（A）和 Bob（B）都对光子偏振进行两次连续的弱测量，测量基分别由 α_1、α_2 和 β_1、β_2 参数设定。当然，这会使被测纠缠态发生一定程度的退相干，但在弱测量框架下，波函数不会（完全）坍缩，因此可以在同一个量子态上依次测量非对易可观测量 [18]，从而能够从每个被测纠缠对中提取整个贝尔参数 $|\mathcal{S}|$ 的信息。

在我们的实现中，我们产生偏振纠缠光子对，并利用薄方解石（$CaCO_3$）晶体中的双折射对其实施弱测量。实验装置如图1所示。一台波长为405 nm的连续波泵浦激光器进入萨格纳克干涉仪，该干涉仪中放置了一块周期性极化磷酸氧钛钾晶体（ppKTP），在其中发生简并共线II型自发参量下转换（SPDC），产生波长为810 nm、具有正交偏振的光子对。L_P1 和L_P2 透镜用于在ppKTP晶体内获得准直高斯光束。光隔离器（OI）可避免可能返回激光源的反射，并使激光保持线偏振；随后，半波片（HWP_P）最终旋转其偏振轴。二向色镜（DM_B）将泵浦光分别引向萨格纳克干涉仪的顺时针路径和逆时针路径，从而产生偏振纠缠光子对。二向色

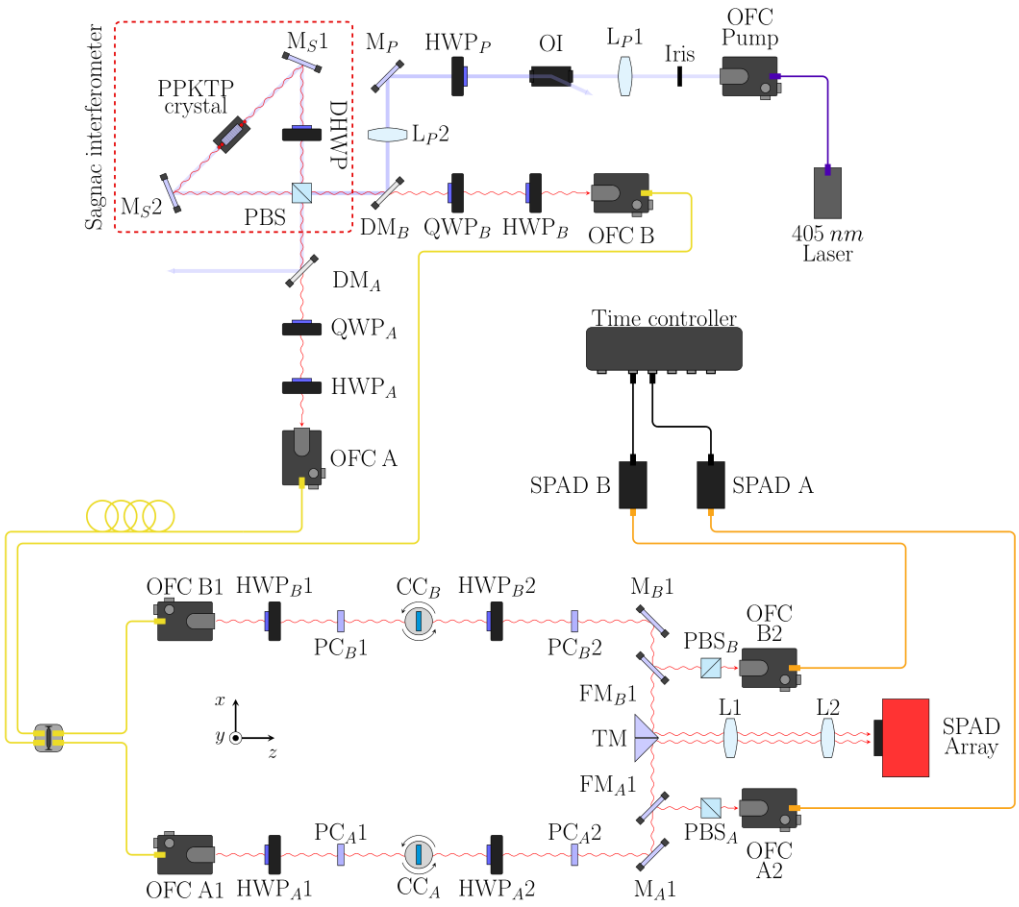

图1. 我们实验装置的示意图。偏振纠缠光子在萨格纳克干涉仪中产生，经光纤耦合后准直为高斯空间模式。随后，每个光子依次经历两次弱测量，每次测量均由一对双折射晶体实现，且晶体前设有一块半波片；之后，光子对入射到 24×24 单光子雪崩二极管阵列上，该阵列以二维空间分辨率探测光子对。OFC：光纤耦合器；L：透镜；OI：光隔离器；HWP：半波片；QWP：四分之一波片；DHWP：双半波片；DM：二向色镜；M：反射镜；PBS：偏振分束器；PC：主晶体；CC：补偿晶体；TM：三角反射镜；PPKTP：周期极化磷酸钛氧钾；SPAD：单光子雪崩二极管。

镜（$DM^{A(B)}$）阻止泵浦光透射，但允许下转换光子通过。光子对经过光谱滤波后耦合进入单模光纤，随后准直为高斯空间模式 $|f_{x_{A(B)}}\rangle \otimes |f_{y_{A(B)}}\rangle$（其中 $\langle \xi | f_\xi \rangle = \frac{1}{2\pi\sigma^2()^{1/4}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\sigma^2}\right)$，$\xi = x, y$ 和 σ 分别表示 x 和 y 方向上的高斯宽度），并被引导至两个

对称 l branches (A, B) in which th与序贯 l weak 测量 ke pl
态。四分之一波片和半波片（分别为 QWP$^{A(B)}$ 和 HWP$^{A(B)}$）组合使用，既可补偿单模光纤引起的偏振变化，也可调节双光子纠缠态内的相对相位，从而产生单态$|\psi_-\rangle =$ ($|HV\rangle - |VH\rangle)/\sqrt{2}$，其中 H(V)分别为水平（垂直）偏振分量。这样，我们能够制备可见度为 V为$= 0.986 \pm 0.001$的 $|\psi_-\rangle$ 态，清楚地体现出我们的萨格纳克干涉仪所产生的纠缠态具有很高的质量。最终,– 初始双体态可表示为 $|\Psi_{\rm in}\rangle = |\psi_-\rangle \otimes |f_{x_A}\rangle \otimes |f_{y_A}\rangle \otimes |f_{x_B}\rangle \otimes |f_{y_B}\rangle$。在两个分支 A 和 B中，通过利用两对薄双折射晶体所引起的偏振与横向动量之间的弱耦合，来实现评估贝尔参数所需的序贯弱测量。在每对晶体中，主晶体（PC$^{A(B)}$）会使 H 和 V 偏振分量之间产生微小的空间错位（沿相对于光子传播方向的横向轴），同时还会产生时间延迟和相位延迟。加入补偿晶体 CC$^{A(B)}$，以补偿时间延迟并恢复适当的相位，同时不引入任何额外的空间退相干。同一分支上两个连续主晶体的光学 e轴位于相互垂直的平面内，即 $z - x$ 和 $y - z$，从而使两次测量彼此独立。每个分支中的一对半波片（HWP$_{A(B)}$1和 HWP$_{A(B)}$2）可通过纠缠幺正变换，在不同偏振基中进行弱测量:

$$\hat{U}_{\xi_{jK}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g_{\xi_{jK}} \hat{\Pi}(\theta_{Kj}) \otimes \hat{P}_{\xi_{jK}}\right), \tag{2}$$

ˆ其中， $g_{\xi_{jK}} \ll 1$ 是弱耦合常数（$K = A,\ B$, $j = 1,\ 2$, $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$），Π(θ_{Kj})表示沿着由角度θ_{K_j} ($\theta_A = \alpha$, ˆ$\theta_B = \beta$)描述的方向的偏振投影算符，而 $P_{\xi_{jK}}$ 是光子在晶体光学平面上的横向动量。随后，光子被送入 24×24 单光子雪崩二极管（SPAD）阵列，即一种具有二维空间分辨率、能够记录每个探测到的光子的到达时间和位置的单光子探测器 [29]。L1和L2透镜构成一个成像系统

该成像系统用于使光子空间分布的尺寸与SPAD阵列有效面积的尺寸相匹配。

得益于单光子雪崩二极管阵列内置的时间标记器，可以提取符合计数张量 $N(X_A,\ Y_A,\ X_B,\ Y_B)$，其中 $X_A,\ Y_A$ 和 $X_B,\ Y_B$ 是构成纠缠对的两个光子入射位置的坐标。利用该张量，可以计算每一对探测到的光子所对应的完整贝尔参数 $\mathcal{S}$。事实上可以证明，若仅考虑布洛赫球实平面上的投影，那么纠缠态经过四次弱相互作用后，有

$$\langle\hat{\xi}_{jA}\otimes\hat{\xi}_{lB}\rangle_{\mathrm{out}}=\langle\Psi_{\mathrm{out}}|\,\hat{\xi}_{jA}\otimes\hat{\xi}_{lB}\,|\Psi_{\mathrm{out}}\rangle=g_{\xi_{jA}}g_{\xi_{lB}}\,\langle\psi_-|\,\hat{\Pi}(\alpha_j)\otimes\hat{\Pi}(\beta_l)\,|\psi_-\rangle \tag{3}$$

and

$$\langle\hat{\xi}_{jK}\rangle_{\mathrm{out}}=\langle\Psi_{\mathrm{out}}|\,\hat{\xi}_{jK}\,|\Psi_{\mathrm{out}}\rangle=g_{\xi_{jK}}\,\langle\psi_-|\,\hat{\Pi}(\theta_{Kj})\,|\psi_-\rangle\,, \tag{4}$$

其中 $j,\ l=1,\ 2$，$\hat{\Pi}(\theta_{Kj})=\frac{I+\sigma_z}{(\theta_{Kj})\,2}$ 以及 $|\Psi_{\mathrm{out}}\rangle=U_{x_A}U_{x_B}U_{y_A}U_{y_B}\,|\Psi_{\mathrm{in}}\rangle$ 是经过测量过程后输出的双体态。于是，关联 $C(\alpha_j,\ \beta_l)$可写为:

$$C(\alpha_j,\beta_l)=\langle\hat{\sigma}_z(\alpha_j)\otimes\hat{\sigma}_z(\beta_l)\rangle=4\frac{\langle\hat{\xi}_{jA}\otimes\hat{\xi}_{lB}\rangle}{g_{\xi_{jA}}g_{\xi_{lB}}}-2\frac{\langle\hat{\xi}_{jA}\rangle}{g_{\xi_{jA}}}-2\frac{\langle\hat{\xi}_{jB}\rangle}{g_{\xi_{jB}}}+1, \tag{5}$$

据此，可以计算贝尔参数 $\mathcal{S}$。

最后，翻转反射镜 FM_A1 和 FM_B1，即可将光子送入投影测量装置。该装置的每个分支均包含一组四分之一波片 QWP+、半波片 HWP+和偏振分束器 PBS，后接一个用作桶式探测器的 SPAD。采用这种替代配置，我们可以通过量子层析重建 [31] 密度矩阵，完整表征该状态。

III. 结果

实验结果如图 2 所示。图中展示了我们如何估算所探测到的每一对纠缠光子的CHSH参数 $\mathcal{S}$。结果分布的巨大方差体现了我们实验中测量的弱性。事实上，弱测量能够避免波函数坍缩，但代价是

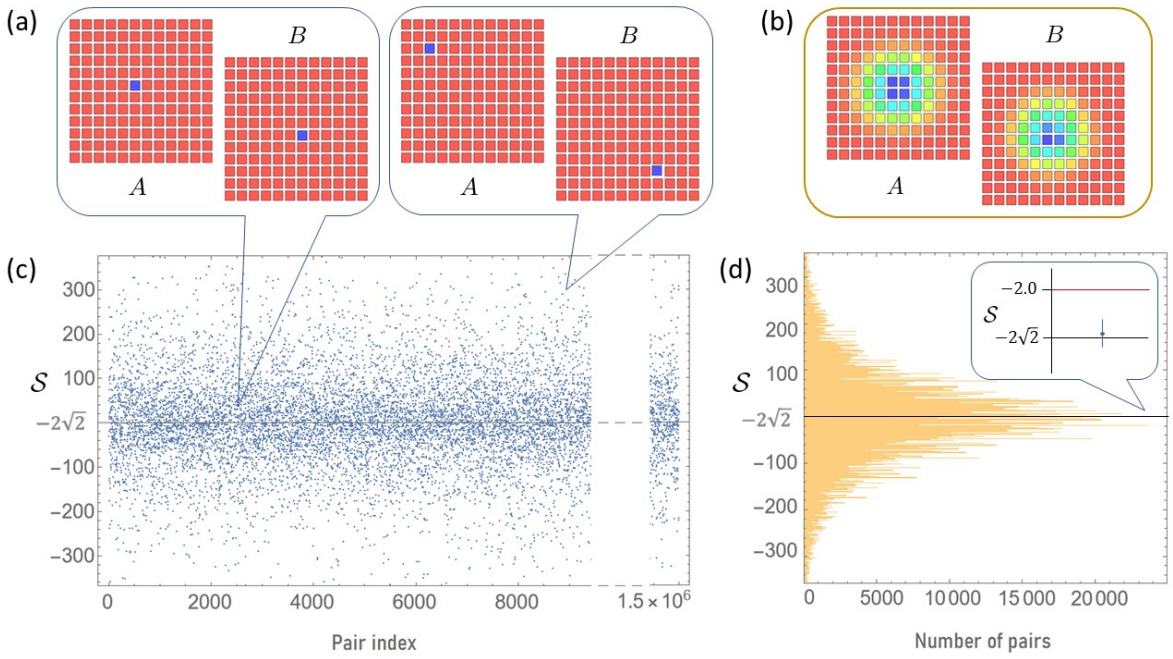

图 2. CHSH 不等式参数 $\mathcal{S}$ 的单对估计。(a) 图：SPAD 阵列上典型的纠缠对探测事件。蓝色方块分别表示分支 A 和 B 中触发的像素。(b) 图：两个分支中所有符合计数事件的积分。(c) 图：对每个探测到的纠缠对的 $\mathcal{S}$ 参数估计。(d) 图：所有 CHSH 参数估计值积分的直方图。插图报告了所有收集事件的平均值 $\mathcal{S}^{\text{ave}} = -(2.79 \pm 0.18)$（蓝点），与量子力学的策雷尔森界（黑线）（$\mathcal{S}^{\text{QM}} = -2\sqrt{2}$）高度吻合，并以 4.3 个标准差违反了局域隐变量理论界（$\mathcal{S}^{\text{LHVT}} = 2$，红线）。与 $\mathcal{S}^{\text{ave}}$值相关的不确定度包括统计贡献和系统贡献。

–

单次测量事件只能获得关于测量的可观测量的部分信息，这与弱测量范式所伴随的高度不确定性一致。对多个探测事件取平均后，我们得到了显著的贝尔参数估计值 $\mathcal{S}^{\text{ave}} = -(2.79 \pm 0.18)$，与策雷尔森界完全一致，并以 4.3 个标准差的显著性违反了局域隐变量理论 [3] 所对应的经典界。

此外，为了检查测量过程输出的状态，我们首先验证了可见度

在经过贝尔参数（弱）测量后的状态，得到 $V^{\text{out}} = 0.941 \pm 0.001$。这清楚地表明，协议结束时存在大量残余纠缠。

接下来，我们对该态进行层析重构，得到图 3 所示的结果，其中比较了序贯弱测量前[图 (a) 和 (b)] 与序贯弱测量后 [图 (c) 和 (d)] 的态密度矩阵。在这两种

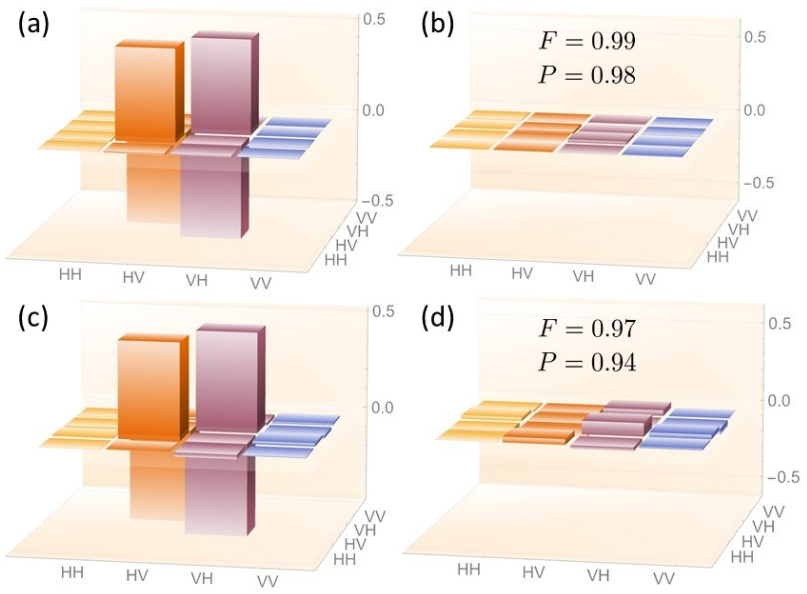

图3。(a)和(b)图分别显示：对经受单对评估贝尔参数所需的连续弱测量的纠缠态进行量子层析重建所得密度矩阵的实部和虚部。重构密度矩阵与理论预期密度矩阵之间的一致性良好 $\rho_{\psi_-} = |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$ ，这由(b)图插图中报告的量子保真度 F 以及态纯度 P所证实。(c)和(d)图分别显示：弱测量后纠缠态的量子层析重建所得密度矩阵的实部和虚部。同样，(d)图插图中报告了该态与单态ρ_{ψ_-}的保真度，以及态纯度。这两个参数的高值表明，测量过程仅对纠缠态造成了轻微扰动，而非导致波函数完全坍缩，因此保留了态中大量的初始纠缠。

对于这些情况，我们在插图中报告了重构密度矩阵 ρ^{rec} 与单态密度矩阵 $\overline{\rho_{\psi_-} = |\psi_-\rangle\langle\psi_-|}$，之间的量子保真度 F（ρ^{rec}，ρ_{ψ_-}）$= (\mathrm{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho^{\mathrm{rec}}}\rho_{\psi_-}\sqrt{\rho^{\mathrm{rec}}}}))^2$ [32]，以及重构态的纯度 $P = \mathrm{Tr}\,[(\rho^{\mathrm{rec}})^2]$。图3(b)中报告的数值凸显了我们的纠缠光子源所产生单态的高品质。而图3(d)中的数值则表明，经过单对贝尔参数测量后得到的态仍接近初始态；这清楚地说明，四次弱测量引起的退相干极其微弱（而非导致波函数完全坍缩），因此测量过程结束后，态中仍保留着大量纠缠。

为了定量估算这一点，我们评估进入贝尔测量的纠缠态的负性和 concurrence（分别为 $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{in}}$），以及离开贝尔测量的纠缠态的负性和 concurrence（分别为$\mathcal{N}_{\text{输出}}$和$\mathcal{C}^{\mathrm{out}}$）。为此，我们采用两种不同的方法：1）直接根据重构的密度矩阵进行评估，得到初态的相应数值$\mathcal{N}^{\mathrm{in}} = 0.981$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{in}} = 0.979$，以及末态的 $\mathcal{N}_{\text{输出}} = 0.937$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{out}} = 0.894$；2）利用适用于这类纠缠态的一些最优估计量 [34–36]，无需实施完整的量子态层析过程，即可得到 $\mathcal{N}^{\mathrm{in}} = \mathcal{C}^{\mathrm{in}} = 0.983 \pm 0.001$ 和 $\mathcal{N}_{\text{输出}} = \mathcal{C}^{\mathrm{out}} = 0.927 \pm 0.001$。除了这两种估计方法所得结果吻合良好之外，提取出的负性和 concurrence 数值还表明，每对光子中最初存在的绝大部分纠缠在贝尔测量过程中得以保留，因此可以利用这一量子资源开展进一步的量子信息协议或量子基础相关检验。

IV. 结论

我们实现了首个能够从检测到的每个纠缠对中提取完整 CHSH 参数信息的实验，实现了所谓的单对贝尔参数测量，这在该领域堪称一次真正的范式转变。这是通过

对待测纠缠态中的两个粒子分别实施两次序贯弱测量实现的。这种方法赋予了前所未有的测量能力，使得在同一个纠缠态上能够完成评估贝尔不等式所需的所有（不对易）测量。由于无需在不同测量基之间进行选择，该协议从根本上不受自由选择漏洞的影响，原则上为更容易实现无漏洞检验铺平了道路。尽管弱测量的本质会导致单次测量事件具有较大的不确定性（Ref. [37]，中的协议除外，但该协议无论如何都无法在此类情形下实施），但对多个事件取平均后，仍可得到对经典界的显著违背。

还值得注意的是，由于贝尔不等式的（弱）测量后量子态并未坍缩，而是留下了一个略微退相干的纠缠态，因此甚至可以考虑将残余纠缠用作量子资源，服务于量子信息、量子计量学及相关量子技术领域的后续协议。总之，我们的结果在贝尔不等式检验框架中独树一帜，不仅为新一代旨在研究量子基础的实验铺平了道路，也为量子技术提供了工具，尤其适用于非破坏性纠缠检验。

致谢

本研究获得了 QuaFuPhy 项目（Fonzazione San Paolo 的“Trapezio”征集项目）、欧盟地平线 2020 研究与创新计划 FET-OPEN 项目（资助协议第828946号，PATHOS）的资助；还获得了以色列创新局资助项目70002和73795、Elta Systems Ltd.、Pazy基金会、以色列科学技术部以及以色列高等教育委员会量子科学与技术计划的资助。本研究还获得了 EMPIR 19NRM06METISQ 项目的资助。该项目获得了 EM-

PIR 计划的资助，该计划由参与国和欧盟地平线 2020 研究与创新计划共同出资。本文所呈现的研究成果也得益于 EQUO 项目（欧洲量子生态系统）；该项目由欧盟委员会数字欧洲计划资助，资助协议编号为 101091561。我们感谢 Yakir Aharonov 和 Avshalom Elitzur 富有启发性的讨论，并感谢 Federico Maestri 为实验装置的初步实现作出贡献。

---

[1] Bell, J.S. 《物理学》1, 195 (1965).[2] Ekert, A. K. 基于贝尔定理的量子密码学。《物理评论快报》67, 661 (1991).[3] Genovese, M. 隐变量理论研究：近期进展综述。《物理报告》413, 319-396 (2005).[4] Brunner, N., Cavalcanti, D., Pironio, S., Scarani, V. & Wehner, S. 贝尔非定域性。《现代物理评论》86, 419 (2013).[5] Hensen, B. 等。利用相距 1.3 千米的电子自旋实现无漏洞的贝尔不等式违背。《自然》526, 682 (2015).[6] Giustina, M. 等，利用纠缠光子对贝尔定理进行具有显著意义的无漏洞检验。《物理评论快报》115, 250401 (2015).[7] Shalm, L.K. 对局域实在论的强无漏洞检验。《物理评论快报》115, 250402 (2015).[8] Freedman, J.S. & Clauser, J.F.《物理评论快报》28, 938 (1972).[9] Kasday, L.R., Ullman, J.D., Wu, C.S.《新西门托*B*辑》25, 633 (1975).[10] Clauser, J.F. 《物理评论快报》36, 1223 (1976).[11] Aspect, A., Dalibard, J. & Roger, G. 使用随时间变化的分析器对贝尔不等式进行实验检验。Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1804.[12] Aharonov, Y., Albert, D.Z. & Vaidman, L. 对自旋 1/2 粒子的自旋分量进行测量时，测量结果如何可能为 100。《物理评论快报》60, 1351 (1988).[13] Ritchie, N.W.M., Story, J.G. & Hulet, R.G. 弱值测量的实现。《物理评论快报》66, 1107 (1991).

[14] Kofman, A.G., Ashhab, S. and Nori, F. 弱前选和后选测量的非微扰理论。《物理报告》520, 43 (2012).[15] Tamir, B. & Cohen, E. 弱测量与弱值简介。$Quanta$ 3, 7 (2013).[16] Mitchison, G., Jozsa, R., and Popescu, S. 序贯弱测量。《物理评论*A*》76, 062105 (2007).[17] Thekkadath, G.S., Giner, L., Chalich, Y., Horton, M.J., Banker, J. & and Lundeen, J.S. 量子系统密度矩阵的直接测量。《物理评论快报》117, 120401 (2016).[18] Piacentini, F. 等。利用序贯弱值测量不相容观测量。《物理评论快报》117, 120402 (2016).[19] Kim, Y., Kim, YS., Lee, SY., Moon, S., Kim, YH. & Cho, YW. 通过测量不相容观测量的序贯弱值直接进行量子过程层析。《自然·通讯》9, 192 (2018).[20] Foletto, G., Padovan, M., Avesani, M., Tebyanian, H., Villoresi, P. & Vallone, G. 认证量子随机数提取的序贯弱测量实验检验。《物理评论*A*》103, 062206 (2021).[21] Piacentini, F. 等。研究弱值与情境性之间联系的实验。《物理评论快报》116, 180401 (2016).[22] Waegell, M., Denkmayr, T., Geppert, H., Ebner, D., Jenke, T., Hasegawa, Y., Sponar, S., Dressel, J. & Tollaksen, J. 中子干涉测量中的受限情境性：观测量子鸽笼效应。《物理评论*A*》96, 052131 (2017).[23] Cimini, V., Gianani, I., Piacentini, F., Degiovanni, I.P. & Barbieri, M. 广义量子测量中的反常值、费 Fisher 信息与情境性。《量子科学与技术》5, 025007 (2020).[24] Mahler, D.H., Rozema, L., Fisher, K., Vermeyden, L., Resch, K.J., Wiseman, H.M. & Stein- berg, A. 非定域且超现实的玻姆轨迹实验。《科学进展》2, e150146 (2016).[25] Hu MJ., Zhou, ZY., Hu, XM., Li, CF., Guo, GC. & Zhang, YS. 通过最优弱测量观察一个纠缠对中三位观察者之间的非定域性共享。《*npj*量子信息》4, 63 (2018).[26] Goggin, M.E., Almeida, P.M., Barbieri, M., Lanyon, B.P., O'Brien, J.L., White, A.G. & Pryde, G.J. 使用光子的弱测量对 Leggett-Garg不等式的违背。

《美国国家科学院院刊》 108, 1256 (2011).[27] Avella, A. 等，反常弱值与多重测量 Leggett-Garg 不等式的违反。《物理评论*A*》 96, 052123 (2017).[28] Calder´on-Losada, O., Moctezuma Quistian, T.T., Cruz-Ramirez, H., Ramirez, S. M., U'Ren, A.B., Botero, A. 和 Valencia, A. 一种弱值方法，用于检验非对易可观测量的同时爱因斯坦-波多尔斯基-罗森实在性要素。*Commun. Phys.*3, 117 (2020).[29] Madonini, F., Severini, F., Incoronato, A., Conca, E. 和 Villa, F. 用于超分辨率显微术中多光子符合探测的 24x24 SPAD成像仪设计。国际光学工程学会会议论文集 11771，量子光学与光子计数 2021，117710B (2021).[30] Clauser, J.F., Horne, M.A., Shimony, A. 和 Holt, R.A. 提出检验局域隐变量理论的实验。《物理评论快报》 23, 880 (1969).[31] Bogdanov, Y. U., Brida, G., Genovese, M., Kulik, S.P., Moreva, E.V. 和 S hurupov, A.P. 量子态层析协议效率的统计估计 《物理评论快报》 105, 010404 (2010).[32] Gilchrist, A., Langford, N.K. 和 Nielsen, M.A. 用于比较真实与理想量子过程的距离度量。《物理评论*A*》 71, 062310 (2005).[33] Verstraete, F., Audenaert, K., Dehaene, J. 和 De Moor, B. 纠缠度量——负性与 concurrence 的比较。*J. Phys. A: Math. Gen.* 34, 10327 (2001).[34] Brida, G. 等，量子极限下纠缠的实验估计。《物理评论快报》 104, 100501 (2010).[35] Brida, G. 等，光学量子比特系统中纠缠的最优估计。《物理评论*A*》83, 052301 (2011).[36] Virz`ı, S., Rebufello, E., Avella, A., Piacentini, F., Gramegna, M., Ruo Berchera, I. Degiovanni, I.P. 和 Genovese, M. 双量子比特态中纠缠与量子失谐的最优估计。*Sci.Rep.* 9, 3030 (2019).[37] Rebufello, E. 等，通过单光子探测获得反常弱值。*Light: Sci. & Appl.*10, 106 (2021).