遍历阿基米德二聚体

Henrik Schou Røising [1▲]，Zhao Zhang [2▼]

1尼尔斯·玻尔研究所，哥本哈根大学，丹麦哥本哈根 DK-2200▲ henrik.roising@nbi.ku.dk2 SISSA 和 INFN 的里雅斯特分部，via Bonomea 265，I-34136，的里雅斯特，意大利▼ zhao.zhang@su.se

2023年7月10日

arXiv:2303.04817v2 [math-ph] 7 Jul 2023

摘要

我们研究十一个阿基米德晶格有限区域上的完美匹配，即紧密堆积二聚体覆盖，并给出一种构造性证明，表明任意两个完美匹配都能通过一小组局域环交换操作相互转化。这一结果对于构建具有共振价键基态的量子二聚体模型具有直接意义；该基态是与边界条件相容的所有二聚体覆盖的叠加。对于五种复合阿基米德晶格，我们还通过平移不变参考构型补充了充分性证明，从而证明这些充分性条件对于遍历性具有严格的必要性。我们给出两个三分晶格上的量子二聚体模型的无挫变形实例，并对此进行讨论。

目录

1 引言 2 完美匹配的遍历性 32.1 概述 32.2 定义与策略 42.3 引理2.1的证明 62.4 引理2.2的证明 6**3 环交换移动的必要性与最小集合 7 4 无挫量子二聚体模型 9 5 结论与展望 11A 将 T 移动分解为三角晶格上的 L 和 B 移动 12B 环交换移动的必要性 13C kagome 晶格上的显式充分性证明 13参考文献 17**

1 引言

图 $G = (V,E)$ 的完美匹配是边的一个子集 $M \subset E$，满足 V 中的每个顶点都恰好与 M中的一条边相邻。完美匹配在凝聚态物理领域也称为紧密堆积二聚体覆盖，在图论和凝聚态物理中都得到了广泛研究。在统计物理中，人们长期以来一直关注紧密堆积二聚体覆盖的性质，例如其计数；这可追溯至 Kasteleyn 关于正方晶格的精确结果 [1] 以及热力学推导出的物理量 [2,3]。此外，紧密堆积二聚体覆盖的统计性质也出现在所谓 “Rokhsar–Kivelson” （RK）点处的量子二聚体模型中，此时这类模型变得可解。Rokhsar 和 Kivelson 引入的正方晶格量子二聚体模型写作 [4]:

$$H_{\mathrm{RK}} = \sum_{p\in\text{plaquettes}} \Big[V\Big(|\square\rangle\langle\square|_p + |\square\rangle\langle\square|_p \Big) - J\Big(|\square\rangle\langle\square|_p + |\square\rangle\langle\square|_p \Big) \Big]. \tag{1}$$

当$V > 0$时，对角项使平行的最近邻二聚体（粗红键）相互排斥，而非对角项则会翻转平行最近邻二聚体的取向。在 RK 点，即$V = J$时，量子二聚体模型可改写为投影算符之和；该点是正方晶格上的一个临界点。在开放边界条件下，基态唯一，由经典二聚体构型的均匀叠加 [4,5], 构成；这种构想最初被提出，认为它与高T_c 超导体具有物理关联，因为它实现了 Anderson 的共振价键（RVB）态 [6,7]。此后，在实现经典和量子二聚体模型 [8], 的技术与方案方面也取得了显著进展，相关平台涵盖铁磁岛阵列 [9] 以及二维里德堡原子阵列 [10–14]。量子二聚体模型也据称已在可编程量子模拟器 [13]上实现。

在构造具有上述基态性质的量子二聚体模型时，通常会隐含地假设遍历性：为了使所有可能的二聚体覆盖都包含在基态叠加态中，模型哈密顿量中包含的局域二聚体项必须生成经典构型的（二聚体约束）空间。边界效应与遍历性失效之间的相互作用，可能导致（局域）希尔伯特空间碎片化 [15, 16], ，即出现数量呈指数增长、彼此在动力学上不连通的子空间。这一术语还可根据彼此不连通的 Krylov 子空间——通过对不同初态进行时间演化所获得的不同子空间——随系统尺寸的增长方式 [17, 18]进一步细化。此外，即使边界构型已固定，也可以修改哈密顿量中的动力学（非对角）项，从而强制选取一部分体构型，使满足某种条件的构型（例如高度模型中高度非负的构型）彼此之间具有遍历性 [19–24]。

利用与 $U(1)$库仑规范对称性 [26]相关联的高度函数，可以证明，仅用一个局部项就能确保正方晶格和蜂窝晶格上的完美匹配具有遍历性。在这两种情况下，分别作用于基本正方形和六边形面的单个环交换二聚体移动，便足以确保遍历性[1], 参见图 1。Kenyon 和 Rémila 证明，对于三角晶格，涉及至多六个三角形面的三种环交换移动足以 确保完美匹配具有遍历性 [25]。然而，这三个项是否都 必要 似乎并不明确 [5]。在 11 种阿基米德晶格中，以上三种晶格构成了非复合多边形铺砌；这些铺砌由规则多边形组成，形成平面上的边对边镶嵌，并且所有顶点在平移和旋转下都相同。

[1]准确地说，除了“交错”构形之外，这一说法均成立。所谓“交错”构形，是指不存在可应用环交换移动的瓦片的构形。这些构形将在第 3节进一步讨论，其存在与边界条件有关 [15]。

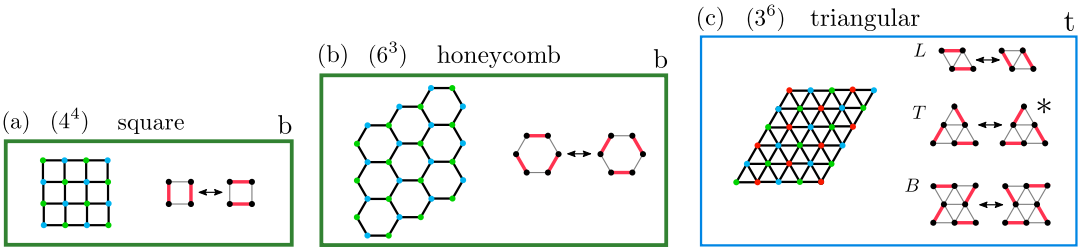

图 1：三种非复合阿基米德晶格的有限区域，以及确保紧密堆积二聚体覆盖具有遍历性的一组充分环交换移动（旋转除外） [25]。在晶格记号中，例如“(4^4)”，底数（分别是指数）表示沿晶格上某个顶点周围行进时遇到的多边形边数（分别是重数）。在 (c) 中，这些移动分别称为L （“菱形”）、T （“三角形”）和B （“蝴蝶”）。对于正方形晶格和蜂窝晶格，该充分移动对于遍历性而言也是必要的；它们以绿色边界标出。对于以蓝色边界标出的三角晶格，T 移动（“$*$”）已在附录A中证明是冗余的。顶点以不同颜色标示，以显示正方形晶格和蜂窝晶格是二分的 (b)，而三角晶格是三分的 (t)。

在此，我们采用受 Kenyon 和 Rémila 启发的构造性证明策略，正式建立了适用于所有复合阿基米德晶格、足以确保完美匹配具有遍历性的环交换项集合。此外，我们给出一组参考构型，以证明若干环交换项的必要性；由此，我们证明对于八种复合阿基米德晶格中的五种，在任意边界条件下，这些充分项确实也都是必要的。这一结果可直接用于构建量子二聚体模型：此类模型在一系列可实现的非二分晶格上可能具有拓扑序扩展的 RVB 相。原则上，只需付出很少的额外工作，我们的方法还可进一步应用于所有多边形铺砌。

2 完美匹配的遍历性

本节将证明一种通用策略，通过一组足够的不可约局域环交换操作，将任意两个完美匹配连接起来。该论证具有构造性，因此提供了一种构造足够的局域移动、以保证遍历性的方法。请注意，此处“遍历性”与“连通性”同义，指的是任意一个完美匹配都可以转变为其他任意一个完美匹配。我们将在此考察给定晶格中允许存在完美匹配的开放区域（不含任何孔洞）。如果晶格嵌入在具有周期性边界条件的拓扑非平凡曲面上，则不同的不可缩回路定义了不同的绕数扇区。局域环交换项至多只能连接同一绕数扇区内的构形。施加周期性边界条件后，还可能出现相对于局域项而言被冻结的“交错构型”，其中一些将在第3节和附录B中进一步讨论。我们首先概述主要结果。

2.1 摘要

除图 1所示的三种非复合阿基米德晶格及其遍历性环交换移动集合外，我们还在图 2 中列出了其余八种复合阿基米德晶格

及其一组足够的环交换移动（至离散旋转为止），以确保完美匹配的遍历性。在第 4 节和附录 B中，我们通过实例给出这些充分性结果，并展示一系列环交换移动也具有必要性，从而得出结论：对于图2 中以绿色边界标出的晶格，充分的项集同时也是必要的项集。对于以下情况，我们给出一个详尽的实例：

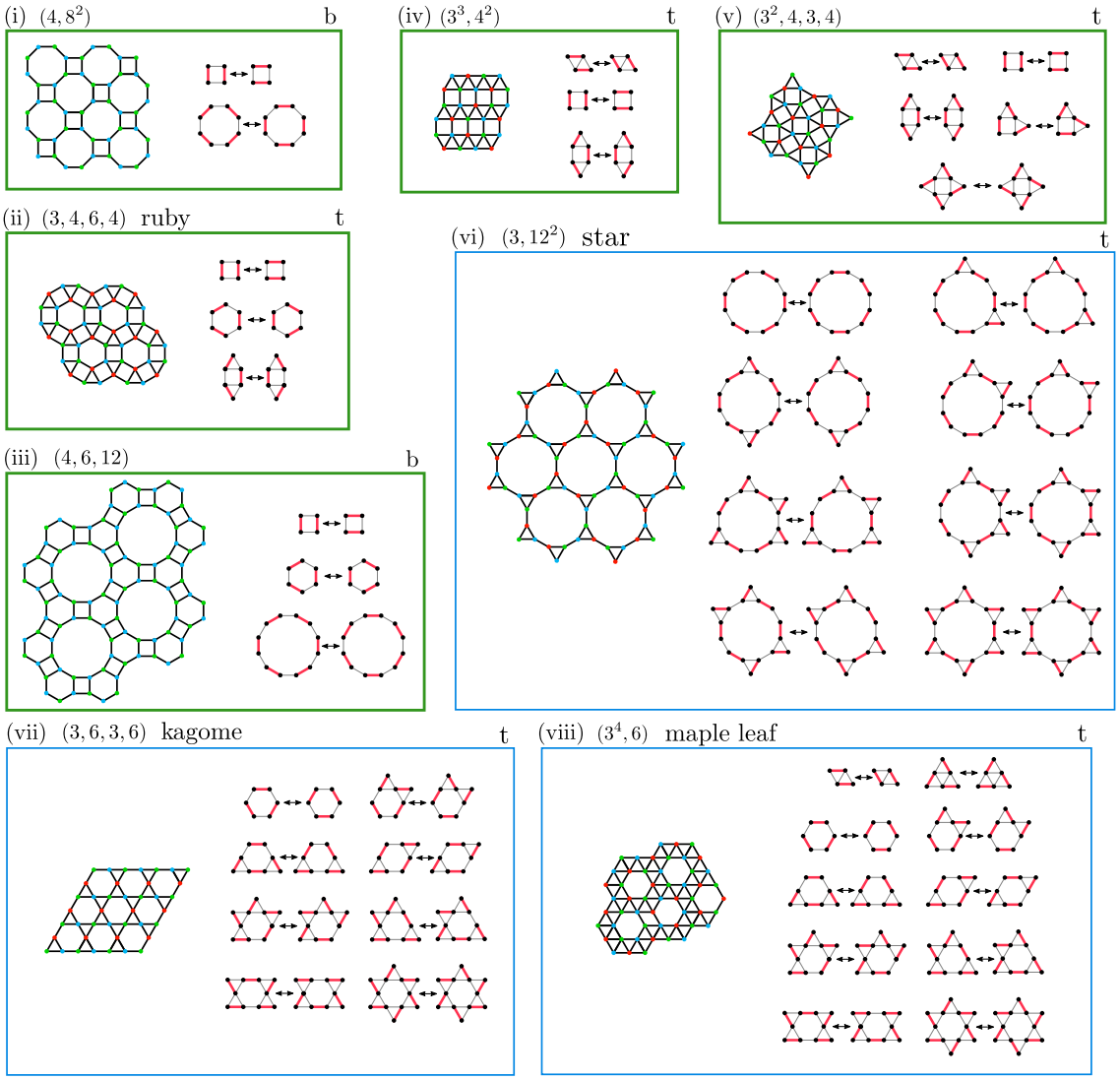

图 2：八种复合阿基米德晶格的有限区域，以及一组沿不可约环进行的、足以确保紧密堆积二聚体覆盖遍历性的环交换移动（考虑旋转）。对于边界标记为绿色的晶格 (i)–(v)，这组充分的移动同时也是关于遍历性的必要移动集，详见第 4 节和附录 B。

关于 kagome 晶格的结果见附录 C。我们在第 4 节讨论这些结果的意义，以及文献中的相关和互补结果。

2.2 定义与策略

在文献 [25] 中，Kenyon 和 Rémila 给出了一个两步论证，证明对于无孔洞三角晶格有限区域的任意二聚体覆盖，M_1，都可以通过图 1_2，中所示的一组三种局部环交换移动，转变为任意其他二聚体覆盖，1（c）。

证明通过一系列变换，将M_1变为M_1'，并将M_2变为M_2'，使得$M_1' = M_2'$。在这里，我们推广该文中的原理，并将其应用于所有复合阿基米德晶格，尽管从原理上讲，这一思路也适用于阿基米德晶格之外范围更广的多边形铺砌。

我们重申参考文献 [25] 中的观察：转移图，即两个完美匹配的并，$M_1 \cup M_2$，是若干环的并，也就是说，它是一个子图，其中每个顶点都与两个二聚体相接，一个来自 M_1，另一个来自 M_2。长度为 2 的环称为平凡环，因此其中来自 M_1 和 M_2 的两个二聚体[2]重叠。如果一个环未被任何其他环包围，则称其为极大环。两步论证归结为证明以下两个引理

引理 2.1。 $M_1 \cup M_2$ 中不包围任何其他环的一个环，可以通过一组局域环交换操作转变为一组平凡环。

引理 2.2。 $M_1 \cup M_2$ 中的环可以通过一组局域环交换操作转变为一组彼此均为极大的环。

遍历性由此可通过两个步骤得出。首先，如果转移图 $M_1 \cup M_2$ 中的任一环不是极大环，因此被至少一个环包围，我们就反复应用引理 2.2，直到所有环都成为极大环（对 $M_1 \cup M_2$ 所做的变换，只是一系列分别作用于 M_1 或 M_2 的变换）。值得注意的是，应用引理 2.2 时可能需要反复使用引理 2.1；第 2.4 节对此作了解释和示例。当所有环都是极大环时，根据定义，没有任何环能包含其他环。其次，使用引理 2.1 将每个极大环分别变换为一组平凡环。因此，变换后的转移图经过局部变换，使 $M_1 \mapsto M_1'$ 和 $M_2 \mapsto M_2'$ 满足 $M'_1 = M_2'$。图 3 展示了上述过程的第二步在枫叶晶格的一个有限区域上的应用。

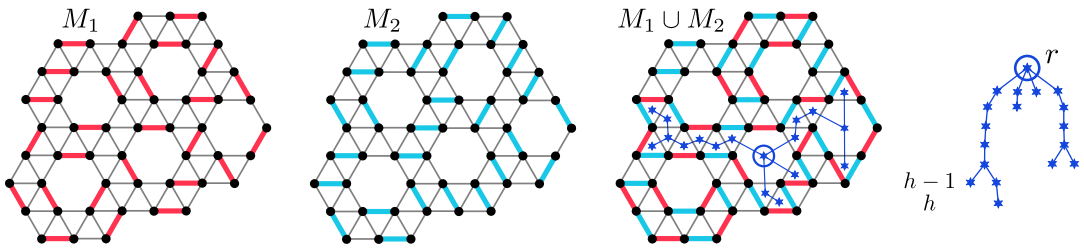

图 3：枫叶晶格有限区域上的两个完美匹配示例，M_1（红色键）和 M_2（蓝色键）。右侧是转移图 $M_1 \cup M_2$，它由长度各异的环组成。对于每个不包围其他环的非平凡环，都会出现一棵“6叉”树：环内每个元胞的中心都用蓝色星形标记标出，并与环中相邻的面相连。这里我们选取一个六边形面作为树的根节点 r。树的深度记为h。选定根节点后，引理 2.1 中的迭代过程会对第 h 层节点附近的元胞执行环交换移动，逐步缩短树，直至整个环转化为一组平凡环。

在经典随机模型或量子哈密顿量的动力学（非对角）项中，连接阿基米德晶格上完美匹配的最小移动集合，由围绕晶格中我们称为不可约偶环的环交换移动构成。这些环的定义是长度为偶数且除此之外不含弦的环，但可以包含这样的弦：

[2]注意，如果 M_1 和 M_2 是完美匹配，且 $M_1 \cup M_2$ 不含 平凡环，那么$M_1 \cup M_2$ 称为完全填充环构形。

这些弦连接一对奇长度环。换言之，它们在不可约的意义上是指：若通过其中任何一条弦将其进一步分解为更小的环，必然会产生一个奇环。根据定义，可以很容易地识别它们，因为它们不含任何偶边面；只需纳入晶格中每一种偶边面周围三角形数量为偶数的所有瓦片。（在三角晶格上，偶边面的作用由一个由两个三角形组成的平行四边形承担，因此，菱形移动（L）不附加周围的三角形，三角形移动（T）附加四个周围三角形中的两个，而蝴蝶移动（B）则全部附加，见图1(c)。）

引理的证明2.1

中的环$M_1 \cup M_2$必然具有偶数长度，因为它们由两种二聚体覆盖以及环交换移动产生；在第一步中，这些移动可能会被用于合并和拆解环路。根据构造，这些移动具有偶数条边，因此会保持所有作用对象环的偶数长度性质。由于合适的候选移动集合是完备的，任何极大环都可以化为由最小集合中的不可约环拼接而成的形式，且重叠部分遵循一种 $\mathbb{Z}_2$ 加法。将极大环系统地拆分成若干部分的一种方法，是考察环所围成的对偶晶格顶点。环内的对偶晶格形成一棵“n叉”树；枫叶晶格的一个示例见图 3。注意，如果任何地方存在无弦环，那么原晶格中至少会有一个顶点位于该环内，这将意味着存在单体缺陷，或与原环不包含任何其他环的假设相矛盾。

首先，让我们排除包含三角形的晶格，稍后再将证明扩展以适用于这类晶格。在这一限制下，我们可以从 n 元树的任意叶节点开始。由于每个节点只有一个父节点，原晶格中与叶节点对偶的面在该环中只有一条边未被包含（未被二聚体覆盖于 M_1 或 M_2 中）。于是，这条边将该环切分为一个更小的不可约环。这表明，在两个覆盖中的一个覆盖里，可以围绕该不可约环进行环交换移动，将不可约环变为一组平凡环，同时使剩余的非平凡环变短（现在包含此前未被覆盖的边）。

对于包含三角形面但三角形面彼此不相邻的晶格，即 $(3,6,3,6)$、$(3,4,6,4)$ 和 $(3,12^2)$，我们需要修改节点的定义，排除与三角形面对偶的顶点，转而将其视为分支的一部分。但这会引发叶节点截断位置可能存在歧义：一条穿过三角形面的分支会跨越两条边，而根据是否将该三角形面包含在不可约环中，截断方式有所不同。然而，两个候选不可约环的长度相差一，因此只有其中一个是不可约偶环。对于晶格 $(3^3,4^2)$、$(3^2,4,3,4)$ 和 $(3^4,6)$，我们从最后一个不与三角形面对偶的父节点开始，每隔一个深度将一个节点计数为节点；这些节点将由移动 L 或 T 截断。而待截断的不可约环的偶长度也唯一确定了所得不可约偶环和较小剩余环的形状。该过程递归地继续，直到沿原环的周界将该环分解为一组平凡环。

2.4 引理 2.2 的证明

为证明引理 2.2，即 $M_1 \cup M_2$可以转化为一种构形，使得没有任何一个环包含另一个环，我们只需证明：不包含其他环但被另一个环包围的环，可以与包围它的环合并。该思想的示意图见图 4。

从最内层且不包含其他环的环开始，我们可以应用引理 2.1 将其转化为一组平凡环。如果还有其他环也被一个

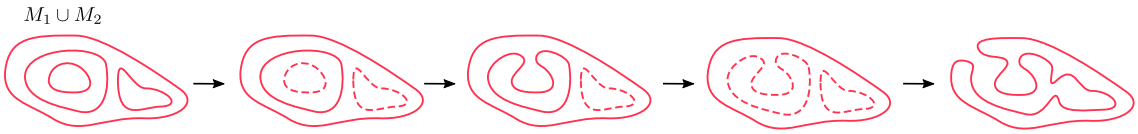

图 4：展示如何使 $M_1 \cup M_2$ 中的所有环都达到最大。这里的虚线表示一组平凡环，这些平凡环是在对不包围其他环的最内层环应用引理 2.1 后得到的。

共同的较大环所包围，我们也对它们应用引理 2.1，使共同包围的环内只有平凡环。

完成上述预处理步骤后，包围环内与该环相邻的所有顶点，都由某个平凡环路的一端覆盖；这个平凡环所覆盖的键的另一个顶点，要么与包围环上的另一个顶点相邻（我们将此情形标记为 I），要么与包围环内的另一个平凡环相邻（我们将此情形标记为 II）。在情形 I 中，涉及的四个顶点之间的边的并集（包括包围环上的一个二聚体）定义了一个不可约环，可在其上执行环交换移动，将平凡环与包围环合并（在晶格 $(3,6,3,6)$ 和 $(3,12^2)$ 上，该不可约环的最小长度分别为 6 和 12）。在情形 II 中，可以沿着端点追踪至另一个平凡环的一个端点，而该环的另一个端点可能与包围环相邻，也可能不相邻。如果它不相邻，则可以继续追踪，每次沿着距离包围环最近的方向前进；这样，当某个端点与包围环相邻时，必定已形成一个不可约环，其中未覆盖的键数为奇数。因此，可以在 M_1 或 M_2 上执行环交换移动，将这些平凡环吸收到包围环中。重复此过程，直到包围环内不再有其他平凡环。

一旦解开“最内层”的环，我们便以相同的步骤继续处理下一层，并不断向“外层”迭代，直到所有环都达到最大。

3 环交换移动的必要性与最小集合

在上一节中，我们通过调用少量环交换项，给出了密堆积二聚体构型遍历性的构造性充分性证明。本节针对阿基米德晶格中的一个子集，探讨这些充分项是否必要（其边界为一般的凸形边界，且尺寸有限并大于几个元胞[3]）。为此，我们给出“交错构型”的反例：如果省略充分集合中的任何一种移动，这些构型就会形成彼此不连通的 Krylov 子空间。如下文所述，对于所有复合阿基米德晶格中的每一种移动，我们都构造了这样一个例子，但 $(3,12^2)$、$(3,6,3,6)$ 和 $(3^4,6)$ 除外。此外，对于三角晶格，我们在附录 A中证明，通过穷举 T 可翻转瓦片周围的局部环境，可知充分性证明中采用的 T 移动（图 1(c)）是多余的，参见文献 [25]。需要指出的是，环交换移动的候选集合并非唯一。不过，若考虑与不可约偶长度环相关联的环交换项，我们可以保证，任何其他可以想到的环交换项，都能化约为所考虑项的复合。

在三角晶格上，可以通过考察某些特定构形来证明L 步和B 步的必要性，因为这些构形中只有相应的瓦片是可翻转的。例如，

[3]在这两种情况下，三角晶格上的T 移动可能是实现遍历性所必需的。另一方面，对于某种特定形状的边界，与该边界相容的完美匹配选择有限，也可能使某些通常必需的移动变得多余。

柱状构型（见图5左图）证明了 L 步的必要性。可通过仅含可翻转B 瓦片的构形来说明B 步的必要性，如图5右图所示。（对于围绕B-可翻转瓦片的大多数邻域构形，B 步都可分解为一系列L 步。然而，至少存在四种构形，它们是图5 右图构形的平移；若没有B 步，这些构形便会被冻结。）在文献 [27] 中，也从二聚体覆盖的遍历性角度讨论了 L 步和B 步的必要性[4]。

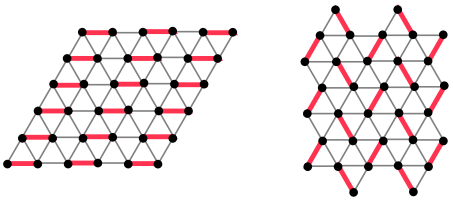

图 5：左：三角晶格上的柱状二聚体构型。以此作为参考构型可证明，L 移动对于实现遍历性是必要的。右：证明 B 的必要性的一个构型（参见文献 [27,28]）。

沿用相同策略，即构造平移不变构型，从而无需担心图示局部区域之外的移动会关联原本不连通的扇区，我们在一系列阿基米德晶格上识别出更多冻结构型；若缺少最小必要集合中的某些类型环交换移动，这些构型便会出现。图 6展示了证明简单方形环交换项必要性的柱状构型示例。更多示例汇集于附录 B。综合这些构型，我们可以得出结论：在阿基米德晶格 $(4,8^2)$、$(3^3,4^2)$、$(3,4,6,4)$、$(4,6,12)$和 $(3^2,4,3,4)$（图 2中以粗绿色边框标出）上，所有充分的环交换项确实都是实现遍历性所必需的。

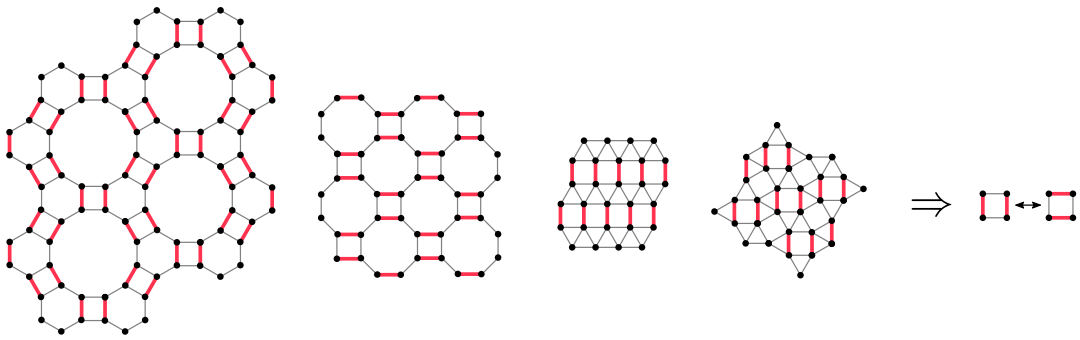

图 6：柱状参考构型中仅有此类瓦片可翻转，这表明在晶格 $(4,6,12)$、$(4,8^2)$、$(3^3,4^2)$ 和 $(3^2,4,3,4)$ 上正方形环交换移动的必要性。注意：在 $(3^2,4,3,4)$ 晶格上，所示构形中既有可翻转的正方形瓦片，也有可翻转的菱形瓦片。然而，由于翻转此构形中的菱形瓦片不会产生图 9所示构形以外的任何构形，结合这两个构形即可得出正方形环交换移动的必要性。

对于复合晶格 $(3,12^2)$、$(3,6,3,6)$ 和 $(3^4,6)$，大多数环交换项的必要性尚不明确，不过可以预期存在某些冗余。尽管

[4]在参考文献 [27] 中提到，有证据表明，在具有相同边界条件且与共同的“交错构型”存在嵌套关系的情况下，各构形扇区仅通过菱形移动即可连通；该交错构型与图5右侧面板中的构型相似。

充分性证明适用于 $(3,6,3,6)$ kagome 晶格和 $(3,12^2)$ 星形晶格量子二聚体模型；这两种情况下的遍历性显而易见，因为这些移动合在一起能够使所有局部构型彼此转化 [29]。对于这两种晶格，图 2 中的充分环交换项分别由一个六边形和一个十二边形瓦片，以及其所有偶数编号的三角形装饰构成，因此可以构造一组对易动力学算符的“赝自旋表示”，并证明其遍历性，同时给出精确枚举结果，参见文献 [29–31]。这些对易动力学算符恰好是图 2 中的环交换项 (vii) 和 (vi) 分别围绕 kagome 晶格和星形晶格上的每个六边形和十二边形瓦片求和所得。

4 无挫量子二聚体模型

一旦确定了一组足以保证遍历性且不可约的环交换项，一个直接的应用便是构造遍历量子二聚体模型；在该模型中，RK 点处的基态是所有可能二聚体覆盖的均匀叠加，参见式（1）中的 Rokhsar–Kivelson 模型。此外，在 RK 点处，量子二聚体模型成为“无挫”模型，意指基态同时使哈密顿量的所有局域（投影）项达到最小值。环交换项自然出现在 Hubbard 模型的微扰展开中 [32]。在此背景下，我们提醒读者，不可约环的长度（见图 2）决定相应环交换项出现的阶数。因此，要在复合阿基米德晶格上为有效的无挫量子二聚体模型寻找一个母体（类 Hubbard）哈密顿量，需要进行一定程度的精细调谐。

一般认为，上述 RVB基态相会在 RK 点以下（$V < J$）的较大参数区域内持续存在，并且在非二分晶格上具有 $\mathbb{Z}_2$ 拓扑序 [33]。另一方面，在二分晶格上，量子二聚体模型只允许晶态相，而 RK 点则成为一个临界（无能隙）点，将元胞相（$V < J$）与非公度交错相（$V > J$）分隔开来 [34, 35]。此外，通常认为非二分晶格具有短程二聚体-二聚体关联 [36], ，与正方晶格的情形形成对比；在正方晶格上，二聚体-二聚体关联按 $\sim 1/R^2$ [37]衰减。在阿基米德晶格中 (4^4)， (6^3)， $(4,8^2)$和 $(4,6,12)$是二分晶格。其余晶格均为非二分晶格，而且事实上是三分晶格，正如我们在图 2中用着色三分划分明确展示的那样。根据图 2的结果，下面我们给出两个定义在三分晶格上的无挫量子二聚体模型实例。

在红宝石晶格上，RK 点处的遍历量子二聚体模型为

$$H_{(3,4,6,4)} = J \sum_{p\in\text{plaquettes}} \Bigg[\Big(\big|\,\big\rangle_p - \big|\,\big\rangle_p \Big)\Big(\big\langle\,\big|_p - \big\langle\,\big|_p \Big) + \sum_{l=0}^{2} \Big(\big|R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big\rangle_p - \big|R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big\rangle_p \Big)\Big(\big\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big|_p - \big\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big|_p \Big) + \sum_{l=0}^{2} \Big(\big|R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big\rangle_p - \big|R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big\rangle_p \Big)\Big(\big\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big|_p - \big\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}}\,\big|_p \Big) \Bigg], \tag{2}$$

其中，对 p 的求和遍历整个晶格的元胞，并且 $R^{\frac{2\pi}{3}}$ 将构形逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$。我们注意到，在文献 [38], 的量子哈密顿量中，六边形环交换项被省略了。若省略六边形项，图 10 所示的构形将形成一个不连通的 Krylov 子空间。

回到三角晶格，我们上述结果表明，L 和B 移动

是实现遍历性所必需的。我们注意到，Moessner–Sondhi 模型 [5] 仅包含L 移动；不过，文献 [5] 曾推测，加入一种四二聚体移动便足以实现遍历性，而我们在此正式证明了这一点。引入变形参数q^{L_l}和q^{B_l}后，可以构造一种具有遍历性且经过q变形的量子二聚体模型，如下所示：

$$H_{(3^6)} = J \sum_{p\in\text{plaquettes}} \sum_{l=0}^{2} \Bigg[\frac{1}{\sqrt{1+q_{L_l}^2}} \left(\left| R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right\rangle_p - q_{L_l} \left| R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right\rangle_p \right) \left(\left\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right|_p - q_{L_l} \left\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right|_p \right) + \frac{1}{\sqrt{1+q_{B_l}^2}} \left(\left| R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right\rangle_p - q_{B_l} \left| R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right\rangle_p \right) \left(\left\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right|_p - q_{B_l} \left\langle R^l_{\frac{2\pi}{3}} \right|_p \right) \Bigg], \tag{3}$$

其中，我们对三角晶格上的所有“菱形”和“蝴蝶”元胞及其三种取向求和。三角晶格上特定局部环境中的T 移动的冗余

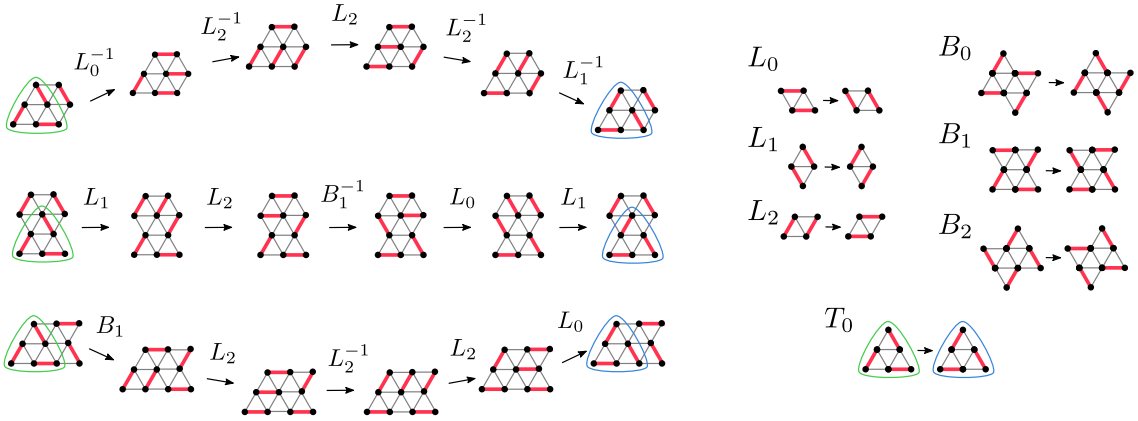

图 7：展示了在特定局部环境中，T 环交换移动（以绿色和蓝色边界突出显示）如何用L 和B 移动来表示。这些余循环条件对q变形哈密顿量施加了一致性方程，详见第 4节。

如图7中的“五边形关系”所示，这些局部环境会对变形参数q^{L_l}和q^{B_l}施加一致性关系：

$$q_{L_1} q_{L_0} q_{B_1}^{-1} q_{L_2} q_{L_1} \equiv q_{L_1}^{-1} q_{L_2}^{-1} q_{L_0}^{-1} \equiv q_{L_0} q_{L_2} q_{B_1}, \tag{4}$$

它们允许以下解

$$\left\{ \begin{array}{c} q_{L_0} q_{L_1} q_{L_2} = \pm 1, \pm i, \\ q_{B_j} = \pm q_{L_j}, \forall j = 0,1,2. \end{array} \right\} \tag{5}$$

任意这些参数选择都能保持哈密顿量无阻挫，且基态是紧密堆积二聚体覆盖的加权叠加。当$q^{L_j} = q_{B_j} = 1$ 对于$j = 0$时，该模型是一个在 RK 点加入蝴蝶移动的 Moessner–Sondhi 模型。另一种旋转不变解为$q^{L_0} = q^{L_1} = q^{L_2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$，使得$q^{L_0} q^{L_1} q_{L_2} = 1$ 且$q^{B_j} = q^{L_j}$。这种无阻挫变形产生唯一的基态，其叠加权重取决于各方向上的二聚体数目

$$|\text{GS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{M\in\text{dimer coverings}} e^{i\frac{\pi}{3} n_1(M) + i\frac{2\pi}{3} n_2(M)} |M\rangle, \tag{6}$$

其中，归一化常数 $\mathcal{N}$ 就是二聚体覆盖的数量，因为权重是虚数；n_1 表示与水平方向夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的二聚体数量，而n_2 表示与水平方向夹角为 $\frac{4\pi}{3}$ 的二聚体数量。

5 结论与展望

本文系统地确定了所有 11 种阿基米德晶格上紧密堆积二聚体覆盖的遍历性所需的充分环交换移动集合，其中 8 种晶格是非二分且受挫的。我们通过反证法举例证明了一系列移动的必要性，从而在 8 种复合晶格中的 5 种上得到了遍历移动的最小集合。这些结果可直接应用于构造具有唯一 RVB基态及拓扑序的量子二聚体模型，其拓扑序类似于 $\mathbb{Z}_2$ 伊辛规范理论 [39, 40], 中的拓扑序；原则上，这些模型可在近期量子模拟器上实现并进行测试 [13,41]。环交换移动的遍历性至关重要，因为这能确保数值模拟——通常采用虫算法 [42]，为提高效率而在任意大的环上执行环交换更新——确实是在模拟哈密顿量，而不会混合不连通的 Krylov 子空间。

根据本文针对某些正多边形铺砌给出的充分性论证，其他多边形铺砌中的四边形铺砌，其完美匹配（或极大匹配）似乎可能仅在 Rokhsar–Kivelson 环交换操作下就具有遍历性；不过，交错构型和不同绕数扇区可能仍是例外。若此结论成立，则它将涵盖所有由“de Bruijn 网格方法”生成的二维准晶 [43, 44]。不过，我们也要指出一个需要注意之处：彭罗斯铺砌中不存在完美匹配 [44], ，这违反了我们的一项基本假设。然而，在极大匹配这一集合中（它们是单体密度最低的二聚体覆盖），仅靠 Rokhsar–Kivelson 环交换操作实现遍历性似乎是合理的，不过也可能出现碎裂；正如文献 [44]所述，这种碎裂是由无法穿透的“单体膜”导致的。还可以考虑在奇数长度环上同时涉及二聚体和单体的环交换操作，并研究这类操作的遍历性。

我们指出，对于允许在对偶晶格上定义良好高度表示的晶格，证明其上紧密堆积二聚体构型的遍历性还有另一种途径 [26]。这种策略旨在证明：通过局域环交换操作，紧密堆积二聚体构型的高度总能不断降低，直至达到某个最小高度构型；对于 2-二聚体，参考文献 [45] 已采用这种方法。高度表示对于构建适当的场论也有意义。

未来的研究方向包括尝试将该构造推广至三聚体 [46] 和n-聚体，以及由于长程相互作用带来的额外约束而涉及更多元胞的环交换移动 [47]。此外，为了刻画希尔伯特空间碎片化的性质，确定当某种必要移动缺失时 Krylov 子空间的数量将是很有用的 [17]。除本文中因缺少必要的体相移动而导致的遍历性破缺，以及文献 [15], 中讨论的开放边界所导致的遍历性破缺之外，还可以探索由晶格缺陷引起的碎裂；正如将枫叶晶格视为带有缺陷的三角晶格所显示的那样，这些缺陷既可能需要额外的移动，也可能使某些现有移动变得冗余。在数学文献中，密堆积二聚体构型与对偶晶格上的广义多米诺骨牌铺砌的等价表述 [48]，以及“北极圆”现象 [49]，已在阿兹特克钻石上得到广泛研究。值得在此处考虑的复合晶格上更广泛地探索这一现象及北极曲线的收敛性。鉴于本文确立的遍历二聚体移动可转化为

随机多米诺铺砌的 Glauber动力学。

此外，可以提到的是，存在一些材料候选体系，其中本工作所考虑的若干晶格已经实现，或可能得以实现。不过需要注意，这并不意味着量子二聚体模型必然适用于研究这些材料。超导 AV_3Sb_5 (A：K、Rb、Cs）材料 [50]实现了 $(3,6,3,6)$kagome 晶格，某些铜矿物可能实现 $(3^4,6)$ 枫叶晶格， [51], 石墨烯同素异形体graphenylene 可能实现 $(4,6,12)$ 晶格，[52], 硼片可能同时实现 $(3^4,6)$ 和 $(3^3,4^2)$ 晶格， [53,54], 而 $(3,4,6,4)$ 晶格则可能由拓扑绝缘体 $Bi_{14}Rh_3I_9$ [55] 的层状堆叠实现。

最后，我们指出，本文通篇所使用的“遍历性”概念，是指量子哈密顿量中的跃迁确保量子模型的基态是所有完美匹配的叠加态。这并不意味着量子哈密顿量满足本征态热化假说意义下的遍历性，尽管已有研究表明，在限制于每个拓扑扇区时，方格晶格和三角晶格上的情况确实如此 [56]。将这些研究拓展到其他阿基米德晶格将会很有意义。

致谢

谨此感谢与 Matteo M. Wauters、Felix Flicker、Paul Fendley、Brian M. Andersen、Olav F. Syljuåsen、Roderich Moessner、Lev Vidmar、Bram Vanhecke 和 Norbert Schuch 的交流与通信。本研究得到 VILLUM FONDEN 提供的研究基金（40509）资助。

三角晶格上 T 步可分解为L 步和B 步

在本附录中，我们展示如何通过使用图中T 步可分解为L 和B 步：一种方法是使用图7 中的中间恒等式（记为 I），另一种方法则是使用下文给出的两种方法之一。在本附录中，我们用M 表示包含一个T 瓦片的二聚体构型，并将该瓦片附近的顶点称为图8中标记的顶点。若$a_2b_3, a_3a_4 \in M$（记为 II），则先执行一个B 步，随后

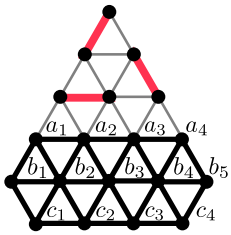

图8：T 可翻转瓦片附近标记的顶点。通过穷举瓦片下方的构形，可以证明T 总能分解为L 步和B步。

四次L 移动即可实现T 移动。根据左右对称性，$a_1a_2, a_3b_3 \in M$ 情形（记为 III）可通过反向执行同一组移动来实现。下文将证明，其余所有可能情形都可以通过若干额外的L移动转化为 I、II 或 III 之一。

1. $a_2b_2, a_3b_4 \in M$：b_3c_2 或b_3c_3 必须有一个位于M中。两种情况经两次L移动后都会化为 I。

2. $a_2b_2, a_3b_3 \in M$：一次L移动即可将其变为 I。

3. $a_3a_4, a_2b_2 \in M$:

(a) $b_3b_4 \in M$：两个L移动可将其变为 I。(b) $b_3c_2 \in M$：一次L 移动可将其变为 II。(c) $b_3c_3 \in M$。要么是$b_4b_5 \in M$，要么是$b_4c_4 \in M$。两种情况下，三次L移动都可将其变为 I。

4. $a_1a_2, a_3a_4 \in M$:

(a) $b_2b_3 \in M$：一次L移动可将其变为 II。(b) $b_3c_2 \in M$：要么是$b_2b_1 \in M$，要么是$b_2c_1 \in M$。两种情况下，两次L移动都可将其变为 II。(c) 其余两种情形与 (a) 或 (b) 左右对称，因此最多经过两次L 移动即可将其变为 III。

5. 其余情况均与上述某一种情况左右对称。

B 环交换移动的必要性

这里给出一些平移不变二聚体构型的例子，它们只有一种或数量有限的可翻转瓦片。这些例子（通过反证）表明，图 2 中列出的若干环交换项确实是必不可少的。示例构型列于图 9–14。

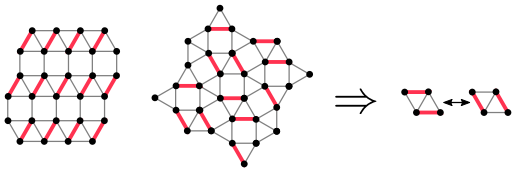

图9：在晶格 $(3^3, 4^2)$ 和 $(3^2, 4, 3, 4)$ 上，柱状参考构型仅含有此类可翻转瓦片，这表明菱形环交换移动是必要的。

C kagome 晶格上的充分性证明（显式）

为了明确展示第 2.1 节引理 2.2 和第 2.2 节引理的证明，我们在此以 kagome 晶格为例，给出一个穷举证明。我们指出，这种穷举策略可以直接推广到诸如枫叶晶格这类可能更复杂的情形。不过，对于枫叶晶格，除了 6 叉树形状方面增加的组合复杂性之外，还必须使用一系列复合环交换移动（即这些移动总能分解为图 2 (viii) 中的不可约移动）。正如正文所述，文献 [29–31] 提供了关于 $(3,6,3,6)$ kagome 晶格和 $(3,12^2)$ 星形晶格的其他简洁遍历性论证。

在 kagome 晶格上有两种不同的面：六边形和三角形。由一个环（不包围其他环）构成的六叉树中，相应的节点最多分别有 6 个和 3 个子节点，因此六叉树底部附近的形状有多种可能，下面将逐一列举。重申图 2(vii) 中所述的结果，一个充分

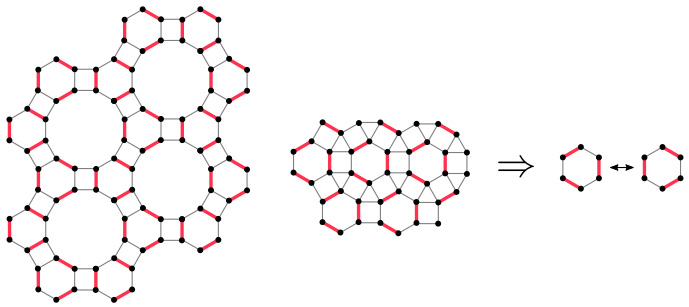

图 10：晶格上六边形环交换移动的必要性 $(4,6,12)$，以及$(3,4,6,4)$，这可由仅有此类瓦片可翻转的参考构型推知。对于 $(3,4,6,4)$ 晶格，正方形环交换移动（图6）的必要性也可由此参考构型推知，因为仅使用六边形环交换移动无法覆盖任何三角形键。换言之，翻转六边形并不能使其他瓦片变得可翻转，除非使用正方形环交换移动。

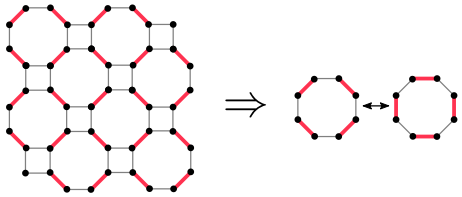

图 11： $(4,8^2)$ 晶格上八边形环交换移动的必要性，这可由仅有此类瓦片可翻转的参考构型推知。

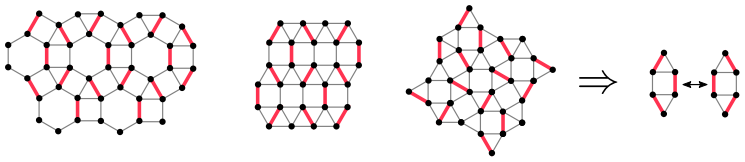

图 12：晶格$(3,4,6,4)$、 $(3^3,4^2)$和 $(3^2,4,3,4)$上菱形环交换移动的必要性，这可由仅有此类瓦片可翻转的参考构型推知。

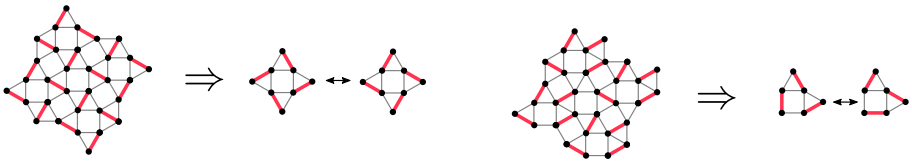

图 13：剩余两种充分环交换移动的必要性$(3^2,4,3,4)$ 晶格。左：参考构型中只有这种类型的瓦片可以翻转，这意味着星形环交换移动是必要的。右：参考构型中只有椅形瓦片和菱形瓦片可以翻转，这意味着椅形环交换移动是必要的。翻转菱形瓦片不会使椅形以外的任何元胞变得可翻转，因此结合图 9，即可推出椅形移动的必要性。

kagome 晶格上的一组不可约环交换移动，本文将其标记为 H_1-H_8，，如图 15 所示。

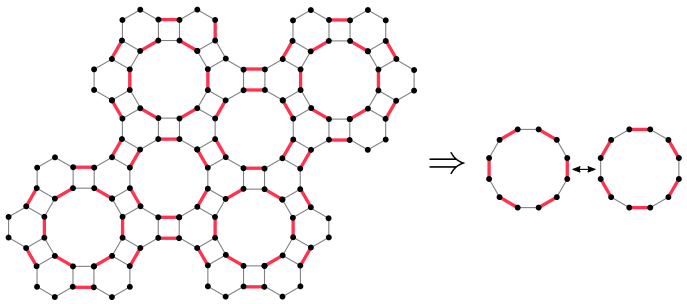

图14：如参考构型所示，只有十二边形和正方形可以翻转，这表明 $(4,6,12)$ 晶格上十二边形环交换操作的必要性。翻转正方形不会使任何相邻元胞变得可翻转，因此结合图 6，即可推出十二边形操作的必要性。

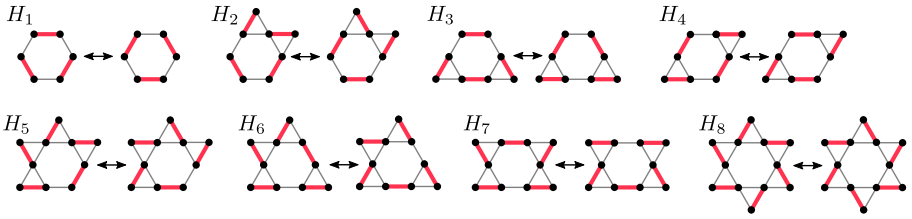

图15：对 $\pi/3$ 和 $2\pi/3$ 进行旋转后，这些环交换移动足以实现 kagome 晶格上完美匹配的遍历性。

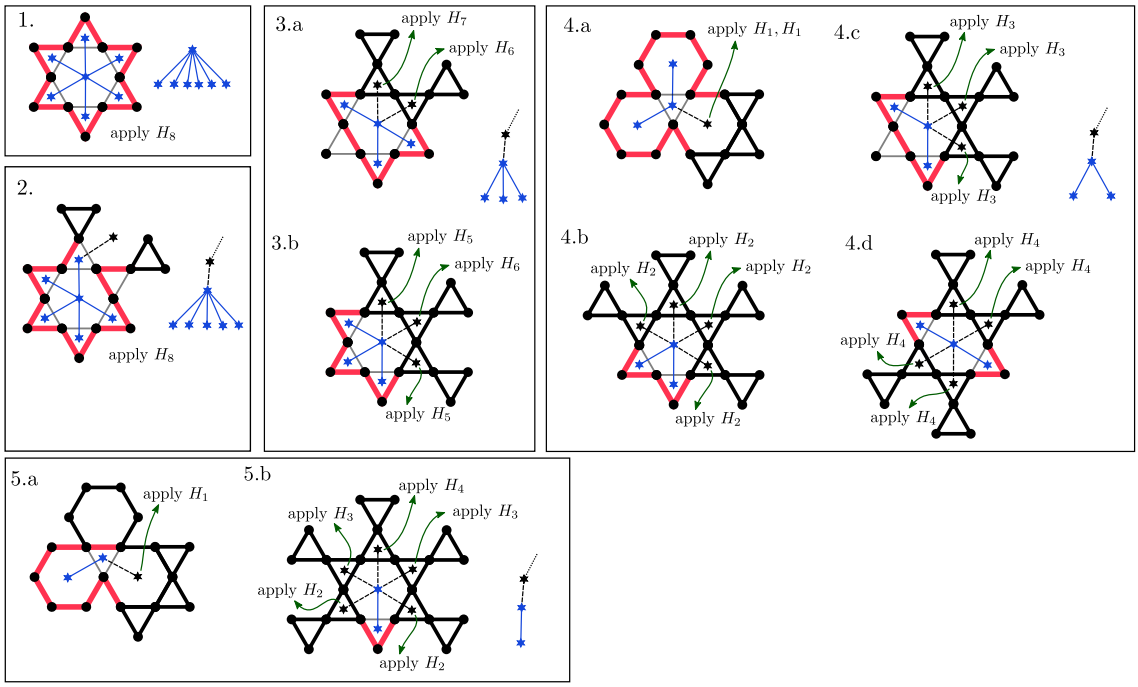

图16：“6叉”树底部附近 $M_1 \cup M_2$ 中可能的环形穷举情况，每种情况均显示在右侧。黑色星号（和黑色虚线）标出节点 A（深度 $h-1$）的父节点可能所在的位置。对于存在多种可能性的情况，绿色箭头标出了缩短“6叉”树所需的操作（但没有标在应当施加该操作的面上）。

证明。 为了通过穷举证明2.1引理在 kagome 晶格上的成立性，我们枚举六叉树底部附近所有可能的形状（将根节点固定在一个六边形面上后），并说明在所有情况下，反复应用图15中的不可约环交换项都能缩短这棵树。所有情况的示意总结见图16。在下面的列表中，我们将A 称为深度$h-1$ 处的节点，它是树底部一个深度为h的节点的父节点。

1. A有 6 个子节点。这种情况下，A 必须位于六边形面的中心。由于任何节点的子节点数都不能超过 6，A不能有父节点，因此可以应用H_8 来截短这棵树。2. A有 4 个子节点（晶格不允许出现 5 个子节点的情况）。这个顶点必须位于六边形面的中心。应用H_8 来缩短这棵树。3. A有 3 个子节点。这个顶点必须位于六边形面的中心（若将其放在三角形面上，会产生一个长度为 15 的环；而两个二聚体构型之间产生的任何环长度都必须为偶数，因此这与初始假设矛盾）。根据A的子节点所在位置，总能应用H_5，H_6，或H_7。4. A有 2 个子节点，可以位于六边形面或三角形面的中心。若其位于三角形面的中心，可以在两个相邻六边形上应用H_1 。若其位于六边形面的中心，则总能应用H_2，H_3，或H_4。5. A有 1 个子节点，可以位于六边形面或三角形面的中心。若其位于三角形面的中心，可以应用H_1。若其位于六边形面的中心，则总能应用H_2，H_3，或H_4。

这一迭代过程持续进行，直到在六边形面的根节点处终止；此时可以应用H_1-H_8 中的任一操作，将C 变换为一组平凡环。 □

证明。 引理的显式证明2.2 采用归纳法，按照环 C 上所含顶点的数量进行归纳，其中环内仅包围平凡环；证明遵循第2.4节概述的思路。我们按照图C 对环内的顶点进行标记，如图17所示。穷举二聚体构型后

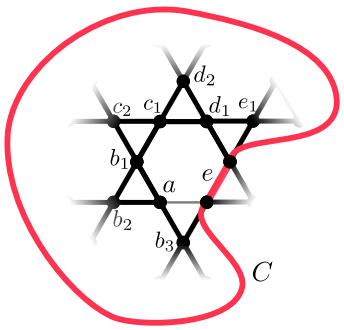

图 17：C 是$M_1 \cup M_2$，中的一个环，其中e 是来自M_1，的二聚体；该环仅包围平凡环，且有一个顶点a 与环相邻。通过穷举a附近的二聚体构型，可以证明C 总能扩展至包含a。

通过穷举顶点a 附近的情形，可以证明H_1-H_7 中的某个操作总是可以应用，从而将a 纳入C ，进而增加围住C的环上的顶点数量：

1. 如果 $ab_1 \in M_1$:

(a) 如果 $c_1c_2 \in M_1$：则可以应用 $d_1d_2 \in M_1$ 和 H_2 ，或者应用 $d_1e_1 \in M_1$ 和 H_3 。

(b) 否则，如果 $c_1d_1 \in M_1$：应用 H_1。(c) 否则，
如果 $c_1d_2 \in M_1$，那么 $d_1e_1 \in M_1$：应用 H_2。

2. 否则，若 $ab_2 \in M_1$:

(a) 若 $b_1c_2 \in M_1$：则可应用 $c_1d_2 \in M_1$ （随后 $d_1e_1 \in M_1$）和 H_5，或者应用 $c_1d_1 \in M_1$ 和 H_2。(b) 否则，若 $b_1c_1 \in M_1$：则可应用 $d_1d_2 \in M_1$ 和 H_3，或者应用 $d_1e_1 \in M_1$ 和 H_4。

3. 否则，若 $ab_3 \in M_1$:

(a) 若 $b_1b_2 \in M_1$：若 $c_1c_2 \in M_1$，则可应用 $d_1d_2 \in M_1$ 和 H_5，或者应用 $d_1e_1 \in M_1$ 和 H_6。否则，若 $c_1d_2 \in M_1$ （随后 $d_1e_1 \in M_1$），则应用 H_7。否则，若 $c_1d_1 \in M_1$：应用 H_2。(b) 否则，若 $b_1c_2 \in M_1$：则可应用 $c_1d_2 \in M_1$ （随后 $d_1e_1 \in M_1$）和 H_6，或者应用 $c_1d_1 \in M_1$ 和 H_3。(c) 否则，若 $b_1c_1 \in M_1$：则可应用 $d_1d_2 \in M_1$ 和 H_4，或者应用 $d_1e_1 \in M_1$ 和 H_3。

□

参考文献

[1] P. Kasteleyn, 《晶格上二聚体的统计：I. 正方晶格上的二聚体排列数》, Physica 27(12), 1209 (1961), doi:https://doi.org/10.1016/0031- 8914(61)90063-5.[2] H. N. V. Temperley 和 M. E. Fisher, 《统计力学中的二聚体问题——一个精确结果》, The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics 6(68), 1061 (1961), doi:10.1080/14786436108243366.[3] F. Y. WU, 《二维晶格上的二聚体》, Int. J. Mod. Phys. A 20(32), 5357 (2006), doi:10.1142/S0217979206036478.[4] D. S. Rokhsar 和 S. A. Kivelson, 《超导性与量子硬核二聚体气体》, 《物理评论快报》61, 2376 (1988), doi:10.1103/PhysRevLett.61.2376.[5]R. Moessner 和 S. L. Sondhi, 《三角晶格量子二聚体模型中的共振价键相》, 《物理评论快报》86, 1881 (2001), doi:10.1103/PhysRevLett.86.1881.[6] P. W. Anderson, 《共振价键：一种新型绝缘体？》, Mater. Res. Bull. 8(2), 153 (1973), doi:https://doi.org/10.1016/0025-5408(73)90167-0.[7] P. W. Anderson, 《La_2CuO_4 中的共振价键态与超导性》, Science 235(4793), 1196 (1987), doi:10.1126/science.235.4793.1196.[8] P. Schiffer 和 C. Nisoli, 《人工自旋冰：未来发展方向》, Applied Physics Letters 118(11), 110501 (2021), doi:10.1063/5.0044790.

[9] R. F. Wang, C. Nisoli, R. S. Freitas, J. Li, W. McConville, B. J. Cooley, M. S. Lund, N. Samarth, C. Leighton, V. H. Crespi 和 P. Schiffer, 《纳米尺度铁磁岛构成的几何受挫晶格中的人工"自旋冰"》, 《自然》439, 303 (2006), doi:10.1038/nature04447.[10] U.-J. Wiese, 《超冷量子气体与晶格系统：晶格规范理论的量子模拟》, 《物理年鉴》525(10-11), 777 (2013), doi:https://doi.org/10.1002/andp.201300104.[11] A. W. Glaetzle, M. Dalmonte, R. Nath, I. Rousochatzakis, R. Moessner 和 P. Zoller, 《利用里德堡原子的量子自旋冰与二聚体模型》, 《物理评论X》4, 041037 (2014), doi:10.1103/PhysRevX.4.041037.[12] A. Celi, B. Vermersch, O. Viyuela, H. Pichler, M. D. Lukin 和 P. Zoller, 《可配置里德堡原子阵列中涌现的二维规范理论》, 《物理评论X》10, 021057 (2020), doi:10.1103/PhysRevX.10.021057.[13] G. Semeghini, H. Levine, A. Keesling, S. Ebadi, T. T. Wang, D. Bluvstein, R. Verresen, H. Pichler, M. Kalinowski, R. Samajdar, A. Omran, S. Sachdev 等, 《在可编程量子模拟器上探测拓扑自旋液体》, Science 374(6572), 1242 (2021), doi:10.1126/science.abi8794.[14]R. Samajdar, W. W. Ho, H. Pichler, M. D. Lukin 和 S. Sachdev, 《kagome 晶格上里德堡原子的量子相》, 《美国国家科学院院刊》118(4), e2015785118 (2021), doi:10.1073/pnas.2015785118.[15] Z. Zhang 和 H. S. Røising, 《无挫折完全填充环模型》, 《物理学杂志A：数学》56(19), 194001 (2023), doi:10.1088/1751-8121/acc76f.[16] A. Khudorozhkov, A. Tiwari, C. Chamon 和 T. Neupert, 《具有子系统对称性的二维量子自旋系统中的希尔伯特空间碎片化》, 《SciPost物理》13, 098 (2022), doi:10.21468/SciPostPhys.13.4.098.[17] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich, 《希尔伯特空间碎片化与交换子代数》, 《物理评论X》12, 011050 (2022), doi:10.1103/PhysRevX.12.011050.[18] B. Buˇca, 《非时序关联晶体与碎裂》, 《物理评论快报》128, 100601 (2022), doi:10.1103/PhysRevLett.128.100601.[19] Z. Zhang, A. Ahmadain 和 I. Klich, 《从有界纠缠到广延纠缠的新型量子相变》, 《美国国家科学院院刊》114(20), 5142 (2017), doi:10.1073/pnas.1702029114.[20] O. Salberger, T. Udagawa, Z. Zhang, H. Katsura, I. Klich 和 V. Korepin, 《具有广延纠缠的变形弗雷德金自旋链》, 《统计力学：理论与实验》2017(6), 063103 (2017), doi:10.1088/1742-5468/aa6b1f.[21] Z. Zhang 和 I. Klich, 《熵、能隙与弗雷德金自旋链的多参数变形》, 《物理学杂志A：数学与理论》50(42), 425201 (2017), doi:10.1088/1751-8121/aa866e.[22]L. Causer, J. P. Garrahan 和 A. Lamacraft, 《经典随机弗雷德金链中的慢动力学与大偏差》, 《物理评论E》106, 014128 (2022), doi:10.1103/PhysRevE.106.014128.[23] Z. Zhang 和 I. Klich, 《量子彩色菱形铺砌与纠缠相变》, arXiv 电子预印本 arXiv:2210.01098 (2022), doi:10.48550/arXiv.2210.01098, 2210.01098.

[24] Z. Zhang 和 I. Klich，来自量子六顶点和十九顶点模型的耦合 *Fredkin* 链与 *Motzkin* 链，arXiv 预印本 arXiv: 2210 03038 2022 10 48550/ 2210 03038,。（），doi：。arXiv。。。。2210 03038

[25] C. Kenyon 和 E. Rémila，三角晶格上的完美匹配，《离散数学》**152**（1），191（1996年），doi：https://doi.org/10。1016/0012-365X(94)00304-2。

[26] C. L. Henley，具有高度表示的二聚体覆盖的弛豫时间，《统计物理学杂志》**89**(3-4), 483（1997年），doi：10.1007/BF02765532，cond-mat/9607222。

[27] M. Freedman、C. Nayak 和 K. Shtengel，含环交换项的扩展*Hubbard*模型：通往非阿贝尔拓扑相的途径，《物理评论快报》**94**，066401（2005年），doi：10.1103/PhysRevLett.94.066401。

[28]C. M. Herdman 和 K. B. Whaley，三角晶格量子二聚体模型中的环凝聚，《New J. Phys.》**13**(8), 085001（2011年），doi：10.1088/1367-2630/13/8/085001。

[29] G. Misguich、D. Serban 和 V. Pasquier，*Kagome* 晶格上的量子二聚体模型：可解的二聚体液体与伊辛规范理论，《物理评论快报》**89**, 137202（2002年），doi：10.1103/PhysRevLett.89.137202。

[30] C. Zeng 和 V. Elser，自旋-*1/2kagomé* 海森堡反铁磁体的量子二聚体计算，Physical Review B**51**, 8318（1995年），doi：10.1103/PhysRevB.51.8318。

[31] J. Ove Fjaerestad，星形晶格上的经典与量子二聚体，arXiv 电子预印本 arXiv:0811.3789（2008年），doi：10.48550/arXiv.0811.3789，0811.3789。

[32] A. H. MacDonald、S. M. Girvin 和 D. Yoshioka，t-U *Hubbard*模型的展开，Physical Review B **37**，9753（1988年），doi：10.1103/PhysRevB.37.9753。

[33] R. Moessner 和 K. S. Raman，量子二聚体模型，第437–479页，施普林格，柏林海德堡，柏林，海德堡，ISBN 978-3-642-10589-0，doi：10.1007/978-3-642-10589-0_17 （2011年）。

[34]E. Fradkin、D. A. Huse、R. Moessner、V. Oganesyan 和 S. L. Sondhi，二分*Rokhsar–Kivelson*点与康托尔去禁闭，《物理评论B》**69**，224415（2004），doi：10.1103/PhysRevB.69.224415。

[35]O. F. Syljuåsen，方格晶格量子二聚体模型的plaquette相：量子蒙特卡罗计算，Physical Review B 73, 245105 (2006)，doi:10.1103/PhysRevB.73.245105.[36] P. Fendley，R. Moessner 和 S. L. Sondhi，三角晶格上的经典二聚体，Physical Review B 66, 214513 (2002)，doi:10.1103/PhysRevB.66.214513.[37]M. E. Fisher 和 J. Stephenson，《平面晶格上二聚体的统计力学》。II. 二聚体关联与单体，Phys. Rev. 132, 1411 (1963)，doi:10.1103/PhysRev.132.1411.[38] S. S. Jahromi 和 R. Orús，红宝石晶格上的拓扑 $\mathbb{Z}_2$ 共振价键量子自旋液体，Physical Review B 101, 115114 (2020)，doi:10.1103/PhysRevB.101.115114.[39]F. J. Wegner，广义伊辛模型中的对偶性与无局域序参量的相变，《数学物理学杂志》12(10), 2259 (1971)，doi:10.1063/1.1665530.

[40] E. Fradkin, 《凝聚态物理场论》, 剑桥大学出版社, 第2版, doi:10.1017/CBO9781139015509 (2013).[41] L. Lumia, P. Torta, G. B. Mbeng, G. E. Santoro, E. Ercolessi, M. Burrello 和 M. M. Wauters, 近期量子模拟器上的二维 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论: 变分量子优化、禁闭与拓扑序, PRX Quantum 3, 020320 (2022), doi:10.1103/PRXQuantum.3.020320.[42]H. G. Evertz, 环算法, Advances in Physics 52(1), 1 (2003), doi:10.1080/0001873021000049195.[43] N. de Bruijn, 平面彭罗斯非周期铺砌的代数理论。I, Indagationes Mathematicae (Proceedings) 84(1), 39 (1981), doi:https://doi.org/10.1016/1385- 7258(81)90016-0.[44] F. Flicker、S. H. Simon 和 S. A. Parameswaran, 彭罗斯铺砌上的经典二聚体, 《物理评论X》10, 011005 (2020), doi:10.1103/PhysRevX.10.011005.[45] M. Hermele、M. P. A. Fisher 和 L. Balents, 烧绿石光子: S (1) 三维受挫磁体中的 U 自旋液体, Physical Review B 69, 064404 (2004), doi:10.1103/PhysRevB.69.064404.[46]S. Jandura、M. Iqbal 和 N. Schuch, kagome 晶格上的量子三聚体模型与拓扑SU(3)自旋液体, Phys. Rev. Res. 2, 033382 (2020), doi:10.1103/PhysRevResearch.2.033382.[47] J. Colbois、B. Vanhecke、L. Vanderstraeten、A. Smerald、F. Verstraete 和 F. Mila, kagome 晶格J_1–J_2–J_3 伊辛反铁磁体中的简并部分解除, Physical Review B 106, 174403 (2022), doi:10.1103/PhysRevB.106.174403.[48] W. P. Thurston, 康威铺砌群, Amer. Math. Monthly 97(8), 757 (1990).[49] W. Jockusch、J. Propp 和 P. Shor, 随机多米诺铺砌与北极圆定理, arXiv Mathematics e-prints math/9801068(1998), doi:10.48550/arXiv.math/9801068, math/9801068.[50] B. R. Ortiz、L. C. Gomes、J. R. Morey、M. Winiarski、M. Bordelon、J. S. Mangum、I. W. H. Oswald、J. A. Rodriguez-Rivera、J. R. Neilson、S. D. Wilson、E. Ertekin、T. M. McQueen 等, 新型笼目原型材料: KV_3Sb_5、RbV_3Sb_5, 和 CsV_3Sb_5, 的发现, Phys. Rev. Materials 3, 094407 (2019), doi:10.1103/PhysRevMaterials.3.094407.[51] T. Fennell、J. O. Piatek、R. A. Stephenson、G. J. Nilsen 和 H. M. Rønnow, 蓝铜矾: 一种 $S = 1/2$ 枫叶晶格反铁磁体? , J. Phys. Condens. Matter 23(16), 164201 (2011), doi:10.1088/0953-8984/23/16/164201.[52] Y.-X. Yu, 石墨烯烯: 一种具有高迁移率和高存储能力的锂离子电池潜在负极材料, J. Mater. Chem. A 1, 13559 (2013), doi:10.1039/C3TA12639K.[53] K. C. Lau 和 R. Pandey, 原子级设计的二维硼片的稳定性与电子性质, J. Phys. Chem. C 111(7), 2906 (2007), doi:10.1021/jp066719w.[54] H. Tang 和 S. Ismail-Beigi, 第一性原理研究硼片中的自掺杂: 金属硼化物纳米结构的结构设计途径, Physical Review B 80, 134113 (2009), doi:10.1103/PhysRevB.80.134113.

[55] B. Rasche、A. Isaeva、M. Ruck、S. Borisenko、V. Zabolotnyy、B. Büchner、K. Koepernik、C. Ortix、M. Richter 和 J. van den Brink，由铋基石墨烯片类似物构成的堆叠式拓扑绝缘体，Nature Materials**12**，422（2013年），doi：10.1038/nmat3570。

[56] Z. Lan 和 S. Powell，量子二聚体模型中的本征态热化假说，Physical Review B **96**，115140（2017年），doi：10.1103/PhysRevB.96.115140。