arXiv:2303.04824v1 [cond-mat.quant-gas] 8 Mar 2023

二元凝聚态中的解混动力学热抑制

Vijay Pal Singh,[1,2] Luigi Amico,[1,3,4] 和 Ludwig Mathey[2,5]1 *Quantum Research Centre, Technology Innovation Institute, Abu Dhabi, UAE*
[2] *Zentrum für Optische Quantentechnologien and Institut für Laserphysik, Universität Hamburg, 22761 Hamburg, Germany*[3] *INFN-Sezione di Catania, Via S. Sofia 64, 95127 Catania, Italy*[4] *Centre for Quantum Technologies, National University of Singapore 117543, Singapore*[5] *The Hamburg Centre for Ultrafast Imaging, Luruper Chaussee 149, Hamburg 22761, Germany*（日期：2023年3月10日）

我们使用经典场动力学研究了二元二维（2D）玻色超流体中的解混动力学。通过淬火组分间相互作用参数，我们根据系统温度和淬火参数确定了强分离区和弱分离区。在强分离区，我们的结果与二元流体的惯性流体动力学畴生长定律一致，并且在零温度下发现了结构因子的 Porod 标度律。在弱分离区，热涨落会改变结构因子的畴生长定律和 Porod尾部。在超流体转变温度附近，标度动力学趋近于二维守恒场的扩散生长定律。随后，我们分析了盒状云中的解混动力学。在低淬火条件下，我们发现了由边界条件决定的独特畴动力学。除此之外，该动力学在定性上与具有周期性边界条件的系统相似。

I. 引言

当水和油等不相溶流体混合时，它们会分离成两个不同的相[1]。这种相分离现象在科学领域已得到充分确立，并对重要技术应用具有相关意义 [2–4]。在物理学中，相分离会发生于多种凝聚态系统中，例如聚合物、流体混合物、凝胶、铁电体、膜、超流体、超导体等。

根据相序动力学的经典理论，畴生长遵循特征性的幂律行为 $L(t) \sim t^{\eta}$，其中 L 是平均畴尺寸，η 是标度指数。该动力学具有普适性，即某个可观测量的时间演化完全由 $L(t)$决定。实际上，可通过等时关联函数 $C(\mathbf{r}', t) = \langle \phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t)\phi(\mathbf{r} t)\rangle$来检验这一标度假设，其中$\phi(\mathbf{r})$是表征系统动力学演化的序参量，$\langle ..\rangle$ 表示统计平均。$C(\mathbf{r} t)$的傅里叶变换即结构因子 $S(\mathbf{k} t) = \langle \phi_{\mathbf{k}}(t)\phi_{-\mathbf{k}}(t)\rangle$，其中 $\phi_{\mathbf{k}}$ 是 $\phi(\mathbf{r})$的傅里叶变换。根据量纲分析，结构因子满足标度关系$S(k,t) = L^d f(kL(t))$ [5],，其中 d为空间维数，标度函数 $f(q)$与时间无关。由于存在畴壁，$f(q)$在较大的 q处呈现幂律尾部 $f(q) \sim q^{-(d+1)}$，这被称为 Porod 定律 [6]。标度理论对畴粗化提出了各种幂律，这些幂律描述特征长度尺度随时间的变化。二维（2D）守恒场的畴生长定律为 $L \sim t^{1/3}$，它刻画了序参量 [5, 7, 8] 的扩散输运。在二元流体中，黏性流与惯性流动之间的竞争形成两个生长区间：黏性流体动力学区间（$L \sim t$） [9] 和惯性流体动力学区间（$L \sim t^{2/3}$） [10]。黏性流体动力学区间已得到实验和模拟的证实 [5]。然而，由于在经典流体中黏性流不可忽略，惯性流体动力学区间至今尚未被观测到。

超冷原子已成为研究多组分超流体动力学的理想平台，为研究多种现象奠定了基础，例如二元流体中的混溶-不混溶转变[11–14]。实验上，利用不同超精细能级或不同同位素的玻色-玻色混合物，已被用于研究相分离 [15–18], 、非线性动力学激发 [19–22], 、孤子 [23, 24], 以及汤斯孤子[25]。在淬火不混溶混合物中，人们观察到了畴形成和粗化 [26]。在相关提议之后 [27], ，拉比耦合玻色混合物 [28]被用于实验检验基布尔-祖雷克机制 [29]。理论上，许多研究报道了超流体系统中的动力学标度律 [30–39]以及动力学不稳定性 [40–46]。研究指出，热涨落会抑制非零温度下的相分离 [47–49]。二元二维超流体中的惯性流体动力学区间也已得到理论研究 [34, 50]。然而，动力学标度的许多特征（例如热涨落的作用）仍有待探索。

本文研究了热涨落如何影响二元二维玻色超流体中粗化的动力学标度。为此，我们采用半经典场模拟，研究非零温度下的分相动力学；这一过程通过淬火种间相互作用参数触发。我们的关键结果是揭示温度和淬火参数如何改变畴生长的特征标度。淬火与热能的相互作用导致了两个相分离区间。第一个是强分离区，出现在低温和高淬火条件下，此时结构因子的 Porod 标度律 $S(k) \sim k^{-3}$ 成立，而畴

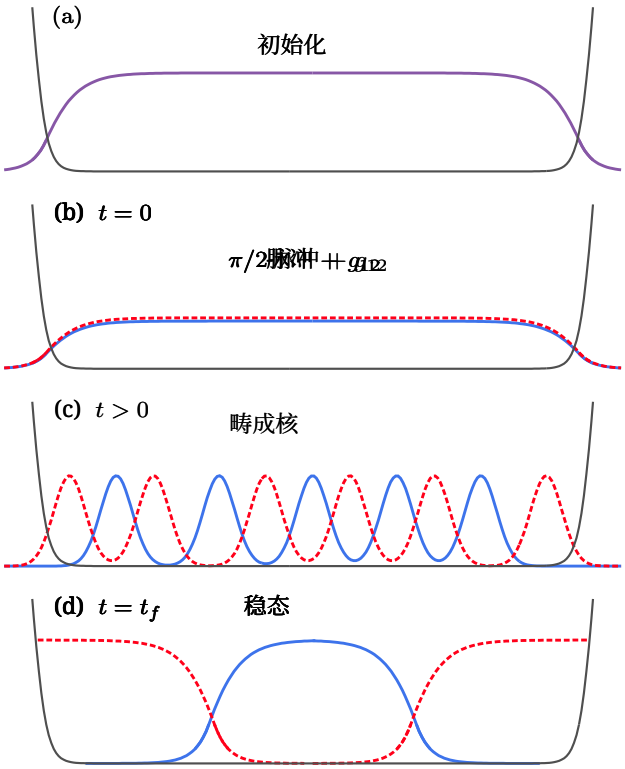

图1. 均匀云团被限制在盒式势中时的淬火方案示意图。(a) 初始态为温度为 T、总密度为 n 的热态。(b) 我们施加一个 $\pi/2$ 脉冲，得到组分1（虚线）和组分2（实线）的均匀叠加。随后，我们将组分间相互作用 g_{12} 淬火至分相区，从而形成由两种组分构成的动力学不稳定混合物。(c) 随着组分1和组分2的区域成核，系统发生时间演化。(d) 在最终时刻 t_f 进行长时间演化后，系统达到稳态：组分2位于中心，组分1则在其周围形成壳层。

粗化遵循二元流体的惯性流体动力学生长定律，即 $L(t) \sim t^{2/3}$。另一个区间是高温下的弱分离区，此时热涨落会同时改变畴生长定律和结构因子的 Porod尾部。在接近超流体临界温度时，畴粗化趋近于二维守恒场的扩散生长定律（$L \sim t^{1/3}$），结构因子的 Porod尾部则按接近 $S(k) \sim k^{-1}$ 的形式标度。此外，我们还考察了盒状云中的分相动力学，发现盒子对称性与动力学之间存在引人关注的相互作用。具体而言，对于低淬火和小尺寸云团，当其尺寸与自旋愈合长度相当时，由于边界条件的作用，分相通过形成规则图案的畴来实现。对于高淬火和大尺寸云团，我们恢复了与具有周期性边界条件的系统相似的动力学。

II. 系统与方法

我们考虑一团 ^{87}处于两种不同超精细态的铷原子 $|F = 1, m_F = 0\rangle$ 和 $|F = 2,\ m_F = 0\rangle$，这受到相关实验的启发 [51, 52]。因此，两种组分的质量相同（$m_1 = m_2 = m$），且组分内散射长度为 $a_{11}/a_{\mathrm{B}} = 100.86$和 $a_{22}/a_{\mathrm{B}} = 94.58$ [53]，其中 a_{B} 为玻尔半径。组分间散射长度为 $a_{12}/a_{\mathrm{B}} = 98.9$ [54]，由此得到参数 $\alpha = 1.012$，其定义如下

$$\alpha \equiv a_{12}/\sqrt{a_{11}a_{22}}. \tag{1}$$

由于 α 略高于1，两种组分仅弱可混溶，热涨落在解混动力学中发挥着显著作用，正如我们将在下文展示的那样。我们用如下哈密顿量描述该系统

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12}, \tag{2}$$

with

$$\hat{H}_a = \int d\mathbf{r}\Big[\Big(\frac{\hbar^2}{2m_a}\nabla\hat{\psi}_a^\dagger(\mathbf{r})\cdot\nabla\hat{\psi}_a(\mathbf{r}) + \frac{g_{aa}}{2}\hat{\psi}_a^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_a^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_a(\mathbf{r})\hat{\psi}_a(\mathbf{r})\Big)\Big], \tag{3}$$

and

$$\hat{H}_{12} = \int d\mathbf{r}\Big[g_{12}\hat{\psi}_1^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_2^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_2(\mathbf{r})\hat{\psi}_1(\mathbf{r})\Big], \tag{4}$$

其中 $a = 1$，2表示两种组分，$\hat{}\,\psi_a$ ($\hat{}\,\psi_a^\dagger$)分别为相应的湮灭（产生）算符。组分内相互作用 g_{aa} 和组分间相互作用g_{12} 分别为

$$g_{aa} = \frac{2\sqrt{2\pi}\hbar^2}{m}\frac{a_{aa}}{\ell_z} \quad \text{and} \quad g_{12} = \frac{2\sqrt{2\pi}\hbar^2}{m}\frac{a_{12}}{\ell_z}. \tag{5}$$

$\ell_z = \sqrt{\hbar/\left(m\omega_z\right)}$ 是横向囚禁势的谐振子长度，其中 ω_z 是囚禁频率。对于含有大量原子的凝聚体，我们将 ψ_a 替换为复数 ψ_a。利用式2 可得到耦合运动方程

$$i\hbar\partial_t\psi_1 = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g_{11}n_1 + g_{12}n_2\Big)\psi_1, \tag{6}$$

$$i\hbar\partial_t\psi_2 = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g_{22}n_2 + g_{12}n_1\Big)\psi_2, \tag{7}$$

该方程控制着二元凝聚体的动力学。 $n_a = |\psi_a|^2$ 是密度。该系统具有两个集体模激发分支 [55]

$$E_{k,\pm}^2 = \frac{(E_1^2 + E_2^2)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1^2 - E_2^2)^2 + 16\epsilon_k^2 n_1 n_2 g_{12}^2}, \tag{8}$$

其中， $E_a = \sqrt{\epsilon_k(\epsilon_k + 2g_{aa}n_a)}$为单组分玻戈留波夫谱，且 $\epsilon_k = \hbar^2k^2/(2m)$。耦合 g_{12} 导致形成杂化分支$E_{k,\pm}$。这种杂化的一个直接后果是，当 $\alpha = 1$ （或等价地，当 $g_{12} = \sqrt{g_{11}g_{22}}$）时，$E_{k,-}$ 的低动量部分会消失；而当 $\alpha > 1$时，该部分变为虚数。

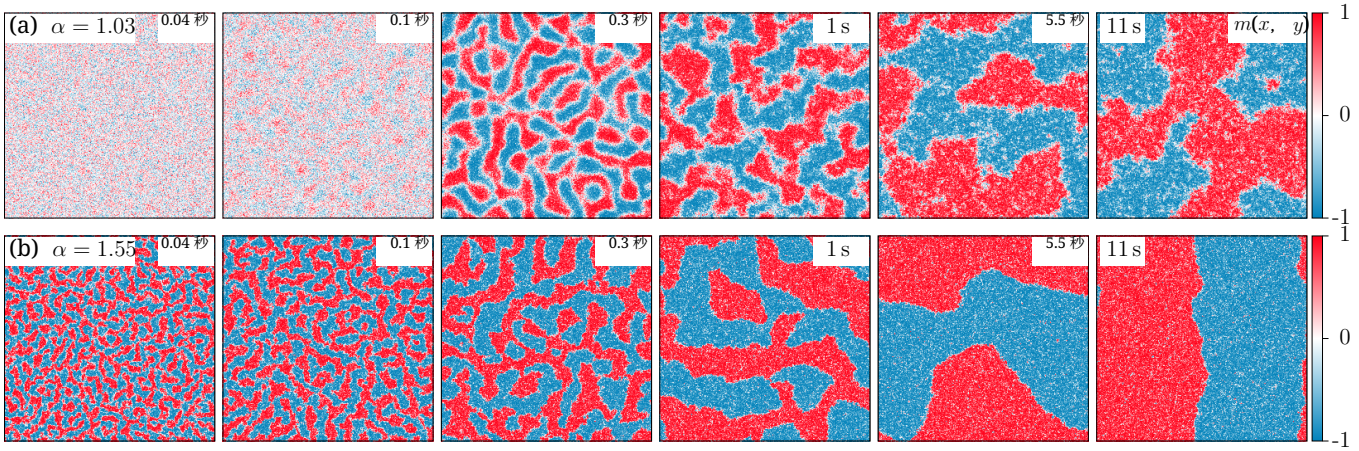

图 2. 畴成核与粗化动力学。单条轨迹的双组分密度不平衡度 $m(x,\ y)$ 随时间的演化，其中 $\alpha = 1.03$ （上排）和 1.55（下排）展示了两个组分（红色和蓝色）的畴成核及其粗化动力学。每个面板的空间尺寸为 $256 \times 256\,\mu\mathrm{m}^2$。

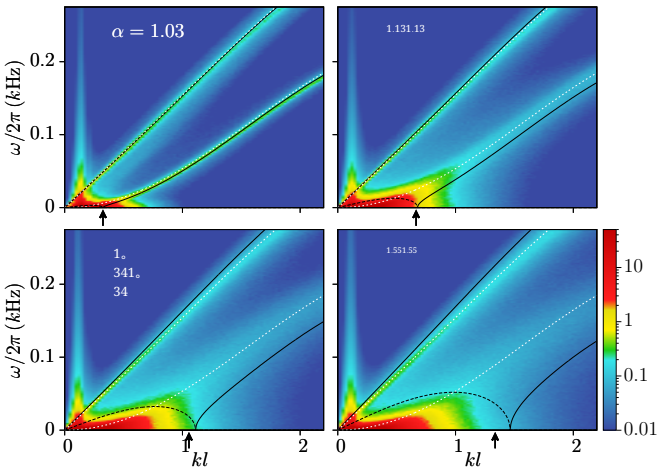

图 3. 非平衡激发谱。动态结构因子 $S_1(\mathbf{k}\ \omega)$ 随波矢 $\hat{}\mathbf{e}_x$ 和频率 ω 的变化，取值为 $\alpha = 1.03$，1.13，1.34 和 1.55。黑色实线为式 $E_{k,\ \pm}$ 8 的 Bogoliubov谱，黑色虚线表示 $E_{k,\ -}$ 的虚部。箭头标示了根据式 9 得到的不稳定模动量范围。白色点线对应于相分离云的谱；详见正文。

当 α 大于1时，这会导致不稳定模的产生，从而引起两种组分解混。值得注意的是，在零温度下，$\alpha_c = 1$ 是区分可混溶（$\alpha < \alpha_c$ ）态和不可混溶（$\alpha > \alpha_c$）态的量子临界点 [13]。将$E_{k,\ -} = 0$设为零，即可确定不稳定模的范围，得到

$$k_0^2 = \frac{1}{\xi_1^2\xi_2^2}\left[\sqrt{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + 4\alpha^2\xi_1^2\xi_2^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2)\right], \quad (9)$$

其中 $\xi_a = \hbar/\sqrt{2mg_{aa}n_a}$ 是单组分愈合长度。 k_0 在 $\alpha = 1$ 时消失，并且在 $\alpha > 1$时随 α 增大而增大。波长 $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ 和寿命 $\tau = \hbar/E_{k_0,\ -}$ 可用于估算畴出现的长度和时间尺度。

我们采用文献 [56, 57]中的经典场方法研究相分离动力学。数值模拟中，我们将空间离散化为尺寸为 $N_x \times N_y$ 、离散化长度为 $l = 1\,\mu$m的晶格。需要指出的是， l 选取得小于或约等于愈合长度和热德布罗意波长 [58]。这样便可将连续体哈密顿量映射为离散玻色-哈伯德模型，其中$J = \hbar^2/(2ml^2)$ 为隧穿能，$U_{aa} = g_{aa}l^{-2}$和 $U_{12} = g_{12}l^{-2}$ 为格点内排斥相互作用。我们采用 $\omega_z = 2\pi \times 4.6$kHz，由此得到 $U_{11}/J = 0.336$ 和 $U_{22}/U_{11} = 0.938$ [51]。淬火方案如图1所示。我们从总密度为 $n = 10\,\mu\mathrm{m}^{-2}$、温度为 T的二维超流云团开始。通过经典Metropolis算法 [56]，在化学势为 μ 、温度为 T 的巨正则系综中对该系统的初态 ψ_1(r)进行采样。我们在较宽的 $T/T_0 = 0.1 - 1.1$范围内选取 T，其中T_0 是弱相互作用二维玻色气体超流转变临界温度的估计值 [59, 60]。对于另一组分，我们利用真空涨落对初态进行采样，即 $\langle|\psi_2(\mathbf{r}_i)|^2\rangle = 1/(2l^2)$ [61]，其中指标 i 对应晶格点，$\langle..\rangle$ 表示系综平均。在时间 $t = 0$，我们施加一个 $\pi/2$ 脉冲，使状态 $\psi_{1/2}(\mathbf{r}_i) = [\psi_1(\mathbf{r}_i) \pm \psi_2(\mathbf{r}_i)]/\sqrt{2}$均匀叠加。由于 g_{11} 和 g_{22} 相近，这会产生两个密度为 $n_1 \approx n_2 \approx n/2 = 5\,\mu\mathrm{m}^{-2}$的云团。随后，我们将 g_{12} 淬火至分相区（$\alpha > 1$），并通过方程（6）和（7）确定其时间演化 $\psi_{1/2}(\mathbf{r}\ t)$。如图1(c)和(d)示意所示，初期时间演化通过小尺寸畴成核进行，而长时间演化则形成两个空间分离的云团。在模拟中，我们将 α 在 $1.03 \le \alpha \le 1.55$ 范围内改变，以探究弱不可混溶和强不可混溶区域；这涵盖了其他组分混合物中可实现的广泛不可混溶区域。

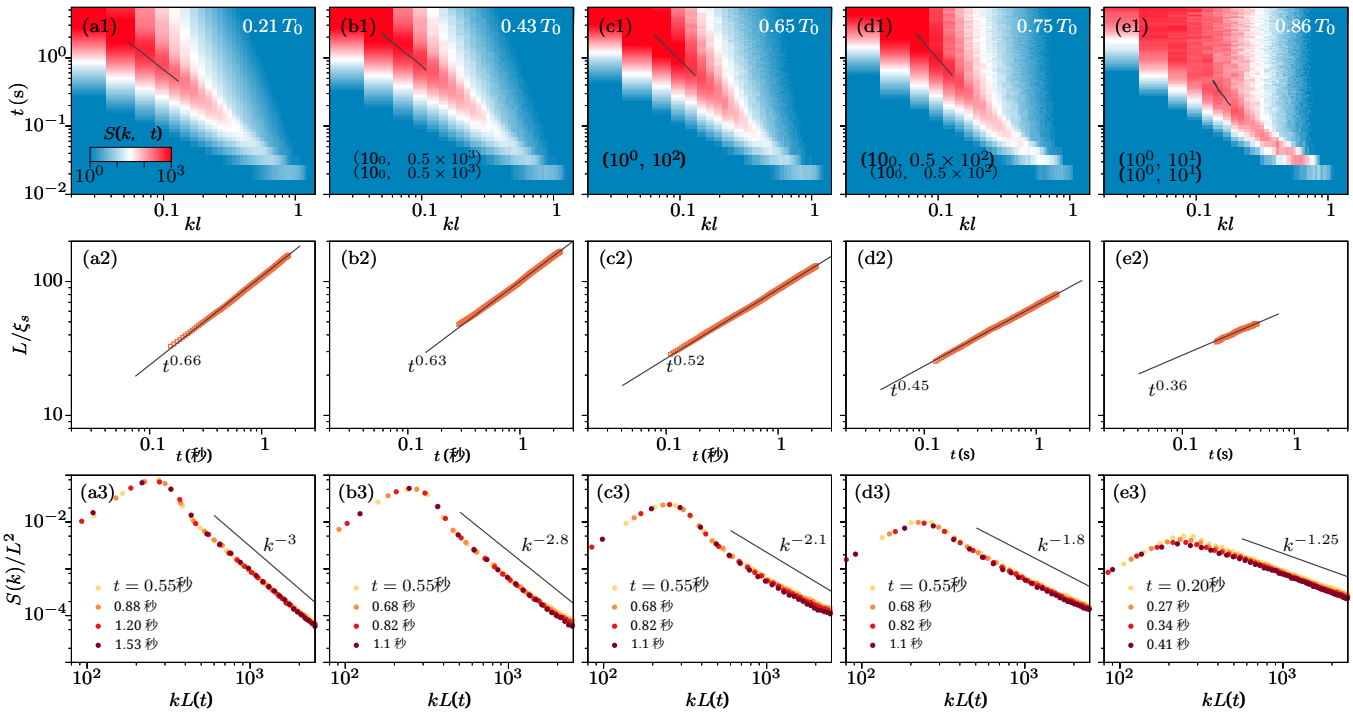

图4. 非零温度下的增长定律与动力学标度。(a1-e1) 在双对数坐标下，结构因子 $S(\mathbf{k}\ t)$ 随波矢 $\mathbf{k} = k\hat{}\mathbf{e}_x$ 和时间 t 的变化，适用于不同的 T/T_0。(b1-e1) 的谱权重上下限列于括号中。最大值的位置（实线）可用于确定平均畴尺寸 $L(t)$；见正文。(a2-e2) $L(t)$ 的数值及其幂律拟合 t^{η}（直线）给出 $\eta = 0.66$、0.63、0.52、0.45 和 0.36，分别对应 $T/T_0 = 0.21$、0.43、0.65 0.75 0.86 3 3 S k t 2 kL t 和 。ξ_s 为自旋愈合长度；见正文。(a -e) 绘制 ( )/L( ) 随 ( ) 的变化，展示不同 t下的普适时间演化。实线表示高动量尾部的近似标度。

为分析分相动力学，我们计算局域密度不平衡作为序参量

$$m(\mathbf{r}, t) = \frac{n_1(\mathbf{r}, t) - n_2(\mathbf{r}, t)}{n_1(\mathbf{r}, t) + n_2(\mathbf{r}, t)}. \tag{10}$$

我们展示了 $m(\mathbf{r}\ t)$ 在图2 中周期边界系统的情况，以及其平均值 $\langle m(\mathbf{r}\ t)\rangle$ 在图6所示盒状系统中的情况，其中 $\langle..\rangle$ 表示对初始系综取平均。

III. 结果

A. 去混合动力学

图 2 展示了单条轨迹在 $T/T_0 = 0.21$ 下、$\alpha = 1.03$ 和 1.55 时 $m(\mathbf{r}\ t)$ 的时间演化。所有周期边界模拟均采用固定的系统尺寸 $256 \times 256\,\mu\text{m}^2$。在 $t = 0$ 淬火至去混合态会触发各组分畴的成核；与 $\alpha = 1.03$相比，$\alpha = 1.55$ 时出现的畴更小。我们根据式 9 中不稳定模的动量范围 k_0 估算初始畴尺寸 L_0 。对于 $\alpha = 1.03$和 1.55，我们分别得到 $L_0 \sim \lambda_0 = 19$ 和 $4.7\,\mu$m，成核时间分别为 $t \sim \tau = 26$ms 和 1.5 ms。中间阶段的时间演化表现为粗化过程：小畴缩小，大畴增长。畴内存在其他组分的小斑块，这是由初始涨落造成的；在弱分离区，这些涨落会抑制动力学。对于 $\alpha = 1.03$，情况正是如此；而对于 $\alpha = 1.55$，由于系统处于强分离区，动力学受这些涨落的影响较弱。弱分离区与强分离区的形成，源于热能与淬火能之间的相互作用。在高温下，热涨落主导动力学，不会发生相分离，正如附录 A所示。

为确定集体模在分相动力学中的相互作用，我们计算密度的动态结构因子

$$S_1(\mathbf{k}, \omega) = \langle |n_1(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle, \tag{11}$$

其中 $n_1(\mathbf{k}\ \omega)$ 是组分 1 的密度$n_1(\mathbf{r}\ t)$ 在空间和时间上的傅里叶变换：

$$n_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{N_l T_s}} \sum_j \int dt\, e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}_j - \omega t)} n_1(\mathbf{r}_j, t). \tag{12}$$

$T_s = 0.55$s 是数值傅里叶变换的采样时间，而 $N_l = N_x N_y$ 是晶格位点数。在图 3 中，我们展示了 $S_1(\mathbf{k}\ \omega)$ 随波矢的变化

k = $k\hat{e}_x$ 和频率 ω 的关系，取值分别为 $\alpha = 1.03$、1.13、1.34 和 1.55。我们观察到动力学稳定模和不稳定模：稳定模表现为两条激发分支，而不稳定模则表现为宽广的低能激发谱。我们将这些结果与式 8 的 Bogoliubov谱$E_{k,\pm}$ 进行比较。对于我们的离散化系统，自由粒子色散关系的形式为 $\epsilon_k = 2J[1-\cos(k_x l)]$,，其中 $J = \hbar^2/(2ml^2)$ 是隧穿能。图 3 中的连续线表示$E_{k,\pm}$ 给出的实数解预测，它们能捕捉低和中等 α 下稳定模的激发分支，而在高 α下则出现偏差。我们还展示了$E_{k,-}$ 的虚数解，它在定性上捕捉到了不稳定模的宽广谱。不稳定模的动量范围随 α 增大而扩大，并且与式 9 的预测接近。在较小的 k 处存在一个峰状激发，对应于系统在时间$t = T_s$形成的宏观畴结构。对于较大的α，该激发峰向较低的 k 移动，这意味着在较大的 α下畴会快速增长，与图 2 所示的动力学一致。

此外，我们将稳定模式的两个激发分支与相分离云的谱进行比较。在这种情况下，云密度是初始密度的两倍，即 $n_{i,\ f} = 2n_i$ 而 Bogoliubov 谱为 $E_{k,\ n_{1,}}$ $_f = \sqrt{\epsilon_k(\epsilon_k + 2g_{11}n_{1,\ f})}$。对于图 $S_1(k,\ \omega)$中的所有 α，这一结果与上分支一致。与组分 1 空间分离的另一组分表现为热云，其自由粒子色散关系在图 α 中的所有 3处都对应下分支。

B. 动力学标度

为表征标度行为，我们计算不平衡度的结构因子

$$S(\mathbf{k}) = \langle |m(\mathbf{k})|^2 \rangle, \tag{13}$$

with

$$m(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{N_l}} \sum_j \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) m(\mathbf{r}_j), \tag{14}$$

其中 $m(\mathbf{k})$ 是 $m(\mathbf{r})$ 的傅里叶变换。在图4(a1-e1) 中，我们展示了 $S(\mathbf{k}\ t)$ 随波矢$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_x$ 和时间 t 的变化，其中 $\alpha = 1.55$ 以及不同的 T/T_0。有限 k处的谱峰表明发生了畴成核；随着畴逐渐粗化，谱峰逐渐向更小的 k 移动。峰的位置描述了畴的平均尺寸，而峰展宽则反映了热涨落对动力学的影响。高温下热效应显著，导致图 4(a1-e1) 中的峰值振幅降低。当 $T/T_0 = 0.86$时，经过短暂的时间演化后，谱峰便因强扩散而消失，这种扩散由

热涨落。我们用高斯分布 $g(k) = A_0\exp[-(k-k_d)^2/(2\sigma^2)$],拟合结构因子，其中 A_0、 k_d 和 σ 是拟合参数。根据

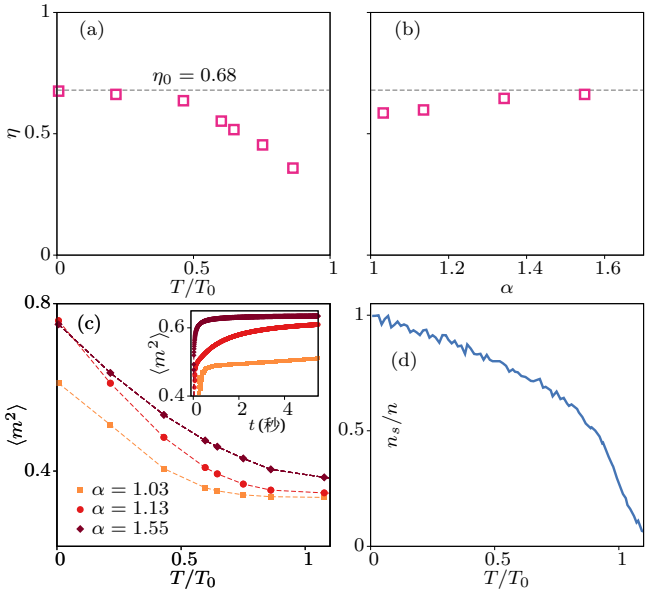

图 5. 温度和淬火参数依赖性。(a) $\eta(T)$ 对于 $\alpha = 1.55$。(b) η (α) 在 $T/T_0 = 0.21$ 时的结果。水平虚线表示零温预测值 $\eta_0 = 0.68$。(c) 在 $t = 5.5$ 秒时的平均平方不平衡度 $\langle m^2 \rangle$ 随 T/T_0 的变化，参数取值为 $\alpha = 1.03$、1.13 和 1.55；插图显示了 $T/T_0 = 0.21$ 时的时间演化。(d) 初始超流分数 n_s/n 随温度的变化，我们采用参考文献 [62] 中所述的方法确定该分数。结果对应的系统尺寸为 $256 \times 256\,\mu$米^2。

k_d，我们确定平均畴尺寸 $L = 2\pi/k_d$。图4(a2-e2)展示了在双对数坐标下确定的 $L(t)$ 值。 $L(t)$的增长表明其呈现幂律行为，这是宏观畴粗化的典型特征 $L \gg \xi_s$，其中自旋愈合长度定义为 $\xi_s = \hbar/\sqrt{2mng_s}$，且 $g_s = ($ $2g_{12} - g_{11} - g_{22})/2$。 ξ_s是两种组分相互作用并成核形成畴的长度尺度。我们用函数 $f(t) = c_0 t^{\eta}$拟合 $L(t)$，其中 c_0 是拟合参数。由此我们确定标度指数 η，见图4图注。我们注意到， η 的值随温度升高而降低。

在图 4(a3-e3) 中，我们展示了标度化结构因子$S(k,t)$ $/L(t)^2$ 随标度化波矢 $kL(t)$ 的变化，参数取值为不同的 t 和 T/T_0。不同时间的结果塌缩到同一条曲线上，证实了标度假设。动量尾部呈幂律行为，其衰减随温度而变化。对于 $T/T_0 = 0.21$，我们发现其依赖关系为 $S(k) \sim k^{-3}$，这与 Porod 定律 [5] 一致。这是由于畴壁的存在；畴壁会导致二维情况下大 k 时出现依赖关系 $S(k) \sim k^{-3}$。在高温下，由于主导性的热涨落抑制了相分离过程，动量尾部衰减缓慢。对于 $T/T_0 = 0.86$，我们发现动量尾部呈现行为 $S(k) \sim k^{-1.25}$；在时间演化中看不到相分离，见附录 A。

图 5（a）和（b）展示了标度指数对温度和淬火参数的依赖性。两者 T

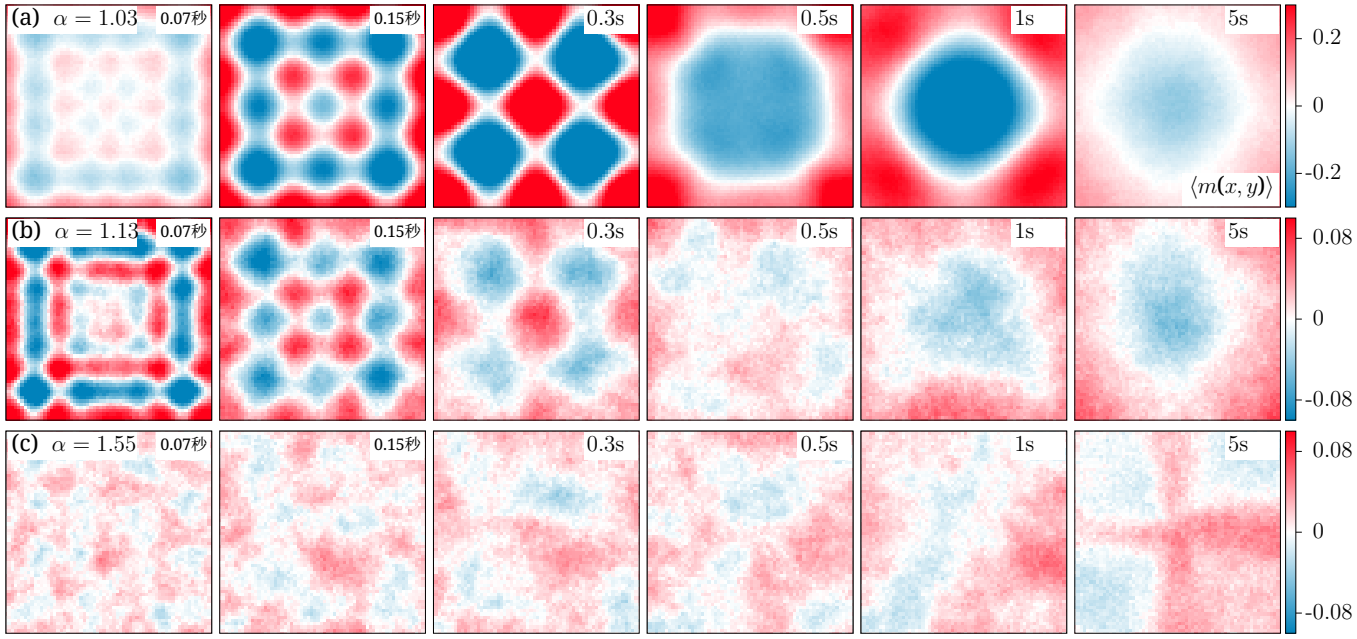

图 6. 尺寸为 $64\times64\,\mu$ 米的方形盒中的畴形成。(a-c) 展示了在 $T/T_0 = 0.21$、 $\alpha = 1.03$（上排）、1.13（中排）和 1.55（下排）时，平均不平衡度 $\langle m(x,y)\rangle$ 的时间演化。补充材料中以视频形式展示了完整的时间演化，呈现了不同形状畴之间的连续转变。

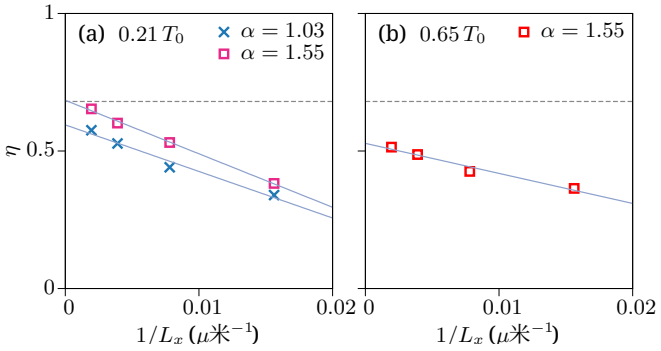

图 7. 有限尺寸标度。(a) 在 $T/T_0 = 0.21$ 时， η 随系统长度倒数 $1/L_x$ 的变化，分别对应 $\alpha = 1.03$ （叉号）和 1.55 （方块）。线性拟合（实线）分别得到 $\eta_\infty = 0.59$ 和 0.68，对应 $\alpha = 1.03$ 和 1.55。(b) 在 $T/T_0 = 0.65$ 时，对于 $\alpha = 1.55$，我们得到 $\eta_\infty = 0.53$ 。

和 α 都会影响 η的值，体现了强分离区与弱分离区之间的相互作用。在低 T和大 α的情况下，系统处于强分离区，也就是说，初始涨落对动力学的影响微乎其微。此时，我们得到 η ，接近零温预测值 $\eta_0 = 0.68$，这表明畴生长的主导过程是超流体从低密度区域向高密度区域的惯性流体动力学输运。这一情形与零温下二元凝聚体的模拟结果一致 [50]。在高 T 和小 α的情况下，初始涨落会抑制相分离动力学，并导致 η 的重整化以及结构因子的高动量尾部。我们将这一状态称为弱分离区。为量化这些状态，我们计算平均平方不平衡度$\langle m^2\rangle$的时间演化。在图 5(c) 中，我们展示了 $\langle m^2\rangle$ 在 $t = 5.5$s 时随 T/T_0 变化的情况，对应的 $\alpha = 1.03$分别为 1.13 和 1.55。它随 T/T_0 增加、 α减小而下降。如图 5(c) 插图所示， $\langle m^2\rangle$ 在时间演化过程中增加，并在长时间演化后达到稳态。我们发现，当 $\langle m^2\rangle \gtrsim 0.64$时，系统动力学处于强分离区，此时我们同时恢复了零温 η_0 和结构因子的 Porod 尾部。当 $\langle m^2\rangle \lesssim 0.64$时，系统进入弱分离区，此时热涨落会重整化标度参数。在这里，热涨落会抑制系统初始的超流序 [图 5(d)]。对于 $\langle m^2\rangle \lesssim 0.4$，我们没有观察到相分离。

C. 方形盒中的分相动力学

现在我们转而讨论方形盒几何中受限的均匀二维云的分相动力学，这一研究受到实验 [51, 52] 的启发。与畴的位置自发形成的周期边界系统相比，有限边界打破了平移不变性，并作为畴形成的钉扎势 [26]。我们采用与上文相同的密度和淬火方案。首先分析尺寸为 $64\times64\,\mu\mathrm{m}^2$, 的盒状云中的分相动力学

这一尺寸与实验 [51, 52] 相当。图 6 展示了在 $T/T_0 = 0.21$ 时，$\alpha = 1.03$、1.13 和 1.55 条件下平均不平衡度$\langle m(x,y)\rangle$ 的时间演化。确实，畴成核受到盒子边界的钉扎，这是由边缘处的密度差所致，因为 a_{11} 和 a_{22} 不同，从而为畴的形成提供了种子。相反，在周期边界系统中，畴成核由场涨落播种。盒子对称性导致其平均动力学与无限系统有本质区别。当 $\alpha = 1.03$ 时，时间演化通过形成规则图案而推进，这些图案不断变化，形成形状鲜明、几何特征显著的结构。在 $t \sim 0.5$s 时，时间演化呈现出组分 1 和组分 2 各自形成一个宏观畴的过程，随后在 $t \sim 5$s 后达到平衡。这些结果与测量结果接近；测量显示，在最长达 100 ms[51, 52] 的时间演化过程中，会形成类似结构。当 α 较高时，钉扎效应会减弱，见图 6(b) 和 (c) 中 $\alpha = 1.13$ 和 1.55 条件下的动力学。其原因在于，较高的 α 对应较小的自旋愈合长度 ξ_s，这有利于小尺寸畴的形成。对于 $\alpha = 1.03$、1.13 和 1.55，ξ_s 分别为 4.6、2.2 和 $1.1\,\mu$m。对于所考虑的云尺寸，$\alpha = 1.03$ 和 1.55 时，我们分别得到 $L_x/\xi_s \approx 14$ 和 58；前者因边界条件而有利于形成形状规则的畴。因此，对于 $L_x/\xi_s \gg 1$，其动力学趋近于具有周期性边界条件的系统所呈现的动力学。

接下来，我们分析尺寸介于 $64\times64\,\mu$m^2 和 $512\times512\,\mu$m^{2}之间的盒状云中各畴的增长定律。我们按照上述方法计算结构因子 $S(k,t)$，以确定平均畴尺寸。根据畴的幂律增长，我们确定标度指数 η，与图4类似。图7(a)展示了 η 在 $T/T_0 = 0.21$ 时随 $1/L_x$ 的变化，其中$\alpha = 1.03$ 和 1.55。L_x 是盒子的线性尺寸。系统尺寸变化 64 倍，使我们能够进行可靠的有限尺寸标度，从而获得热力学极限下的标度指数 η_∞。对于 $\alpha = 1.03$ 和 1.55，我们分别得到 $\eta_\infty = 0.59$ 和 0.68。η_∞ 的结果接近周期性边界条件下得到的数值。图7(b)展示了 η 在 $T/T_0 = 0.65$ 时随 $1/L_x$ 的变化，其中$\alpha = 1.55$。对于该系统，我们得到 $\eta_\infty = 0.53$，证实了高温下标度指数的重整化。

IV. 结论

我们利用经典场模拟研究了二元二维玻色超流体的分相动力学。通过淬火种间相互作用参数，我们分析了不同温度和淬火参数下的粗化动力学。我们证明，畴生长的动力学标度介于二元流体的惯性流体动力学生长定律与二维守恒场的扩散生长定律之间，具体而言，在低温和强淬火条件下，我们发现了惯性流体动力学生长定律 $L(t) \sim t^{2/3}$ 以及结构因子的 Porod 标度律 $S(k) \sim k^{-3}$，其中 L 为平均畴尺寸，k 为波矢。我们指出，在高温下，热涨落会抑制分相动力学，并改变畴生长定律和结构因子的 Porod 尾部。我们还表明，在接近超流体转变温度时，标度动力学趋近于二维守恒场的扩散生长定律 $L(t) \sim t^{1/3}$，而 Porod 尾部的标度与 $S(k) \sim k^{-1}$相似。随后，我们研究了盒状云中的分相动力学。我们表明，对于淬火较弱且尺寸与自旋愈合长度相近的小云，盒子对称性会引发独特的动力学，其特征是形成几何形状各异的畴。通过改变系统尺寸，我们确定了生长定律的标度指数，发现其与具有周期性边界条件的系统所得结果一致。

我们的结果揭示了淬火与热能在相分离中的基本相互作用，这种相互作用会改变粗化动力学的底层标度定律。对这些结果的实验实现为二元流体标度定律提供了量子模拟。此外，环形囚禁势中的玻色混合物为研究多组分量子混合物中的刚体旋转和持续流提供了可能。

致谢

我们感谢 Jean Dalibard 和 Rapha¨el Saint-Jalm 富有启发性的讨论。L. M. 感谢德国研究联合会（DFG）在 SFB 925 项目（项目 ID：170620586）以及卓越集群“物质高级成像”（EXC 2056，项目 ID：390715994）框架内提供的资助。

附录 A：温度对分相动力学的影响

本节展示热涨落如何抑制非零温度下的分相动力学。我们计算系综中单个样本在可混溶参数 $m(x,\ y)$和系统尺寸$\alpha = 1.55$ 下的不平衡度 $256 \times 256\,\mu$m^2。在图8 中，我们展示了 $m(x,\ y)$随不同温度 T/T_0的时间演化。粗化动力学受到初始热涨落的影响，导致高温下相分离受到抑制。在 $T/T_0 = 0.86$超流体临界温度附近，相分离现象无法区分。

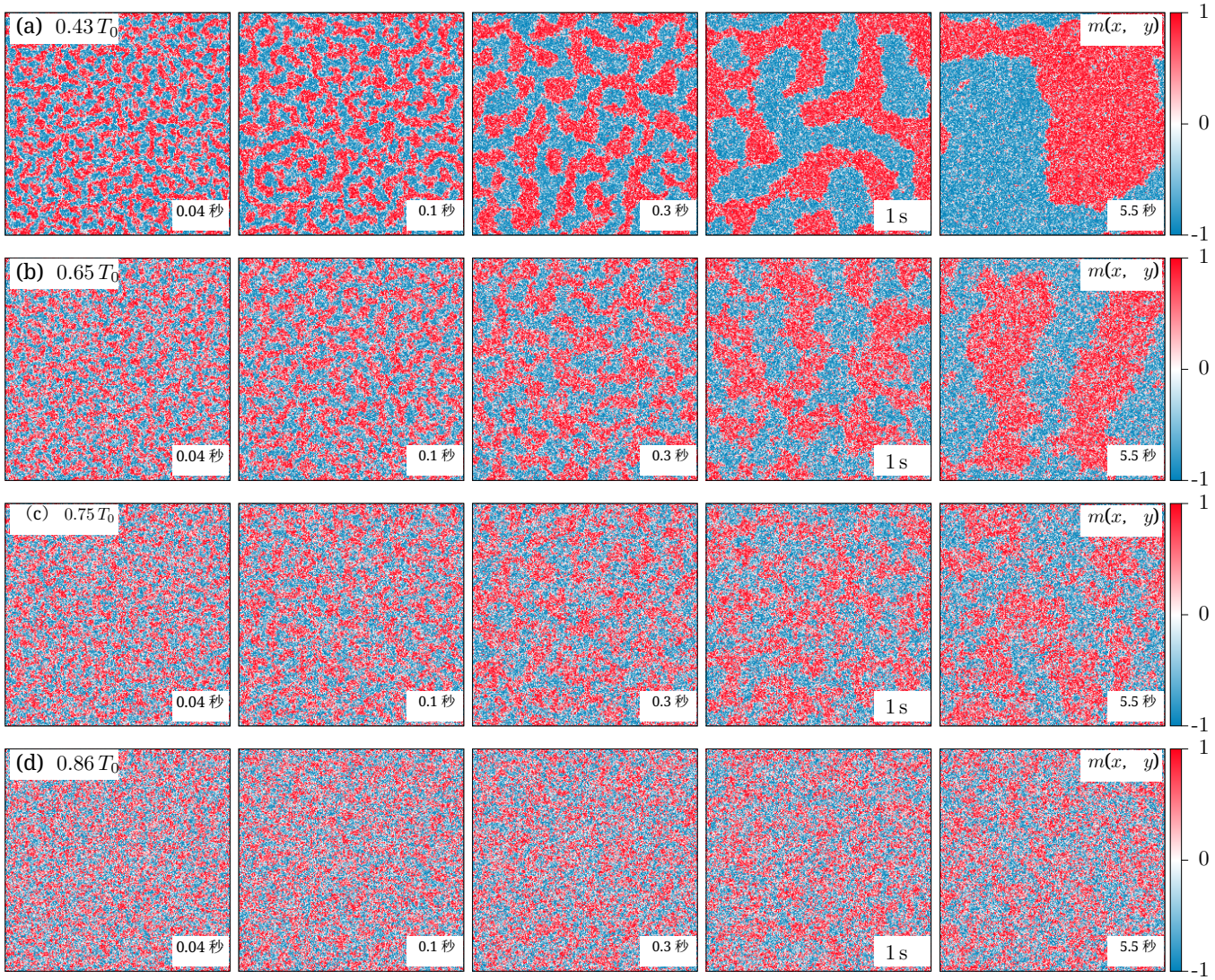

图 8. 温度对尺寸为 $256 \times 256\,\mu\mathrm{m}^2$、$\alpha = 1.55$ 的周期边界系统中分相动力学的影响。(a-d) 展示了在温度为 $T/T_0 = 0.43$、0.65、0.75 和 0.86 时，系统在去混合态深处淬火后单条轨迹的不平衡度 $m(x, y)$ 随时间的演化。红色和蓝色分别表示两个组分。

[1] Akira Onuki, *Phase Transition Dynamics*（剑桥大学出版社，2002 年）。[2]Michio Tateno 和 Hajime Tanaka, “由机械弛豫控制的网络形成相分离中的幂律粗化”, 《自然·通讯》**12**, 912（2021 年）。[3]Bin Wang、Lei Zhang、Tong Dai、Ziran Qin、Huasong Lu、Long Zhang 和 Fangfang Zhou, “人类健康与疾病中的液-液相分离”, 《信号转导与靶向治疗》**6**, 290（2021 年）。[4] Sohum Mehta 和 Jin Zhang, 《自然综述：癌症》, 239–252。[5] A. J. Bray, “相序动力学理论”, 《物理学进展》**43**, 357–459（1994 年）。

[6] P. Debye、H. R. Anderson 和 H. Brumberger, 《非均匀固体中的散射。II. 相关函数及其应用》, 《应用物理学杂志》**28**, 679–683（1957）。[7] I.M. Lifshitz 和 V.V. Slyozov, 《过饱和固溶体中的析出动力学》, 《固体物理与化学杂志》**19**, 35–50（1961）。[8] David A. Huse, 《旋节线分解后期行为的修正：Lifshitz-Slyozov 标度与蒙特卡罗模拟》, 《物理评论B》**34**, 7845–7850（1986）。[9] Eric D. Siggia, 《二元混合物中旋节线分解的后期阶段》, 《物理评论A》**20**, 595–605（1979）。[10] Hiroshi Furukawa, 《惯性对流体中液滴生长的影响》, 《物理评论A》**31**, 1103–1108（1985）。

[11] V. P. Mineev, 《两个近理想玻色气体溶液理论》, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 81, 263（1974）。[12] Tin-Lun Ho 和 V. B. Shenoy, 《碱金属原子的玻色凝聚体二元混合物》, 《物理评论快报》77, 3276–3279（1996）。[13] E. Timmermans, 《玻色-爱因斯坦凝聚体的相分离》, 《物理评论快报》67, 5718–5721（1998）。[14] H. Pu 和 N. P. Bigelow, 《双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的性质》, 《物理评论快报》80, 1130–1133（1998）。[15] D. S. Hall、M. R. Matthews、J. R. Ensher、C. E. Wieman 和 E. A. Cornell, 《玻色-爱因斯坦凝聚体二元混合物中的组分分离动力学》, 《物理评论快报》81, 1539–1542（1998）。[16] S. B. Papp、J. M. Pino 和 C. E. Wieman, 《双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的可调互溶性》, 《物理评论快报》101, 040402（2008）。[17] D. J. McCarron 、 H. W. Cho 、 D. L. Jenkin 、 M. P. K¨oppinger 和 S. L. Cornish, 《由 ^{87}Rb和 ^{133}Cs组成的双组分玻色-爱因斯坦凝聚体》, 《物理评论A》84, 011603（2011）。[18] L. Wacker 、 N. B. Jørgensen 、 D. Birkmose 、 R. Horchani、W. Ertmer、C. Klempt、N. Winter、J. Sherson 和 J. J. Arlt, 《由^{39}K和 ^{87}Rb组成的可调双组分玻色-爱因斯坦凝聚体》, 《物理评论A》92, 053602（2015）。[19] P. Maddaloni、M. Modugno、C. Fort、F. Minardi 和 M. Inguscio, 《两个碰撞的玻色-爱因斯坦凝聚体的集体振荡》, 《物理评论快报》85, 2413–2417（2000）。[20] K. M. Mertes、J. W. Merrill、R. Carretero-Gonz´alez、D. J. Frantzeskakis、P. G. Kevrekidis 和 D. S. Hall, 《二元玻色-爱因斯坦凝聚体中的非平衡动力学与超流环激发》, 《物理评论快报》99, 190402（2007）。[21] Yujiro Eto、Masahiro Takahashi、Keita Nabeta、Ryotaro Okada、Masaya Kunimi、Hiroki Saito 和 Takuya Hirano, 《多组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的弹跳运动与穿透动力学》, 《物理评论A》93, 033615（2016）。[22]Yujiro Eto、Masahiro Takahashi、Masaya Kunimi、Hiroki Saito 和 Takuya Hirano, 《二元玻色-爱因斯坦凝聚体中互溶–不互溶转变诱导的非平衡动力学》, 《新物理学杂志》18, 073029（2016）。[23] C. Hamner、J. J. Chang、P. Engels 和 M. A. Hoefer, 《超流体对流中暗-亮孤子列的产生》, 《物理评论快报》106, 065302（2011）。[24] M. A. Hoefer、J. J. Chang、C. Hamner 和 P. Engels, 《互溶双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的暗-暗孤子与调制不稳定性》, 《物理评论A》84, 041605（2011）。[25] B. Bakkali-Hassani、C. Maury、Y.-Q. Zou、´E. Le Cerf、R. Saint-Jalm、P. C. M. Castilho、S. Nascimbene、J. Dalibard 和 J. Beugnon, 《双组分二维玻色气体中汤斯孤子的实现》, 《物理评论快报》127, 023603（2021）。[26] S. De、D. L. Campbell、R. M. Price、A. Putra、Brandon M. Anderson 和 I. B. Spielman, 《淬火二元玻色-爱因斯坦凝聚体：自旋畴形成与粗化》, 《物理评论A》89, 033631（2014）。[27] Jacopo Sabbatini、Wojciech H. Zurek 和 Matthew J. Davis, 《二元混合物中的相分离与图案形成》

元双组分玻色-爱因斯坦凝聚体》, 《物理评论快报》107, 230402（2011）。[28] E. Nicklas、H. Strobel、T. Zibold、C. Gross、B. A. Malomed、P. G. Kevrekidis 和 M. K. Oberthaler, 《拉比振荡诱导空间分相动力学》, 《物理评论快报》107，193001（2011）。[29] E. Nicklas、M. Karl、M. H¨ofer、A. Johnson、W. Muessel、H. Strobel、J. Tomkovi˘c、T. Gasenzer 和 M. K. Oberthaler, 《强淬火量子气体动力学中的标度观测》, 《物理评论快报》115, 245301（2015）。[30] Kedar Damle、Satya N. Majumdar 和 Subir Sachdev, 《玻色气体的相序动力学》, 《物理评论A》54，5037–5041（1996）。[31] Subroto Mukerjee、Cenke Xu 和 J. E. Moore, 《自旋凝聚体的动力学模型与相序动力学》, 《物理评论B》76，104519（2007）。$s = 1$ [32] Hiromitsu Takeuchi、Kenichi Kasamatsu、Makoto Tsubota 和 Muneto Nitta, 《玻色-爱因斯坦凝聚体中畴壁湮灭导致的快子凝聚》, 《物理评论快报》109, 245301（2012）。[33]Markus Karl、Boris Nowak 和 Thomas Gasenzer, 《双组分玻色气体非热固定点处的普适标度》, 《物理评论A》88，063615（2013）。[34]Kazue Kudo 和 Yuki Kawaguchi, 《铁磁性玻色-爱因斯坦凝聚体中的磁畴增长：电流的影响》, 《物理评论A》88，013630（2013）。[35] Kazue Kudo 和 Yuki Kawaguchi, 《铁磁性玻色-爱因斯坦凝聚体中由涡旋-反涡旋湮灭驱动的粗化动力学》, 《物理评论A》91，053609（2015）。[36] Lewis A. Williamson 和 P. B. Blakie, 《淬火铁磁自旋-1凝聚体的普适粗化动力学》, 《物理评论快报》116，025301（2016）。[37] Lewis A. Williamson 和 P. B. Blakie, 《淬火铁磁自旋-1凝聚体的粗化与热化性质》, 《物理评论A》94，023608（2016）。[38] Hiromitsu Takeuchi, 《分离的多组分超流体中的畴面积分布异常》, 《物理评论A》97，013617（2018）。[39] Kazuya Fujimoto、Kazunori Haneda、Kazue Kudo 和 Yuki Kawaguchi, 《具有大粒子数不平衡的双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的尺度不变弛豫动力学》, 《物理评论A》101, 023608（2020）。[40]Kenichi Kasamatsu 和 Makoto Tsubota, 《双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中由调制不稳定性诱发的多畴形成》, 《物理评论快报》93，100402（2004）。[41] Kenichi Kasamatsu 和 Makoto Tsubota, 《双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的调制不稳定性与孤立波形成》, 《物理评论A》74，013617（2006）。[42]Kazuki Sasaki、Naoya Suzuki、Daisuke Akamatsu 和 Hiroki Saito, 《双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的瑞利-泰勒不稳定性与蘑菇状图案形成》, 《物理评论A》80，063611（2009）。[43] Hiromitsu Takeuchi、Naoya Suzuki、Kenichi Kasamatsu、Hiroki Saito 和 Makoto Tsubota, 《相分离的双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的量子开尔文-亥姆霍兹不稳定性》, 《物理评论B》81，094517（2010）。[44] Naoya Suzuki、Hiromitsu Takeuchi、Kenichi Kasamatsu、Makoto Tsubota

，和 Hiroki Saito ，“交叉介于

双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中开尔文–亥姆霍兹不稳定性与反超流不稳定性之间的交叉”，《物理评论A》82, 063604 (2010).[45] Kazuki Sasaki、Naoya Suzuki 和 Hiroki Saito，“双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中气泡的动力学”，《物理评论A》83, 033602 (2011).[46] Kazuki Sasaki、Naoya Suzuki 和 Hiroki Saito，“双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的毛细不稳定性”，《物理评论A》83, 053606 (2011).[47] Bert Van Schaeybroeck，“有限温度下的弱相互作用玻色混合物”，Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 392, 3806–3811 (2013). [48] Arko Roy 和 D. Angom，“凝聚体混合物中相分离的热抑制”，《物理评论A》92, 011601 2015( ). [49] Kean Loon Lee、Nils B. Jørgensen、I-Kang Liu、Lars Wacker、Jan J. Arlt 和 Nick P. Proukakis，“双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的相分离与动力学”，《物理评论A》94, 013602 (2016). [50] Johannes Hofmann、Stefan S. Natu 和 S. Das Sarma，“二元玻色凝聚体的粗化动力学”，《物理评论快报》113, 095702 (2014).[51] Rapha¨el Saint-Jalm, *Exploring two-dimensional physics with Bose gases in box potentials: phase ordering and dynamical symmetry*，学位论文，巴黎文理研究大学（2019）。[52] Edouard Le Cerf, *Demixing phenomena in 2D Bose gases* ´ 2020 ，学位论文，索邦大学（）。[53] Artur Widera、Fabrice Gerbier、Simon F¨olling、Tatjana Gericke、Olaf Mandel 和 Immanuel Bloch，“自旋-1和自旋-2 87Rb原子的自旋依赖相互作用强度的精密测量”，《新物理学杂志》8, 152 (2006).[54] P A Altin、G McDonald、D D¨oring、J E Debs、T H Barter、N P Robins、J D Close、S A Haine、T M Hanna 和 R P Anderson，“利用大型 87Rb 玻色-爱因斯坦凝聚体的钟跃迁进行光学囚禁原子干涉测量”，《新物理学杂志》13, 119401（2011）。[55] C. J. Pethick 和 H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases* 2 nd 版（剑桥大学出版社，2008）。[56]Vijay Pal Singh、Wolf Weimer、Kai Morgener、Jonas Siegl、Klaus Hueck、Niclas Luick、Henning Moritz 和 Ludwig Mathey，“通过激光搅拌探测玻色-爱因斯坦凝聚体的超流性”，《物理评论A》93，023634（2016）。[57]Vijay Pal Singh、Christof Weitenberg、Jean Dalibard 和 Ludwig Mathey，“激光搅拌的二维玻色气体的超流性与弛豫动力学”，《物理评论A》95，043631（2017）。[58] Christophe Mora 和 Yvan Castin，“将 Bogoliubov 理论推广至准凝聚体”，《物理评论A》67，053615 2003（）。[59] Nikolay Prokof'ev、Oliver Ruebenacker 和 Boris Svis-tunov，“弱相互作用二维玻色气体的临界点”，《物理评论快报》87，270402（2001）。[60]Nikolay Prokof'ev 和 Boris Svistunov，“涨落区中的弱相互作用二维玻色气体”，《物理评论A》66，043608（2002）。[61] L. Mathey、Kenneth J. G¨unter、Jean Dalibard 和 A. Polkovnikov，“超冷原子二维玻色混合物中的动态科斯特利茨-索利斯跃迁”，《物理评论A》95，053630（2017）。[62] Vijay Pal Singh 和 Ludwig Mathey，“二维超冷玻色气体的集体模与超流性”，《物理评论研究》3，023112（2021）。