arXiv:2303.04829v2 [hep-th] 6 May 2024

量子阻尼谐振子的初值表述

Nishant Agarwal[1,*] 和 Yi-Zen Chu[2,3,†]

[1] *Department of Physics and Applied Physics, University of Massachusetts, Lowell, MA 01854, USA* [2] *Department of Physics, National Central University, Chungli 32001, Taiwan, Republic of China* [3] *Center for High Energy and High Field Physics (CHiP), National Central University, Chungli 32001, Taiwan, Republic of China*(日期：2024年5月8日)

in-in形式及其影响泛函推广分别广泛用于描述幺正量子系统和开放量子系统的非平衡动力学。本文以这些技术为基础，建立量子阻尼谐振子的有效理论，并用其研究初态依赖性、退相干和热化。我们首先考虑高斯初态和二次影响泛函，推导出振子格林函数的一般方程。随后，我们求解时间局域耗散这一特定情形下的方程，并利用所得格林函数得到振子的纯度和非等时双点关联。我们发现，动力学中必须包含非零噪声项，才能使纯度得到物理上合理的结果；振子会随时间发生退相干，使得晚期密度算符呈热态。然而，我们表明，频谱或非等时关联仍可区分阻尼振子与处于热平衡态的孤立振子，并推导出阻尼振子的广义涨落耗散关系。我们还简要考察时间非局域耗散，以说明在特定耗散核选择下，涨落耗散关系得以满足。最后，我们提出一种双重 in-out 路径积分方法，以超越高斯初态，并证明，对于时间局域耗散，我们的等时结果实际上对初态是非微扰的。

I. 引言

格林函数对于计算量子系统的关联函数极为有用，无论系统处于平衡态还是非平衡态。例如，在平衡态量子场论（量子场论）中，我们通常假设场在无限遥远的过去和未来均处于基态，并且所有相互作用都是绝热地开启和关闭的。指定初始条件和最终条件后，便可确定费曼格林函数作为主要格林函数；利用它，我们可以得到场的任意时间序关联函数。另一方面，在非平衡量子场论中，我们通常关注有限时间内的关联函数，此时场在有限的初始时刻被初始化为任意状态。此时，指定初始条件便可确定推迟格林函数作为主要格林函数；利用它，我们可以得到场的任意关联函数。

给定量子系统的格林函数，最容易通过路径积分方法求得。例如，标准的 in-out路径积分使我们能够得到平衡态量子场论中的生成泛函，进而得到关联函数。其非平衡推广形式，即 in-in路径积分 [1–5] 则使我们能够得到非平衡量子场论中的生成泛函，进而得到关联函数。原始的 in-in路径积分仅描述幺正动力学，也就是说，描述一个封闭 量子系统的动力学；该系统以任意状态初始化，并在一个时间无关或时间相关的哈密顿量作用下演化。通过引入影响泛函 [6, 7]，还可以进一步将其推广，以描述开放量子系统的非哈密顿动力学。影响泛函是量子主方程 [8, 9]在路径积分中的对应形式，并能简化开放量子系统中某些量的计算，例如格林函数和非等时关联 [10]。

影响泛函方法自问世以来，已应用于各种问题。可精确求解的问题包括量子阻尼谐振子（DHO）和线性布朗运动，相关标准参考资料见教科书 [11]。该方法还用于研究其他问题，以下列举并不完整：不同环境中的量子布朗运动 [12, 13]，相互作用纳米结中的量子输运 [14]，相互作用量子场论中的退相干[15, 16] 暴胀 [17]，原初关联中的纠缠 [18, 19]，相互作用量子场论中的粗粒化[20, 21]，以及开放的全息量子场论 [22]。鉴于该方法用途广泛，本文将重新考察一种由影响泛函描述的最简单的非平衡量子系统——量子阻尼谐振子，旨在提出一种受有效场论启发的方法来处理这一问题。因此，我们希望从物理原理出发，对影响泛函中出现的参数施加约束，而无需了解完整的微观模型。

我们首先将振子初始化为高斯态，并在不预设耗散来源的情况下，通过一般的二次影响泛函使其演化。随后，我们专门研究时间局域耗散，求出此情形下格林函数的精确解，并指出

* nishant agarwal@uml.edu

† yizen.chu@gmail.com

影响泛函中的各项受到约束，这在很大程度上是由环境自由度的涨落耗散关系所致。我们尤其发现，影响泛函必须包含一个非零的噪声项；若将其设为零，振子在晚时极限下的纯度将变得不符合物理实际。接下来，我们以纯度作为退相干的指标，表明阻尼谐振子会随时间发生退相干，并最终趋于一个由耗散参数决定温度的热态。然而，频谱或非等时关联可以区分阻尼谐振子与处于热平衡态的孤立振子。我们利用晚时极限下的非等时关联，得到一个广义涨落耗散关系，并表明该关系只有在高温情况下才会化为通常的关系。我们还考察了采用特定耗散核的时间非局域耗散情形，此时涨落耗散关系在任意温度下均成立。最后，我们提出一种双重入出路径积分方法，可用于求得任意初态下的等时关联，并表明我们关于时间局域耗散的等时结果实际上对初态是非微扰的。

本文结构安排如下。第二节中，我们回顾简谐振子背景下的 in-in 形式；为完整起见，在附录中推导相应的生成泛函，并讨论初态（我们将其选为高斯态）和影响泛函（我们将其选为二次形式）。第三节中，我们用格林函数表示生成泛函，并利用它们求得 n 点关联函数；相关细节同样放在附录中。我们还找出这些关联函数必须满足的初始条件，并推导其运动方程。第 IV 节中，我们将讨论范围限定于时间局域耗散，并求得此情形下格林函数的精确解，着重说明噪声项的贡献。我们利用这些解研究振子的纯度如何随时间演化，以及它在晚期是否满足涨落耗散关系。第五节中，对于特定的耗散核，我们考察时间非局域耗散下的涨落耗散关系。第六节中，我们提出一种双重入出路径积分方法，使我们能够超越高斯初态，并借此证明，在时间局域耗散情形下，有关等时关联和纯度的结果对任意初态都成立。最后，我们在第七节进行讨论。

II. IN-IN 生成泛函

本节中，我们推导一个量子简谐振子的生成泛函。该振子初始处于高斯初态，并经历由二次耗散作用量描述的非幺正／耗散演化；近期综述见文献 [23]，较早的综述见文献 [24]，相关近期工作见文献 [25]。我们将振子在时刻 t_0 的初态记为密度算符 $\hat{\rho}(t_0)$，并首先忽略耗散，此时振子在哈密顿量 $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2$ 下幺正演化，其中 m 为振子的质量，ω 为其频率，X 为位置算符，P 为动量算符。假设我们将 $\hat{\rho}(t_0)$ 演化至最终时刻 t_f，并令该时刻晚于所有关注的时刻；演化过程中，正向分支（从 t_0 到 t_f）上存在源 $J^+(t)$，反向分支（从 t_f 到 t_0）上存在源 $J^-(t)$。于是，in-in生成泛函定义为 $Z[J^+, J^-] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t_f)\right]_{J^+,\ J^-}$ 而海森堡绘景算符 $\hat{X}(t)$ 的有限时间关联函数可通过对两个源 $J^{\pm}(t)$ 求 $Z[J^+, J^-]$ 的泛函导数得到；计算结束时通常将这两个源设为零。

将 $Z[J^+, J^-]$ 写成路径积分表示较为方便，这样我们便可以用格林函数来表示它。因此，定义薛定谔绘景算符 X_S 的本征 ket 及其本征值，并分别记为 $|x\rangle$ 和 x，使得 $X_S|x\rangle = x|x\rangle$。如附录A所示，可得

$$
\begin{aligned}
Z[J^+, J^-] \;=\; & \int \mathcal{D}x^+\mathcal{D}x^-\rho[x^+, x^-, t_0] \\
& \times \exp\left[i\left\{S[x^+] + \int_t J^+x^+ - S[x^-] - \int_t J^-x^-\right\}\right] \\
& \times \delta\left[x^+(t_f) - x^-(t_f)\right], \qquad (1)
\end{aligned}
$$

其中，$\rho[x^+, x^-, t_0] \equiv \langle x^+|\hat{\rho}(t_0)|x^-\rangle$ 是位置基中 $\hat{\rho}(t_0)$ 的矩阵元，函数 $x^{\pm}(t)$ 在 t_0 处取值；$S[x^{\pm}]$ 是振子的作用量；简写 $\int_t$ 表示 $\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{d}t$；末尾的 δ-函数施加了转向点处的边界条件；并且我们已将 $\hbar$ 设为 1。作用量 $S[x^{\pm}]$ 由 $\frac{1}{2}\int_t\left[(\dot{x}^{\pm})^2 - \omega^2(x^{\pm})^2\right]$ 给出。为简单起见且不失一般性，我们将质量m 设为 1，点表示对时间求导。注意，$Z[J, J] = 1$ 由于在此情形下正向和反向演化恰好相互抵消；换句话说，对于存在源的演化，$Z[J, J]$ 只是 $\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t_f)\right]$，其归一化为 1。

现在让我们在动力学中引入耗散。耗散由一个影响泛函描述，它会在演化的正向和反向分支上分别产生时间非局域项，并将两个分支上的项联系起来。因此，我们将方程 (1) 的生成泛函改写为

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{diss.}}[J^+, J^-] \;=\; & \int \mathcal{D}x^+\mathcal{D}x^-\rho[x^+, x^-, t_0] \\
& \times \exp\left[i\left\{S[x^+] + \int_t J^+x^+ - S[x^-] - \int_t J^-x^-\right.\right. \\
& \left.\left. + \; S_{\mathrm{IF}}[x^+, x^-]\right\}\right]\delta\left[x^+(t_f) - x^-(t_f)\right], \qquad (2)
\end{aligned}
$$

这里我们将影响泛函 $S_{\mathrm{IF}}[x^+, x^-]$ 加入了作用量。我们仍然必须满足 $Z_{\mathrm{diss.}}[J, J] = 1$，因为在存在源的情况下进行演化时，$\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t_f)\right]$

无论是幺正演化还是非幺正演化，其归一化结果都为 1。

为了明确计算生成泛函，我们需要为初态和影响泛函设定试探形式，以下两个小节将对此进行讨论。

A. 初态

我们为振子选取一个高斯初态，参数化为 $\rho[x^+,x^-,t_0]=N\exp\{iS_0[x^+,x^-]\}$，其中 N 是归一化常数，选取它使得 $\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}(t_0)]=1$ and [27, 28]

$$S_0[x^+,x^-] = p_0(x^+-x^-)+\frac{1}{2}\big[A(x^+-x_0)^2 - A^*(x^--x_0)^2+2iB(x^+-x_0)(x^--x_0)\big], \quad (3)$$

其中函数 $x^{\pm}(t)$ 在 t_0 处取值，如前所述。注意，此处的 B 必须为实数，因为 $\hat{\rho}(t_0)$ 是厄米的。另一方面， A 可以是复数，我们用 A_R 和 A_I 表示其实部和虚部。归一化常数 N 可由此求得为 $N=\sqrt{(A_I+B)/\pi}$，条件是 $A_I+B>0$。 x_0 和 p_0 是初始单点函数 $\langle\hat{X}(t_0)\rangle$ 和 $\langle\hat{P}(t_0)\rangle$，这里我们用尖括号表示在 $\hat{\rho}(t_0)$ 中的期望值。最后， A 和 B 与初始二点关联函数有关，为方便起见，我们将其记为 c_{xx}、 c_{xp} 和 c_{pp}，

$$\langle\hat{X}^2(t_0)\rangle_c \equiv c_{xx} = \frac{1}{2(A_I+B)}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}\langle\{\hat{X}(t_0),\hat{P}(t_0)\}\rangle_c \equiv c_{xp} = \frac{A_R}{2(A_I+B)}, \quad (5)$$

$$\langle\hat{P}^2(t_0)\rangle_c \equiv c_{pp} = \frac{A_R^2+A_I^2-B^2}{2(A_I+B)}. \quad (6)$$

这里的下标“c”表示连通关联函数，例如， $\langle\hat{X}^2\rangle_c=\langle\hat{X}^2\rangle-\langle\hat{X}\rangle^2$，而 $\{\cdot,\cdot\}$ 是反对易子。我们还可以计算初态的纯度，记为 $\mathrm{Pu}(t_0)=\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}^2(t_0)]$，并将其与初始关联函数联系起来：$\mathrm{Pu}(t_0)=\sqrt{\frac{A_I+B}{A_I-B}}=0.5/\sqrt{c_{xx}c_{pp}-c_{xp}^2}$。由于纯度必须介于零和一之间，我们还得到条件 $B\le 0$；当 $B=0$ 时初态为纯态，当 $B<0$时则为混态。

B. 影响泛函

我们将影响泛函取为二次形式，并将其参数化为

$$S_{\mathrm{IF}}[x^+,x^-] = \int_{t,t'}\big[\gamma_1(t,t')x^+(t)x^+(t') - \gamma_1^*(t,t')x^-(t)x^-(t')+\gamma_2^*(t,t')x^+(t)x^-(t') - \gamma_2(t,t')x^-(t)x^+(t')\big], \quad (7)$$

其中 $\gamma_1(t,t')$ 和 $\gamma_2(t,t')$ 是复函数，我们称之为耗散核。方程 (7) 中的复共轭和符号确保生成泛函为实数，或者等价地说，密度算符在任意时刻都是厄米的。由于积分测度在交换 t 和 t' 后保持对称，耗散核还必须满足 $\gamma_1(t,t')=\gamma_1(t',t)$ 和 $\gamma_2(t,t')=-\gamma_2^*(t',t)$。我们将在下一节发现，只有两个实函数对耗散有贡献，并将在本文后面说明，这两个函数彼此也并非独立。我们还指出，在微观推导影响泛函时，通常会设想振子与某些环境自由度耦合，整个系统（包括环境）作幺正演化。对环境进行偏迹后，我们会发现这里的耗散核与环境的关联函数相关，并且还满足 $\gamma_1(t,t')=\gamma_2(t,t')\theta(t-t')-\gamma_2^*(t,t')\theta(t'-t)$。除非将其映射到某个特定的微观模型，否则我们在这里不会施加这一约束。

III. 格林函数

本节中，我们将生成泛函用格林函数表示，并得到它们所满足的运动方程和初始条件。为引入格林函数，首先将方程 (2) 中的被积函数表示为指数形式是方便的。由于我们已在第 II A 节和第 II B 节中将初态和影响泛函写成指数形式，因此只需进一步将方程 (1) 中的 δ函数表示为指数形式。按照 [29], , δ函数可写为

$$\begin{aligned}&\delta\big[x^+(t_f)-x^-(t_f)\big]\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\exp\left[-\frac{1}{\epsilon}\left\{x^+(t_f)-x^-(t_f)\right\}^2\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\exp\Big[-\int_{t,t'}C(t,t')\left\{x^+(t)-x^-(t)\right\}\\ &\quad\times\left\{x^+(t')-x^-(t')\right\}\Big],\end{aligned} \quad (8)$$

其中 $C(t,t')=-\frac{2}{\epsilon}\delta(t-t')\delta(t'-t_f)$，额外的二因子用于抵消在将 δ-函数取积分上限处的值时产生的二分之一因子。我们还将对作用量 $S[x^{\pm},J^{\pm}]$ 中的动能项进行分部积分，使两个时间导数都作用于同一个 $x^{\pm}$。这会在 t_0 和 t_f 处产生边界项，其中 t_f 处的边界项会在正负分支之间相互抵消，因为 $x^+(t_f)=x^-(t_f)$ 且 $\dot{x}^+(t_f)=\dot{x}^-(t_f)$；附录 A 中说明了第二个条件可由第一个条件推出。我们还在附录A中指出，在存在耗散的情况下，只有当耗散核 $\gamma_1(t,t')$ 和 $\gamma_2(t,t')$ 不与 $\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 成正比时， $\dot{x}^+(t_f)=\dot{x}^-(t_f)$ 才成立。 t_0 处的边界项仍然存在，我们将在下文对其进行跟踪。

将所有内容合并后，现在可以把方程（2）中的生成泛函写成

$$Z_{\rm diss.}[J^+,J^-] \;=\; N\int \mathcal{D}x^+\mathcal{D}x^-\;\exp\!\Big[-\frac{i}{2}\int_{t,t'} \times \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{\mathcal{O}}(t,t')\boldsymbol{x}(t') + i\int_t \boldsymbol{J}_s^T(t)\boldsymbol{x}(t)\Big]. \qquad (9)$$

这里的向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{J}_s(t)$ 定义为

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; \begin{bmatrix} x^+(t) \\ x^-(t)\end{bmatrix} \quad\text{and}\quad \boldsymbol{J}_s(t) \;=\; \begin{bmatrix} J_s^+(t) \\ -J_s^-(t)\end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中，$J_s^+(t) \;=\; J^+(t) \;+ 2\delta(t-t_0)[p_0 - (A+iB)x_0]$ 和$J_s^-(t) \;=\; J^-(t) \;+ 2\delta(t-t_0)[p_0 - (A^*-iB)x_0]$ 表示移位的 源，上标 T 表示转置。$\boldsymbol{\mathcal{O}}(t,t')$ 是一个 2×2 微分算子矩阵，其 11 和 12 分量为

$$\mathcal{O}^{11}(t,t') \;=\; \delta(t-t')\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}+\omega^2\right)+2\delta(t'-t_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}-A\right)-\frac{4i}{\epsilon}\delta(t'-t_f)\right]-2\gamma_1(t,t')\,, \qquad (11)$$

$$\mathcal{O}^{12}(t,t') \;=\; \delta(t-t')\left[-2iB\delta(t'-t_0)+\frac{4i}{\epsilon}\delta(t'-t_f)\right]-2\gamma_2^*(t,t')\,, \qquad (12)$$

$\delta(t'-t_0)$ 项前额外的 2 因子，同样是由于在积分上限处取 δ 函数的值而产生的。$\boldsymbol{\mathcal{O}}(t,t')$ 的另外两个分量与它们的关系分别为 $\mathcal{O}^{21}(t,t') \;=\; -\mathcal{O}^{12*}(t,t')$ 和$\mathcal{O}^{22}(t,t') \;= -\mathcal{O}^{11*}(t,t')$。

现在定义一个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{G}(t,t')$，它满足以下格林函数方程

$$\int_{t''}\boldsymbol{\mathcal{O}}(t,t'')\boldsymbol{G}(t'',t') \;=\; -i\boldsymbol{I}\delta(t-t')\,, \qquad (13)$$

其中

$$\boldsymbol{G}(t,t') \;=\; \begin{bmatrix} G^{++}(t,t') & G^{+-}(t,t') \\ G^{-+}(t,t') & G^{--}(t,t')\end{bmatrix} \qquad (14)$$

并且 $\boldsymbol{I}$ 是 2×2 单位矩阵。这导出了四个相互耦合函数 $G^{\pm\pm}(t,t')$ 的运动方程。由于出现在$\boldsymbol{\mathcal{O}}(t,t')$ 中的 ϵ 任意小，方程（13）中所有与 $1/\epsilon$ 成正比的项都必须相互抵消，从而得到约束条件

$$G^{++}(t_f,t') \;=\; G^{-+}(t_f,t')\,, \qquad (15)$$

$$G^{--}(t_f,t') \;=\; G^{+-}(t_f,t')\,, \qquad (16)$$

对所有 $t_0 < t' < t_f$ 均成立。注意，这些约束条件直接源于要求 $x^+(t_f) = x^-(t_f)$。我们同样预期，t_f 处的导数也满足相同的约束条件，因此

$$\partial_t G^{++}(t,t')\big|_{t=t_f} \;=\; \partial_t G^{-+}(t,t')\big|_{t=t_f}\,, \qquad (17)$$

$$\partial_t G^{--}(t,t')\big|_{t=t_f} \;=\; \partial_t G^{+-}(t,t')\big|_{t=t_f}\,, \qquad (18)$$

对于所有 $t_0 < t' < t_f$，类似于条件 $\dot{x}^+(t_f) = \dot{x}^-(t_f)$。理解这一点的一种方法是，先写出在任意源存在时满足方程 $\int_{t''}\boldsymbol{\mathcal{O}}(t,\ t'')\boldsymbol{x}_c(t'') \;=\; \boldsymbol{J}(t)$ 的经典场的解

$\boldsymbol{J}(t) \;=\; \begin{bmatrix} J^+ \\ -J^-\end{bmatrix}(t)\,(t)$：$\boldsymbol{x}_c(t) \;=$齐次解 $+i\int_{t'}\boldsymbol{G}(t,t')\boldsymbol{J}(t')$。接着注意到，边界条件由经典场承载，即 $x_c^+(t_f) = x_c^-(t_f)$ 和 $\dot{x}_c^+(t_f) = \dot{x}_c^-(t_f)$，便可得出方程 (15)–(18) 中的全部四个约束条件。不过，我们再次指出，这一论证仅适用于不正比于 $\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 的耗散核。要将生成泛函写成标准形式，方程 (15)–(18) 中的全部四个约束条件缺一不可。为此，我们首先将方程 (9) 中的 $\boldsymbol{x}(t)$ 平移为 $\boldsymbol{x}_s(t) = \boldsymbol{x}(t) - i\int_{t'}\boldsymbol{G}(t,t')\boldsymbol{J}_s(t')$，然后分部积分，将导数从 $x_s^{\pm}(t)$ 移至 $G^{\pm\pm}(t,t')$，最后利用上述四个约束条件消去边界项。于是，生成泛函可写为

$$Z_{\rm diss.}[J^+,J^-] \;=\; Z_0\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t,t'}\boldsymbol{J}_s^T(t)\boldsymbol{G}(t,t')\boldsymbol{J}_s(t')\right], \qquad (19)$$

其中，归一化因子 Z_0 的选取使得$Z_{\rm diss.}[J,J] = 1$；当初态为相干态时，它的值恰好为 1。此外，由于我们可以自由交换指数中的 t 和 t' 积分，函数 $G^{\pm\pm}(t,t')$ 也必须满足以下条件

$$G^{++}(t,t') \;=\; G^{++}(t',t)\,, \qquad (20)$$

$$G^{+-}(t,t') \;=\; G^{-+}(t',t)\,, \qquad (21)$$

$$G^{--}(t,t') \;=\; G^{--}(t',t)\,, \qquad (22)$$

以及先前写出的约束条件。

将生成泛函写成方程 (19) 的形式，便于像往常一样求得关联函数；我们将在下文第一个小节中进一步讨论这一点。在接下来的两个小节中，我们将求出 $G^{\pm\pm}(t,\ t')$ 的初始条件和运动方程，并概述如何求解由此得到的方程。

A. n点关联

如附录 B 中对幺正演化情形的说明，对 $X(t)$ 求一阶和二阶关联函数，只需对 $Z[J^+,J^-]$ 关于 $J^\pm$ 取泛函导数即可。对于振子与环境耦合的情形，我们也可以写出类似的表达式：整个系统（包括环境）作幺正演化，随后对环境取迹。因此，在存在耗散时，只需改为对 $Z_{\rm diss.}[J^+,J^-]$ 取泛函导数，就能得到关联函数。将附录 B 中的计算推广到耗散情形，并进一步推广到一阶和二阶关联以外的情况，可得

$$\begin{aligned}&\left\langle \bar{T}\{\hat{X}(t_{n+1})\dots\hat{X}(t_{n+m})\}T\{\hat{X}(t_1)\dots\hat{X}(t_n)\}\right\rangle\\ &\quad=(-i)^n i^m\frac{\delta}{\delta J^+(t_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J^+(t_n)}\frac{\delta}{\delta J^-(t_{n+1})}\\ &\qquad\times\cdots\frac{\delta}{\delta J^-(t_{n+m})}Z_{\rm diss.}[J^+,J^-]\Big|_{J^\pm=J},\end{aligned}\tag{23}$$

存在源 $J(t)$ 时，其中前面的 n 算符按时间序排列，记作 T，后面的 m 则按 $\bar{}$ 反时间序排列，记作 $\bar{T}$。

现在我们希望利用方程 (19) 将 n点关联与格林函数联系起来。先考虑单点函数 $\langle\hat{X}(t)\rangle$。在方程 (23) 中令 $n=1$和 $m=0$，并利用方程 (19)，可得

$$\begin{aligned}\langle\hat{X}(t)\rangle&=i\int_{t'}\big[G^{++}(t,t')J_s^+(t')\\&\qquad-G^{+-}(t,t')J_s^-(t')\big]\Big|_{J^\pm=J}.\end{aligned}\tag{24}$$

我们预计 $\langle\hat{X}(t)\rangle$ 会与经典运动方程的解相符。接下来考虑两点关联 $\langle T\hat{X}(t)\hat{X}(t')\rangle$ 和 $\langle\bar{T}\hat{X}(t')\hat{X}(t)\rangle$。它们给出函数 $G^{++}(t,t')$ 和 $G^{+-}(t,t')$，再加上单点期望值的乘积，因此

$$\left\langle T\hat{X}(t)\hat{X}(t')\right\rangle_c=G^{++}(t,t'),\tag{25}$$

$$\left\langle\hat{X}(t')\hat{X}(t)\right\rangle_c=G^{+-}(t,t').\tag{26}$$

类似地，我们可以证明 $\left\langle\bar{T}\hat{X}(t)\hat{X}(t')\right\rangle_c=G^{--}(t,t')$ 以及 $\left\langle\hat{X}(t)\hat{X}(t')\right\rangle_c=G^{-+}(t,t')$，其中 $\bar{T}$ 表示反时间排序。由于它们也分别等于上述表达式的厄米共轭，我们进一步有 $G^{--}(t,t')=G^{++*}(t,t')$ 以及 $G^{-+}(t,t')=G^{+-*}(t,t')$。

现在，我们可以用更方便的形式表示函数 $G^{\pm\pm}(t,t')$。将 $G^{+-}(t,t')$ 记作 $G^<(t,t')$，将 $G^{-+}(t,t')$ 记作 $G^>(t,t')=G^{<*}(t,t')$，并展开 $\left\langle T\hat{X}(t)\hat{X}(t')\right\rangle_c=\left\langle\hat{X}(t)\hat{X}(t')\right\rangle_c\theta(t-t')+\left\langle\hat{X}(t')\hat{X}(t)\right\rangle_c\theta(t'-t)$。于是我们可以写成

$$G^{++}(t,t')=G^>(t,t')\theta(t-t')+G^<(t,t')\theta(t'-t),\tag{27}$$

$$G^{+-}(t,t')=G^<(t,t'),\tag{28}$$

并将 $G^{--}(t,t')$ 表示为方程 (27) 的复共轭。请注意，如上所述写出的函数 $G^{\pm\pm}(t,t')$ 满足本节前文所述的所有约束条件和条件。利用方程 (27) 和 (28)，以及 $G^{--}(t,t')$ 和 $G^{-+}(t,t')$ 的类似表达式，我们可以验证它们还满足

$$G^{++}(t,t')-G^{+-}(t,t')-G^{-+}(t,t')+G^{--}(t,t')=0,\tag{29}$$

这对于确保 $Z_{\rm diss.}[J,J]=1$ 是必要的，并且在本节稍后也将证明很有用。

最后，让我们考虑通过在方程 (23) 中令 $m=0$ 得到的 n点关联函数 $\langle T\hat{X}(t_1)\dots\hat{X}(t_n)\rangle$。再次使用关于 $Z_{\rm diss.}[J^+,J^-]$ 的方程 (19)，并展开右侧的 $J^+(t_i)$ 导数，我们得到所有 $G^{++}(t_i,t_j)$ 的乘积，外加当 n 为偶数时的一组非连通关联函数，或当 n为奇数时仅有的一组非连通关联函数。将非连通关联函数移至左侧后，便得到时刻 $t_1,\dots,t_n$处 $\hat{X}(t)-\langle\hat{X}(t)\rangle$ 的时间序乘积。因此，$\hat{X}(t)-\langle\hat{X}(t)\rangle$的时间序乘积满足维克定理。我们还可以用一种更简单的方式得到这一结果，因此值得讨论：将方程 (19) 写成略有不同的形式。展开方程 (19) 右侧平移后的源并重新整理所得表达式后，我们可以将其写为

$$\begin{aligned}&\exp\left[-i\int_t\left\{J^+(t)-J^-(t)\right\}\langle\hat{X}(t)\rangle\right]Z_{\rm diss.}[J^+,J^-]\\&\quad=\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t,t'}\boldsymbol{J}_c^T(t)\boldsymbol{G}(t,t')\boldsymbol{J}_c(t')\right],\end{aligned}\tag{30}$$

其中，方程（24）中给出的 $\langle\hat{X}(t)\rangle$，是在源 $J(t)$ 存在时计算的，而 $\boldsymbol{J}_c(t)=\begin{bmatrix}J^+\\-J^-\end{bmatrix}(t)-J(t)+J(t)$。对方程（30）关于 $J^+(t_i)$ 求导，并令 $J^\pm(t)=J(t)$，现在即可得到左边的时间序乘积 $\hat{X}(t)-\langle\hat{X}(t)\rangle$，其时刻为 $t_1,\dots,t_n$；右边则为 $G^{++}(t_i,t_j)$ 的乘积（当 n 为偶数时），若 n 为奇数则为零，由此直接得到维克定理。

B. 初始条件

在上一小节中，我们说明了 $X(t)$ 的连通二点关联可以与函数 $G^{\pm\pm}(t,t')$ 对应起来。接下来，我们要说明海森堡绘景算符 $P(t)$ 可表示为 $P(t)=X(t)$，因此还可以将涉及 $P(t)$ 的连通二点关联与 $G^{\pm\pm}(t,t')$ 的时间导数联系起来。若将方程 (27) 中给出的 $G^{++}(t,t')$ 形式代入方程 (13) 给出的运动方程，并令两边的 δ函数相等，我们会发现，对于那些不与 $\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 成正比的核 $\gamma_1(t,t')$，这会导出朗斯基条件 $(\partial_t-\partial_{t'})G^<(t,t')\big|_{t=t'}=i$。同样，我们还要求 $\gamma_2(t,t')$ 不与 $\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 成正比，以免 $G^{+-}(t,t')$

方程破坏这一条件。由于 $G^<(t,\ t') = \langle \hat{X}(t')\,\hat{X}(t)\rangle_c$，朗斯基条件进一步意味着. $\langle[\hat{X}(t),\ \hat{X}(t)]\rangle = i$ ，这与对易关系 $[\hat{X}(t),\ \hat{P}(t)] = i$ 一起，表明 确实有$\hat{X}\,\hat{P}(t) = X(t)$。本文将只考虑保持 $P(t) = X(t)$ 的影响泛函，但需注意，更一般的影响泛函并不一定满足这一点，尤其是那些源自导数型系统-环境相互作用的影响泛函。

$\hat{X}\,\hat{X}$借助 $P(t) = X(t)$，我们可以直接将式（4）、（5）和（6）中给出的初始条件转写为对 $G^{\pm\pm}(t,\ t')$ 的条件，尤其是对 $G^<(t,\ t')$ 的条件，

$$G^<(t_0,t_0) \;=\; c_{xx}\,, \tag{31}$$

$$\frac{1}{2}(\partial_t+\partial_{t'})G^<(t,t')\big|_{t=t'=t_0} \;=\; c_{xp}\,, \tag{32}$$

$$\partial_t\partial_{t'}G^<(t,t')\big|_{t=t'=t_0} \;=\; c_{pp}\,. \tag{33}$$

由朗斯基条件，或初始时刻 $\hat{X}\,\hat{X}(t)$ 与 $P(t)$ 的对易子，我们还可得

$$(\partial_t-\partial_{t'})G^<(t,t')\big|_{t=t'=t_0} \;=\; i\,. \tag{34}$$

如下文所示，公式（31）、（32）和（33）中的三个初始条件足以求解我们将在下一小节中引入的对称化二点关联函数的运动方程。

还值得注意的是，此处写出的初始条件与方程（13）中运动方程里的 $\delta(t'-t_0)$ 项一致；为完整起见，我们接下来加以说明。具体考虑 $t_0 \le t, t' < t_f$ 时 $G^{++}(t,t')$ 和 $G^{+-}(t,t')$ 的运动方程，这些方程是将公式（11）和（12）中给出的 $\mathcal{O}(t,t')$ 的 11 和 12 分量代入方程（13）得到的。略去在 t_f 处含有 δ-函数的项（因为它们会相互抵消），并进一步假设耗散项具有不影响初始条件的形式而将其略去后，$G^{++}(t,t')$ 和 $G^{+-}(t,t')$ 方程变为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2+2\delta(t-t_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-A\right)\right]G^{++}(t,t')-2iB\delta(t-t_0)G^{-+}(t,t') \;=\; -i\delta(t-t')\,, \tag{35}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2+2\delta(t-t_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-A\right)\right]G^{+-}(t,t')-2iB\delta(t-t_0)G^{--}(t,t') \;=\; 0\,. \tag{36}$$

首先，在方程 (35) 中令 $t' = t_0+\epsilon$，其中 ϵ 是某个小参数，并将该方程对 t 从 t_0 积分到 $t_0+2\epsilon$，注意处理在积分上下限处计算 δ-函数时产生的 $1/2$ 因子。将方程 (27)、(28) 及下文给出的 $G^{\pm\pm}(t,\ t')$ 的形式代入所得方程，并进一步取极限 $\epsilon\to 0$ ，得到

$$\partial_t G^>(t,t_0)\big|_{t=t_0} - (A+iB)G^<(t_0,t_0) \;=\; -i\,. \tag{37}$$

接下来，将方程 (36) 对 t 从 t_0 积分到 $t_0+\epsilon$。同样，将方程 (27)、(28) 及下文给出的 $G^{\pm\pm}(t,\ t')$ 的形式代入所得方程，并进一步取极限 $\epsilon\to 0$ ，得到

$$\partial_t G^<(t,t')\big|_{t=t_0} - AG^<(t_0,t') - iBG^{--}(t_0,t') \;=\; 0\,, \tag{38}$$

对于任意 t'。对于 $t' = t_0$ 的特定取值，并利用$G^<(t,\ t') = G^{>*}(t,\ t')$，将方程 (37) 和 (38) 相加可得

$$(\partial_t+\partial_{t'})G^<(t,t')\big|_{t=t'=t_0} - 2(A+iB)G^<(t_0,t_0) \;=\; -i\,. \tag{39}$$

现在先令该方程两边的虚部相等，再令实部相等，并利用方程 (4) 和 (5) 中 c_{xx} 和 c_{xp} 的定义，可得方程 (31) 和 (32) 给出的初始条件。同样，令 $t' = t_0$ ，并用方程 (38) 减去方程 (37)，可得方程 (34) 给出的初始时刻的对易子或朗斯基条件。最后，对方程 (38) 关于 t' 求导，并令 $t' = t_0+\epsilon$。利用先前的初始条件化简所得方程，取极限 $\epsilon\to 0$，再利用方程 (6) 中 c_{pp} 的定义，即可得到方程 (33) 中的初始条件。

C. 运动方程

接下来，我们考虑上一小节所述推导出的 $G^{\pm\pm}(t,t')$ 的运动方程。我们略去在 t_0 处含有 δ-函数的项，因为这些项仅对 $G^{\pm\pm}(t,t')$ 施加初始条件；也略去在 t_f 处含有 δ-函数的项，因为如前所述，这些项会相互抵消。于是，对于 $t_0 < t, t' < t_f$，$G^{++}(t,t')$ 和 $G^{+-}(t,t')$ 满足以下方程，

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\right)G^{++}(t,t')-2\int_{t''}\left[\gamma_1(t,t'')G^{++}(t'',t')+\gamma_2^*(t,t'')G^{-+}(t'',t')\right] \;=\; -i\delta(t-t')\,, \tag{40}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\right)G^{+-}(t,t')-2\int_{t''}\left[\gamma_1(t,t'')G^{+-}(t'',t')+\gamma_2^*(t,t'')G^{--}(t'',t')\right] \;=\; 0\,, \tag{41}$$

而 $G^{--}(t,t')$ 和 $G^{-+}(t,t')$ 满足上述方程的复共轭。

为求解这些方程，最简单的方法是先通过旋转到一个新基底将它们解耦，

$$\boldsymbol{\xi}(t) \;=\; \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t) \quad \text{with} \quad \boldsymbol{M} \;=\; \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}(t)$ 是一个包含 $\xi^{\pm}(t)$ 的向量。两个基底中的微分算符和格林函数之间的关系为 $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\xi}(t,t') \;=\; \left(\boldsymbol{M}^{-1}\right)^T \boldsymbol{\mathcal{O}}(t,t')\boldsymbol{M}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{G}^{\xi}(t,t') \;=\; \boldsymbol{M}\boldsymbol{G}(t,t')\boldsymbol{M}^T$，分别由方程 (9) 和 (13) 得出，其中 $\boldsymbol{G}^{\xi}(t,t')$ 是一个包含函数 $G^{\xi,\pm\pm}(t,t')$ 的 2×2 矩阵。将这些函数明确写出很有启发性，

$$G^{\xi,++}(t,t') \;=\; \frac{1}{2}\left[G^{>}(t,t')+G^{<}(t,t')\right]\,, \tag{43}$$

$$G^{\xi,+-}(t,t') \;=\; \left[G^{>}(t,t')-G^{<}(t,t')\right]\theta(t-t')\,, \tag{44}$$

$$G^{\xi,-+}(t,t') \;=\; G^{\xi,+-}(t',t)\,, \tag{45}$$

$$G^{\xi,--}(t,t') \;=\; 0\,, \tag{46}$$

其中，最后一个恒等式由方程 (29) 得出。因此，$G^{\xi,++}(t,t')$ 是对称化关联函数，而 $G^{\xi,+-}(t,t')$ 是该理论的推迟格林函数。

现在，我们可以用与求解函数 $G^{\pm\pm}(t,\ t')$ 类似的方法，得到函数 $G^{\xi,\ \pm\pm}(t,\ t')$ 的运动方程。由于 $G^{\xi,\ --}(t,\ t')$ 恒等于零，其运动方程给出约束

$$\int_{t''}\left[\gamma_{1I}(t,t'')-\gamma_{2I}(t,t'')\right]G^{\xi,+-}(t'',t') \;=\; 0\,, \tag{47}$$

其中，下标 I 表示虚部，与前文相同。我们据此认为 $\gamma_{1I}(t,\ t') = \gamma_{2I}(t,\ t')$，不过也可以设想存在满足此约束的更一般函数类。于是，$G^{\xi,\ ++}(t,\ t')$ 和 $G^{\xi,\ +-}(t,\ t')$ 的方程可简化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\right)G^{\xi,++}(t,t')-2\int_{t''}\left[\gamma_{1R}(t,t'')+\gamma_{2R}(t,t'')\right]G^{\xi,++}(t'',t') \;=\; 2i\int_{t''}\gamma_{1I}(t,t'')G^{\xi,+-}(t',t'')\,, \tag{48}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\right)G^{\xi,+-}(t,t')-2\int_{t''}\left[\gamma_{1R}(t,t'')+\gamma_{2R}(t,t'')\right]G^{\xi,+-}(t'',t') \;=\; -i\delta(t-t')\,, \tag{49}$$

对于特定的耗散核，可以求解这些方程。注意，只有两个实函数 $\gamma_{1R}(t,t') + \gamma_{2R}(t,t')$ 和 $\gamma_{1I}(t,t')$ 对耗散有贡献。上面第二个方程的解给出了该理论的推迟格林函数 $G^{\xi,\ +-}(t,t')$。另一方面，第一个方程给出对称化关联函数 $G^{\xi,\ ++}(t,t')$；求解时，可先将其写成齐次项与特解（即噪声项）之和，分别记为 $G^{\xi,++[h]}(t,t')$ 和 $G^{\xi,++[n]}(t,t')$。齐次项是右端为零的方程 (48) 的解，并满足上一小节中写出的初始条件；噪声项则通过将方程 (48) 右端的源项与推迟格林函数作卷积得到，并在初始时刻（即 $t' = t_0$）消失。下一节中，我们将为耗散核选取一种特定形式，以便在这种情况下显式求出 $G^{\xi,+-}(t,t')$ 和 $G^{\xi,++}(t,t')$。

IV. 时间局域耗散

本节将聚焦于简单且研究充分的时间局域耗散情形，以了解振子是否会热化。例如，在 Caldeira-Leggett 模型中，当考虑具有无限截止的欧姆谱密度以及高温区间 $[8, 30]$时，就会得到时间局域耗散。首先，为了将方程 (48) 和 (49) 左侧的积分化简为简单的阻尼项，我们选择耗散核，使得 $\gamma_{1R}(t,\ t') + \gamma_{2R}(t,\ t') = \gamma \mathrm{d}\delta(t-t')/\mathrm{d}t'$，其中 γ 是一个（实数）正值常数。其次，为了将方程 (48) 右侧的积分化简为局域源项，我们选择 $\gamma_{1I}(t,\ t') = (\alpha/2)\delta(t-t')$，其中 α 是一个（实数）常数。方程 (48) 和

将方程 (49) 化简为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)G^{\xi,++}(t,t') \;=\; i\alpha G^{\xi,+-}(t',t)\,, \quad (50)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)G^{\xi,+-}(t,t') \;=\; -i\delta(t-t')\,. \quad (51)$$

目前，我们尚未对常数 γ 和 α施加任何条件，除了 $\gamma \geq 0$。我们注意到，在具有时间局域耗散的 Caldeira-Leggett 模型中，耗散核为 $\gamma_{1R}(t,\ t')+\gamma_{2R}(t,\ t') = 2\gamma\ [\mathrm{d}\delta(t-t')/\mathrm{d}\ t']\theta(t-t')$，以及 $\gamma_{1I}(t,\ t') = (2\gamma/\beta_{\mathrm{env}})\delta(t-t')$，其中 β_{env} 是热环境温度的倒数与玻尔兹曼常数的乘积。因此，我们可以通过保留 γ 不变，并在下文的结果中将 α 替换为 $4\gamma/\beta_{\mathrm{env}}$，将讨论特化到这一模型。

我们将在下文第一小节中求解运动方程 (50) 和 (51)。在接下来的两个小节中，我们将求出振子的纯度，并检查在晚期极限下是否满足涨落耗散关系，同时表明 γ 和 α 实际上不能彼此独立。

A. 格林函数

首先，让我们求解方程 (51)，以得到该理论的迟滞格林函数 $G^{\xi,\ +-}(t,\ t')$。在傅里叶空间中很容易求解 [31], ，因此 $G^{\xi,\ +-}(t,\ t')$ 可由以下逆傅里叶变换给出，

$$G^{\xi,+-}(t,t') \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi}\frac{ie^{-i\omega'(t-t')}}{\omega'^2+2i\gamma\omega'-\omega^2}\,. \quad (52)$$

被积函数有两个简单极点 $\omega' \;=\; -i\gamma \pm\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$，当 $\omega>\gamma$或 $\omega<\gamma$ 且假设 $\gamma>0$时，它们都位于负虚轴上。将积分路径从下方闭合，得到

$$G^{\xi,+-}(t,t') \;=\; -\frac{ie^{-\gamma(t-t')}}{\Gamma}\sin\left[\Gamma(t-t')\right]\theta(t-t')\,, \quad (53)$$

其中 $\Gamma \;=\; \sqrt{\omega^2-\gamma^2}$，并且我们还可以验证，该表达式在 $\omega=\gamma$ 和 $\gamma=0$ 极限下也符合要求。

接下来我们求解公式（50）以得到对称化二点关联函数，$G^{\xi,\ ++}(t,\ t')$。公式（50）是一个非齐次微分方程，如前文所述，其解由齐次项 $G^{\xi,\ ++[h]}(t,\ t')$ 和特解或噪声项 $G^{\xi,\ ++[n]}(t,\ t')$ 构成，

$$G^{\xi,++}(t,t') \;=\; G^{\xi,++[h]}(t,t')+G^{\xi,++[n]}(t,t')\,, \quad (54)$$

我们依次考虑的对象。齐次项是方程的解

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)G^{\xi,++[h]}(t,t') \;=\; 0\,, \quad (55)$$

并且，正如前文所述，它满足对完整解 $G^{\xi,++}(t,t')$施加的初始条件。现在，由于 $G^{\xi,++}(t,t')$ 在交换t 和 t'后保持对称，因此它在两个时间坐标中都满足相同的运动方程。又注意到 $G^{\xi,++}(t,t')$ 是实函数，方程 (55) 的解必定具有如下形式

$$G^{\xi,++[h]}(t,t') \;=\; ah(t)h(t')+a^*h^*(t)h^*(t') + b\left[h(t)h^*(t')+h^*(t)h(t')\right], \quad (56)$$

其中，a 是一个复常数，b 是一个实常数，并且 $h(t)$和 $h^*(t)$是方程 $\ddot{h}(t)+2\gamma\dot{h}(t)+\omega^2h(t)=0$的解。

公式（56）中的常数 a 和 b 可以利用公式（31）、（32）和（33）中的初始条件确定；这些初始条件可直接转化为关于 $G^{\xi,\ ++}(t,\ t')$，进而关于 $G^{\xi,\ ++[h]}(t,\ t')$ 的初始条件。因此，我们得到三个关于三个常数的方程，从而可将 a_R、a_I 和 b 表示为 c_{xx}、c_{xp} 和 c_{pp} 以及另外的. $\dot{h}(t_0)$、$h(t_0)$、$h^*(t_0)$ 和 $\dot{h}^*(t_0)$ [32]的函数。最后，我们还需要求出 $h(t)$ 和 $h^*(t)$ 的解。$h(t)$的解可写为

$$h(t) \;=\; -iG_1(t)h(t_0)+iG_2(t)\dot{h}(t_0)\,, \quad (57)$$

其中，$G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 是满足与 $h(t)$ 相同方程的解，其初始条件为 $G_1(t_0) \;=\; i$,. $\dot{G}_1(t_0)=0$ and $G_2(t_0)=0, \dot{G}_2(t_0)=-i$；而 $h^*(t)$ 的解同样可表示为 $h^*(t) \;=\; -iG_1(t)h^*(t_0)+iG_2(t)\dot{h}^*(t_0)$。现在将所得常数 a_R, a_I 和 b 的表达式，以及 $h(t)$ 和 $h^*(t)$ 的解代回公式（56），即可得到 $G^{\xi,++[h]}(t,t')$ 的最终表达式，

$$G^{\xi,++[h]}(t,t') \;=\; -G_1(t)G_1(t')c_{xx}+\left[G_2(t)G_1(t') + G_1(t)G_2(t')\right]c_{xp}-G_2(t)G_2(t')c_{pp}\,. \quad (58)$$

最后，我们写出函数 $G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 的表达式，

$$G_1(t) \;=\; ie^{-\gamma(t-t_0)}\left(\cos\left[\Gamma(t-t_0)\right]+\frac{\gamma}{\Gamma}\sin\left[\Gamma(t-t_0)\right]\right), \quad (59)$$

$$G_2(t) \;=\; -\frac{ie^{-\gamma(t-t_0)}}{\Gamma}\sin\left[\Gamma(t-t_0)\right]. \quad (60)$$

总之，将公式（59）和（60）代入公式（58），即可得到对称化二点关联函数的齐次部分：

$$G^{\xi,++[h]}(t,t') = \frac{1}{2\Gamma^2}e^{-\gamma(t+t'-2t_0)}\big\{\cos\left[\Gamma(t-t')\right]\left(\omega^2 c_{xx}+2\gamma c_{xp}+c_{pp}\right)-\cos\left[\Gamma(t+t'-2t_0)\right]\left(\gamma^2 c_{xx}-\Gamma^2 c_{xx} + 2\gamma c_{xp}+c_{pp}\right)+2\Gamma\sin\left[\Gamma(t+t'-2t_0)\right]\left(\gamma c_{xx}+c_{xp}\right)\big\}. \tag{61}$$

我们看到，$G^{\xi,++[h]}(t,t')$ 与 $e^{-\gamma(t+t'-2t_0)}$</style} 成正比，因此当 $\gamma(t-t_0)\gg 1$ 和 $\gamma(t'-t_0)\gg 1$ 时，无论初始条件 c_{xx}、c_{xp} 和 c_{pp} 如何选择，该项都趋于零。

公式（54）中的噪声贡献更容易计算；如前所述，它是将公式（50）右侧的源项与推迟格林函数卷积得到的，

$$G^{\xi,++[n]}(t,t') = -\alpha\int_{t''}\left[G^{\xi,+-}(t,t'')G^{\xi,+-}(t',t'')\right]. \tag{62}$$

我们不失一般性地选择 $t\geq t'$，此时利用公式（53）可得 $G^{\xi,+-}(t,t')$，

$$G^{\xi,++[n]}(t,t') = -\frac{\alpha}{4\gamma\omega^2\Gamma^2}e^{-\gamma(t+t'-2t_0)}\big(\omega^2\cos\left[\Gamma(t-t')\right]-\gamma^2\cos\left[\Gamma(t+t'-2t_0)\right]+\gamma\Gamma\sin\left[\Gamma(t+t'-2t_0)\right]\big) + \frac{\alpha}{4\gamma\omega^2\Gamma}e^{-\gamma(t-t')}\big(\Gamma\cos\left[\Gamma(t-t')\right]+\gamma\sin\left[\Gamma(t-t')\right]\big). \tag{63}$$

如前所述，注意到在初始时刻（即 $t'=t_0$）该项为零。我们看到，$G^{\xi,++[n]}(t,t')$ 也包含一项与 $e^{-\gamma(t+t'-2t_0)}$ 成正比的部分，当 $\gamma(t-t_0)\gg 1$ 和 $\gamma(t'-t_0)\gg 1$时，该部分在相应极限下为零；此外，它还包含一项与 $e^{-\gamma(t-t')}$ 成正比的部分，除非 $\gamma(t-t')\gg 1$ 也成立，否则该部分不一定为零。这一点对于我们在本节稍后讨论的涨落耗散关系很重要。

有了格林函数，我们还可以利用公式（24）写出单点函数$\langle\hat{X}(t)\rangle$的表达式。将公式（10）后给出的平移后的源表达式代入公式（24），可见 $\langle X(t)\rangle$可以表示为

$$\langle\hat{X}(t)\rangle = i\int_{t'}G^{\xi,+-}(t,t')J(t')-iG_1(t)x_0+iG_2(t)p_0, \tag{64}$$

在没有源的情况下，利用公式（59）和（60），它变为

$$\langle\hat{X}(t)\rangle = e^{-\gamma(t-t_0)}\left(\cos\left[\Gamma(t-t_0)\right]+\frac{\gamma}{\Gamma}\sin\left[\Gamma(t-t_0)\right]\right) \times x_0+\frac{e^{-\gamma(t-t_0)}}{\Gamma}\sin\left[\Gamma(t-t_0)\right]p_0. \tag{65}$$

请注意，当 $\gamma(t-t_0)\gg 1$时，该式在极限下趋于零。

B. 纯度

如第 IIA 节所述，高斯态中振子的纯度可以用其二点关联函数表示。在初始时刻 t_0，我们发现 $\mathrm{Pu}(t_0)=0.5/\sqrt{c_{xx}c_{pp}-c_{xp}^2}$。类似地，我们也可以利用任意时刻 t 的二点关联函数来表示该时刻的纯度：

$$\mathrm{Pu}(t) = \frac{0.5}{\sqrt{\left\langle\hat{X}^2(t)\right\rangle_c\left\langle\hat{P}^2(t)\right\rangle_c-(1/4)\left\langle\left\{\hat{X}(t),\hat{P}(t)\right\}\right\rangle_c^2}}, \tag{66}$$

而相关函数则由上一小节的 $G^{\xi,++}(t,t')$ 得到，

$$\left\langle\hat{X}^2(t)\right\rangle_c = G^{\xi,++}(t,t), \tag{67}$$

$$\frac{1}{2}\left\langle\left\{\hat{X}(t),\hat{P}(t)\right\}\right\rangle_c = \partial_{t'}G^{\xi,++}(t,t')\big|_{t'=t}, \tag{68}$$

$$\left\langle\hat{P}^2(t)\right\rangle_c = \partial_t\partial_{t'}G^{\xi,++}(t,t')\big|_{t'=t}. \tag{69}$$

我们不写出二点关联函数的显式表达式，但可以利用上一小节的结果推导出来。不过，考察纯度的最终表达式很有启发性，我们发现它为

$$\mathrm{Pu}(t) = \Big[\frac{\alpha^2}{4\gamma^2\omega^2} - \frac{\alpha}{2\gamma^2\omega^2\Gamma^2}e^{-2\gamma(t-t_0)}\big\{\omega^2\left(-2\omega^2\gamma c_{xx} - 4\gamma^2 c_{xp} - 2\gamma c_{pp} + \alpha\right) + \gamma^2\left(2\omega^2\gamma c_{xx} + 4\omega^2 c_{xp} + 2\gamma c_{pp} - \alpha\right)\cos\left[2\Gamma(t-t_0)\right] - 2\gamma^2\Gamma\left(\omega^2 c_{xx} - c_{pp}\right)\sin\left[2\Gamma(t-t_0)\right]\big\} + \frac{1}{4\gamma^2\omega^2}e^{-4\gamma(t-t_0)}\left(-4\alpha\omega^2\gamma c_{xx} + 16\omega^2\gamma^2 c_{xx}c_{pp} - 16\omega^2\gamma^2 c_{xp}^2 - 4\alpha\gamma c_{pp} + \alpha^2\right)\Big]^{-1/2}. \tag{70}$$

特别是在晚时极限下，上述表达式可简化为

$$\lim_{\gamma(t-t_0)\gg 1} \mathrm{Pu}(t) = \frac{2\gamma\omega}{\alpha}. \tag{71}$$

因此，晚时间纯度与初始条件 c_{xx}、 c_{xp}和 c_{pp}无关，这与晚时间关联函数类似，而且实际上是一个常数。由于纯度在任何时刻都必须介于 0 和 1 之间，我们得到关于这三个参数的约束： $0 \le 2\gamma\omega/\alpha \le 1$，这表明耗散参数 γ 和 α 彼此并非独立，并且 α 为正。我们还发现， α 不能设为零，否则晚时间纯度将发散。换句话说，方程（70）的 $\alpha \to 0$ 极限为

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathrm{Pu}(t) = e^{2\gamma(t-t_0)}\mathrm{Pu}(t_0), \tag{72}$$

它随时间呈指数增长，因此不具有物理意义。若 γ 非零，则 α 必须非零；这与导致振子发生耗散的环境本身的性质有关。

我们甚至可以进一步重构晚时间密度算符。由于初态为高斯态且动力学是线性的，我们预期任意时刻 t 的密度矩阵$\langle x^+|\hat{\rho}(t)|x^-\rangle$ 都与第二节 A 中的初始密度矩阵具有相同形式，只需将所有关联函数—— x_0、 p_0、 c_{xx}、 c_{xp}和 c_{pp} ——替换为时刻 t的关联函数。利用上一小节中的表达式（不含源）进行替换后，我们发现晚时间密度矩阵为

$$\langle x^+|\hat{\rho}(\infty)|x^-\rangle = \omega\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi\alpha}}\exp\Big[-\frac{\omega}{4}\Big\{\frac{\alpha}{2\gamma\omega}(x^+-x^-)^2 + \frac{2\gamma\omega}{\alpha}\left(x^+ + x^-\right)^2\Big\}\Big]. \tag{73}$$

让我们将其与处于热态的孤立谐振子的密度算符进行比较，$\hat{\rho}_\beta(t) = e^{-\beta H}$，其中 β 是振子温度与玻尔兹曼常数乘积的倒数。在位置基中，$\hat{\rho}_\beta(t)$ 表示为

$$\langle x^+|\hat{\rho}_\beta(t)|x^-\rangle = \sqrt{\frac{\omega\tanh(\beta\omega/2)}{\pi}}\exp\Big[-\frac{\omega}{2\sinh(\beta\omega)} \times\Big\{\left[(x^+)^2 + (x^-)^2\right]\cosh(\beta\omega) - 2x^+x^-\Big\}\Big]. \tag{74}$$

式（73）和式（74）共同表明，阻尼谐振子会热化至温度 $\beta = (2/\omega)\tanh^{-1}(2\gamma\omega/\alpha)$。我们也可以通过直接比较方程（71）中阻尼谐振子的晚时间纯度与处于热平衡的振子的纯度，得出相同结论；后者同样由 $\mathrm{Pu}(t) = \tanh(\beta\omega/2)$ 给出。不过请注意，尽管晚时间的密度算符是热态，这并不一定意味着涨落耗散关系成立；我们将在下一小节进一步讨论这一点。

在结束本小节之前，我们还绘制了图1，展示由方程（67）、（68）和（69）得到的二点关联函数，以及式（70）中的纯度；其中代入了前一小节中的 $G^{\xi,++}(t,t')$，并选取三种不同的初态和一组耗散参数作为示例。以振子的频率 ω为单位，我们首先考虑一个相干初态，其中 $c_{xx} = 1/(2\omega)$、 $c_{xp} = 0$和 $c_{pp} = \omega/2$，因此 $\mathrm{Pu}(t_0) = 1$。接着考虑一个压缩初态，其中 $c_{xx} = e^{-2r}/(2\omega)$、 $c_{xp} = 0$、 $c_{pp} = e^{2r}\omega/2$和$r = 1$，因此 $\mathrm{Pu}(t_0) = 1$ 同样如此。最后，我们考虑一个热初态，其中 $c_{xx} =$双曲余切$(\beta\omega/2)/(2\omega)$、$c_{xp} = 0$、 $c_{pp} =$双曲余切$(\beta\omega/2)\omega/2$和 $\beta = 1/(2\omega)$，因此 $\mathrm{Pu}(t_0) \approx 0.24$。在这三种情况下，我们都选取耗散参数 $\gamma = \omega/2$和 $\alpha = 10\omega^2$ ，并为简便起见令 $\omega t_0 = 0$ 。我们还展示了温度为 $\beta = (2/\omega)\tanh^{-1}(2\gamma\omega/\alpha) \approx 0.2/\omega$ 的孤立谐振子的结果，以供比较；其关联函数由下文式（75）求得，纯度则使用前一段中的表达式。由图可见，系统的晚时间行为与初态的选择无关，而且等时结果与处于热平衡的振子相符。

C. 涨落耗散关系

涨落耗散关系不只是要求密度算符处于热态，因为它描述的是系统的非同时刻关联函数。让我们先回顾热态下孤立谐振子的涨落耗散关系，$\hat{\rho}_\beta(t) = e^{-\beta H}$。按照我们的记号（见第 III A 节），二点关联 $G^<_\beta(t,\ t')$ 可表示为

$$G^<_\beta(t,t') = \frac{e^{\beta\omega}e^{i\omega(t-t')} + e^{-i\omega(t-t')}}{2\omega(e^{\beta\omega}-1)}, \tag{75}$$

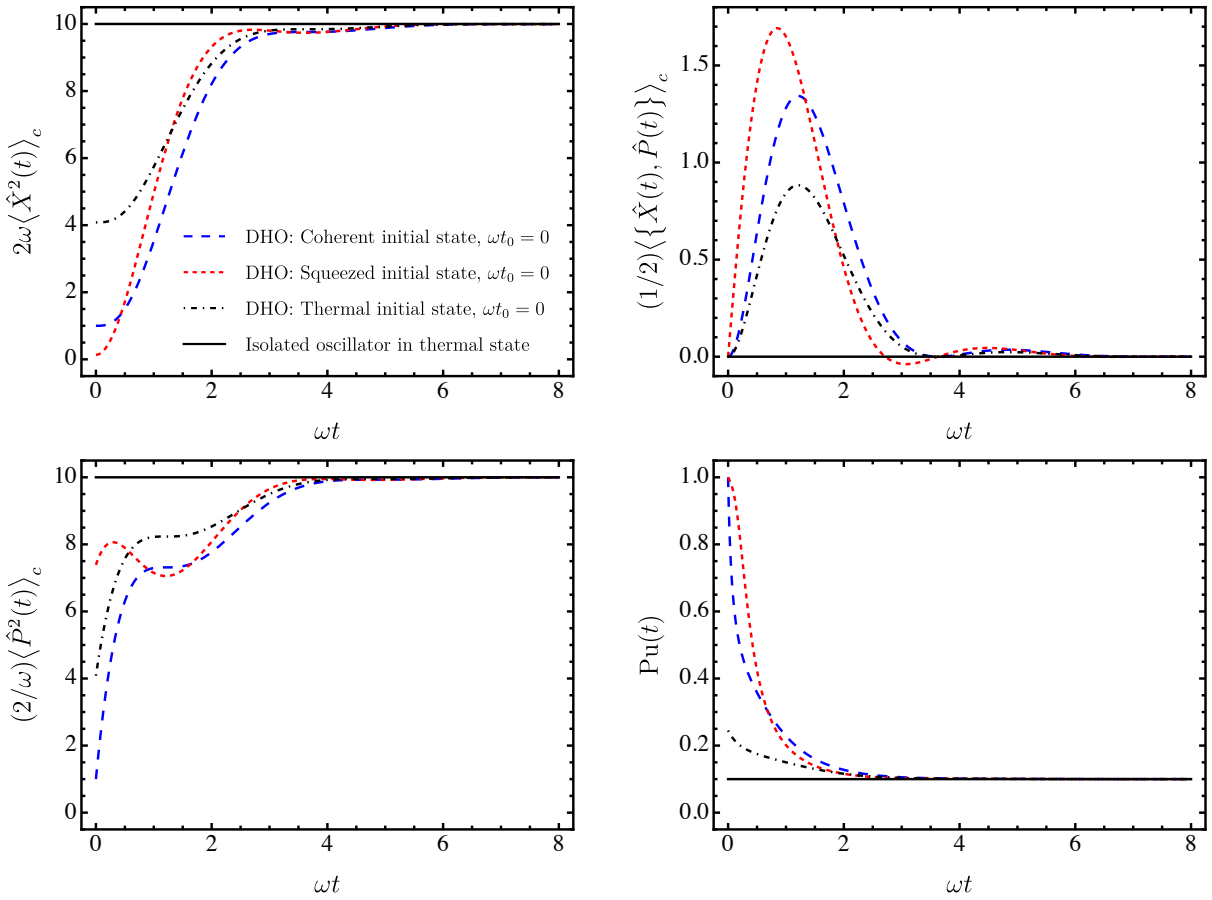

图1. 等时二点关联 $\langle \hat{X}^2(t)\rangle_c$（左上）、$(1/2)\langle\{\hat{X}(t)、\hat{P}(t)\}\rangle_c$（右上）和 $\langle \hat{P}^2(t)\rangle_c$（左下），以及纯度（右下）随时间的变化，分别对应三种不同的初态选择——（i）具有 $c_{xx} = 1/(2\omega)$,$c_{xp} = 0$ 和 $c_{pp} = \omega/2$ 的相干态，（ii）具有 $c_{xx} = e^{-2r}/(2\omega)$, $c_{xp} = 0$, $c_{pp} = e^{2r}\omega/2$ 和 $r = 1$ 的压缩态，以及（iii）具有 $c_{xx} =$ 双曲余切$(\beta\omega/2)/(2\omega)$, $c_{xp} = 0$, $c_{pp} =$ 双曲余切$(\beta\omega/2)\omega/2$ 和 $\beta = 1/(2\omega)$ 的热态。在每种情况下，均考虑具有 $\gamma = \omega/2$ 和 $\alpha = 10\omega^2$ 的时间局域耗散，并为简单起见令 $\omega t_0 = 0$。为作比较，我们还展示了温度为 $\beta = (2/\omega)\tanh^{-1}(2\gamma\omega/\alpha) \approx 0.2/\omega$ 时孤立谐振子的结果。

以及 $G^{>}_{\beta}(t,\ t') = G^{<*}_{\beta}(t,\ t')$。由于方程 (75) 只依赖于时间差，我们将 $G^{<}_{\beta}(t,\ t')$ 和$G^{>}_{\beta}(t,\ t')$ 分别记为 $G^{<}_{\beta}(T)$ 和 $G^{>}_{\beta}(T)$，其中 $T = t - t'$。将 $G^{<}_{\beta}(T)$ 和 $G^{>}_{\beta}(T)$ 的傅里叶变换记作 $\tilde{G}^{<}_{\beta}(\omega')$ 和 $\tilde{G}^{>}_{\beta}(\omega')$，可得 $\tilde{G}^{<}_{\beta}(\omega') = e^{-\beta\omega'}\tilde{G}^{>}_{\beta}(\omega')$，这称为 Kubo-Martin-Schwinger (KMS) 关系。

现在来考虑反对称二点关联 $G^{>}_{\beta}(T) - G^{<}_{\beta}(T)$ 的傅里叶变换，它等于 $\left[G^{>}_{\beta}(T) - G^{<}_{\beta}(T)\right]\theta(T)$ 的傅里叶变换实部的两倍。我们定义

$$\mathcal{A}_{\beta}(\omega') = \mathrm{Re}\int_0^{\infty} \mathrm{d}T\, e^{i\omega' T}\left[G^{>}_{\beta}(T) - G^{<}_{\beta}(T)\right], \quad (76)$$

因此，$\mathcal{A}_{\beta}(\omega') = \left[\tilde{G}^{>}_{\beta}(\omega') - \tilde{G}^{<}_{\beta}(\omega')\right]/2$。类似地，我们用 $\mathcal{A}_{\beta}(\omega')$ 表示对称二点关联函数的傅里叶变换，因此

$$\mathcal{S}_{\beta}(\omega') = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}T\, e^{i\omega' T}\left[G^{>}_{\beta}(T) + G^{<}_{\beta}(T)\right] \quad (77)$$

其表达式为 $\left[\tilde{G}^{>}_{\beta}(\omega') + \tilde{G}^{<}_{\beta}(\omega')\right]/2$。利用 KMS关系，可以证明 $\mathcal{A}_{\beta}(\omega')$ 和 $\mathcal{S}_{\beta}(\omega')$ 满足

$$\mathcal{S}_{\beta}(\omega') = \coth\left(\frac{\beta\omega'}{2}\right)\mathcal{A}_{\beta}(\omega'), \quad (78)$$

这称为涨落耗散关系。

现在，我们想要检验在晚时极限下，前几小节研究的量子阻尼谐振子是否满足涨落耗散关系。首先考虑阻尼谐振子的 $\mathcal{A}(\omega')$，它由 $G^{\xi,+-}(t,t')$ 关于 $T = t - t'$ 的傅里叶变换的实部给出。从.....的傅里叶变换中读出

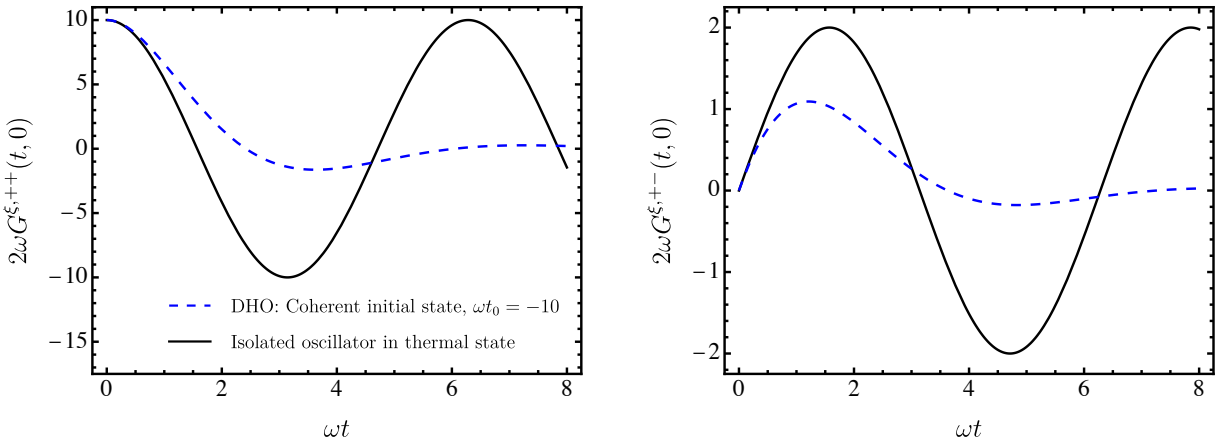

图 2. 量子阻尼谐振子的非等时双点关联函数（对称部分，左；反对称部分，右），并与处于热态的孤立谐振子进行比较。阻尼谐振子以相干态初始化，其参数为 $c_{xx} = 1/(2\omega)$、$c_{xp} = 0$ 和 $c_{pp} = \omega/2$，时间为 $\omega t_0 = -10$；随后经历时间局域耗散，耗散参数为 $\gamma = \omega/2$ 和 $\alpha = 10\omega^2$。孤立谐振子的温度为 $\beta = (2/\omega)\tanh^{-1}(2\gamma\omega/\alpha) \approx 0.2/\omega$。

$G^{\xi,+-}(t,t')$，根据方程（52），我们得到

$$\mathcal{A}(\omega') = \frac{2\gamma\omega'}{|\omega'^2 + 2i\gamma\omega' - \omega^2|^2}. \tag{79}$$

接下来，考虑 $\mathcal{S}(\omega')$，它由 $G^{\xi,++}(t,t')$ 的傅里叶变换给出。我们在第 IV A 节指出，$G^{\xi,++}(t,t')$ 的齐次部分在晚时极限下消失，因此只需考虑其噪声部分。晚时极限下 $G^{\xi,++[n]}(t,t')$ 的傅里叶变换则可由方程（62）得到：首先将 $G^{\xi,+-}(t,t'')$ 和 $G^{\xi,+-}(t',t'')$ 替换为方程（52）中的积分表示，然后将 t'' 积分的上下限设为 $t_0 = -\infty$ 至 $t_f = \infty$，最后利用 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'' e^{i(\omega'+\omega'')t''} = 2\pi\delta(\omega'+\omega'')$ 消去两个频率积分中的一个。由此得到的 $\mathcal{S}(\omega')$ 表达式为

$$\mathcal{S}(\omega') = \frac{\alpha}{|\omega'^2 + 2i\gamma\omega' - \omega^2|^2}, \tag{80}$$

因此，阻尼谐振子的 $\mathcal{A}(\omega')$ 和 $\mathcal{S}(\omega')$ 满足

$$\mathcal{S}(\omega') = \left(\frac{\alpha}{2\gamma\omega'}\right)\mathcal{A}(\omega'). \tag{81}$$

比较方程 (78) 和 (81) 可知，对于多个 ω'，只有在高温区间内两者才相符，此时 $\beta\omega' \ll 1$ 且 $\coth(\beta\omega'/2) \approx 2/(\beta\omega')$，振子热化至的温度由 $\beta = 4\gamma/\alpha$ 给出。这与上一小节末尾在高温极限下得到的温度 $\beta = (2/\omega)\tanh^{-1}(2\gamma\omega/\alpha)$ 一致。它也与本节开头所述区间内 Caldeira-Leggett 模型的环境温度相符；我们当时指出，在该模型中 $\alpha = 4\gamma/\beta_{\mathrm{env}}$。

方程 (81) 也可以解释为量子阻尼谐振子的广义涨落耗散关系。将其与方程 (78) 比较，可得一个依赖频率的有效温度 $\beta_{\mathrm{eff}}(\omega') = (2/\omega')\tanh^{-1}(2\gamma\omega'/\alpha)$ [33–35]。我们看到，该有效温度与先前在孤立频率 $\omega' = \omega$ 处得到的温度 β 一致；然而，这一点的物理意义尚不明确。我们强调，方程 (81) 中的广义涨落耗散关系可用于区分量子阻尼谐振子与处于热态的孤立谐振子。此外，即使在高温区间，也可以通过系统的频谱或非等时测量来区分这两种情况。为清晰起见，我们在图2中明确展示了非等时关联，所用参数与图1相同，初态为相干初态。

还值得注意的是，$G^{\xi,++}(t,t')$ 的晚时极限（即方程（63）中的第二项），也与 [11, 36–39] 中得到的对称二点关联函数一致。该结果是先假设量子阻尼谐振子满足涨落耗散关系，再求 $\coth(\beta\omega'/2)\,\rho(\omega')$ 的逆傅里叶变换，最后取高温且弱耦合（$\omega > \gamma$）极限而得到的。

V. 时间非局域耗散

本节简要考察时间非局域耗散，并具体选取耗散核，使其在晚时极限下满足涨落耗散关系，且适用于任意温度。我们选择与 Caldeira-Leggett 模型中相同的耗散核，再次将谱密度特化为具有无限截止的欧姆型谱密度，

但不再限于高温区间 [8, 30]。在这种情况下，我们和之前一样有$\gamma_{1R}(t,\ t')\ +\gamma_{2R}(t,\ t')\ =2\gamma\ [\mathrm{d}\delta(t-t')/\mathrm{d}t']\theta(t-t')$，并且

$$\gamma_{1I}(t,t')\ =\ \gamma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi}e^{-i\omega'(t-t')}\omega'\coth\left(\frac{\beta_{\mathrm{env}}\omega'}{2}\right),\quad(82)$$

其简单计算结果为 $-(\pi\gamma/\beta_{\mathrm{env}}^2)\mathrm{cosech}^2[\pi(t\ -t')/\beta_{\mathrm{env}}]$。运用上一节的技巧，现在可以求出时间非局域阻尼谐振子相应的反对称和对称两点关联。

$G^{\xi,+-}(t,t')$ 实际上与之前相同，由方程（53）给出。因此，关于 $t-t'$ 的傅里叶变换就是方程（79），为方便起见，我们再次写出：

$$\mathcal{A}(\omega')\ =\ \frac{2\gamma\omega'}{\left|\omega'^2+2i\gamma\omega'-\omega^2\right|^2}\,.\quad(83)$$

$G^{\xi,++}(t,t')$ 的齐次项也没有变化，由方程（61）给出，并且在晚时极限下同样趋于零。另一方面，$G^{\xi,++}(t,t')$ 的噪声项为

$$G^{\xi,++[n]}(t,t')\ =\ -2\int_{t'',t'''}\left[G^{\xi,+-}(t,t'')\gamma_{1I}(t'',t''')\right.$$
$$\left.\times\ G^{\xi,+-}(t',t''')\right],\quad(84)$$

其中 $\gamma_{1I}(t,t')$ 由方程（82）给出。由于本节只需检验涨落耗散关系，因此只需考虑 $G^{\xi,++[n]}(t,t')$ 在晚时极限下的傅里叶变换。可从方程（84）得到该变换：首先将 $G^{\xi,+-}(t,t'')$、$G^{\xi,+-}(t',t''')$ 和 $\gamma_{1I}(t,t')$ 替换为方程（52）和（82）中的积分表示，然后将 t'' 和 t''' 积分的上下限设为 $t_0=-\infty$ 至 $t_f=\infty$，最后利用执行时间积分后得到的 δ 函数，消去三个频率积分中的两个。晚时极限下 $G^{\xi,++}(t,t')$ 的傅里叶变换结果为

$$\mathcal{S}(\omega')\ =\ \coth\left(\frac{\beta_{\mathrm{env}}\omega'}{2}\right)\frac{2\gamma\omega'}{\left|\omega'^2+2i\gamma\omega'-\omega^2\right|^2}\,,\quad(85)$$

对于时间非局域阻尼谐振子，$\mathcal{A}(\omega')$和 $\mathcal{S}(\omega')$因此满足

$$\mathcal{S}(\omega')\ =\ \coth\left(\frac{\beta_{\mathrm{env}}\omega'}{2}\right)\mathcal{A}(\omega')\,.\quad(86)$$

由于这与方程（78）相符，我们得出结论：对于此处选定特定耗散核的时间非局域阻尼谐振子，涨落耗散关系成立，且该系统会热化至热环境的温度。然而，与时间局域情形一样，系统的频谱或非等时测量仍可用于区分量子阻尼谐振子与处于热态的孤立谐振子。

最后，我们讨论一下这与上一节的时间局域情形有何关系。在高温极限下，我们可以利用 $\coth(x)\approx x^{-1}+x/3+O(x^3)$作为 $x\to 0$，对方程（82）中的被积函数进行展开。由于 ω' 的因子在零阶项中相消，核便化为时间局域核，其中 $\gamma_{1I}(t,\ t')\ =(2\gamma/\beta_{\mathrm{env}})\delta(t-t')$。次领先阶项同样值得关注，因为它会在被积函数中产生一个 ω'^2 因子，从而给核带来 $-(\gamma\beta_{\mathrm{env}}/6)\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 项。需要注意的是，单独处理这样的项时必须谨慎，因为在推导中我们假设耗散核 $\gamma_1(t,\ t')$和$\gamma_2(t,\ t')$不正比于 $\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$。不过，我们的推导在此仍应适用，因为这一项是由方程（82）中的完整耗散核展开得到的。我们可以看到，$-(\gamma\beta_{\mathrm{env}}/6)\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 项也会产生时间局域耗散，但噪声项中会出现更高阶时间导数。按照有效场论的思路，在高温极限下，我们因此可以用包含依次更高阶时间导数的时间局域耗散核来替代时间非局域耗散核。回到频域可以看到，级数展开一直对应到方程（86）；涨落耗散关系在领先阶与方程（81）中的关系一致，其中 $\alpha=4\gamma/\beta_{\mathrm{env}}$，并存在更高阶修正。

VI. 超越高斯初态

在前几节中，我们从一开始就将方程 (3) 中高斯密度矩阵所给出的初始条件与量子阻尼谐振子的动力学结合起来，并求解了相关的 2×2 格林函数 $\boldsymbol{G}(t,\ t')$。随后，我们直接从 $\boldsymbol{G}(t,\ t')$ 求得系统的 n 点关联函数和纯度。本节中，我们转而计算量子阻尼谐振子的密度矩阵时间演化算符，而不先将其与初始密度算符卷积。这种方法不仅能够清晰地区分动力学与初始条件的影响，还能得到适用于任意初态选择的等时 n 点关联函数和纯度表达式。

首先，我们回顾一下，不含耗散的路径积分——

$$K[t_f,x_f^+;t_0,x_0^+]\equiv\int_{x_0^+}^{x_f^+}\mathcal{D}x^+\exp\left[i\int_t L[x^+,\dot{x}^+]\right],\quad(87)$$

对于适当的拉格朗日量 L，可通过以下关系使任意初态 $|\Psi[t_0]\rangle$（在薛定谔图像中）随时间向前演化

$$\left\langle x_f^+\middle|\Psi[t_f]\right\rangle=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_0^+K[t_f,x_f^+;t_0,x_0^+]\left\langle x_0^+\middle|\,\Psi[t_0]\right\rangle.\quad(88)$$

这进而意味着，封闭系统的密度矩阵与其初态之间存在如下关系

$$\langle x_f^+|\hat{\rho}[t_f]|x_f^-\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_0^+ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_0^- \langle x_0^+|\hat{\rho}[t_0]|x_0^-\rangle \times K\overline{K}[t_f, x_f^+, x_f^-; t_0, x_0^+, x_0^-], \quad (89)$$

其中，$\hat{\rho}[t_f]$ 的时间演化是方程 (88) 分别作用于右矢和左矢的结果，即，

$$\begin{aligned} K\overline{K}[t_f, x_f^+, x_f^-; t_0, x_0^+, x_0^-] &= K[t_f, x_f^+; t_0, x_0^+]\overline{K}[t_f, x_f^-; t_0, x_0^-] \quad (90)\\ &= \int_{x_0^+}^{x_f^+} \mathcal{D}x^+ \int_{x_0^-}^{x_f^-} \mathcal{D}x^- \times \exp\left[i\int_t \left(L[x^+, \dot{x}^+] - \overline{L[x^-, \dot{x}^-]}\right)\right], \quad (91)\end{aligned}$$

上划线表示复共轭。请注意，此处的时间演化算符可分解为两个独立的算符。然而，正如第二节中提到的，如果$\hat{\rho}$ 描述的是嵌入在更大环境中的子系统，通常情况便不再如此。此时，

$$K\overline{K}[t_f, x_f^+, x_f^-; t_0, x_0^+, x_0^-] = \int_{x_0^+}^{x_f^+} \mathcal{D}x^+ \int_{x_0^-}^{x_f^-} \mathcal{D}x^- \exp\left[iS_T[x^+, x^-]\right], \quad (92)$$

其中，总作用量 S_T 由三个独立项构成，

$$\begin{aligned} S_T[x^+, x^-] &= S[x^+] - \overline{S[x^-]} + S_I[x^+, x^-], \quad (93)\\ S[x^\pm] &= \int_t L[x^\pm, \dot{x}^\pm], \quad (94)\\ S_I[x^+, x^-] &= \int_t L_I[x^+, \dot{x}^+; x^-, \dot{x}^-]. \quad (95)\end{aligned}$$

也就是说，现在作用量中有一项 S_I，它像之前一样在双路径积分中耦合变量 x^+ 和 x^-，使时间演化算符$K\!K$ 不可分解。它的存在同样是由于从完整系统的密度算符中“迹掉”无关或无法访问的态。

在下面的小节中，我们首先对$K\!K$ 施加一个一般约束，然后求解时间局域耗散情况下的$K\!K$ 。接着，我们利用所得解，对任意初态下系统的 n点关联函数和纯度进行时间演化。我们强调，本节求解$K\!K$ 而非$\hat{\rho}[t_f]$，使我们能够得到适用于任意初态的结果，无论初态是高斯态还是非高斯态。

A. 概率守恒

只要我们的子系统能够嵌入一个更大的封闭系统中，那么在任何时刻，找到它处于某个状态的总概率都必须保持为 1。由于 $K\!K$ 是通过对较大封闭系统中无关的状态取迹得到的，因此，再对该子系统中剩余的状态取迹，就相当于对前者的全部状态取迹。因此，我们必须有

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \,\langle x|\hat{\rho}[t_f]|\, x\rangle \quad (96)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_0^+ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_0^- \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_f^+ K\overline{K}[t_f, x_f^+ = x_f^-; t_0, x_0^+, x_0^-]\right] \times \langle x_0^+|\hat{\rho}[t_0]|x_0^-\rangle. \quad (97)\end{aligned}$$

由于初始密度算符是任意的，时间演化算符必须满足

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_f^+ K\overline{K}[t_f, x_f^+ = x_f^-; t_0, x_0^+, x_0^-] = \delta[x_0^+ - x_0^-]. \quad (98)$$

这个保证 $\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}[t_f]] = \overline{1}$ 不变的 $K\!K$ 条件，可以与方程 (2) 后讨论的 $Z_{\mathrm{diss.}}[J, J] = 1$ 条件进行对比。

B. 阻尼谐振子：设定

下面来计算由以下拉格朗日量定义的量子阻尼谐振子的时间演化算符 $K\!K$

$$L[x^\pm, \dot{x}^\pm] = \frac{1}{2}(\dot{x}^\pm)^2 - \frac{1}{2}(\omega^2 - i\alpha)(x^\pm)^2 \quad (99)$$

and

$$L_I[x^+, \dot{x}^+; x^-, \dot{x}^-] = -\gamma\left(x^+ - x^-\right)\left(\dot{x}^+ + \dot{x}^-\right) + igx^+x^-. \quad (100)$$

当然，这是第 IV 节中讨论的时间局域情形，其中这里的 ω、γ 和 α 与该节中的相同。我们将在下面的方程 (148) 和 (149) 中求得位置算符期望值的解和运动方程，从而明确验证这是经典阻尼谐振子系统的量子版本。就物理意义而言，$\omega^2 - i\alpha$ 是简谐振子振荡频率的平方，其中 ω^2 和 $-\alpha$ 分别是其实部和虚部。摩擦强度由 γ 的大小控制。我们加入了 g 项，因为它在二次阶上是允许的；事实上，它最终被证明是必不可少的。

由于 ω 只以平方的形式出现，因此不失一般性，我们将其视为非负。我们还将看到，为避免位置的量子统计期望值出现发散解，摩擦 γ 也必须非负。此外，为确保方程 (98) 中的概率守恒，我们将发现 $g = -\alpha$。最后，对于非零的 γ 和 ω，α 必须为正，才能在渐近未来得到定义良好的密度算符。总而言之，我们将发现

$$\omega > 0\,, \quad (g = -\alpha) < 0\,, \quad \text{and} \quad \gamma > 0\,. \quad (101)$$

与之前一样，我们不讨论方程 (99) 和 (100) 中的模型是如何产生的，而只是假设它是一个参数与时间无关的自洽有效理论。为方便技术处理，我们现在进行如下变量变换 [40]

$$\xi^{\pm} \equiv x^{+} \pm x^{-}\,, \tag{102}$$

在此条件下，总作用量变为

$$S_T[\xi^+,\xi^-] = \int_t \left\{ \frac{1}{2}\dot{\xi}^+\dot{\xi}^- - \frac{\omega^2}{2}\xi^+\xi^- + i\frac{g+\alpha}{4}(\xi^+)^2 - i\frac{g-\alpha}{4}(\xi^-)^2 - \gamma\xi^-\dot{\xi}^+ \right\}, \tag{103}$$

使用方程（99）和（100）处理 L 和 L_I后。

C. 阻尼谐振子 KK 的求值

时间演化算符 $K\underline{K}$ 中出现的双路径积分，可以用与其单路径积分对应项 K类似的方式求值。首先，我们求出使总作用量取极值的经典解 $\xi^{\pm}[t] = \xi_c^{\pm}[t]$ 。然后，通过围绕经典路径展开，将路径积分变量从 $\xi^{\pm}$ 变换为 $\xi_q^{\pm}$，即 $\xi^{\pm} = \xi_c^{\pm} + \xi_q^{\pm}$。我们将发现，关于 $\xi_q^{\pm}$的双路径积分可由概率守恒确定。

对 $\xi^{\pm}$变分方程（103），可知经典解 $\xi_c^{\pm}$必须满足

$$\mathcal{D}_{(t)}{}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{J}}\,\xi_c^{\mathrm{J}}[t] = 0\,, \tag{104}$$

其中，指标 I 和 J 遍历 $\pm$，而 2×2 微分算符为

$$\mathcal{D}_{(t)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega^2 & -i(\alpha-g) \\ -i(\alpha+g) & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega^2 \end{bmatrix}. \tag{105}$$

方程 (92) 中 x^+ KK 路径积分的部分将量子系统从 $(t_0,\ x_0^+)$ 演化到 $(t_f,\ x_f^+)$，而 x^- 部分则将同一系统从 $(t_0,\ x_0^-)$ 演化到 $(t_f,\ x_f^-)$。这促使我们对经典解施加以下边界条件，同时牢记 $\xi^{\pm} \equiv x^+ \pm x^-$,

$$\xi_c^{\pm}[t_f] = x_f^+ \pm x_f^- \quad \text{and} \quad \xi_c^{\pm}[t_0] = x_0^+ \pm x_0^-\,. \tag{106}$$

解 $\xi_c^{\pm}$可以用推迟格林函数表示，我们在此将其表示为单个时间变量 τ的函数,

$$G_{(\mathrm{R})}{}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{J}}[\tau] \equiv \theta[\tau]\mathcal{G}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{J}}[\tau]\,, \tag{107}$$

方程 (104) 中矩阵微分算符 $\mathcal{D}_{\mathrm{I}\ (\tau)\mathrm{J}}$ 的

$$\mathcal{D}_{(\tau)}{}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{J}}G_{(\mathrm{R})}{}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[\tau] = \delta^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{M}}\delta[\tau]\,. \tag{108}$$

当 $\alpha = -g$ 时，方程 (108) 与方程 (50) 和 (51) 密切相关。不过，与那里的 $G^{\xi,++}$ 和 $G^{\xi,+-}$ 不同，我们将求解满足推迟边界条件的 $G_{\mathrm{J}\ (\mathrm{R})\ \mathrm{M}}$，并用它来构造经典轨迹 $\xi_c^{\pm}$。

2×2 推迟格林函数的积分表示为

$$G_{(\mathrm{R})}{}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[\tau] = \int_C \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} \frac{e^{i\omega'\tau}}{(2\gamma)^2\omega'^2 - g^2 + \alpha^2 + (\omega'^2-\omega^2)^2} \times \begin{bmatrix} -\omega'^2 - i2\gamma\omega' + \omega^2 & i(\alpha-g) \\ i(\alpha+g) & -\omega'^2 + i2\gamma\omega' + \omega^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{J}}_{\ \mathrm{M}}. \tag{109}$$

这里的被积函数是方程 (104) 中 $\mathcal{D}_{\mathrm{I}\ (\tau)\mathrm{J}}$的矩阵逆，但以频率 ω'空间的形式表示。积分路径 C 从下方绕过复 ω' 平面上矩阵被积函数的全部四个极点，因此当且仅当 $\tau > 0$ 时，结果才非零。对留数求和后，我们得到

$$2\chi r_0^3\sigma\mathcal{G}^+{}_+[\tau] = \sinh[r_0\sigma\tau]\Big(\chi(r_0^2-\omega^2)\cos[\chi r_0\tau] - 2\gamma r_0\sin[\chi r_0\tau]\Big) + \sigma\left(r_0^2+\omega^2\right)\sin[\chi r_0\tau]\cosh[r_0\sigma\tau]\,, \tag{110}$$

$$2\chi r_0^3\sigma\mathcal{G}^+{}_-[\tau] = -i(\alpha-g)\Big(\chi\,\text{余弦}[\chi r_0\tau]\,\text{双曲正弦}[r_0\sigma\tau] - \sigma\sin[\chi r_0\tau]\cosh[r_0\sigma\tau]\Big)\,, \tag{111}$$

$$2\chi r_0^3\sigma\mathcal{G}^-{}_+[\tau] = -i(\alpha+g)\Big(\chi\,\text{余弦}[\chi r_0\tau]\,\text{双曲正弦}[r_0\sigma\tau] - \sigma\sin[\chi r_0\tau]\cosh[r_0\sigma\tau]\Big)\,, \tag{112}$$

$$2\chi r_0^3\sigma\mathcal{G}^-{}_-[\tau] = \text{双曲正弦}[r_0\sigma\tau]\Big(2\gamma r_0\,\text{正弦}[\chi r_0\tau] + \chi(r_0^2-\omega^2)\cos[\chi r_0\tau]\Big) + \sigma\left(r_0^2+\omega^2\right)\sin[\chi r_0\tau]\cosh[r_0\sigma\tau]\,, \tag{113}$$

其中关系式为

$$r_0 = \omega\sqrt[4]{1+(\alpha^2-g^2)/\omega^4}\,, \tag{114}$$

$$\begin{pmatrix} r_0\chi \\ r_0\sigma \end{pmatrix} = \omega\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+(\alpha^2-g^2)/\omega^4} \pm \left(1 - \frac{(2\gamma)^2}{2\omega^2}\right)\right)}\,. \tag{115}$$

直接计算还可得

$$\mathcal{D}_{(\tau)}{}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{J}}\mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[\tau] = 0\,, \tag{116}$$

$$\mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[0] = 0\,, \tag{117}$$

$$\partial_\tau\mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[\tau=0] = \delta^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}\,. \tag{118}$$

用 $\mathcal{G}$ 表示,

经典轨迹是

$$\begin{aligned}
&\xi_c^{\mathrm{J}}[t_0 \le t \le t_f] \\
&\quad = \mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{K}}[t-t_0](\mathcal{G}^{-1})^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{M}}[t_f-t_0]\begin{bmatrix} x_f^+ + x_f^- \\ x_f^+ - x_f^- \end{bmatrix}^{\mathrm{M}} \\
&\qquad + \Big(\mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{K}}[t-t_0](\mathcal{G}^{-1})^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{L}}[t_f-t_0]\partial_{t_0}\mathcal{G}^{\mathrm{L}}{}_{\mathrm{M}}[t_f-t_0] \\
&\qquad\quad - \partial_{t_0}\mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[t-t_0]\Big)\begin{bmatrix} x_0^+ + x_0^- \\ x_0^+ - x_0^- \end{bmatrix}^{\mathrm{M}}. \qquad (119)
\end{aligned}$$

方程 (119) 满足方程 (104) 中的运动方程，是因为方程 (116)；它满足方程 (106) 中相应的边界条件，则是因为方程 (117) 和 (118)。我们还需要这些轨迹在边界时刻的一阶导数。利用方程 (118)，可得

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_c^{\mathrm{J}}[t_0] \;=\; &(\mathcal{G}^{-1})^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[t_f-t_0]\begin{bmatrix} x_f^+ + x_f^- \\ x_f^+ - x_f^- \end{bmatrix}^{\mathrm{M}} \\
&+ \Big((\mathcal{G}^{-1})^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{L}}[t_f-t_0]\partial_{t_0}\mathcal{G}^{\mathrm{L}}{}_{\mathrm{M}}[t_f-t_0] \\
&\quad - \partial_t\partial_{t_0}\mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{M}}[t=t_0]\Big)\begin{bmatrix} x_0^+ + x_0^- \\ x_0^+ - x_0^- \end{bmatrix}^{\mathrm{M}}, \qquad (120)
\end{aligned}$$

而 $\dot{\xi}_c^{\mathrm{J}}[t_f]$ 只是将方程 (119) 中的 t替换为 t_f后，对 t求导所得。

请注意，尽管总作用量包含对 $t \in [t_0, t_f]$ 的时间积分，但在经典解 $\xi_c^{\pm}$ 上求值时，它可以转化为边界项之差。因为经过分部积分，方程 (103) 中的作用量可变换为

$$\begin{aligned}
&S_T[\xi^{\pm} = \xi_c^{\pm}] \\
&\quad = \frac{1}{4}\Big[\xi_c^+\dot{\xi}_c^- + \dot{\xi}_c^+\xi_c^- - 2\gamma\xi_c^-\xi_c^+\Big]_{t=t_0}^{t=t_f} \\
&\qquad - \frac{1}{4}\int_t\Big(\xi_c^+\mathcal{D}_{(t)}{}^{-}{}_{\mathrm{J}}\xi_c^{\mathrm{J}} + \xi_c^-\mathcal{D}_{(t)}{}^{+}{}_{\mathrm{J}}\xi_c^{\mathrm{J}}\Big) \qquad (121) \\
&\quad = \frac{1}{4}\Big((x_f^+ + x_f^-)\dot{\xi}_c^-[t_f] + \dot{\xi}_c^+[t_f](x_f^+ - x_f^-) \\
&\qquad\qquad - 2\gamma\left\{(x_f^+)^2 - (x_f^-)^2\right\}\Big) \\
&\qquad - \frac{1}{4}\Big((x_0^+ + x_0^-)\dot{\xi}_c^-[t_0] + \dot{\xi}_c^+[t_0](x_0^+ - x_0^-) \\
&\qquad\qquad - 2\gamma\left\{(x_0^+)^2 - (x_0^-)^2\right\}\Big), \qquad (122)
\end{aligned}$$

其中积分项因方程 (104) 而消失，并且我们使用了方程 (106) 中的边界条件。

现在我们显式地对路径积分变量作如下平移:

$$\xi^{\pm} \;\equiv\; \xi_c^{\pm} + \xi_q^{\pm}\,. \qquad (123)$$

由于路径积分变量 $\xi^{\pm}[t_f] = x_f^+ \pm x_f^-$ 和 $\xi^{\pm}[t_0] = x_0^+ \pm x_0^-$的边界条件已由方程 (106) 中的 $\xi_c^{\pm}$考虑在内，因此我们必须施加

$$\xi_q^{\pm}[t_f] \;=\; 0 \;=\; \xi_q^{\pm}[t_0]\,, \qquad (124)$$

这又意味着

$$\begin{aligned}
\int_{x_0^+}^{x_f^+}\mathcal{D}x^+\int_{x_0^-}^{x_f^-}\mathcal{D}x^- &\to \int_{x_0^+ + x_0^-}^{x_f^+ + x_f^-}\mathcal{D}\xi^+\int_{x_0^+ - x_0^-}^{x_f^+ - x_f^-}\mathcal{D}\xi^- \\
&\to \int_0^0\mathcal{D}\xi_q^+\int_0^0\mathcal{D}\xi_q^-\,. \qquad (125)
\end{aligned}$$

方程 (103) 现在写作

$$S_T[\xi^{\pm} = \xi_c^{\pm} + \xi_q^{\pm}] \;=\; S_T[\xi_c^{\pm}] + S_T[\xi_q^{\pm}]\,, \qquad (126)$$

其中， $S_T[\xi_c^{\pm}]$ 是仅在 $\xi_c^{\pm}$上取值的总作用量，由方程 (122) 给出；而 $S_T[\xi_q^{\pm}]$ 仅在$\xi_q^{\pm}$上取值，但其积分上下限由方程 (124) 所隐含。由于作用量是二次的， $\xi_c^{\pm}$与 $\xi_q^{\pm}$之间不存在交叉项，因此这些交叉项必然都是关于 ξ_q的线性项。由于作用量本身在方程 (104) 的解处取极值，对所有作用于$\xi_q^{\pm}$的导数进行分部积分，并利用方程 (124) 将相应的边界项置零后，这些关于ξ_q 的线性项必然消失。

采用方程 (126) 中总作用量的新形式，并牢记方程 (125) 中的积分上下限，我们现在可以将方程 (92) 中的时间演化算符写为

$$\begin{aligned}
&K\overline{K}[t_f, x_f^+, x_f^-; t_0, x_0^+, x_0^-] \\
&\quad = K\overline{K}[t_f, 0, 0; t_0, 0, 0]\exp\left[iS_T[\xi_c^{\pm}]\right]. \qquad (127)
\end{aligned}$$

现在我们再次考虑 $\hat{\rho}[t_f]$ 的迹，其中需要在方程 (127) 中令 $x_f^+ = x_f^- \equiv x$ ，然后对所有实数 x 积分。然而，由于方程 (122) 中的 $(x_f^+ + x_f^-)\,\dot{\xi}_c^-[t_f]$ 项，这一过程会得到一个关于 x 的二次 $S_T[\xi_c^{\pm}]$ 。更明确地说，直接计算可知， $S_T[\xi_c^{\pm}]$ 中这些关于 x 的二次项为

$$
\begin{aligned}
x^2(g+\alpha)r_0^2\Big(&2\gamma\left(1-\sigma^2\cos[2r_0\chi(t_f-t_0)]\right)-\chi(2\gamma\chi\cosh[2r_0\sigma(t_f-t_0)]\\
&+2r_0\sigma(\chi\sinh[2r_0\sigma(t_f-t_0)]-\sigma\sin[2r_0\chi(t_f-t_0)]))\Big)\\
\times\Big\{&2\sinh^2[r_0\sigma(t_f-t_0)]\left(\chi^2\cos^2[r_0\chi(t_f-t_0)]\left(-\alpha^2+g^2-\left(r_0^2-\omega^2\right)^2\right)+(2\gamma)^2r_0^2\sin^2[r_0\chi(t_f-t_0)]\right)\\
&+2\sigma^2\sin^2[r_0\chi(t_f-t_0)]\left(-\alpha^2+g^2-\left(r_0^2+\omega^2\right)^2\right)\cosh^2[r_0\sigma(t_f-t_0)]\\
&+\chi\sigma\sin[2\chi r_0(t_f-t_0)]\left(\alpha^2-g^2-r_0^4+\omega^4\right)\sinh[2r_0\sigma(t_f-t_0)]\Big\}^{-1}. \qquad (128)
\end{aligned}
$$

如果将上述结果代入方程 (98) 中概率守恒关系左侧的积分，我们最终会得到一个高斯积分，并且不会得到右侧所需的 δ 函数。因此，我们必须彻底消去这些 x^2 项，这可以通过令

$$g \;=\; -\alpha\,, \qquad (129)$$

正如方程（128）中的整体因子 $(g+\alpha)$ 所示。事实上，这恢复了我们从方程（47）推导出的 $\gamma_{1I}(t,t') = \gamma_{2I}(t,t')$ 条件的时间局域版本。还需注意，为了得到方程（129）中的条件，我们必须在本节中显式计算密度算符的时间演化算符 $g+\alpha$，而该条件在第三节中则是直接由格林函数方程得出的。

满足方程（129）中的条件，并采用以下定义

$$\Gamma \;\equiv\; \sqrt{\omega^2-\gamma^2} \quad \text{and} \quad T \;\equiv\; t_f - t_0 \qquad (130)$$

——此处的 T 不要与第 IV 节中的 $T \equiv t - t'$ 混淆——现在可以给出如下结果。 2×2 格林函数的齐次解部分及其逆，写成单个时间变量 τ 的函数时，为

$$\mathcal{G}^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{K}}[\tau] \;=\; \begin{bmatrix} \mathcal{G}_\gamma[\tau] & \frac{i\alpha}{\omega^2}\left(\Gamma^{-1}\cosh[\gamma\tau]\sin[\Gamma\tau]-\frac{1}{\gamma}\cos[\Gamma\tau]\sinh[\gamma\tau]\right) \\ 0 & \mathcal{G}_{-\gamma}[\tau] \end{bmatrix}, \qquad (131)$$

$$(\mathcal{G}^{-1})^{\mathrm{J}}{}_{\mathrm{K}}[\tau] \;=\; \begin{bmatrix} \mathcal{G}_\gamma[\tau]^{-1} & \frac{-i\alpha\Gamma^2}{\omega^2\sin^2[\Gamma\tau]}\left(\Gamma^{-1}\cosh[\gamma\tau]\sin[\Gamma\tau]-\frac{1}{\gamma}\cos[\Gamma\tau]\sinh[\gamma\tau]\right) \\ 0 & \mathcal{G}_{-\gamma}[\tau]^{-1} \end{bmatrix}, \qquad (132)$$

其中，我们将经典阻尼谐振子的格林函数识别为

$$G_\gamma[\tau] \;\equiv\; \theta[\tau]\mathcal{G}_\gamma[\tau]\,, \qquad (133)$$

$$\mathcal{G}_\gamma[\tau] \;\equiv\; e^{-\gamma\tau}\Gamma^{-1}\sin[\Gamma\tau]\,, \qquad (134)$$

及其反阻尼对应项 $G_{-\gamma}[\tau]$ 和 $\mathcal{G}_{-\gamma}[\tau]$ 由相同的表达式给出，只需将 γ 替换为 $-\gamma$。

阻尼谐振子格林函数满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\omega^2\right)G_\gamma[\tau] \;=\; \delta[\tau]\,, \qquad (135)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\omega^2\right)\mathcal{G}_\gamma[\tau] \;=\; 0\,, \qquad (136)$$

而反阻尼情形也满足相同的方程，只是将 γ 替换为 $-\gamma$。还需注意，方程（131）中的 $\mathcal{G}^{+}{}_{+}$ 除了相差一个 $-i$ 因子外，与 $G^{\xi\text{相同},\,+-}$ 见公式（53）。

在经典轨迹上求得的作用量现在为

$$iS_T[\xi_c^{\pm}] \;=\; \frac{\alpha\csc^2[\Gamma T]}{32\gamma\omega^2}\left((x_f^+-x_f^-)^2-(x_0^+-x_0^-)^2\right)\left((2\gamma)^2\cos[2\Gamma T]-4\omega^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\alpha\Gamma^2 e^{-2\gamma T}}{8\gamma\omega^2\sin^2[\Gamma T]}\left(e^{4\gamma T}(x_0^+ - x_0^-)^2 - (x_f^+ - x_f^-)^2\right) + \frac{\alpha\Gamma^2\cos[\Gamma T]}{2\gamma\omega^2\sin^2[\Gamma T]}\sinh[\gamma T](x_f^+ - x_f^-)(x_0^+ - x_0^-) \\
&+ \frac{\alpha\Gamma}{4\omega^2\sin[\Gamma T]}\left[\cos[\Gamma T]\left((x_f^+ - x_f^-)^2 + (x_0^+ - x_0^-)^2\right) - 2(x_f^+ - x_f^-)(x_0^+ - x_0^-)\cosh[\gamma T]\right] \\
&+ \frac{i}{2}\frac{\Gamma}{\sin[\Gamma T]}\Big[\sinh[\gamma T]\,2(x_f^+ x_0^- - x_f^- x_0^+) + \cosh[\gamma T]\,2(x_f^- x_0^- - x_f^+ x_0^+) \\
&\qquad + \cos[\Gamma T]\{(x_f^+)^2 - (x_f^-)^2 + (x_0^+)^2 - (x_0^-)^2\}\Big] \\
&- \frac{i\gamma}{2}\left[\{(x_f^+)^2 - (x_f^-)^2\} - \{(x_0^+)^2 - (x_0^-)^2\}\right], \qquad (137)
\end{aligned}
$$

将 $x_f^+ = x_f^- \equiv x$ 代入方程 (137) 可得

$$
\begin{aligned}
&iS_T[\xi_c^\pm; x_f^+ = x_f^- \equiv x] \\
&\quad = -i\frac{x\left(x_0^+ - x_0^-\right)}{\mathcal{G}_\gamma[T]} \\
&\qquad + \frac{i}{2}\{(x_0^+)^2 - (x_0^-)^2\}\left(\gamma + \Gamma\cot[\Gamma T]\right) \\
&\qquad - \frac{\alpha(x_0^+ - x_0^-)^2}{8\gamma\omega^2\sin^2[\Gamma T]}\Big(\Gamma^2 e^{2\gamma T} - \omega^2 + \gamma^2\cos[2\Gamma T] \\
&\qquad\quad - \gamma\Gamma\sin[2\Gamma T]\Big). \qquad (138)
\end{aligned}
$$

将方程 (98) 的概率守恒关系应用于方程 (127) 中的时间演化算符，可进一步得到

$$
\begin{aligned}
K\overline{K}[t_f, 0, 0; t_0, 0, 0]\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \exp\left[iS_T[\xi_c^\pm; x = x' \equiv x]\right] \\
= \delta[x_0^+ - x_0^-]\,. \qquad (139)
\end{aligned}
$$

利用方程 (138)，即可得到关系式

$$
K\overline{K}[t_f, 0, 0; t_0, 0, 0] = |2\pi\mathcal{G}_\gamma[T]|^{-1}\,. \qquad (140)
$$

如前所述，概率守恒使我们能够计算涉及$\xi_q^\pm$的剩余双路径积分，即 $K\overline{K}[t_f, 0, 0;\ t_0,\ 0,\ 0]$。至此，我们可以得出，方程 (127) 中阻尼谐振子系统在 $g = -\alpha$ 时的时间演化算符为

$$
\begin{aligned}
&K\overline{K}[t_f, x_f^+, x_f^-; t_0, x_0^+, x_0^-] \\
&\quad = |2\pi\mathcal{G}_\gamma[T]|^{-1}\exp\left[iS_T[\xi_c^\pm]\right], \qquad (141)
\end{aligned}
$$

采用方程（137）中给出的经典作用量。此外，有了 DHO 的这一 $K\overline{K}$，我们便可立即将其与高斯初始密度矩阵 $\langle x^+|\hat{\rho}(t_0)|x^-\rangle = N\exp\{iS_0[x^+, x^-]\}$相积分，其中 S_0 由方程（3）给出——即计算方程（89）——从而发现，最终密度矩阵的形式与初始密度矩阵相同，只是所有相关的“初始”参数都被替换成了随时间变化的最终参数。例如，初始位置和动量分别替换为

$$
x_0 \to \langle\hat{X}[t_f]\rangle\,, \qquad (142)
$$

$$
p_0 \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_f}\langle\hat{X}[t_f]\rangle = \langle\hat{P}[t_f]\rangle\,, \qquad (143)
$$

而参数 A 和 B（它们与初始二点关联函数 c_{xx}、c_{xp}和 c_{pp} 的关系由方程（4）、（5）和（6）给出）也相应地替换为 t_f时刻对应的参数。

D. 阻尼谐振子的“等时” n点函数

现在我们来计算在时刻t_f处 $n \geq 1$ 个位置算符乘积的量子统计平均。应用方程 (89) 和 (141)，可得

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{X}^n[t_f]\rangle &\equiv \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\langle x|\hat{X}^n\hat{\rho}[t_f]|x\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{|2\pi\mathcal{G}_\gamma[T]|}x^n\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_0^+\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_0^- \\
&\quad\times\exp\left[iS_T[\xi_c^\pm; x_f^+ = x_f^- \equiv x]\right]\langle x_0^+|\hat{\rho}[t_0]|x_0^-\rangle\,. \qquad (144)
\end{aligned}
$$

接下来，我们考虑生成泛函

$$
\begin{aligned}
Z[J] &\equiv \int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{|2\pi\mathcal{G}_\gamma[T]|}e^{iJx}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_0^+\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_0^- \\
&\quad\times\exp\left[iS_T[\xi_c^\pm; x_f^+ = x_f^- \equiv x]\right]\langle x_0^+|\hat{\rho}[t_0]|x_0^-\rangle\,. \qquad (145)
\end{aligned}
$$

这里的时间无关 J 在理念上与前几节引入的时间依赖 $J^\pm$ 相似，但切勿将两者混淆。由方程（145），可以通过以下方式提取方程（144）中的 n点函数:

$$
\langle\hat{X}^n[t_f]\rangle = \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n Z[J]}{\partial J^n}\bigg|_{J=0}, \qquad (146)
$$

或者，等价地，通过读取 $Z[J]$ 的泰勒级数中恰好含有 n 个 J 次幂的项的系数。现在，将方程 (138) 代入方程 (145)，我们会发现，$x_0^+ - x_0^- = \mathcal{G}_\gamma[T]J$ 是通过对 x 积分所得到的 δ 函数强制实现的。于是，生成泛函为

结果为

$$Z[J] = \exp\left[\frac{\alpha(iJ)^2}{8\gamma\omega^2}\left(1+\frac{e^{-2\gamma T}}{\Gamma^2}\Big\{\gamma^2\cos[2\Gamma T] - \gamma\Gamma\sin[2\Gamma T] - \omega^2\Big\}\right)\right] \times \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \left\langle x - \frac{i}{2}\mathcal{G}_\gamma[T](iJ)\middle|\hat{\rho}[t_0]\middle|x+\frac{i}{2}\mathcal{G}_\gamma[T](iJ)\right\rangle \times \exp\left[x\mathcal{G}_\gamma[T](iJ)\left(\gamma+\Gamma\cot[\Gamma T]\right)\right]. \quad (147)$$

顺带指出，方程 (147) 中的 x 积分与量子力学中的维格纳函数颇为相似。此外，在上述表达式中，我们将 iJ 写成一个整体，因为对其求导会生成 n 点关联函数。

将方程 (146) 应用于方程 (147)，我们首先发现，单点函数不仅取决于初始位置和动量的单点函数，

$$\left\langle\hat{X}[t_f]\right\rangle = e^{-\gamma T}\left(\cos[\Gamma T]+\frac{\gamma}{\Gamma}\sin[\Gamma T]\right)\left\langle\hat{X}[t_0]\right\rangle + \frac{e^{-\gamma T}}{\Gamma}\sin[\Gamma T]\left\langle\hat{P}[t_0]\right\rangle, \quad (148)$$

这当然就是将 t 替换为 t_f后的方程 (65)，而且还满足经典阻尼谐振子的方程，

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\omega^2\right)\left\langle\hat{X}[t=t_f]\right\rangle = 0, \quad (149)$$

因为 $e^{-\gamma T}\sin[\Gamma T]$ 和 $e^{-\gamma T}\cos[\Gamma T]$ 这对函数具有相同性质。因此，方程（148）是经典阻尼谐振子微分方程初值表述的量子类比。

请注意，它不依赖于额外参数 α，即阻尼谐振子频率平方的虚部；该参数出现在我们由方程（99）和（100）（含 $g=-\alpha$）定义的动力学中。这表明 α 与当前阻尼谐振子系统的内在量子和／或统计方面有关。

与第 IV 节一样，我们选择 $\gamma \geq 0$，以使方程 (148) 中的 $e^{-\gamma T}$因子不会描述失控轨迹。此外，在方程 (148) 中令 $t_f = t_0$，即可直接得到 $\langle \hat{X}[t_0]\rangle$；而先对时间求导再令$t_f = t_0$，则可得到 $\langle \hat{P}[t_0]\rangle$,

$$\left\langle\hat{P}[t_0]\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{X}[t]\right\rangle\Big|_{t=t_0}. \quad (150)$$

事实上，直接计算表明，一般的动量单点函数，

$$\left\langle\hat{P}[t_f]\right\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\left(-i\partial_x\langle x|\right)\hat{\rho}[t_f]|x\rangle \quad (151)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x_0^+\mathrm{d}x_0^-\left\langle x_0^+\left|\hat{\rho}[t_0]\right|x_0^-\right\rangle \times \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x_f^+\mathrm{d}x_f^-}{|2\pi\mathcal{G}_\gamma[T]|}\left(-i\partial_{x_f^+}e^{iS_T[\xi_c^\pm]}\right)\delta[x_f^+-x_f^-], \quad (152)$$

恰好是方程 (148) 中位置单点函数的时间导数，即，

$$\left\langle\hat{P}[t_f]\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_f}\left\langle\hat{X}[t_f]\right\rangle, \quad (153)$$

这再次表明我们考虑的问题，$\hat{X}(t)$。

接下来讨论双点函数，应用方程（146）可得

$$\left\langle\hat{X}^2[t_f]\right\rangle = \frac{\alpha}{4\gamma\omega^2}\left(1+\frac{e^{-2\gamma T}}{\Gamma^2}\left\{\gamma^2\cos[2\Gamma T]-\gamma\Gamma\sin[2\Gamma T]-\omega^2\right\}\right) + \mathcal{G}_\gamma[T]^2\left[(\gamma+\Gamma\cot[\Gamma T])^2\left\langle\hat{X}^2[t_0]\right\rangle+\frac{1}{2}(\gamma+\Gamma\cot[\Gamma T])\left\langle\left\{\hat{X}[t_0],\hat{P}[t_0]\right\}\right\rangle+\left\langle\hat{P}^2[t_0]\right\rangle\right]. \quad (154)$$

这恢复了公式（67），其中给出的 $G^{\xi,\,++}(t,\,t)$ 是公式（61）和（63）之和（含 $t'=t$），但此处的初始双点关联函数是任意的。我们还注意到，α 项与初始条件无关——这一特征在公式（63）中已然存在——而其余各项则线性依赖于涉及位置和动量算符的初始两点函数。事实上，在渐近未来，$T\to\infty$，$\mathcal{G}_\gamma[T]^2$中的 $\exp(-2\gamma T)$——回顾公式（134）——意味着对初始两点函数的全部依赖都会衰减消失，剩下的只有 α 项，

$$\left\langle\hat{X}^2[\infty]\right\rangle = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\alpha}{2\gamma\omega}\right). \quad (155)$$

值得再次强调的是，尽管方程（103）中编码的动力学完全是二次的——也就是说，运动方程是线性的——我们并未对方程（146）中的初始密度算符 $\hat{\rho}[t_0]$作任何假设，因此也未对方程（148）和（154）中的初始 n点函数作任何假设。

E. 阻尼谐振子系统的纯度与 $\alpha \to 0$ 极限

现在，我们来计算不对初态作任何假设时阻尼谐振子系统的纯度。利用方程（89）中的时间演化以及方程（141）中阻尼谐振子的 KK 形式，时刻 t_f 的纯度为

$$\begin{aligned}\mathrm{Pu}[t_f] &\equiv \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^2[t_f]\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_0^+ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_0^- \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y_0^+ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y_0^- \\ &\quad \times K\overline{K}K\overline{K}[t_f; x_0^+, x_0^-, y_0^+, y_0^-] \\ &\quad \times \left\langle x_0^+ \middle| \hat{\rho}[t_0] \middle| x_0^- \right\rangle \left\langle y_0^+ \middle| \hat{\rho}[t_0] \middle| y_0^- \right\rangle, \end{aligned} \tag{156}$$

其中，与纯度相关的时间演化算符为

$$\begin{aligned}&K\overline{K}K\overline{K}[t_f; x_0^+, x_0^-, y_0^+, y_0^-] \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x_f^+ \mathrm{d}x_f^-}{|2\pi\mathcal{G}_\gamma[T]|^2} \exp\Big[iS_T[\xi_c^\pm; x_f^+, x_f^-, x_0^+, x_0^-] \\ &\qquad + iS_T[\xi_c^\pm; x_f^-, x_f^+, y_0^+, y_0^-] \Big]. \end{aligned} \tag{157}$$

现在我们来取 $\mathrm{Pu}[t_f]$ 的时间演化算符 $KKKK$ 的 $\alpha \to 0$ 极限。转换到 $\xi^\pm \equiv \overline{+} x^+ \overline{\pm} x^-$ 变量后，发现指数在 $\xi^\pm$ 两者中都是线性的，

$$\begin{aligned}&K\overline{K}K\overline{K}[t_f; x_0^+, x_0^-, y_0^+, y_0^-] \\ &= \exp\left[\frac{i}{2} \left(\gamma + \Gamma \cot[\Gamma T] \right) \right. \\ &\qquad \left. \times \left\{ (x_0^+)^2 - (x_0^-)^2 + (y_0^+)^2 - (y_0^-)^2 \right\} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}\xi^+ \mathrm{d}\xi^-}{|2\pi\mathcal{G}_\gamma[T]|^2} \exp\left[-\frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\sin[\Gamma T]} \right. \\ &\qquad \left. \times \Big\{ e^{-\gamma T} \xi^- (x_0^+ + x_0^- - y_0^+ - y_0^-) \right. \\ &\qquad \left. + e^{\gamma T} \xi^+ (x_0^+ - x_0^- + y_0^+ - y_0^-) \Big\} \right]. \end{aligned} \tag{158}$$

狄拉克 δ-函数的积分表示，结合恒等式 $\delta[az] = \delta[z]/|a|$（该恒等式对积分变量 z 和常数 a 成立），告诉我们 $KK\overline{K}K\overline{K}$ 正比于

$$\begin{aligned}&\delta[x_0^+ + x_0^- - y_0^+ - y_0^-] \delta[x_0^+ - x_0^- + y_0^+ - y_0^-] \\ &= \frac{1}{2} \delta[x_0^+ - y_0^-] \delta[x_0^- - y_0^+], \end{aligned} \tag{159}$$

其中我们利用了 $x_0^+ + x_0^- = y_0^+ + y_0^-$ 和 $x_0^+ - x_0^- = y_0^+ - y_0^-$ 一起意味着 $x_0^+ = y_0^-$ 和 $x_0^- = y_0^+$。因此，方程 (158) 可简化为

$$K\overline{K}K\overline{K}[\alpha = 0] = e^{2\gamma T} \delta[x_0^+ - y_0^-] \delta[x_0^- - y_0^+]. \tag{160}$$

将方程 (160) 代回方程 (156) 可知，在 $\alpha = 0$ 情形下，时刻 t_f 的纯度等于初始纯度乘以一个指数增长因子，

$$\mathrm{Pu}[t_f]_{\alpha=0} = e^{2\gamma T} \mathrm{Pu}[t_0]. \tag{161}$$

我们由此得出，只要$\gamma > 0$，量子阻尼谐振子系统的频率平方就不可能是纯实数，即 $\alpha \neq 0$。这是因为纯度受到限制，必须处于$[0, 1]$, 之内，而方程 (161) 中的 $e^{2\gamma T}$ 因子表明，$\alpha = 0$阻尼谐振子系统在渐近未来的纯度为无穷大。方程 (72) 中已经指出了这一点，但我们再次看到，它对任意初始条件都成立。

在结束关于纯度的讨论之前，我们在此记录纯度在时刻 t_f 的 $\alpha \neq 0$ 积分表示，

$$\begin{aligned}\mathrm{Pu}[t_f] &= e^{\gamma T} \omega \sqrt{-\frac{\gamma\Gamma^2}{\pi\alpha\Upsilon[T]}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}u^- \mathrm{d}\xi^- \mathrm{d}\xi'^- \delta[\xi^- + \xi'^-] \exp\left[\frac{1}{\Upsilon[T]} \left\{ -2\alpha \frac{(\xi'^-)^2}{\gamma} \left(\omega^2 - \gamma^2 \cos[2\Gamma T] - \Gamma^2 \cosh[2\gamma T] \right) \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. + \frac{(u^-)^2}{\alpha} e^{-2\gamma T} (4\Gamma^2 \gamma \omega^2) + (u^- \xi'^-) \left(8i\gamma\omega^2 \sin^2[\Gamma T] \right) \right\} \right] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u^+ \left\langle \frac{1}{2}(u^+ + u^- - \xi'^-) \middle| \hat{\rho}[t_0] \middle| \frac{1}{2}(u^+ + u^- + \xi'^-) \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}(u^+ - u^- + \xi'^-) \middle| \hat{\rho}[t_0] \middle| \frac{1}{2}(u^+ - u^- - \xi'^-) \right\rangle, \end{aligned} \tag{162}$$

其中，时间依赖的 Υ 定义为

$$\begin{aligned}\Upsilon[T] &\equiv 4\Gamma^2 e^{-2\gamma T} + 4\gamma^2 \cos[2\Gamma T] \\ &\quad + 4\Gamma\gamma \sin[2\Gamma T] - 4\omega^2. \end{aligned} \tag{163}$$

用方程 (156) 中出现的原始积分变量表示，$\xi^- \equiv x_0^+ - x_0^-$、$\xi'^- \equiv y_0^+ - y_0^-$、$u^- \equiv (x_0^+ + x_0^- - y_0^+ - y_0^-)/2$ 和 $u^+ \equiv (x_0^+ + x_0^- + y_0^+ + y_0^-)/2$。

VII. 讨论

量子阻尼谐振子是一个典型的例子，展示了可精确求解的耗散量子系统。本文重新审视了这一简单系统，旨在开发一种受有效场论启发、基于影响泛函的方法来描述其动力学。我们尤其关注能够对影响泛函中可能出现的各种项施加哪些约束条件

。因此，我们考虑了一个二次影响泛函，而不描述导出该泛函的系统—环境相互作用。我们首先发现，所引入的耗散核彼此之间存在特定关系，因此只需两个实函数便可描述系统动力学。随后，我们将讨论限制在时间局域耗散的情形，并求得该情形下系统的精确格林函数。我们利用所得格林函数表明，对于高斯初态和更一般的初态，晚时关联和纯度均与初始条件无关；并指出，为了在晚时极限下得到具有物理意义的纯度，两个耗散核实际上必须受到约束。我们还简要考察了时间非局域耗散，并表明在特定的耗散核选择下，涨落耗散关系成立。

值得指出的是，我们讨论了两种解决该问题的不同方法——在第二至第五节中，我们侧重于 in-in 形式，而在第六节中，我们侧重于双重 in-out 形式。我们发现，每种方法都有各自的优势。例如，前者可以计算非等时关联函数，这对于理解涨落耗散关系在晚期是否成立至关重要。另一方面，后者使我们能够超越高斯初态，并得到关于初态的非微扰结果。因此，采用哪种方法“更好”取决于具体问题，不过，探讨如何扩展每种方法或许会很有意义。

我们还想指出本文所发展的方法的其他几项可能有用的扩展。首先，我们将计算限制在不与 $\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 成正比的耗散核 $\gamma_1(t,t')$ 和 $\gamma_2(t,t')$ 上。我们进一步先研究了时间局域耗散，其中 $\gamma_{1R}(t,t') + \gamma_{2R}(t,t') = \gamma \mathrm{d}\delta(t-t')/\mathrm{d}t'$，且 $\gamma_{1I}(t,t') = (\alpha/2)\delta(t-t')$，其中 γ 和 α 为常数；随后又研究了时间非局域耗散，并在方程（82）中采用了 $\gamma_{1I}(t,t')$ 的特定形式。若能放宽这些限制，考虑更一般的影响泛函——包括随时间变化、通常为非局域，以及源自导数型系统-环境相互作用的影响泛函——将会很有意思。其次，若能将这些方法用于描述闵可夫斯基时空中的耗散量子场论，以及德西特等时变时空中的耗散量子场论，也将很有意义。这种受有效场论启发的方法还能与现有的开放量子场论研究相互补充。第三，若能研究存在相互作用和／或非线性耗散时耗散量子场论中的圈修正，并在圈修正中以耗散系统对应的格林函数替代通常的格林函数，也将很有意思。例如，这或许有助于我们更好地理解时变量子系统和量子场论中可观测量的圈修正里常见的世俗增长；综述见 [41–44]，相关研究及其他可能的解决方案见 [45–54]。

致谢

谨此感谢 Brenden Bowen、Spasen Chaykov、Sachin Jain，尤其是 Archana Kamal，感谢他们提供的宝贵讨论。N. A. 的部分研究经费由美国能源部通过第 DE-SC0019515 号和第 DE-SC0020360 号资助项目提供。Y.-Z. C. 获台湾国家科学及技术委员会第 111-2112-M-008-003 号拨款资助。

附录A：方程（1）中的生成泛函

在本附录中，我们推导无耗散情况下方程（1）中给出的生成泛函。这是一个标准计算，我们在此重述以供参考，并强调几点重要内容。如前所述，生成泛函定义为$Z[J^+,J^-]=\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}(t_f)]_{J^+,\,J^-}$，可写为

$$Z[J^+,J^-] = \mathrm{Tr}\left[\hat{U}_{J^+}(t_f,t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger_{J^-}(t_f,t_0)\right], \quad \text{(A1)}$$

其中，$\hat{U}_{J^\pm}(t_f,t_0) = T\exp\left[-i\int_t\left(\hat{H}-J^\pm\hat{X}\right)\right]$是本文所研究问题中谐振子的时间演化算符，$T$ 表示时间排序。下标 $J^\pm$ 表示正向时间演化是在源$J^+(t)$存在时进行的，而反向时间演化是在源 $J^-(t)$存在时进行的。

方程 (A1) 中的迹可以写成积分$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_f\langle x_f|[\ldots]|x_f\rangle$，其中下标 f仅是一个标签，用来表示末时刻 t_f 的态，而省略号表示方程 (A1) 右端的算符。现在，让我们在$\hat{\rho}(t_0)$的两侧分别插入一组完备态集，例如左侧插入 $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_0^+|x_0^+\rangle\langle x_0^+|$，右侧插入 $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_0^-|x_0^-\rangle\langle x_0^-|$；这里下标 0 同样是一个标签，表示初始时刻 t_0的态，并使用跃迁振幅的标准路径积分表示，

$$\langle x_f|\hat{U}_{J^+}(t_f,t_0)|x_0^+\rangle = \int_{x_0^+}^{x_f}\mathcal{D}x^+\exp\left[i\left\{S[x^+] + \int_t J^+x^+\right\}\right] \quad \text{(A2)}$$

and

$$\langle x_0^-|\hat{U}^\dagger_{J^-}(t_f,t_0)|x_f\rangle = \int_{x_0^-}^{x_f}\mathcal{D}x^-\exp\left[-i\left\{S[x^-] + \int_t J^-x^-\right\}\right]. \quad \text{(A3)}$$

现在剩下对 x_f、x_0^+ 和 x_0^- 的积分，以及矩阵元 $\langle x_0^+|\hat{\rho}(t_0)|x_0^-\rangle$，我们将其记为 $\rho[x_0^+,x_0^-,t_0]$。对 x_f 的积分可用于移除式 (A2) 和 (A3) 中路径积分的上限，同时插入一个 δ 函数，以约束 $x^+(t_f) = x^-(t_f)$。另一方面，对 x_0^+ 和 x_0^- 的积分可用于移除下限，并

将初始密度矩阵元写为 $\rho[x^+, x^-, t_0]$，其中函数 $x^{\pm}(t)$ 在 t_0 处取值。于是生成泛函变为

$$Z[J^+, J^-] = \int \mathcal{D}x^+ \mathcal{D}x^- \rho[x^+, x^-, t_0] \times \exp\left[i \left\{ S[x^+] + \int_t J^+ x^+ - S[x^-] - \int_t J^- x^- \right\} \right] \times \delta\left[x^+(t_f) - x^-(t_f) \right], \tag{A4}$$

如方程 (1) 所示。

δ 函数在转折时间 t_f 处还施加了约束 $\dot{x}^+(t_f) = \dot{x}^-(t_f)$，这对于消去 t_f 处的边界项是必要的，正如第三节所讨论的那样。 [55] 中对此已有证明，为完整起见，我们在此重述其论证。按照 [55], 的做法，我们首先将 x^+ 路径积分和作用量离散化为 $\int \mathcal{D}x^+ = \lim_{\delta t \to 0} \int \mathrm{d}x_f^+ \, \mathrm{d}x_{t_f - \delta t}^+ \ldots \mathrm{d}x_0^+$，并且

$$S[x^{\pm}] = \frac{1}{2} \sum_t \delta t \left[\left(\frac{x_t^{\pm} - x_{t-\delta t}^{\pm}}{\delta t} \right)^2 - \omega^2 \left(x_t^{\pm} \right)^2 \right], \tag{A5}$$

其中，求和遍历从 $t_0 + \delta t$ 到 t_f 、间隔为 δt 的所有 t，并以类似方式将 x^- 路径积分和作用量离散化。利用方程 (A4) 中的 δ 函数，我们还可以将 $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x_f^+ \, \mathrm{d}x_f^- \delta(x_f^+ - x_f^-)$ 写成一个单积分，记作 $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_f$，并将所有位置的 $x_f^{\pm}$ 替换为 x_f。现在具体考察 x_f 积分。与 x_f^2 相乘的 ω^2 项在 $S[x^+]$ 和 $S[x^-]$ 之间相互抵消。我们也可以令 $J^{\pm}(t_f) = 0$，因为 t_f 被选为晚于我们感兴趣的所有关联函数计算时刻。于是，生成泛函方程 (A4) 的离散化形式中的 x_f 积分变为

$$\lim_{\delta t \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_f \exp\left[-i x_f \left(\frac{x_{t_f - \delta t}^+ - x_{t_f - \delta t}^-}{\delta t} \right) \right], \tag{A6}$$

这只不过是 $2\pi\delta\left(\frac{x_{t_f-\delta t}^+ - x_{t_f-\delta t}^-}{\delta t} \right)$。通过泰勒展开，还可以进一步简化为 $\frac{\delta(\dot{x}_f^+ - \dot{x}_f^-)}{x_f - \dot{x}_f^{\pm} \delta t}$。因此，路径积分施加了约束 $\dot{x}^+(t_f) = \dot{x}^-(t_f)$。

最后我们指出，在存在耗散的情况下，约束 $\dot{x}^+(t_f) = \dot{x}^-(t_f)$ 未必成立。具体而言，如果我们在方程 (7) 中引入的耗散核 $\gamma_1(t,t')$ 和 $\gamma_2(t,t')$ 与 $\mathrm{d}^2\delta(t-t')/\mathrm{d}t'^2$ 成正比，那么就需要重新审视上一段中的论证，因为方程 (A6) 可能还包含其他项。另一方面，如果耗散核与 $\mathrm{d}\delta(t-t')/\mathrm{d}t'$ 成正比（如正文中所考虑的情形），那么约束 $\dot{x}^+(t_f) = \dot{x}^-(t_f)$ 仍然成立。

附录 B：来自 $Z[J^+, J^-]$ 的 n 点关联函数

在本附录中，我们使用在无耗散情况下于附录A中推导出的生成泛函，来定义 $\hat{X}(t)$ 的单点和两点关联。首先考虑单点函数 $\langle X(t) \rangle$，其中尖括号表示在 $\hat{\rho}(t_0)$ 中取期望值。具体而言，$\langle \hat{X}(t) \rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t_0) \hat{X}(t) \right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{X}_S \hat{U}(t, t_0) \right]$，通过在 $\hat{X}_S$ 之前插入 $\hat{U}^\dagger(t_f, t) \hat{U}(t_f, t) = \hat{I}$，并重新排列迹内的算符，还可将其进一步写成 $\mathrm{Tr}\left[\hat{U}(t_f, t) \hat{X}_S \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t_f, t_0) \right]$。请注意，只要在计算结束时令源 $J^{\pm}(t)$ 取相同值，以上所有步骤在存在源的情况下也都可以进行。我们可以利用方程 (A2) 的推广形式，将所得表达式写成路径积分形式，

$$\langle x_{t_f} | \hat{U}_{J^+}(t_f, t) \hat{X}_S \hat{U}_{J^+}(t, t_0) | x_{t_0}^+ \rangle = \int_{x_{t_0}^+}^{x_{t_f}} \mathcal{D}x^+ \, x^+(t) \times \exp\left[i \left\{ S[x^+] + \int_t J^+ x^+ \right\} \right], \tag{B1}$$

以及方程 (A3)，由此可见，$\langle \hat{X}(t) \rangle$ 因此可以写成

$$\langle \hat{X}(t) \rangle = -i \frac{\delta}{\delta J^+(t)} Z[J^+, J^-] \Big|_{J^{\pm} = J}, \tag{B2}$$

在存在源 $J(t)$ 的情况下。

接下来考虑时间序双点关联函数 $\langle T \hat{X}(t) \hat{X}(t') \rangle$，它可以像处理单点函数时那样，通过类似的运算写成

$$\langle T \hat{X}(t) \hat{X}(t') \rangle = (-i)^2 \frac{\delta}{\delta J^+(t)} \frac{\delta}{\delta J^+(t')} \times Z[J^+, J^-] \Big|_{J^{\pm} = J}, \tag{B3}$$

再次考虑存在源 $J(t)$ 的情形。对上述表达式取厄米共轭，可进一步得到反时间序关联函数 $\langle \bar{T} \hat{X}(t) \hat{X}(t') \rangle$，它可用关于 $J^-(t)$ 和 $J^-(t')$ 的泛函导数表示。最后，让我们考虑不进行时间排序的二点关联 $\langle \hat{X}(t') \hat{X}(t) \rangle$。它可写为 $\mathrm{Tr}\left[\left\{ \hat{U}(t_f, t) \hat{X}_S \hat{U}(t, t_0) \right\} \hat{\rho}(t_0) \left\{ \hat{U}^\dagger(t', t_0) \hat{X}_S \hat{U}^\dagger(t_f, t') \right\} \right]$，其中我们将各项分组，使得第一个 $\hat{X}_S$ 插入于时刻 t，第二个插入于时刻 t'，而不指定它们的排序。该式可用生成泛函表示为

$$\langle \hat{X}(t') \hat{X}(t) \rangle = (-i) i \frac{\delta}{\delta J^+(t)} \frac{\delta}{\delta J^-(t')} \times Z[J^+, J^-] \Big|_{J^{\pm} = J}. \tag{B4}$$

对该表达式取厄米共轭，同样可得到关联函数 $\langle \hat{X}(t) \hat{X}(t') \rangle$，其形式为

改为对 $J^-(t)$ 和 $J^+(t')$ 求泛函导数。因此，in-in生成泛函不仅可以计算通常的时间序二点关联函数，还可以计算非时间序二点关联函数。

最后需要指出的是，将上述表达式中的 $Z[J^+, J^-]$ 替换为我们在方程 (2) 中定义的 $Z_{\rm diss.}[J^+, J^-]$，得到的将是在存在耗散时的关联函数，正如第三节A所述。

[1] J. S. Schwinger，“量子振子的布朗运动”，《数学物理杂志》2，407–432（1961）。[2] P. M. Bakshi 和 K. T. Mahanthappa，“量子场论中的期望值形式体系。1。”《数学物理杂志》4，1–11（1963）。[3] P. M. Bakshi 和 K. T. Mahanthappa，“量子场论中的期望值形式体系。2。”《数学物理杂志》4，12–16（1963）。[4] L. V. Keldysh，“非平衡过程的图示技术”，Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47，1515–1527（1964）。[5] R. D. Jordan，“期望值的有效场方程”，《物理评论D》33，444–454（1986）。[6] R. P. Feynman 和 F. L. Vernon，“一般量子系统与线性耗散系统相互作用的理论”，《物理年刊》24，118（1963）。[7] R. P. Feynman 和 A. R. Hibbs，“量子力学与路径积分：修订版”，Dover Publications（2012）。[8] H. P. Breuer 和 F. Petruccione，“开放量子系统理论”，牛津大学出版社（2002）。[9] E. A. Calzetta 和 B.-L. B. Hu，“非平衡量子场论”，剑桥大学出版社（2008）。[10] D. Boyanovsky，“非平衡有效场论：布朗量子场”，《新物理学杂志》17，063017（2015），arXiv:1503.00156 [hep-ph]。[11] U. Weiss，“量子耗散系统”，World Scientific（2012）。[12] B. L. Hu、J. P. Paz 和 Y. Zhang，“一般环境中的量子布朗运动：1. 具有非局域耗散和有色噪声的精确主方程”，《物理评论D》45，2843–2861（1992）。[13] B. L. Hu、J. P. Paz 和 Y. Zhang，“一般环境中的量子布朗运动。2：非线性耦合与微扰方法”，《物理评论D》47，1576–1594（1993）。[14] L. Magazz`u 和 M. Grifoni，“费曼–弗农影响泛函方法在相互作用纳米结量子输运中的应用：一项解析层级研究”，《物理评论B》105，125417（2022），arXiv:2104.14497 [cond-mat]。[15] J. F. Koksma、T. Prokopec 和 M. G. Schmidt，“相互作用量子场论中的退相干：真空情形”，《物理评论D》81，065030（2010），arXiv:0910.5733 [hep-th]。[16] J. F. Koksma、T. Prokopec 和 M. G. Schmidt，“相互作用量子场论中的退相干：热情形”，《物理评论D》 **83**, 085011 2011 1102 4713 ( ), [ ] arXiv: . hep-th 。[17] F. C. Lombardo 和 D. Lopez Nacir，“暴胀期间的退相干：经典非均匀性的产生”，《物理评论D》72，063506（2005），arXiv:gr-qc/0506051。[18] D. Boyanovsky，“费米子对暴胀涨落的影响”，《物理评论D》93，083507（2016），arXiv:1602.05609 [gr-qc]。[19] D. Boyanovsky，“纠缠熵的印记，见暴胀涨落功率谱”，《物理评论D》98, 023515（2018），arXiv:1804.07967 [astro-ph.CO]。[20] F. Lombardo 和 F. D. Mazzitelli，“量子场论中的粗粒化与退相干”，《物理评论D》53, 2001 2011 1996 9508052 – （），arXiv:hep-th/。[21] C. Agon、V. Balasubramanian、S. Kasko 和 A. Lawrence，“粗粒化量子动力学”，《物理评论D》98, 025019（2018），arXiv:1412.3148 [hep-th]。[22] C. Jana、R. Loganayagam 和 M. Rangamani，“ 开放量子系统与舒温格 - 凯尔迪什全息 ”，《高能物理学杂志》07, 242（2020），arXiv:2004.02888 [hep-th]。[23] Y. BenTov，“量子简谐振子的舒温格-凯尔迪什路径积分”，（ 2021 2102 05029 ），[ ] arXiv:。hep-th。[24] C.-I. Um、K.-H. Yeon 和 T. F. George，“量子阻尼谐振子”，《物理报告》362, 63–192（2002）。[25] F. M´arkus 和 K. Gamb´ar，“阻尼振子的势能量子化方法”，《量子报告》4, 390–400（2022），arXiv:2204.02893 [quant-ph]。[26] 本文中我们将时间无关 ω 作为研究对象。更一般的 $\omega(t)$若无法精确求解，在 $\omega(t)$为缓变函数时，或可利用JWKB近似求解。[27] J. Berges，“非平衡量子场论引言”，《美国物理联合会会议论文集》739, 3–62（2005），arXiv:hep-ph/0409233 [hep-ph]。[28] N. Agarwal、R. Holman、A. J. Tolley 和 J. Lin，“一般暴胀初态中的有效场论与非高斯性”，《高能物理学杂志》 **05**, 085 2013 1212 1172 （），[ ] arXiv:。hep-th。[29] S. Weinberg，“对宇宙学关联的量子贡献”，《物理评论D》72, 043514（2005），arXiv:hep-th/0506236 [hep-th]。[30] A. O. Caldeira 和 A. J. Leggett，“量子布朗运动的路径积分方法”，《物理学A辑》121, 587 616 1983–（）。[31] 由于延迟格林函数的边界条件，$G^{\xi,+-}(t,t')$，是在 $t=t'$处设定的，因此它必须是 $t-t'$的函数。我们采用如下傅里叶约定：$G^{\xi,+-}(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{\rm d}\omega'}{2\pi} e^{-i\omega'(t-t')}\, \tilde{G}^{\xi,+-}(\omega')$。[32] 值得注意的是，在没有耗散的情况下，可以通过修改公式（56）中的试探形式，使 $h(t)h^*(t')$项和 $h^*(t)h(t')$项前具有不同的实常数，并在公式（31）、（32）和（33）的三个初始条件之外加入公式（34）中的朗斯基条件，直接求解 $G^<(t,t')$。[33] A. A. Clerk、M. H. Devoret、S. M. Girvin、F. Marquardt 和 R. J. Schoelkopf，“量子噪声、测量与放大的引言”，《现代物理评论》82, 1155 1208 2010 0810 – （），arXiv:。4729 [cond-mat.mes-hall]。[34] A. L. M. Britto、A. K. Das 和 J. Frenkel，“一种可解非平衡模型中的广义涨落耗散定理”，《物理评论D》92, 025020（2015），arXiv:1507.00896 [hep-th]。

[35]O. Scarlatella、A. A. Clerk 和 M. Schiro，“受驱耗散非线性量子谐振器的谱函数与负态密度”，《新物理学杂志》**21**，043040（2019），arXiv:1811.03518 [quant-th]。[36] H. Grabert、U. Weiss 和 P. Talkner，“阻尼谐振子的量子理论”，Z. Phys. B **55**, 87–94（1984）。[37] P. S. Riseborough、P. H¨anggi 和 U. Weiss，“阻尼量子力学谐振子的精确结果”，《物理评论A》**31**, 471（1985）。[38] H. Grabert、P. Schramm 和 G.-L. Ingold，“量子布朗运动：泛函积分方法”，《物理报告》**168**, 115–207（1988）。[39] P. H¨anggi 和 G.-L. Ingold，“量子布朗运动的基本方面”，Chaos **15**, 026105（2005），quant-ph/0412052 [quant-ph]。[40] 请注意，由于此处的因子 $1/2$，这些量与公式（42）中的重新定义成比例，但并不相等。[41] D. Seery，“暴胀关联函数中的红外效应”，Class. Quant. Grav. **27**, 124005（2010），arXiv:1005.1649 [astro-ph.CO]。[42] T. Tanaka 和 Y. Urakawa，“暴胀关联函数中的圈图”，Class. Quant. Grav.**30**, 233001（2013），arXiv:1306.4461 [hep-th]。[43] B.-L. Hu，“暴胀宇宙学中量子场的红外行为——问题与方法：综述”，（2018），arXiv:1812.11851 [gr-qc]。[44] R. P. Woodard，“Big Steve 与宇宙的状态”，（ 2023 10 3390 15040856, 2303 05111 ），。/ [ ] sym arXiv:。hep-th。[45] C. P. Burgess、L. Leblond、R. Holman 和 S. Shandera，“超哈勃尺度德西特涨落与动力学重整化群”，JCAP **1003**, 033（2010），arXiv:0912.1608 [hep-th]。

[46] D. Boyanovsky，《暴胀宇宙学中的凝聚态与准粒子：质量生成与衰变宽度》，《物理评论D》**D85**，123525（2012年），arXiv:1203.3903 [hep- ph]. [47] G. L. Pimentel、L. Senatore 和 M. Zaldarriaga，《关于暴胀中的圈图 III：单时钟暴胀中的 ζ 时间无关性》，《高能物理学杂志》 **07**, 166 2012 1203 6651 ( ), [ ] arXiv: . hep-th . [48] X. Chen、Y. Wang 和 Z.-Z. Xianyu，《暴胀中标准模型场的圈修正》，《高能物理学杂志》**08**，051 2016 1604 ( )，arXiv: .07841 [hep-th]. [49] D. A. Trunin，《关于绝热定理的评论》，Int. J. Mod. Phys. A **33**, 1850140 2018 1805 04856 ( ), [ ] arXiv: . hep-th . [50] V. Gorbenko 和 L. Senatore，《德西特中的 $\lambda\phi^4$》，（2019年），arXiv:1911.00022 [hep-th]. [51] M. Baumgart 和 R. Sundrum，《德西特图解规则与时间重求和》，《高能物理学杂志》**07**，119（2020年），arXiv:1912.09502 [hep-th]. [52] D. A. Trunin，《非平稳大N量子力学中的粒子产生》，《物理评论D》**104**，045001（2021年），arXiv:2105.01647 [hep-th]. [53] S. Chaykov、N. Agarwal、S. Bahrami 和 R. Holman，《远离平衡态的闵可夫斯基时空中的圈修正。第一部分：晚时重求和》，《高能物理学杂志》**02**，093 2023 2206 ( ), arXiv: .11288 [hep-th]. [54] S. Chaykov、N. Agarwal、S. Bahrami 和 R. Holman，《远离平衡态的闵可夫斯基时空中的圈修正。第二部分：有限时间结果》，《高能物理学杂志》**02**，094（2023年），arXiv:2206.11289 [hep-th]. [55] A. Kaya，《in-in路径积分的泛函测度》，Class. Quant. Grav. **32**，095008（2015年），arXiv:1212.3066 [hep-th].