利用径向偏振扭曲光直接观测法拉第旋转

F. Tambag[1], K. Koksal[1], F. Yildiz[3], M. Babiker[4]1 *Physics Department, Bitlis Eren University, Bitlis, Turkey*3 *Department of Physics, Gebze Technical University, Kocaeli, Turkey and*4 *Department of Physics, University of York, YO10 5DD, UK*（日期：2023年3月10日）

本文介绍了一种利用拉盖尔–高斯（LG）光实现光学法拉第效应的新型实验技术。实验采用零级涡旋半波延迟器，产生径向或方位角偏振的 LG 环形光束。随后，透过延迟器的光经过线偏振片，形成两个强度瓣；两个波瓣之间的光强间隙方向与径向偏振光束的偏振方向平行（与方位角偏振光束的偏振方向垂直）。为完成法拉第装置，光在经过最后一片线偏振片之前先穿过置于磁场中的材料，从而使叶瓣图样发生可见旋转。该技术能以直观可见的方式呈现法拉第效应，无需通过繁复步骤检测光强变化。偏振面的旋转角度可根据波瓣之间光强间隙方向清晰可见的变化直接确定。

arXiv:2303.04867v1 [physics.optics] 8 Mar 2023

目前，随着新应用的推动，人们对光学法拉第效应重新产生了兴趣，例如，寻找适用于不同波长[1]的法拉第隔离器的合适磁光活性材料，以及进行微弱磁场测量[2]。

法拉第效应是一种广为人知且由来已久的现象：偏振光束穿过磁化材料薄片时会出现这种现象。除了作为一种基础物理现象受到关注外，它此前还催生了物理学领域的一些实用应用[3–6]。其表现为材料存在时，轴向磁场引起波的偏振方向旋转；旋转幅度取决于费尔德常数[7,8]、材料长度以及施加磁场的强度。传统上，展示法拉第旋转的方法通常是在光束穿过材料后放置一片线偏振片，并使用光电探测器观察光强的变化[9]。

本文提出并从实验和理论角度阐述了一种实现法拉第效应的不同技术，该技术使用径向或方位偏振的拉盖尔-高斯（LG）光束[10,11]。除了采用扭曲光并直接观测旋转角这一新颖之处外，这种技术还具有一项优势：无需使用光电探测器及相关软件来计算光强的变化，从而展示法拉第旋转[12–14]。径向和方位偏振的LG光束可通过零级涡旋半波延迟器[16]制备[15] 。

我们重点研究频率为 ω、轴向波矢为 k，并沿 z 方向在折射率为 n的介质中传播的径向偏振傍轴 LG 光束，同时说明如何将此方法应用于方位角偏振 LG 模式。在柱坐标 $\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$ 中，径向偏振 LG 模式的电场可写为

$$\mathbf{E}_\rho(\mathbf{r},t) = \mathcal{U}_0 \mathcal{F}_{\ell p}(\rho) e^{i(nkz-\omega t)} e^{i\ell\phi}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{1}$$

其中， $\mathcal{U}_0$ 为常数； $\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)$ 为傍轴拉盖尔–高斯模式的振幅函数。具体而言，对于 LG$_{\ell p}$ 模式，其振幅函数 $\mathcal{F}_{\ell p}$ 如下

$$\mathcal{F}_{\ell p}(\rho) = e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_0}\right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|}\left(\frac{2\rho^2}{w_0^2}\right) \tag{2}$$

这里， $L_p^{|\ell|}$是指标为$|\ell|$ 和 p的缔合拉盖尔多项式。径向偏振光束的强度为

$$\mathcal{I}_\rho = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \mathcal{U}_0^2 |\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)|^2 \tag{3}$$

当p=0时，其形状为甜甜圈形，如图1a所示。

径向偏振的单位矢量可用圆偏振表示 $\sigma_\pm$ 如下

$$\mathbf{E}_{\sigma_-} = e^{i(\ell+1)\phi}(\hat{\boldsymbol{x}} - i\hat{\boldsymbol{y}})\mathcal{U}_0 \mathcal{F}_{\ell p}(\rho) e^{i(nkz-\omega t)} \tag{4}$$

$$\mathbf{E}_{\sigma_+} = e^{i(\ell-1)\phi}(\hat{\boldsymbol{x}} + i\hat{\boldsymbol{y}})\mathcal{U}_0 \mathcal{F}_{\ell p}(\rho) e^{i(nkz-\omega t)} \tag{5}$$

因此

$$\mathbf{E}_\rho = \mathbf{E}_{\sigma_-} + \mathbf{E}_{\sigma_+} \tag{6}$$

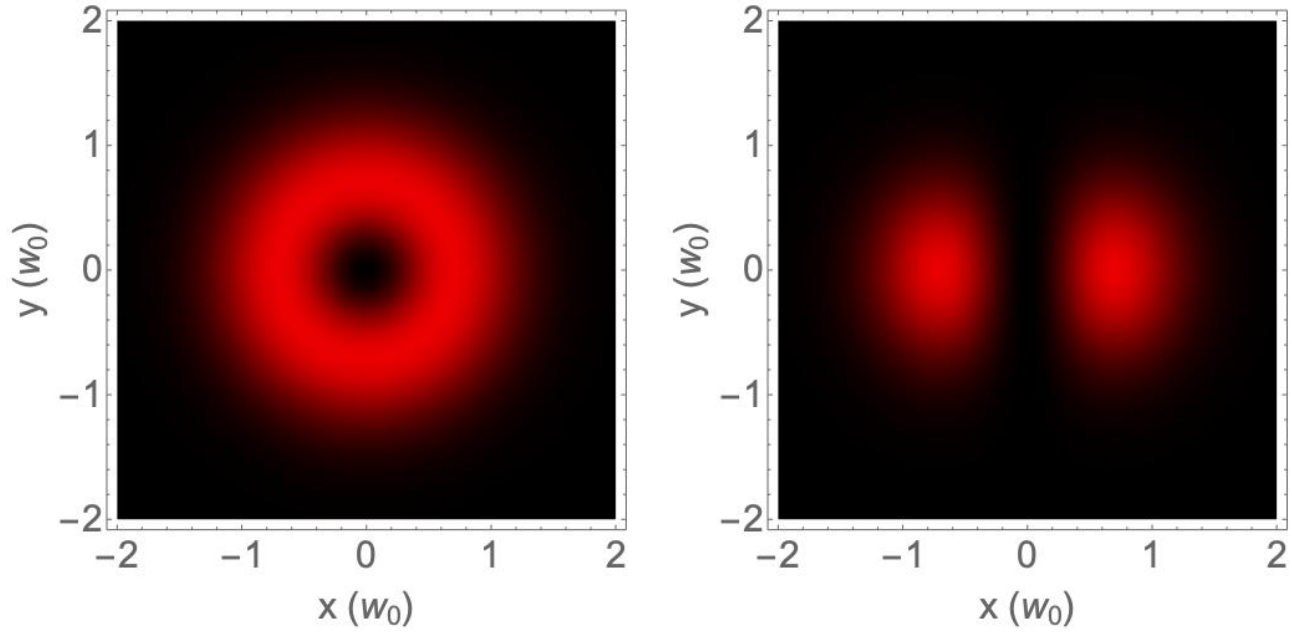
现在假设刚刚产生的径向偏振光束通过一个线偏振片。通过线偏振片后，原径向偏振模式的两个分量 $\sigma_\pm$ 的电场矢量都变为沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$偏振，因此我们有

$$\mathbf{E}_{\rho'} = (\mathbf{E}_{\sigma_-} \longrightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{x_1}}) + (\mathbf{E}_{\sigma_+} \longrightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{x_2}}) \tag{7}$$

其中， $\mathbf{E}_{x_1}$ 和$\mathbf{E}_{x_2}$ 由下式给出

$$\mathbf{E}_{x_1} = e^{i(\ell+1)\phi}\mathcal{U}_0 \mathcal{F}_{\ell p}(\rho) e^{i(nkz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

$$\mathbf{E}_{x_2} = e^{i(\ell-1)\phi}\mathcal{U}_0 \mathcal{F}_{\ell p}(\rho) e^{i(nkz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{9}$$



(a) 未经过偏振片，$\mathcal{I}_{rad}$。

(b) 经过线偏振片后的径向偏振 LG 光束强度分布，$\mathcal{I}_{rad'}$。

图 1：使用线偏振片后，径向偏振（或方位角偏振）LG 光束的甜甜圈形强度分布转变为两个波瓣（如式 11 所示）。

总的 x 偏振电场为以下各项之和

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\rho'} &= \left(e^{i(\ell-1)\phi} + e^{i(\ell+1)\phi}\right)\mathcal{U}_0\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)e^{i(nkz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}} \\ &= (2\ \cos\phi)\,\mathcal{U}_0\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)e^{i(nkz-\omega t)}e^{i\ell\phi}\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{10}$$

我们还应注意到，电场中出现了 $\cos\phi$ 因子。现在我们可以看出，这正是从线偏振片出射的光的强度 $\mathcal{I}'(\rho,\ \phi)$ 中存在两个波瓣的原因，其表达式为

$$\mathcal{I}'(\rho,\phi) = 2\epsilon_0 c\mathcal{U}_0^2|\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)|^2\cos^2\phi \tag{11}$$

容易证明，对于方位角偏振 LG 模式，按照上述步骤会使强度中的 $\sin^2\phi$ 因子被 $\cos^2\phi$ 取代，而此时的强度分布图样将出现一道水平间隙，其方向与径向偏振情形下的间隙垂直。

图 1 展示了两种拉盖尔-高斯光束在横向平面内的强度分布，分别为径向偏振光束和线偏振光束。图 1a 展示了径向偏振 LG 光束众所周知的甜甜圈形轮廓。图 1b 展示了原始光束通过线偏振片后产生的光束强度分布，假设偏振片的偏振方向沿 x。

使用扭曲光进行光学法拉第实验的理论基础，与 Berman[14] 针对非涡旋光提出的理论思路类似，唯一的区别是柱坐标系更适合用于描述涡旋光束及其效应。

径向偏振 LG 光束进入施加了磁场的材料后，其电场ˆ会沿 $\boldsymbol{\phi}-$ 方向产生一个额外的场分量，该分量导致法拉第旋转。此时，材料内的电场矢量如下

$$\mathbf{E} = E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + E_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{12}$$

其中，E_ρ 和 E_ϕ 现在表示为

$$E_\rho = \mathcal{U}_0\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)e^{i(nkz-\omega t)}e^{i\ell\phi} \tag{13}$$

$$E_\phi = \Theta(z)E_\rho \tag{14}$$

磁化材料内部的场有所不同，因为ˆ沿 $\boldsymbol{\phi}$ 方向增加了一个额外分量，该分量与 $\Theta(z)$ 成正比。这个随 z 变化的角度表示光束在材料中轴向位置 z 处、长度元（dz）范围内经历的法拉第旋转角。

光束从磁化材料中射出时的总电场矢量为

$$\mathbf{E} = \mathcal{U}_0\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)e^{i(kz-\omega t)}e^{i\ell\phi}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}} + \Theta(z)\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{15}$$

离开材料后，光束进入一个偏振方向沿 x方向的线偏振片（称为检偏器），因此它只选择电场的 x分量。利用以下关系，将单位ˆ矢量ˆ$\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 用ˆ$\boldsymbol{x}$ 和ˆ$\boldsymbol{y}$ 表示

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\phi - \hat{\boldsymbol{y}}\sin\phi; \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi \tag{16}$$

最终线偏振片（检偏器）之后的电场矢量形式，可将式（16）代入式（15）并选取 x分量得到，记为$\mathbf{E}_f$，即

$$\mathbf{E}_f = \mathcal{U}_0 \mathcal{F}_{\ell p}(\rho) e^{i(kz-\omega t)} e^{i\ell\phi} \left(\cos\phi + \Theta_F \sin\phi\right) \hat{\boldsymbol{x}} \quad (17)$$

其中 Θ_F 是法拉第旋转角；它是光束穿过磁化材料的全长 L时累积的角度。该角度与乘积 $B_0 L$ 成正比，特征常数因子为 V，具体取决于材料的类型

$$\Theta_F = V B_0 L \quad (18)$$

与式（17）对应的光强为

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \mathcal{U}_0^2 |\mathcal{F}_{\ell p}(\rho)|^2 \left(\cos\phi + \Theta_F \sin\phi\right)^2 \quad (19)$$

式（19）是与图3中的实验装置相对应的光强解析结果。其在横向平面上的分布如图2所示，其中光强分布图样随旋转角 Θ_F变化而发生的改变，展示了法拉第旋转。

实验装置的一侧由图3示意图的上臂表示。在这里，径向偏振的拉盖尔-高斯光束穿过第二个偏振片。由此，拉盖尔-高斯光束的甜甜圈形分裂为两个波瓣，中间由一道暗的光强间隙隔开。对于径向偏振的情况，光强间隙的方向与偏振方向垂直。

法拉第旋转装置的另一侧如图 3 下方的光路所示。图中显示拉盖尔-高斯光束从光学涡旋相位延迟器射出，随后穿过置于轴向磁场中的铽镓石榴石样品。该材料样品的作用是将偏振方向旋转 45 度。样品后方的线偏振片用于产生分束，并通过肉眼观察偏振的变化。

如图3所述，在我们的实验中，旨在表明法拉第旋转可以直接用肉眼观测到。实验装置的主要特征如下。所用激光源的波长为640 nm。激光光束首先通过线偏振片。随后通过光学涡旋透镜WPV10L-633，该透镜将线偏振激光光束转换为具有拓扑荷 $\ell = 1$的径向或方位偏振（环形模式）拉盖尔-高斯光束。甜甜圈光束轮廓如图1a所示。

实验的第一部分涉及图 3 上方的光路。随后，径向偏振光束穿过另一片线偏振片，将环形甜甜圈状的强度分布分成两个强度瓣；对于径向偏振的涡旋相位延迟器，光强间隙垂直于偏振方向。原始径向偏振光束的两个波瓣强度分布如图 1b 所示。装置包含施加于偏振敏感材料上的磁场。这种紧凑型法拉第旋光器采用铽镓石榴石（TGG）作为材料，并施加大小为 0.54 T 的恒定磁场。在激光波长为 $640\ nm$ 时，其费尔德常数为 -131 rad/(T·m)，可使偏振方向旋转 45 度。在传统的法拉第旋转实验中，偏振旋转是根据记录到的光强变化推断出来的。我们采用扭曲光的技术，其一大优势是能够直接、轻松地测量可见的旋转。

使用相同的装置测量恒定外加磁场引起的偏振旋转变化，但材料换成了燧石玻璃。测得的旋转角仍为45度，并再次直接观察到它就是两个强度瓣分裂的角度。

总之，我们提出并探索了一种利用径向偏振光学涡旋光束实现光学法拉第旋转实验的新技术。该技术可直接呈现法拉第效应，无需额外步骤来检测光强变化。偏振面的旋转程度可通过清晰可见的强度瓣分裂方向变化轻松确定。

致谢

K.K 和 F.T. 谨此感谢 Bitlis Eren University 提供的经费支持（项目编号：BEBAP 2021.02）。

[1] D. Vojna、M. Duda、R. Yasuhara、O. Slez´ak、W. Schlicht- ing、K. Stevens、H. Chen、A. Lucianetti 和 T. Mocek，Opt. Lett. **45**, 1683（2020）。[2] R. Vleugels、J. Steverlynck、W. Brullot、G. Koeckelberghs 和 T. Verbiest，The Journal of Physical Chemistry C **123**，9382（2019），10.1021/acs.jpcc.b9.00607，https://doi.org/。[3] P. Schatz 和 A. McCaffery，Quarterly Reviews, Chemical Society **23**, 552 (1969)。[4] H. S. Bennett 和 E. A. Stern, Physical Review **137**, A448 (1965)。[5] R. Serber，Physical Review **41**, 489 (1932)。[6] I. M. Boswarva、R. Howard 和 A. Lidiard，Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical

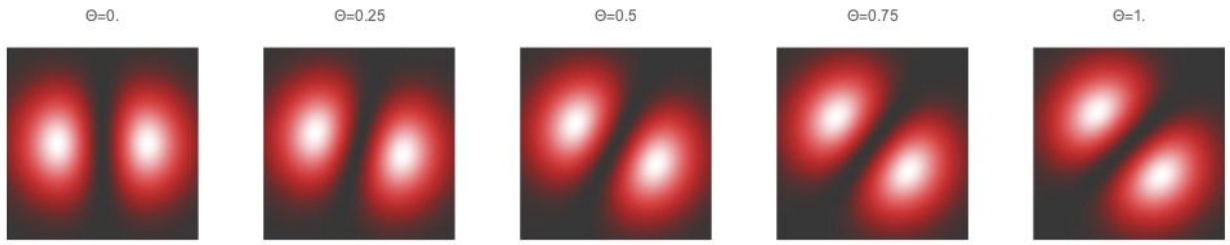


图 2：与公式 19 对应的强度分布，展示了改变费尔德常数 Θ_F 时的变化。当 $\Theta_F = 0$ 时，强度分布简化为公式（11）。如公式 18 所示，角度 Θ_F 取决于所施加的磁场以及光束穿过的材料厚度 L 。

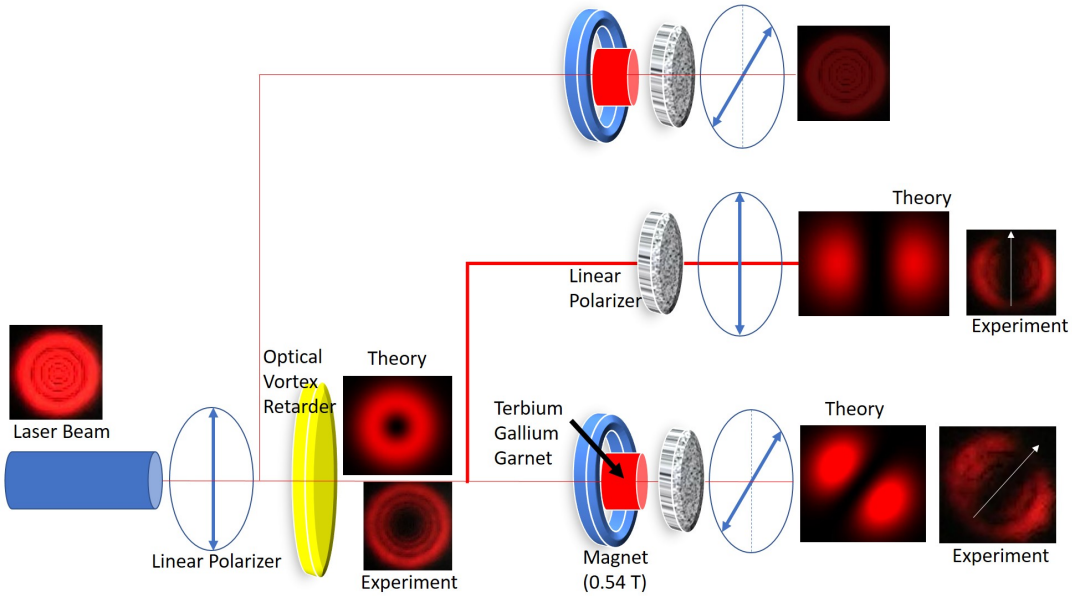


图 3：用于观察可见光法拉第效应的实验装置。这里将环形光束设置为径向偏振。图中上方的光路展示了传统的法拉第效应实验装置。中间的光路中，环形强度环经过线偏振片后，转变为两个强度瓣；对于原始的径向偏振拉盖尔-高斯光束，两个瓣之间的间隙朝向垂直方向。下方的光路包含磁体和材料，从而产生法拉第旋转。采用方位角偏振光束的类似装置（未显示）会产生两个强度瓣，其间隙在中间光路中呈水平方向，而下方光路中的叶瓣图样则发生法拉第旋转。

和《物理科学》**269**，125（1962）。[7] D. Vojna、O. Slez´ak、A. Lucianetti 和 T. Mocek，《应用科学》**9**，3160（2019）。[8] D. Vojna、O. Slez´ak、R. Yasuhara、H. Furuse、A. Lu- cianetti 和 T. Mocek，《材料》**13**，5324（2020）。[9] F. A. Jenkins 和 H. E. White，《印度物理学杂志》**25**，265（1957）。[10] L. Allen、M. Padgett 和 M. Babiker，载于 *tics* 39 1999 291 372 ，第 (Insitutte of Physics,) 卷，第 – 页。

Progress in Op

[11] D. L. Andrews 和 M. Babiker（编），*The Angular Momentum of Light*（剑桥大学出版社，剑桥，2012）。[12] F. J. Loeffler，《美国物理学杂志》**51**，661（1983）。[13] F. L. Pedrotti 和 P. Bandettini，《美国物理学杂志》**58**，542（1990）。[14] P. Berman，《美国物理学杂志》**78**，270（2010）。[15] M. Olvera-Santamar´ıa、J. Garc´ıa-Garc´ıa、A. Tlapale-Aguilar、J. Silva-Barranco、C. Rickenstorff-Parrao 和 A. Ostrovsky，《光学通信》**467**，125693（2020）。[16] Thorlabs 零级涡旋半波延迟器，型号 WPV10。