arXiv:2303.04886v1 [math.GR] 8 Mar 2023

涉及有限群平均阶的一些稠密性结果

Mihai-Silviu Lazorec

2023年3月4日

摘要

设 $o(G)$ 为有限群 G 的元素阶平均值。围绕这一量的一个研究主题，是理解 $o(G)$ 与 $o(H)$ 之间的关系，其中 H 是 G 的一个子群。设 $\mathscr{N}$ 为有限幂零群类，并设 $L(G)$ 为 G 的子群格。在本文中，我们证明集合 $\{\frac{o(G)}{o(H)} \mid G \in \mathscr{N}, H \in L(G)\}$ 在 $[0,\infty)$ 中是稠密的。全文还概述了其他稠密性结果。

MSC（2010）：主要分类号 20D15；次要分类号 20D60、40A05。关键词：
元素阶， p-群，幂零群，集合的稠密性

1 引言

设 G 是一个有限群。在 [5], A. Jaikin-Zapirain 中，作者为 G 为幂零时的 G 的共轭类数 $k(G)$ 找到了一个超对数下界。更确切地说，该论文中的定理1.1指出：

$$k(G) > 10^{-4} \cdot \frac{\log_2 \log_2 n}{\log_2 \log_2 \log_2 n} \cdot \log_2 n,$$

其中 G 是一个阶为 $n \geq 5$ 的幂零群。在上述结果的证明中发挥重要作用的工具之一，是所谓的 G 平均阶，即以下量：

$$o(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |x|,$$

其中 $|x|$ 表示元素 $x \in G$ 的阶。作者还证明，对于任意有限群 G，都有 $o(G) \geq o(Z(G))$；并指出，通过回答以下问题，进一步研究 G 的平均阶与其子群的平均阶之间的关系，将会很有意义：

问题 1.1. 设 G 是一个有限（p-）群，且 N 是 G 的正规（阿贝尔）子群。是否有 $o(G) \geq o(N)^{\frac{1}{2}}$?

问题 1.1 近十年来一直悬而未决。2021 年，E.I. Khukhro、A. Moret´o 和 M. Zarrin 发表了论文 [6] ，对

Jaikin-Zapirain 的问题给出了否定的回答。更确切地说， [6] 中的定理 1.2 指出，给定一个实数 $c > 0$和一个素数 $p \geq \frac{3}{c}$，可以构造一个 p-群 G，它有一个正规阿贝尔子群 N，使得 $o(G) < o(N)^c$。因此，对于 $c = \frac{1}{2}$，显然存在问题 1.1 的反例。沿用 [6], 中的记号，这些反例是通过令 G 为一个齐次循环群 U_s 与一个所谓的秘密 p-群 P 的半直积构造的，其中齐次循环群的指数为 p^s，且 $s = p + 1$（参见 [11] 和 [6]中的引理 4.1）；而 N 则设为 U_s。

令 $\mathscr{F}$ 为所有有限群构成的类， $\mathscr{N}$ 为所有有限幂零群构成的类，$L(G)$ 为有限群 G 的子群格。对于 $\mathbb{R}$ 的子集 A，我们用 $\overline{A}$ 表示 A 关于通常拓扑 $\tau_{\mathbb{R}}$ （定义在 $\mathbb{R}$ 上）的闭包。如果我们采用另一种拓扑，例如 τ，则用 $\overline{A}_\tau$ 表示 A 关于 τ 的闭包。

本文还旨在通过研究集合的稠密性，考察 $o(G)$ 与 $o(H)$ 之间的关系，其中 $H \in L(G)$。

$$O_{\mathscr{C}} = \left\{ \frac{o(G)}{o(H)} \;\middle|\; G \in \mathscr{C}, H \in L(G) \right\}$$

在 $[0, \infty)$ 中，其中 $\mathscr{C}$ 是有限群的一个特定类。作为主要结果的推论，我们证明了 $O_{\mathscr{F}}$ 在 $[0, \infty)$ 中稠密；我们的主要结果更强，内容如下：

定理 1.2. 集合 $O_{\mathscr{N}}$ 在 $[0, \infty)$ 中稠密。

定理 1.2 的一个直接推论如下。设 $\mathscr{C}$ 是满足 $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{C}$ 的有限群类。那么 $O_{\mathscr{N}} \subseteq O_{\mathscr{C}} \subseteq [0, \infty)$，因此 $\overline{O_{\mathscr{N}}} \subseteq \overline{O_{\mathscr{C}}} \subseteq [0, \infty)$。由于 $[0, \infty)$ 是闭集且 $\overline{O_{\mathscr{N}}} = [0, \infty)$，我们得到：

推论 1.3. 设 $\mathscr{C}$ 是一类有限群，满足 $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{C}$。那么 $O_{\mathscr{C}}$ 在 $[0, \infty$ 中稠密。特别地， $O_{\mathscr{F}}$ 在 $[0, \infty$ 中稠密。

我们在引言的最后提及，有限群 G 的平均阶也可以表示为

$$o(G) = \frac{\psi(G)}{|G|},$$

其中 $\psi(G) = \sum |x|$ 是 G 的元素阶之和。近年来，人们对研究这一不变量的兴趣日益浓厚。关于有限群元素阶之和的相关结果，读者可参阅 [4] 中的最新综述。

2 定理 1.2 的证明及关于某些集合稠密性的其他结果

正如第一节所指出的，要获得 $O_{\mathscr{F}}$ 在 $[0, \infty)$ 中的稠密性，只需找到一类群 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}$，使得 $\overline{O_{\mathscr{C}}} = [0, \infty)$。显然， $\overline{O_{\mathscr{C}}} \subseteq [0, \infty)$。因此，一旦选定类 $\mathscr{C}$ 的候选，只需证明每个 $a \in [0, \infty)$ 都是 $O_{\mathscr{C}}$ 的聚点，也就是说，存在一个群的序列 $(G_n)_{n \geq 1} \subset \mathscr{C}$，以及相应的序列 $(H_n)_{n \geq 1}$，其中

$H_n \in L(G_n)$，对所有 $n \geq 1$ 均成立，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(G_n)}{o(H_n)} = a.$$

$\mathscr{C}$ 的候选是 $\mathscr{N}$，在下文中，我们将论证这一选择的合理性。为进一步展开我们的论证，我们给出以下初步结果，该结果是 [7]第 863 页所述命题的推论。

引理 2.1. 设$(x_n)_{n\geq 1}$ 是一个正实数序列，满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad and \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty.$$

则，包含$(x_n)_{n\geq 1}$ 所有有限子序列之和的集合在 $[0,\infty)$中稠密。

我们用 p_n表示第 n个素数。引理 2.1 是用来证明每个 $a \in [1,\infty)$都是 $O_{\mathscr{N}}$的聚点的主要工具。完成这一步后，还需覆盖 $a \in [0,1)$中的点。对于第一部分，主要思路是将引理 2.1 应用于序列$(x_n)_{n\geq 1}$，其中 $x_n = \ln {}^{o_{(G_n)}\, o(\widetilde{H_n})}$。我们将证明，对于$(\widetilde{G_n})_{n\geq 1}$和$(\widetilde{H_n})_{n\geq 1}$，$\widetilde{\ }$，存在一些合适的候选值，使得如上定义的序列$(x_n)_{n\geq 1}$ 满足引理 2.1 的假设；这些候选值为 $G_n = C_{p_n}^{m\widetilde{\ }}$和 $H_n = C_{p_n}^{m-1}$，其中 $m \geq 2$ 为固定整数（见下文命题 2.5 的证明）。因此，通过应用引理 2.1 及一些微积分性质，我们推 deduce 存在一个有限阿贝尔群序列$(G_n)_{n\geq 1}$以及相应的子群序列$(H_n)_{n\geq 1}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(G_n)}{o(H_n)} = a \in [1,\infty).$$

这意味着 $[1,\infty) \subseteq \overline{O_{\mathscr{A}}}$，其中 $\mathscr{A}$是有限阿贝尔群的类。反向包含关系也成立，因为对于任意有限阿贝尔群 G 和任意~~H~~ $\in L(G)$，都有 ${}^{o_{(G)}\, o(H)} \geq 1$。事实上，由于 G 是自对偶的（参见 [9] 的第 8 章或 [2]），我们知道，对于任意 $H \in L(G)$，存在 $K \in L(G)$，使得$H \cong \frac{G}{K}$。因此，

$$\frac{o(G)}{o(H)} = \frac{o(G)}{o(\frac{G}{K})} = \frac{1}{|K|} \cdot \frac{\psi(G)}{\psi(\frac{G}{K})} = \frac{\sum\limits_{x\in G} |x|}{\sum\limits_{x\in G} |xK|} \geq 1,$$

因此 $O_{\mathscr{A}} \subseteq [1,\infty)$，由此得到 $\overline{O_{\mathscr{A}}} \subseteq [1,\infty)$。于是，我们给出以下结果。

推论 2.2。集合 $O_{\mathscr{A}}$ 在 $[1,\infty)$ 中稠密。

~我们指出，若将 $\mathscr{A}$ 替换为有限群的类 $\mathscr{C}$，且满足 $O_{\mathscr{A}} \subseteq O_{\widetilde{\mathscr{C}}} \subseteq [1,\infty)$，推论 2.2 仍然成立。

最后，关于点 $a \in [0,1)$ 的黏着性质，我们主要研究由特定的有限 p-群直积构成的序列。每个这样的直积都有两个主要部分：一部分是阿贝尔群，另一部分则是问题 1.1 的一个反例（见下文命题 2.7 的证明）。前几段中提到的所有有限群都是

幂零群，因此这也解释了我们为何选择 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{N}$。

下面的预备结果包含一些数论性质和微积分性质，后续将会用到。

引理 2.3。

i) 设 G_1 和 G_2 是有限群。如果 $(|G_1|,|G_2|) = 1$，那么

$$o(G_1 \times G_2) = o(G_1) \cdot o(G_2).$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

iii) 设 $(x_n)_{n\geq 1}$、$(y_n)_{n\geq 1}$ 是正实数列。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty),$$

∞ ∞那么级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 具有相同的敛散性。$n=1$ $n=1$

iv) 设 (X,τ) 和 (Y,τ') 是拓扑空间，设 $f\colon X \longrightarrow Y$是连续函数，且设$A, B \subseteq X$。如果 $\overline{A}_\tau = \overline{B}_\tau$，那么 $f(A)_{\tau'} = f(B)_{\tau'}$。

关于前述引理，我们指出，i）说明平均阶是一个积性函数。这是元素阶之和具有积性的推论（见 [1] 中的引理 2.1）。ii）的简短证明可见于 [8]。对于 iii），可查阅 [3]，中的定理 10.9；而 iv）则可利用函数连续性的闭包刻画轻易得到（见 [10] 中的命题 6.12）。

令 $I = [1,\infty)$。记 τ_I 为 I 上的子空间拓扑。对于 $\mathbb{R}$ 的子集 A，相对于 τ_I，A 的闭包为 $\overline{A}_{\tau_I} = \overline{A} \cap I.$。由推论 2.2，得 $\overline{O_{\mathscr{A}}} = I$。我们推得

$$\overline{O_{\mathscr{A}}}_{\tau_I} = \overline{I}_{\tau_I}. \tag{1}$$

由于函数

$$f : (I,\tau_I) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}}), \text{ given by } f(x) = \frac{1}{x},\ \forall\ x \in I,$$

是连续的，由引理 2.3 的 iv）及（1），可得

$$\overline{\left\{ \frac{o(H)}{o(G)} \;\middle|\; G \in \mathscr{A}, H \in L(G) \right\}} = \overline{(0,1]} = [0,1].$$

因此，可以得出以下结论。

推论 2.4。集合

$$\left\{ \frac{o(H)}{o(G)} \;\middle|\; G \in \mathscr{A}, H \in L(G) \right\}$$

在 $[0,1]$ 中稠密。

现在我们开始证明主要结果。

定理 1.2 的证明。回忆一下， p_n 表示第 n 个素数。我们将完成一些准备步骤，以实现我们的目标。

命题 2.5。设 $m \geq 2$ 为一个整数。集合

$$\left\{ \frac{o\big(\underset{n\in I}{\times} C_{p_n}^m\big)}{o\big(\underset{n\in I}{\times} C_{p_n}^{m-1}\big)} \;\middle|\; I \subset \mathbb{N}^*, |I| < \infty \right\}$$

在 $[1,\infty)$ 中稠密。

考虑序列 $(x_n)_{n\geq 1}$，其中 $x_n = \ln \; {}^{o}{}_{(C_{p_n}^m)\, o(C_{p_n}^{m-1})}$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。我们有

$$x_n = \ln \frac{p_n^{m+1} - p_n + 1}{p_n^{m+1} - p_n^m + p_n^{m-1}} \in (0,\infty).$$

当 n 趋于无穷大时，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 1 = 0. \tag{2}$$

此外，取由 $y_n = \frac{1}{p_n}$ 给出的序列 $(y_n)_{n\geq 1}$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(p_n \cdot \ln \frac{p_n^{m+1} - p_n + 1}{p_n^{m+1} - p_n^m + p_n^{m-1}} \right) = 1 \in (0,\infty).$$

由引理 2.3 的 ii)、iii)，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty. \tag{3}$$

根据 (2) 和 (3)，序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 满足引理 2.1 的假设。因此，我们有

$$\overline{\left\{ \sum_{n\in I} x_n \;\middle|\; I \subset \mathbb{N}^*, |I| < \infty \right\}} = [0,\infty) \Longleftrightarrow \overline{\left\{ \ln\left(\prod_{n\in I} \frac{o(C_{p_n}^m)}{o(C_{p_n}^{m-1})} \right) \;\middle|\; I \subset \mathbb{N}^*, |I| < \infty \right\}} = [0,\infty). \tag{4}$$

由于引理 2.3 的 i) 表明，平均阶是一个积性函数，(4) 变为

$$\overline{\left\{ \ln \frac{o\big(\underset{n\in I}{\times} C_{p_n}^m\big)}{o\big(\underset{n\in I}{\times} C_{p_n}^{m-1}\big)} \;\middle|\; I \subset \mathbb{N}^*, |I| < \infty \right\}} = [0,\infty). \tag{5}$$

最后，由于

$$exp : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}), \;\; \text{given by} \;\; exp(x) = e^x, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

是连续的，且 (5) 突出了 $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ 的两个闭集相等，因此我们应用引理 2.3 的 iv) 完成该命题的证明，即

$$\overline{\left\{\frac{o\big(\underset{n\in I}{\times}C_{p_n}^{m}\big)}{o\big(\underset{n\in I}{\times}C_{p_n}^{m-1}\big)}\;\middle|\; I\subset\mathbb{N}^*,|I|<\infty\right\}}=[1,\infty).$$

■

命题 2.6. 设 $m\geq 2$，并设 J 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个有限非空子集。集合

$$\left\{\frac{o\big(\underset{n\in I}{\times}C_{p_n}^{m}\big)}{o\big(\underset{n\in I}{\times}C_{p_n}^{m-1}\big)}\;\middle|\; I\subset\mathbb{N}^*\setminus J,|I|<\infty\right\}$$

在 $[1,\infty)$ 中稠密。

证明。对序列 $(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}^*\setminus J}$ 重复命题 2.5 的证明即可，其中$\widetilde{x_n}=\ln\ ^{o}{}_{(C_{p_n}^{m})\,o(C_{p_n}^{m-1})}$，对所有 $n\in\mathbb{N}^*\setminus J$ 均成立。可以重复同样的推理，因为 $(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}^*\setminus J}$ 是从命题 2.5 的证明中所取的原序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 删除有限项后得到的，因此 $(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}^*\setminus J}$ 也满足引理 2.1 的假设。

■

命题 2.7. 任意 $a\in[0,1)$ 都是 $O_{\mathscr{N}}$ 的一个聚点。

证明。假设 $a=0$。如第一节所述，对于 $n\geq 4$ （即大于或等于 7 的素数），若取 $G_n=U_{s_n}P_n$ 为一个齐次循环群U_{s_n} 与一个指数为 $p_n^{s_n}$ 的半直积，其中 $s_n=p_n+1$，并取一个隐秘的 p_n-群 P_n，则有 $o(G)<o(U_{s_n})^{\frac{1}{2}}$。根据 [6], 的定理 1.2 的证明，以下不等式成立:

$$o(G_n)<p_n^3\ \text{ and }\ o(U_{s_n})\geq p_n^{p_n},\ \forall\ n\geq 4.$$

因此,

$$\frac{o(G_n)}{o(U_{s_n})}<\frac{p_n^3}{p_n^{p_n}}. \tag{6}$$

当 n 趋于无穷大时，由（6）可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o(G_n)}{o(U_{s_n})}=0, \tag{7}$$

所以 $a=0$ 是 $O_{\mathscr{N}}$的聚点。

令 $a\in(0,1)$。由 (7)，存在充分大的 N，使得 $a\geq\ ^{o}{}_{(G_N)\,o(U_{s_N})}$。因~~此，$a$~~ $^{o}{}_{(U_{s_N})\,o(G_N)}\in[1,\infty)$。若在命题 2.6 中取 $J=\{N\}$，则可知存在一个有限阿贝尔群序列 $(G_n)_{n\geq 1}$ 及相应的序列 $(H_n)_{n\geq 1}$，其中对所有 $n\geq 1,\ \ H_n\in L(G_n)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o(\widetilde{G_n})}{o(\widetilde{H_n})}=a\cdot\frac{o(U_{s_N})}{o(G_N)}. \tag{8}$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$最后，我们考察序列 $(G_N \times G_n)_{n\geq 1}$ 和 $(U_{s_N} \times H_n)_{n\geq 1}$。注意，对所有 $n \geq 1$，$(|G_N|, |G_n|) = (|U_{s_N}|, |H_n|) = 1$。因此，由引理 2.3 的 i) 以及 (8)，我们得出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(G_N \times \widetilde{G_n})}{o(U_{s_N} \times \widetilde{H_n})} = \frac{o(G_N)}{o(U_{s_N})} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{o(\widetilde{G_n})}{o(\widetilde{H_n})} = a.$$

因此，任意 $a \in (0, 1)$ 也是 $O_{\mathscr{N}}$ 的一个聚点，这就完成了我们所要证明的结论。 ■

由断言 2.5 和 2.7 可得，$[0, \infty) \subseteq \overline{O_{\mathscr{N}}}$。由于反向包含关系也成立，定理 1.2 的证明至此完成。 ■

本文最后提出一个关于有限 p-群类 $\mathscr{P}$ 的问题。若答案为肯定，则由于 $\mathscr{P} \subset \mathscr{N}$，我们的主要结果也随之成立。

问题 2.8。集合 $O_{\mathscr{P}}$ 在 $[0, \infty)$ 中是否稠密?

致谢。作者感谢审稿人提出的意见，这些意见改进了论文的先前版本。本研究得到雅西亚历山德鲁·伊万·库扎大学的一项资助，资助来自研究资助计划，项目编号 UAIC，代码 GI-UAIC-2021-01。

参考文献

[1] H. Amiri，S.M. Jafarian Amiri，阶相同的有限群上的元素阶之和，《代数及其应用杂志》10（2）（2011），187-190。

[2] L. An，J. Ding，Q. Zhang，有限自对偶群，《代数学杂志》341（1）（2011），35-44。

[3] T.M. Apostol，《微积分》第一卷：单变量微积分，附线性代数导论，第2版，John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1967年。

[4] M. Herzog、P. Longobardi、M. Maj，关于有限群的可解性、幂零性及其他性质的新判据：基于元素阶或子群，《国际群论杂志》12 (1) (2023), 35-44.[5] A. Jaikin-Zapirain，关于有限幂零群共轭类的数量，《数学进展》227 (2011), 1129-1143.[6] E.I. Khukhro、A. Moret´o、M. Zarrin，有限群的平均元素阶与共轭类数量，《代数学杂志》569 (2021), 1-11.[7] Z. Nitecki，康托尔区间与零序列的子和集，《美国数学月刊》122 (2015), 862-870.[8] I. Niven，发散性的一个证明 $\sum 1/p$，《美国数学月刊》78 (1971), 272-273.[9]R. Schmidt，《群的子群格》，de Gruyter 数学论著丛书 14，de Gruyter，柏林，1994。

[10] W.A. Sutherland, 《度量与拓扑空间导论》，第2版，牛津大学出版社，2009年。

[11] G.E. Wall, 《大秩隐秘素数幂群》，《澳大利亚数学学会通报》12（1975），363-369。

Mihai-Silviu Lazorec 罗马尼亚
“Al.I. Cuza”大学数学学院 Ia¸si,
电子邮箱:
silviu.lazorec@uaic.ro