arXiv:2303.04890v1 [math.DG] 8 Mar 2023

关于超复流形的不变与反不变上同调。

MEHDI LEJMI 和 NICOLETTA TARDINI

Abstract. 流形 M 上的超复结构（I, J, K）称为 C^∞-纯且满的，如果 Dolbeault上同调 $H^{2,\bullet}_{\partial}(M, I)$ 是两个自然子群的直和，这两个子群称为$\overline{J}$-不变子群和 $\overline{J}$-反不变子群。我们证明，满足四元数版本 dd^c-引理的紧致超复流形是 C^∞-纯且满的。此外，我们研究$\overline{J}$-不变子群和 $\overline{J}$-反不变子群的维数，以及它们在 Bott-Chern上同调中的类似对象。例如，在实维数8的情形下，我们根据 $\overline{J}$-不变子群的维数刻画带挠超凯勒度量的存在性。我们还研究几乎阿贝尔可解流形上特殊超复结构的存在性。

1. Introduction

超复流形（M, I, J, K）是一个实维数为 $4n$ 的流形 M，配备了三个复结构 I, J, K，它们满足四元数关系。超厄米度量g 是定义在 M 上的黎曼度量，满足 I 和 J 关于 g 正交。现在，令 Ω 为相对于 I 定义的（2, 0）-形式，其定义为 $\Omega(\cdot,\cdot) := g(J\cdot,\cdot) + \sqrt{-1}g(K\cdot,\cdot)$。那么，度量 g 若满足 $d\Omega = 0$，则称为超凯勒度量；若满足 $\partial\Omega = 0$，则称为带挠超凯勒度量（简称 HKT），其中 ∂ 是相对于 I. 的 Dolbeault 算子。此外，超复流形存在唯一一个保持 I, J, K 的无挠连接，称为 Obata 连接 [23]。如果 Obata 连接的整体单值群属于一般四元数线性群$GL(n, \mathbb{H})$的换位子群 $SL(n, \mathbb{H})$，则称该超复流形为 $SL(n, \mathbb{H})$-流形。

在超复流形（M, I, J, K）上，任意一个（相对于 I的）(2, 0)-形式都可以表示为实部与虚部之和，其中实部满足 $J\overline{\varphi} = \varphi$，虚部满足 $J\overline{\varphi} = -\varphi$（这里$\varphi$ 是相对于 I的一个(2, 0)-形式）。据此，可以定义 Dolbeault上同调群 $H^{2,\bullet}_{\partial}(M, I)$的以下两个子群： $\overline{J}$-不变子群

$$H^{\overline{J},+}_{\partial}(M) = \left\{ a \in H^{2,0}_{\partial}(M, I) \,|\, \exists \varphi \in a \text{ such that } \partial\varphi = 0 \text{ and } J\overline{\varphi} = \varphi \right\},$$

以及 $\overline{J}$-反不变子群

$$H^{\overline{J},-}_{\partial}(M) = \left\{ a \in H^{2,0}_{\partial}(M, I) \,|\, \exists \varphi \in a \text{ such that } \partial\varphi = 0 \text{ and } J\overline{\varphi} = -\varphi \right\}.$$

类似的子群已在几乎复情形下得到研究。例如，读者可参阅 [12, 7, 2, 8, 17, 25]。比如，这些论文提出的问题之一是：第二 de Rham上同调群是否为这些类似子群的直和。

本文研究两个子群 $H^{\overline{J},\bullet}_{\partial}{}^{+}(M)$ 和 $H^{\overline{J},\bullet}_{\partial}{}^{-}(M)$。在预备知识之后，我们在第3节证明：若超复流形上的 dd^c-引理的四元数版本成立，则该超复结构是 C^∞-纯且满的，即 $H^{2,\bullet}_{\partial}{}^{0}(M, I)$ 是 $H^{\overline{J},\bullet}_{\partial}{}^{+}(M)$ 与 $H^{\overline{J},\bullet}_{\partial}{}^{-}(M)$ 的直和。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 53C55（主要分类）；53B35（次要分类）。第一作者获得西蒙斯基金会第636075号资助。第二作者获得INdAM的GNSAGA部分资助。

定理。（定理 5）设 (M, I, J, K) 是满足 $\partial\partial_J$-引理的紧致超复流形，则其超复结构是 C^∞-纯且满的。

接下来，我们讨论 $h^{\pm}_{\overline{J}}$ $H^{J,\ \overline{\partial}^{\pm}}(M)$的维数。我们证明，对于紧致流形上一个$SL(2,\mathbb{H})$-结构的变形，维数 $h^{=}_{\overline{J}}$ 是一个上半连续函数（推论8）。这与 [8] 关于紧致近复流形的一个结果类似。接着，我们说明，在紧致 $SL(2,\mathbb{H})$-流形上，HKT 度量的存在性可以用$h^{\pm}_{\overline{J}}$ 以及 $H^{\overline{J},\ }_{BC}{}^{+}(M)$的维数来刻画；后者是第二四元数 Bott–Chern 上同调群的一个子群。事实上，我们有如下结论：

定理。（定理 14）在紧致 $SL(2,\mathbb{H})$-流形上，要么 $\dim\ H^{\overline{J},\ }_{BC}{}^{+}(M) = h^{+}_{\overline{J}} + 1$，要么 $\dim\ H^{\overline{J},\ }_{BC}{}^{+}(M) = h^{+}_{\overline{J}}$.。此外，该 $SL(2,\mathbb{H})$-流形是 HKT 流形，当且仅当 $\dim\ H^{\overline{J},\ }_{BC}{}^{+}(M) = h^{+}_{\overline{J}}$.

在第 4 节中，我们讨论 8 维超复幂零流形，并得到如下结果：

推论。（推论 19）设 N 是一个带有左不变超复结构（I、J、K）的 8 维幂零流形，则有：

- N 存在 HKT 度量，当且仅当 $h^{+}_{\overline{J}} = 4$;
- N 不存在 HKT 度量，当且仅当 $h^{+}_{\overline{J}} = 2$。

第 5 节中，我们聚焦于超复几乎阿贝尔李群。Andrada 和 Barberis 在近期的一篇论文 [1] 中研究了这类李群。我们同样得到，在幺模几乎阿贝尔李群上，左不变超厄米结构是 HKT 结构，当且仅当它是超凯勒结构。此外，由于在超厄米结构中，SL（n、$\mathbb{H}$）条件起着基础性作用，我们对几乎阿贝尔可解流形上的不变超厄米结构满足 SL（n、$\mathbb{H}$）条件给出了明确刻画。接着，我们聚焦于 8 维情形，并证明如下结果

推论。（推论 28）设 $\mathfrak{g}$ 是一个 8 维非阿贝尔几乎阿贝尔幺模李代数，并配备左不变的 $SL(2,\mathbb{H})$-结构。当且仅当 $f = 0$ 和 $a = 0$ 时，∂-闭且非 ∂-恰当的左不变虚形式 (2, 0)-形式的维数非零，其中 f 和 a 由定理 21 给出。特别地，$\mathfrak{g}$ 是幂零的，且不容许任何 HKT度量。

致谢。第二作者在纽约市立大学研究生中心访问期间完成了本工作的部分内容。她谨向 Mehdi Lejmi 以及纽约市立大学致谢，感谢其邀请、经费支持和热情款待。作者感谢 Adri´an Andrada 和 Maria Laura Barberis 通过私人通信告知他们与 [1] 的内容重叠。作者还感谢 Gueo Grantcharov、Yuri Ustinovskiy 和 Scott Wilson 的有益讨论。

2. 预备知识

本节将回顾一些关于超复流形的众所周知的事实，并规定一些记号。设 M 是一个光滑流形，L 是 M 上的一个复结构。那么，L 通过 L 作用于 M 上的 (p,q)-形式空间，且其作用是一个同构：

$$L\alpha = \left(\sqrt{-1}\right)^{p-q}\alpha, \quad \alpha \in A^{p,q}_{L}(M),$$

其中，我们用 $A^{p,}{}_{L}{}^{q}(M)$ 表示 M 上 (p,q)-形式的空间（这里的双次数是相对于复结构 L 定义的）。超复流形是一个实维数为 $4n$ 的光滑流形 M，其上配备了三个两两反对易的复结构 I, J, K，且满足 $IJ = K$。特别地，这在 M 上诱导出一个复结构的二维球面，由下式给出：

$$\left\{aI + bJ + cK \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\right\}.$$

在 M 上相对于三个复结构 I,J,K 都是厄米的黎曼度量 g 称为超厄米度量。对于基本形式，我们记 $\omega_L(x,y) = g(Lx,y)$，其中 $L = I,J,K$。可以在 M 上定义一个 2-形式，如下所示：

$$\Omega := \frac{1}{2}\left(\omega_J + \sqrt{-1}\omega_K\right),$$

并且很容易看出

$$\Omega \in A_I^{2,0}(M).$$

此时，(M,I,J,K,g) 称为超凯勒流形，若 $d\Omega = 0$；若 $\partial\Omega = 0$，则称为带挠超凯勒流形，简称 HKT，其中复微分算子 ∂ 仍是相对于复结构 I定义的。用基本形式表示， g 是超凯勒流形当且仅当

$$d\omega_I = d\omega_J = d\omega_K = 0$$

并且，正如 [15] 中所证明的，它是 HKT 流形当且仅当

$$d^{c,I}\omega_I = d^{c,J}\omega_J = d^{c,K}\omega_K,$$

其中 $d^{c,L} := L^{-1}dL$，且 $L = I,J,K$。
注意，若 (M,I,J,K,g) 是四维超厄米特流形，则由于维数原因，它显然是 HKT 流形；但在一般的高维情形下并非如此。注意， g 与 Ω 的关系为

$$g(x,\overline{y}) = \Omega(x,J\overline{y}), \qquad x,y \in T_I^{1,0}(M). \tag{1}$$

由于 $JI = -IJ$注意到 J： $A^{p,\ }{}_I{}^q(M) \to A^{q,\ }{}_I{}^p(M)$。我们回顾如下定义：

定义 1. 若形式 $\eta \in A^{2p,\ }{}_I{}^0(M)$ 满足 $J\overline{\eta} = \eta$，则称其为实的。若实(2,0)-形式 η满足 $\eta(x,J\overline{x}) > 0$，对任意 $x \in T^{1,\ }{}_I{}^0(M)$， $x \neq 0$，则称其为 q-正。

特别地，HKT结构 Ω 是

- real $J\Omega = \overline{\Omega}$,
- q-positive $\Omega(x,J\overline{x}) > 0$, for $x \in T_I^{1,0}(M)$, $x \neq 0$,

反之，实的、q-正的 ∂-闭 (2, 0)-形式通过公式 (1) 定义一个 HKT结构。

设 (M,I,J,K) 是一个紧致的 $4n$ 维超复流形。在此情形下，一个重要的微分算子如下

$$\partial_J : A_I^{p,q}(M) \to A_I^{p+1,q}(M), \qquad \partial_J := J^{-1}\overline{\partial}J,$$

其中，算子 $\overline{\partial}$ 是相对于 I 考虑的。文献 [27] 中证明了

$$\partial_J^2 = 0\,, \qquad \partial\partial_J + \partial_J\partial = 0.$$

注意到两个算子都会使第一次数增加一，因此固定 $q = 0$ 后，我们得到一个带有两个反交换微分的上链复形（$A^{p,\ }{}_I{}^0(M)$ ∂,∂_J）。为简化记号，在含义明确时，我们将省略 $A^{p,\ }{}_I{}^q(M)$ 中的字母 I。

定义 2. 在实维数为 $4n$ 的超复流形（M,I,J,K）上，如果对于任意 $0 \leqslant p \leqslant 2n.$， $A^{p,\ }{}_I{}^0(M)$ 中每个 ∂-闭、 ∂_J-恰当的（p, 0）-形式都是 $\partial\partial_J$-恰当的，则称 $\partial\partial_J$-引理成立。

此外，考虑四元数 Dolbeault 上同调群也是很自然的。

$$H_\partial^{p,0}(M) := \frac{\mathrm{Ker}(\partial|_{A^{p,0}(M)})}{\partial A^{p-1,0}(M)}\,, \qquad H_{\partial_J}^{p,0}(M) := \frac{\mathrm{Ker}(\partial_J|_{A^{p,0}(M)})}{\partial_J A^{p-1,0}(M)}\,,$$

以及四元数 Bott-Chern 和 Aeppli 上同调群（见 [14]）

$$H_{\mathrm{BC}}^{p,0}(M) := \frac{\mathrm{Ker}(\partial|_{A^{p,0}(M)}) \cap \mathrm{Ker}(\partial_J|_{A^{p,0}(M)})}{\partial\partial_J A^{p-2,0}(M)}\,,$$

$$H^{p,0}_{\mathrm{A}}(M) := \frac{\mathrm{Ker}(\partial\partial_J|_{A^{p,0}(M)})}{\partial A^{p-1,0}(M) + \partial_J A^{p-1,0}(M)}.$$

[14] 证明了，这些上同调群同构于适当椭圆微分算子的核，因此，若 M 是紧的，它们便具有有限维数。我们用$h^{p,0}_{\mathrm{BC}}$ 表示 $H^{p,0}_{\mathrm{BC}}(M)$ 的维数，依此类推。

在某些特殊的双次数下，形式会出现自然分解。正如 [20], any $\varphi \in A^{2,0}_I(M)$ 可以写成

$$\varphi = \varphi^{\overline{J},+} + \varphi^{\overline{J},-},$$

其中

$$\varphi^{\overline{J},+} := \frac{1}{2}\left(\varphi + J\overline{\varphi}\right), \qquad \varphi^{\overline{J},-} := \frac{1}{2}\left(\varphi - J\overline{\varphi}\right).$$

这给出了丛 $\Lambda^{2,0}_I(M)$ 的如下分解：

$$\Lambda^{2,0}(M) = \Lambda^{\overline{J},+}(M) \oplus \Lambda^{\overline{J},-}(M),$$

其中， $\Lambda^{\overline{J},+}(M)$ 的截面是实形式，记作 $\Omega^{\overline{J},+}(M)$；而 $\Lambda^{\overline{J},-}(M)$ 的截面满足 $J\overline{\varphi} = -\varphi$，称为虚形式，记作 $\Omega^{\overline{J},-}(M)$。

对于任意紧致超复流形，可以定义 $H^{2,0}_{\bar\partial}(M)$ 的以下两个子群，即 $\overline{J}$-不变子群

$$H^{\overline{J},+}_{\bar\partial}(M) = \left\{ a \in H^{2,0}_{\bar\partial}(M) \,|\, \exists \varphi \in a \text{ such that } \partial\varphi = 0 \text{ and } \varphi \in \Omega^{\overline{J},+}(M) \right\},$$

以及 $\overline{J}$-反不变子群

$$H^{\overline{J},-}_{\bar\partial}(M) = \left\{ a \in H^{2,0}_{\bar\partial}(M) \,|\, \exists \varphi \in a \text{ such that } \partial\varphi = 0 \text{ and } \varphi \in \Omega^{\overline{J},-}(M) \right\}.$$

我们回顾以下定义（参见 [20]）

定义 3. 光滑流形 M 上的一个超复结构 (I,J,K) 称为

若满足以下条件，则称为 • C^∞-纯：

$$H^{\overline{J},+}_{\bar\partial}(M) \cap H^{\overline{J},-}_{\bar\partial}(M) = \{0\};$$

若满足以下条件，则称为 • C^∞-满：

$$H^{\overline{J},+}_{\bar\partial}(M) + H^{\overline{J},-}_{\bar\partial}(M) = H^{2,0}_{\bar\partial}(M);$$

若满足以下条件，则称为 • C^∞-纯且满：

$$H^{\overline{J},+}_{\bar\partial}(M) \oplus H^{\overline{J},-}_{\bar\partial}(M) = H^{2,0}_{\bar\partial}(M).$$

超复流形 (M,I,J,K) 存在唯一一个保持 I,J,K 的无挠连接，称为 Obata 连接 [23]。因此，Obata 连接的整体单值群属于一般四元数线性群 $GL(n,\mathbb{H})$（例如参见 [26]）。然而，在幂零流形等许多例子中 [4]，整体单值群实际上包含于 $SL(n,\mathbb{H})$（参见 [27, 28]）。

定义 4. 实维数为 $4n$ 的超复流形 (M,I,J,K) 称为 $SL(n,\mathbb{H})$-流形，若 Obata 连接的整体单值群属于 $SL(n,\mathbb{H})$。

Verbitsky 在 [28] 中证明，如果一个紧致的 $4n$ 维超复流形 (M,I,J,K) 是 $SL(n,\mathbb{H})$，那么 (M,I) 的典范丛在全纯意义下是平凡的。此外，在存在 HKT 度量这一附加假设下，反之亦然。我们将一个 $SL(n,\mathbb{H})$-流形记作 (M,I,J,K,Φ)，其中 Φ 是 A^{2n} 中的处处非退化形式，$^{0}_{I}$ (M)，并且我们还可以假设 $\Phi = J\overline{\Phi}$，特别地，$\partial\Phi = \partial_J\Phi = 0$.。[20] 中证明了，紧致 $SL(2,\mathbb{H})$-流形上的每个超复结构都是 C^∞-纯且满的。

3. Pure and Full Hypercomplex structures

本节将重点讨论 C^∞-纯且满条件。首先，我们证明下面的命题；它是复情形的一个类似结果（见 [7, 21] 和 [2, 定理 2.4]）。

定理 5. 设 (M, I, J, K) 是满足 $\partial\partial_J$-引理的紧致超复流形，则其超复结构是 C^∞-纯且满的。

证明. 首先，我们证明超复结构是 C^∞-纯的。令 $\mathfrak{a} \in H^{\overline{J}}{}_{,\partial}{}^{+}(M) \cap H^{\overline{J}}{}_{,\partial}{}^{-}(M)$。取一个 ∂-闭的 (2, 0)-形式 $\alpha \in \Omega^{\overline{J},+}(M)$，以及一个 ∂-闭的 (2, 0)-形式 $\beta \in \Omega^{\overline{J},-}(M)$，它们都是 $\mathfrak{a}$ 的代表元。于是，对于某个 (1, 0) 形式，有 $\alpha - \beta = \partial\gamma$。由于 $\alpha \in \Omega^{\overline{J},+}(M)$ 且 $\beta \in \Omega^{\overline{J},-}(M)$，因此 α 和 β 也都是 ∂_J-闭的。故 $\partial\gamma$ 是 ∂_J-闭的。超复结构满足 $\partial\partial_J$-引理，因此对于某个复值函数 $w.$，有 $\partial\gamma = \partial\partial_J w$。我们写作 $w = u + \sqrt{-1}v$，其中 $u, v.$ 是实值函数。因此 $\alpha - \beta = \partial\partial_J \left(u + \sqrt{-1}v\right)$，于是

$$\alpha - \partial\partial_J u = \beta + \sqrt{-1}\partial\partial_J v.$$

由于 $\alpha - \partial\partial_J u \in \Omega^{\overline{J},+}(M)$ 且 $\beta + \sqrt{-1}\partial\partial_J v. \in \Omega^{\overline{J},-}(M)$，我们推得 $\alpha = \partial\partial_J u$ 和 $\beta = -\sqrt{-1}\partial\partial_J v$，因此 $\mathfrak{a}$ 是零类。

现在，我们希望证明该超复结构是 C^∞-满的。令 α 为 ∂-闭的 (2, 0)-形式，且是 $\mathfrak{a} \in H^{2,0}_{\partial}(M)$ 的代表元。首先，我们断言可以选取 α 使得 $\partial\alpha = \partial_J\alpha = 0$。事实上，形式 $\partial_J\alpha$ 是 ∂- 闭且 ∂_J- 恰当的，因此 $\partial_J\alpha = \partial_J\partial\beta$，其中 $\beta.$ 是某个 1-形式。因此，$\alpha - \partial\beta$ 是 ∂-闭、∂_J-闭的，并且与 $\alpha.$ 上同调等价。现在，我们将 α 分解为 $\alpha = {}_{\alpha^{\overline{J},+}} + \alpha^{\overline{J},-}.$。由于 $\partial\alpha = \partial_J\alpha = 0$，我们推得 $\partial\alpha^{\overline{J},+} = \partial\alpha^{\overline{J},-} = 0$，因此得到类 $[\alpha^{\overline{J},+}] \in H^{\overline{J},+}_{\partial}(M)$ 和 $[\alpha^{\overline{J},-}] \in H^{\overline{J},-}_{\partial}(M)$。定理得证。

□

根据定理 5 和 [14]，我们有

推论 6. 紧致 HKT $SL(n, \mathbb{H})$-流形上的超复结构是 C^∞-纯且满的。

现在，在配备超厄米度量 g 的紧致 $SL(2, \mathbb{H})$-流形 (M, I, J, K, Φ) 上，我们定义算子：

$$\begin{aligned} P : \Omega^{\overline{J},-}(M) &\to \Omega^{\overline{J},-}(M), \\ \alpha &\mapsto \left(\partial\partial^\star\alpha\right)^{\overline{J},-}, \end{aligned}$$

其中 $(\cdot)^{\overline{J},-}$ 是虚部，而 $\partial^\star$ 定义为相对于（整体）厄米内积，∂ 的伴随算子

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \int_M h(\alpha, \beta)\, \frac{\Omega^2 \wedge \overline{\Phi}}{2},$$

（这里 $2h = g - \sqrt{-1}\omega_I$，且 Ω 是由 g 诱导的 (2, 0)-形式）。此外，$\partial^\star = - * \partial *$，其中 $*$ 是霍奇星算子（更多详情见 [20]）

$$\alpha \wedge *\beta \wedge \overline{\Phi} = h(\alpha, \beta)\, \frac{\Omega^2 \wedge \overline{\Phi}}{2}.$$

我们还定义拉普拉斯算子 $\Delta_\partial = \partial\partial^\star + \partial^\star\partial$.

引理 7. 在配备超厄米度量g的紧致 $SL(2, \mathbb{H})$-流形 (M, I, J, K, Φ) 上，算子 P 是一个自伴强椭圆线性算子，其核为 Δ_∂-调和虚 (2, 0)-形式。

证明. 若 α 属于 P的核，则 $0=\langle(\partial\partial^{\star}\alpha)^{\overline{J},-},\alpha\rangle=\langle\partial^{\star}\alpha,\partial^{\star}\alpha\rangle$. 因此 $\partial^{\star}\alpha=\partial\alpha=0$，因为 $*\alpha=\alpha$，所以 α 是 Δ_{∂}-调和的。此外，我们可以将 P 表示如下

$$\begin{aligned}P(\alpha)&=\left(\partial\partial^{\star}\alpha\right)^{\overline{J},-},\\&=\frac{1}{2}\left(Id+*\right)\left(\partial\partial^{\star}\alpha\right)-\frac{1}{4}h\left(\left(Id+*\right)\left(\partial\partial^{\star}\alpha\right),\Omega\right)\Omega,\\&=\frac{1}{2}\Delta_{\partial}\alpha-\frac{1}{4}h\left(\Delta_{\partial}\alpha,\Omega\right)\Omega.\end{aligned}$$

我们希望计算算子 $P.$的主符号。首先，我们注意到

$$h\left(\partial\partial^{\star}\alpha,\Omega\right)=h\left(*\partial\partial^{\star}\alpha,*\Omega\right)=-h\left(*\partial*\partial*\alpha,\Omega\right)=h\left(\partial^{\star}\partial\alpha,\Omega\right).$$

直接计算可得，$h(\Delta_{\partial}\alpha,\Omega)$ 是一个一阶算子，作用于 $\alpha.$。事实上，

$$\begin{aligned}*h\left(\Delta_{\partial}\alpha,\Omega\right)&=2*h\left(\partial^{\star}\partial\alpha,\Omega\right),\\&=-2*h\left(*\partial*\partial\alpha,\Omega\right),\\&=-2\partial*\partial\alpha\wedge\Omega,\\&=-2\partial\left(*\partial\alpha\wedge\Omega\right)+2*\partial\alpha\wedge\partial\Omega,\\&=-2\partial\left(L_{\Omega}*\partial\alpha\right)+2*\partial\alpha\wedge\partial\Omega,\\&=2\partial\left(*\Lambda_{\Omega}\partial\alpha\right)+2*\partial\alpha\wedge\partial\Omega,\\&=2\partial\left(*h\left(\partial\alpha,\Omega\right)\right)+2*\partial\alpha\wedge\partial\Omega,\\&=-2\partial\left(*h\left(\alpha,\partial\Omega\right)\right)+2*\partial\alpha\wedge\partial\Omega,\end{aligned}$$

其中我们利用了这一事实：$h(\alpha,\Omega)=0.$。这里，L_{Ω} 表示算子 $L_{\Omega}(\cdot)=\cdot\wedge\Omega$，而 $\Lambda_{\Omega}:=*L_{\Omega}*$ 是由 Ω 缩并得到的。由此可知，P 的主符号与 $\frac{1}{2}\Delta_{\partial}$ 相同。引理得证。□

记 $h^{\pm}_{\overline{J}}$ 为 $H^{J}{}^{\pm}_{,\partial}(M)$ 的维数，记 $h^{2}{}^{0}_{,\partial}$ 为 $H^{2}{}^{0}_{,\partial}(M)$ 的维数。那么，对于紧致的 $SL(2,\mathbb{H})$-流形 (M,I,J,K,Φ)，由 [20] 可得

$$h^{2,0}_{\partial}=h^{+}_{\overline{J}}+h^{-}_{\overline{J}}. \tag{2}$$

因此，我们可以证明$h^{-}_{\overline{J}}.$沿路径的半连续性。这与 [8] 在几乎复流形上得到的结果类似。

推论8. 设 (I_t,J_t,K_t,Φ_t) 是紧致流形M 上的一族光滑的 $SL(2,\mathbb{H})$-结构，且满足 $t\in[0,1]$。那么，$h^{-}_{\overline{J}_t}$ 是 $t.$上的上半连续函数。

证明. 这由引理 7 以及一族椭圆算子的核的上半连续性得出 [22,定理 4.3]。□

注9. 由方程 (2) 可知，由于维数 $h^{2}{}^{0}_{,\partial}$ 取决于复结构的选择，维数$h^{\pm}_{\overline{J}}$ 不一定是下半连续的，正如我们在例 15 中所示。显然，如果初始超复结构容许一个超凯勒度量，那么在小变形下，霍奇数不会变化，因此在这种情况下，$h^{\pm}_{\overline{J}}$ 是下半连续的。

推论8的一个直接推论如下

推论10. 设 (I_t,J_t,K_t,Φ_t) 是紧致流形M 上 $SL(2,\mathbb{H})$-结构的光滑族，且在 $t=0$ 处有 $h^{-}_{\overline{J}_0}=0$。那么，当 $t.$足够小时，$h^{-}_{\overline{J}_t}=0$

对于任意紧致超复流形（M、I、J、K），我们可以定义 $H^{2,\ 0}_{BC}(M)$ 的以下两个子群：

$$H^{\overline{J},+}_{BC}(M):=\{\mathfrak{a}\in H^{2,0}_{BC}(M)\,|\,\exists\,\alpha\in\mathfrak{a}\text{ such that }\partial\alpha=\partial_J\alpha=0\text{ and }\alpha\in\Omega^{\overline{J},+}(M)\},$$

$$H^{\overline{J},-}_{BC}(M) := \{\mathfrak{a} \in H^{2,0}_{BC}(M) \,|\, \exists\, \alpha \in \mathfrak{a} \text{ such that } \partial\alpha = \partial_J\alpha = 0 \text{ and } \alpha \in \Omega^{\overline{J},-}(M)\}.$$

我们可以很容易地推导出以下结论:

命题 11. 设 (M, I, J, K) 为一个紧致超复流形。那么,

$$H^{2,0}_{BC}(M) = H^{\overline{J},+}_{BC} \oplus H^{\overline{J},-}_{BC}.$$

证明. 设 $\mathfrak{a} \in H^{\overline{J},+}_{BC}(M) \cap H^{\overline{J},+}_{BC}(M)$。取 $\alpha \in \Omega^{\overline{J},+}(M)$，并构造 $\beta \in \Omega^{\overline{J},-}(M)$，二者都是 $\mathfrak{a}$ 的代表元。则 $\alpha - \beta = \partial\partial_J\left(u + \sqrt{-1}v\right)$，其中 u, v 是实值函数。因此$\alpha - \partial\partial_J u = \beta + \sqrt{-1}\partial\partial_J v$，于是 $H^{\overline{J},+}_{BC}(M) \cap H^{\overline{J},+}_{BC}(M)$ 是零类。设 α 是 $\mathfrak{a} \in H^{2,0}_{BC}(M)$ 的一个 ∂-闭且 ∂_J-闭代表元。我们将 α 分解为 $\alpha = \alpha^{\overline{J},+} + \alpha^{\overline{J},-}$，其中 $\alpha^{\overline{J},\pm} \in \Omega^{\overline{J},\pm}(M)$。于是，$\partial\alpha^{\overline{J},\pm} = \partial_J\alpha^{\overline{J},\pm} = 0$. 命题得证。□

考虑自然映射 $H^{2,0}_{BC}(M) \to H^{2,0}_{\partial}(M)$，我们有如下结果

引理 12. 在任意维数的紧致超复流形上，自然映射 $H^{\overline{J},-}_{BC}(M) \to H^{\overline{J},-}_{\partial}(M)$ 和 $H^{\overline{J},+}_{BC}(M) \to H^{\overline{J},+}_{\partial}(M)$ 均为满射。

证明. 为证明这两个映射都是满射，我们取 $\alpha \in \Omega^{\overline{J},\pm}(M)$ 作为 $\mathfrak{a} \in H^{J,\pm}_{\overline{\partial}}(M)$ 的一个代表元。由于 $\alpha \in \Omega^{\overline{J},\pm}(M)$，因此 $\partial\alpha = \partial_J\alpha = 0$。引理得证。□

在紧致的 $SL(2,\mathbb{H})$-流形上，我们可以进一步推导这些关系，并证明如下结果

引理 13. 在紧致的 $SL(2,\mathbb{H})$-流形上，自然映射 $H^{\overline{J},-}_{BC}(M) \mapsto H^{\overline{J},-}_{\partial}(M)$ 是一个同构。

证明。我们只需证明映射 $H^{\overline{J},-}_{BC}(M) \mapsto H^{\overline{J},-}_{\partial}(M)$ 是单射。设 $\alpha \in \Omega^{\overline{J},-}(M)$ 是 $\mathfrak{a} \in H^{\overline{J},-}_{BC}(M)$ 的一个代表元。我们假设 $\alpha = \partial\beta$，其中 β 是某个 (1, 0) 形式。那么,

$$\begin{aligned} \|\alpha\|^2_h &= \int_M \alpha \wedge *\alpha \wedge \overline{\Phi}, \\ &= \int_M \alpha \wedge \alpha \wedge \overline{\Phi}, \\ &= \int_M \partial\beta \wedge \partial\beta \wedge \overline{\Phi} = 0. \end{aligned}$$

由此我们得到 $\alpha = 0$，因此该映射是单射。□

因此，在 $SL(2,\mathbb{H})$-流形上，我们可以用 dim $H^{\overline{J},+}_{BC}(M)$ 和 $h^{\pm}_J$ 来刻画 HKT 度量的存在性，如下所示。

定理 14。在紧致的 $SL(2,\mathbb{H})$-流形上，要么 dim $H^{\overline{J},+}_{BC}(M) = h^{\pm}_J + 1$，要么 dim $H^{\overline{J},+}_{BC}(M) = h^{\pm}_J$. 此外，$SL(2,\mathbb{H})$-流形是 HKT 流形，当且仅当 dim $H^{\overline{J},+}_{BC}(M) = h^{\pm}_J$.

证明。由 [20, 定理 9.8], 可得

$$0 \leqslant h^{2,0}_{BC} - h^{2,0}_{\partial} \leqslant 1.$$

此外，$SL(2,\mathbb{H})$-流形是 HKT 流形，当且仅当 $h^{2,0}_{BC} = h^{2,0}_{\partial}$. 由 (2)、命题 (11) 和引理 (13) 可得

$$0 \leqslant \dim H^{\overline{J},+}_{BC}(M) - h^{\pm}_J \leqslant 1,$$

并且，$SL(2,\mathbb{H})$-流形是 HKT 当且仅当 dim $H^{\overline{J},+}_{BC}(M) = h^{\pm}_J$. □

现在，我们在一族例子上显式计算空间 $H^{J,\overline{\partial}^{\pm}}(M)$ 和 $H^{J,\overline{BC}^{\pm}}(M)$。

例15. 令 $t \in (0,1)$，并考虑以下李代数族 $\mathfrak{g}_t$ （见 [9]），其结构方程为

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2]=-t\,e_6, \quad [e_3,e_4]=(1-t)\,e_6,\\
&[e_1,e_3]=-t\,e_7, \quad [e_2,e_4]=(t-1)\,e_7,\\
&[e_1,e_4]=-t\,e_8, \quad [e_2,e_3]=(1-t)\,e_8,
\end{aligned}$$

或等价地

$$de^1=de^2=de^3=de^4=de^5=0,$$
$$de^6=te^{12}-(1-t)e^{34}, \quad de^7=te^{13}-(t-1)e^{24}, \quad de^6=te^{14}-(1-t)e^{23}.$$

定义超复结构

$$Ie_1=e_2, \quad Ie_3=e_4, \quad Ie_5=e_6, \quad Ie_7=e_8$$
$$Je_1=e_3, \quad Je_2=-e_4, \quad Je_5=e_7, \quad Je_6=-e_8.$$

李代数 $\mathfrak{g}_t$ 均同构于 $\mathfrak{n}_3$，见 [9]。令

$$\varphi^1=e^1+ie^2, \quad \varphi^2=e^3+ie^4, \quad \varphi^3=e^5+ie^6, \quad \varphi^4=e^7+ie^8$$

作为 $(1,0)$ 形式的全局余框架，复结构方程变为

$$\begin{cases}
d\varphi^1 &= 0,\\
d\varphi^2 &= 0,\\
d\varphi^3 &= -\frac{t}{2}\varphi^{1\overline{1}}+\frac{1-t}{2}\varphi^{1\overline{2}},\\
d\varphi^4 &= \left(t-\frac{1}{2}\right)\varphi^{12}-\frac{1}{2}\varphi^{2\overline{1}}.
\end{cases}$$

我们回顾一下，李代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构 J称为阿贝尔的，如果对于任意 x、$y\in\mathfrak{g}$，都有 $[Jx,Jy]=[x,y]$；这等价于，$^{0}(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}) \subseteq \Lambda^{1,1}(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}})$。文献 [4] 证明了，超复幂零流形存在HKT度量，当且仅当其底层超复结构为阿贝尔的。

请注意，在这个例子中，超复结构为阿贝尔的当且仅当$t=\frac{1}{2}$，因此根据 [4],，存在HKT结构当且仅当 $t=\frac{1}{2}$。
另请注意，与 $\mathfrak{g}_t$ 相关的单连通幂零李群 G_t 存在格，我们仍用相同的字母表示超复结构（I、J、K）。由于复结构 I 是幂零的，相关幂零流形上的Dolbeault上同调群可以仅用不变形式计算。

特别地，请注意，对于 $t\neq\frac{1}{2}$，我们有

$$H^{2,0}_{\partial}(M)\simeq\left\langle\varphi^{13},\varphi^{14},\varphi^{23},\varphi^{24}\right\rangle.$$

此外，

$$H^{\overline{J},+}_{\partial}(M)\simeq\left\langle\varphi^{13}+\varphi^{24},\varphi^{14}-\varphi^{23}\right\rangle \quad\text{and}\quad H^{\overline{J},-}_{\partial}(M)\simeq\left\langle\varphi^{13}-\varphi^{24},\varphi^{14}+\varphi^{23}\right\rangle.$$

对于 $t=\frac{1}{2}$，超复结构为阿贝尔的，并且我们有

$$H^{2,0}_{\partial}(M)\simeq\left\langle\varphi^{12},\varphi^{13},\varphi^{14},\varphi^{23},\varphi^{24},\varphi^{34}\right\rangle.$$

此外，

$$H^{\overline{J},+}_{\partial}(M)\simeq\left\langle\varphi^{13}+\varphi^{24},\varphi^{14}-\varphi^{23},\varphi^{34},\varphi^{12}\right\rangle \quad\text{and}\quad H^{\overline{J},-}_{\partial}(M)\simeq\left\langle\varphi^{13}-\varphi^{24},\varphi^{14}+\varphi^{23}\right\rangle.$$

请注意，对于 $t=\frac{1}{2}$, $h^{\overline{J},\ \partial}{}^{+}(M)=4$ 以及对于 $t\neq\frac{1}{2}$, $h^{\overline{J},\ \partial}{}^{+}(M)=2$，这证实了注9中提到的结论：一般而言，$h^{\overline{J},\ \partial}{}^{+}(M)$ 不是下半连续的。

同样，我们可以通过 [20] 利用不变形式计算四元数巴蒂-切恩上同调。因此，对于 $t\neq\frac{1}{2}$，我们有

$$H^{2,0}_{BC}(M)\simeq\left\langle\varphi^{12},\varphi^{13},\varphi^{14},\varphi^{23},\varphi^{24}\right\rangle.$$

此外，

$$H_{BC}^{\overline{J},+}(M) \simeq \left\langle \varphi^{12}, \varphi^{13}+\varphi^{24}, \varphi^{14}-\varphi^{23} \right\rangle \quad \text{and} \quad H_{BC}^{\overline{J},-}(M) \simeq \left\langle \varphi^{13}-\varphi^{24}, \varphi^{14}+\varphi^{23} \right\rangle .$$

特别是，正如预期的那样，注意到 $\dim H^{\overline{J}}_{,BC}{}^{+}(M) = \dim H^{\overline{J}}_{,\partial}{}^{+}(M) + 1$ 且 $\dim H^{\overline{J}}_{,BC}{}^{-}(M) = \dim H^{\overline{J}}_{,\partial}{}^{-}(M)$。

对于 $t = \frac{1}{2}$，超复结构为阿贝尔的，因此根据 [4]，存在 HKT平衡度量。在这种情况下，由 [13], 可知

$$H_{BC}^{2,0}(M) \simeq H_{\partial}^{2,0}(M),$$

因此我们可以使用前面的计算。

注16. 已证明，在允许近复结构的四维流形上，具有 $h_J^- = 0$ 的近复结构 J（其中 h_J^- 是 $H^2_{dR}(M)$ 中由 J-反不变形式表示的类所构成子空间的维数）在与某个可积结构对应的度量空间中的近复结构空间内，按 $\mathcal{C}^\infty$- Fr´echet 拓扑构成开稠集[8, 定理1.1]。基于此，Draghici、Li 和 Zhang 对紧四维流形上的 h_J^- 提出了一个猜想（[8]中的猜想2.4），断言对于一般的几乎复结构，h_J^- 消失 J。特别是，他们已对具有 $b^+ = 1$ 的四维流形证明了该猜想。注意，若 (M, I, J, K, g) 是具有 $b_2 = 4$ 的紧超凯勒流形，则 $h^{\overline{J}}_{,\partial}{}^{-} = 0$。事实上，由于 (M, I, g) 是凯勒的，我们有

$$b_2 = 2h_{\partial}^{2,0} + h_{\partial}^{1,1}$$

并且由于它满足 $\partial\partial_J$-引理

$$b_2 = 2h_{\partial}^{2,0} + h_{\partial}^{1,1} = 2(h_{\overline{J}}^{+} + h_{\overline{J}}^{-}) + h_{\partial}^{1,1} .$$

现在，由于该结构是超复 Kähler $h^{2}_{,\partial}{}^{0} \geqslant 1$ (Ω 表示一个非平凡类)，并且 $h^{1}_{,\partial}{}^{1} \geqslant 1$ (ω_I表示一个非平凡类)。因此，

$$b_2 \geqslant 3 + 2h_{\overline{J}}^{-},$$

因此，当 $b_2 = 4$ 时，我们便得到结论。特别地，在此情形下 $h^{2}_{,\partial}{}^{0} = 1$。请注意，文献中有若干关于超复 Kähler 流形的第二贝蒂数的结果，例如参见 [16, 24]。

显然，这是具有 $h^{2}_{,\partial}{}^{0} = 1$ 的 $SL(n, \mathbb{H})$ HKT 流形 $(M, I, J, K, \Phi, \Omega)$ 的一个特例。事实上，在这种情形下

$$h_{\partial}^{2,0} = h_{\overline{J}}^{+} + h_{\overline{J}}^{-}$$

并且 Ω 在 $H^{\overline{J}}_{,\partial}{}^{+}$ 中表示一个非平凡类，因此 $h_{\overline{J}}^{-} = 0$ 且 $h_{\overline{J}}^{\pm} = 1$。

此外，请注意，如果（M、I、J、K、Φ、Ω）是一个带有 $h^{2,}{}_{\partial}{}^{0} = 1$ 的 $SL(2, \mathbb{H})$ HKT 流形，并且我们对 $J_0 = J$进行小变形 J_t，使得（M、I、J_t、K_t）为超复结构，那么

$$h_{\overline{J}_t}^{-} = 0$$

由于 $h_{\overline{J}_t}^{-}$ 是 t的上半连续函数，并且

$$h_{\overline{J}_t}^{\pm} = 1$$

因为 $h_{\overline{J}_t}^{\pm}$ 是 t的下半连续函数（因为 I是固定的），并且 $H^{\overline{J}_t,}{}_{\partial}{}^{+}(M) \subseteq H^{2,}{}_{\partial}{}^{0}(M)$的维数为1。

4. Hypercomplex eight-dimensional Nilpotent Lie groups

本节旨在说明，仅凭$h^{\pm}_{J}$ 即可刻画8维幂零李群上HKT度量的存在性。我们考虑一个实维数为8且带有超复结构(I,J,K)的幂零李代数。由 [6, 命题3.1] 可知，存在四个 d-闭1-形式 e^1、 $e^2=Ie^1$、$e^3=Je^1$、 $e^4=Ke^1$.

我们可以考虑一组 1-形式基 $\{e^1,e^2,e^3,e^4,e^5,e^6=Ie^5,e^7=Je^5,e^8=Ke^5\}$。超复结构定义如下:

$$Ie^1=e^2,\quad Ie^3=e^4,\quad Ie^5=e^6,\quad Ie^7=e^8.$$
$$Je^1=e^3,\quad Je^2=-e^4,\quad Je^5=e^7,\quad Je^6=-e^8.$$

一组 (1,0)-形式基定义如下:

$$\varphi^1=e^1+\sqrt{-1}e^2,\quad \varphi^2=e^3+\sqrt{-1}e^4,\quad \varphi^3=e^5+\sqrt{-1}e^6,\quad \varphi^4=e^7+\sqrt{-1}e^8.$$

由 [6] 可得

$$\partial\varphi^1=0,\quad \partial\varphi^2=0,\quad \partial\varphi^3=\frac{1}{2}\left(t_2-\sqrt{-1}t_3\right)\varphi^1\wedge\varphi^2,\quad \partial\varphi^4=\frac{1}{2}\left(t_4+\sqrt{-1}t_1\right)\varphi^1\wedge\varphi^2,$$

对于某些常数 $t_1,t_2,t_3,t_4.$，我们考虑 (2, 0)形式 $\Phi_1,\Phi_2\in\Omega^{\overline{J}},$ –(M):

$$\Phi_1=\varphi_1\wedge\varphi_3-\varphi_2\wedge\varphi_4,\quad \Phi_1=\varphi_1\wedge\varphi_4+\varphi_2\wedge\varphi_3.$$

于是，我们有 $\partial\Phi_1=\partial\Phi_2=0$. 显然， Φ_1、 Φ_2 不可能是 ∂-恰当的。我们得到如下结论:

定理17. 对于实维数8的幂零李群上的任意左不变超复结构（I、 J、 K）， $h^{-}_{\overline{J}}=2$.

此外，我们还有如下结论

定理18. 设 G 是一个具有左不变超厄米结构（I、 J、 K、 g）的8维实幂零李群，则有如下结论,

- Ω是HKT当且仅当 $h^{+}_{J}=4$;
- Ω不是HKT当且仅当 $h^{+}_{J}=2$。

证明。由 [6],，我们考虑 (2,0)-形式 $\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\Psi_4\in\Omega^{\overline{J},+}(G)$:

$$\Psi_1=\varphi_1\wedge\varphi_2,\quad \Psi_2=\varphi_3\wedge\varphi_4,\quad \Psi_3=\varphi_1\wedge\varphi_3+\varphi_2\wedge\varphi_4,\quad \Psi_4=\varphi_1\wedge\varphi_4-\varphi_2\wedge\varphi_3.$$

于是，我们有 $\partial\Psi_3=\partial\Psi_4=0$，显然 Ψ_3,Ψ_4 不可能是 ∂-恰当的。
现在，Ω 是 HKT 当且仅当超复结构为阿贝尔的，这等价于 $t_2-\sqrt{-1}t_3=t_4+\sqrt{-1}t_1=0$，即

$$t_1=t_2=t_3=t_4=0.$$

在这种情况下， Ψ_1 和 Ψ_2 也都是 ∂-闭的，且不是 ∂-恰当的，因此 $h^{+}_{J}=4$。
如果 Ω 不是 HKT，那么 t_1,t_2,t_3,t_4 中至少有一个不为零。因此， Ψ_1 是 ∂-恰当的，而 Ψ_2 不是 ∂-闭的，故 $h^{+}_{J}=2$。□
推论 19. 设 N 是一个配备左不变超复结构 (I,J,K) 的 8维幂零流形，则有以下结论:

- N 存在 HKT度量，当且仅当 $h^{+}_{J}=4$;
- N 不存在 HKT 度量，当且仅当 $h^{+}_{J}=2$。

证明。该结果由 [9], 推出：事实上，若存在一个HKT度量，则也存在一个不变HKT度量。于是，该等价性由定理18推出。□

5. Hypercomplex almost-abelian Lie groups

本节中，我们讨论超复几乎阿贝尔李群的情形。更确切地说，回顾一下，若一个（可解）实李代数 $\mathfrak{g}$具有一个余维一阿贝尔理想，则称其为几乎阿贝尔的。若一个李群 G 的李代数是几乎阿贝尔的，则称该李群为几乎阿贝尔的。定理 21、定理 23和定理 24由Barberis和Andrada在 [1]中得到。为完整起见，我们给出独立于 [1]获得的证明。首先，我们回顾以下最初在 [19],中证明的事实

定理 20. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 $2m$ 维的几乎阿贝尔李代数，其余维一阿贝尔理想为 $\mathfrak{u}$，并设 I 是定义在 $\mathfrak{g}$ 上的几乎复结构。取 $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{u}$ 使得 $IX \in \mathfrak{u}$，并令 $\mathfrak{u}_I := \mathfrak{u} \cap I\mathfrak{u}$ 和 $f := \mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{u}} \in \mathrm{End}(\mathfrak{u})$。那么 I 可积，当且仅当存在 $f_0 \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{u}_I, I) := \{h \in \mathrm{End}(\mathfrak{u}_I) \mid [h, I] = 0\} \cong \mathfrak{gl}(m-1, \mathbb{C})$，$w \in \mathfrak{u}_I \cong \mathbb{R}^{2m-2}$ 和 $a \in \mathbb{R}$，使得

$$f = \begin{pmatrix} f_0 & w \\ \mathbf{0} & a \end{pmatrix}$$

关于分解 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_I \oplus \langle IX \rangle$。

现在我们考虑超复情形

定理 21. [1]设 $\mathfrak{g}$ 是一个 $4n$维几乎阿贝尔李代数，具有余维一阿贝尔理想 $\mathfrak{u}$，且 I、J 是定义在 $\mathfrak{g}$上的两个反交换几乎复结构。取 $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{u}$使得 $IX \in \mathfrak{u}$，并令 $\mathfrak{u}_I := \mathfrak{u} \cap I\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}_{I,\ J} := \mathfrak{u} \cap I\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$以及 $f := \mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{u}} \in$端同态$(\mathfrak{u})$。

$\tilde{}$ $\tilde{}$当且仅当存在 $f := f|_{\mathfrak{u}_{I,\ J}} \in$端同态$(\mathfrak{u}_{I,\ J})$满足 $[f, I] = 0$ 和$[\tilde{f}, J] = 0$, $v \in \mathfrak{u}_{I,\ J} \cong \mathbb{R}^{4n-4}$以及 $a \in \mathbb{R}$，使得 I, J可积

$$f = \begin{pmatrix} \tilde{f} & -Jv & Kv & v \\ \mathbf{0} & a & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & a & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

关于分解 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{I,\ J} \oplus \langle KX \rangle \oplus \langle JX \rangle \oplus \langle IX \rangle$，其中 $K := IJ$。

证明。令 $m = 2n$。根据前一个结果， I 可积当且仅当存在$f_0 \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{u}_I, I) := \{h \in$端同态$(\mathfrak{u}_I) \mid [h, I] = 0\} \cong \mathfrak{gl}(m-1, \mathbb{C})$、$w \in \mathfrak{u}_I \cong \mathbb{R}^{2m-2}$和 $a \in$ $\mathbb{R}$使得

$$f = \begin{pmatrix} f_0 & w \\ \mathbf{0} & a \end{pmatrix}$$

相对于分解 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_I \oplus \langle IX \rangle$。
现在我们研究 J 的可积性，因此需要检查 Nijenhuis 张量何时

$$N_J(Y, Z) = [Y, Z] + J([JY, Z] + [Y, JZ]) - [JY, JZ]$$

为零。
首先注意，若对某些 $Y, Z \in \mathfrak{g}$，有 $N_J(Y, Z) = 0$，则 $N_J(JY, Z) = N_J(Y, JZ) = N_J(JY, JZ) = 0$。
此外，对所有 $Y \in \mathfrak{g}$， $N_J(Y, JY) = 0$。
由于 $\mathfrak{u}$ 是阿贝尔的，对于 $Y, Z \in \mathfrak{u}_J := \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$， $N_J(Y, Z) = 0$。
根据分解,

$$\mathfrak{g} = \langle X \rangle \oplus \mathfrak{u}_J \oplus \langle JX \rangle$$

我们只需检查 $N_J(X, Y) = 0$对 $Y \in \mathfrak{u}_J$，令 $Y \in \mathfrak{u}_J$,

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J([JX, Y] + [X, JY]) - [JX, JY] = [X, Y] + J[X, JY] = f(Y) + Jf(JY),$$

因此

$$N_J(X, Y) = 0 \iff Jf(Y) = f(JY).$$

特别地，由于 $IX \in \mathfrak{u}_J$,

- $Jf(Y) = f(JY)$ for $Y \in \mathfrak{u}_{I,J}$,
- $Jf(IX) = -f(KX)$,

类似地，由于 I可积且 $JX \in \mathfrak{u}_I$，根据 $If(Y) = f(IY)$，对每个 $Y \in \mathfrak{u}_I$，我们得到

$$If(JX) = f(KX).$$

使用前述记号，我们有

$$f(IX) = aIX + w$$

因此，存在 b、$c \in \mathbb{R}$ 和 $v \in \mathfrak{u}_{I,\ J}$，使得

$$f(IX) = aIX + bJX + cKX + v.$$

根据前述讨论，我们有

- $f(KX) = -Jf(IX)$,
- $f(JX) = -If(KX)$,

因此，由第一个方程可得，

$$f(KX) = -Jf(IX) = bX - cIX + aKX - Jv$$

但 $f \in$ 端同态$(\mathfrak{u})$，因此 $b = 0$。类似地，由第二个方程

$$f(JX) = -If(KX) = -cX + aJX + Kv$$

但 $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{u})$，因此 $c = 0$。于是，我们有

$$f(IX) = aIX + v,$$
$$f(JX) = aJX + Kv,$$
$$f(KX) = aKX - Jv.$$

~ ~因此，I和 J可积，当且仅当存在 $f := f|_{\mathfrak{u}_{I,J}} \in \mathrm{End}(\mathfrak{u}_{I,J})$，满足 $[f, I] = 0$和 $[\tilde{f}, J] = 0$, $v \in \mathfrak{u}_{I,J} \cong \mathbb{R}^{4n-4}$以及 $a \in \mathbb{R}$，使得

$$f = \begin{pmatrix} \tilde{f} & -Jv & Kv & v \\ \mathbf{0} & a & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & a & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

关于分解 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{I,J} \oplus \langle KX \rangle \oplus \langle JX \rangle \oplus \langle IX \rangle$。

□

注22。注意，对于 $n = 1$，我们得到

$$f = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

特别地，$\mathfrak{g}$ 是幺模的，当且仅当 $a = 0$；在这种情况下，$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \rtimes_f \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^4$同构，且相应的可解流形是 4 维环面。根据 [5] 中对 4 维超复流形的分类，它是唯一的 4 维超复可解流形。

现在我们研究超复几乎阿贝尔李代数上超凯勒度量和 HKT 度量的存在性。设 $\mathfrak{g}$ 为一个 $4n$维几乎阿贝尔李代数，赋有超复结构 (I, J, K) 和超厄米度量 g。那么，存在一个标准正交基 $\{e_i\}$，使得 $\mathfrak{u}_{I,J}$由 $e_2, \ldots, e_{2n-3}$, $Ie_1 = e_{2n}$, $Je_1 = e_{2n-1}$, $Ke_1 = -e_{2n-2}$ 张成。根据 ~ ~ ~定理 21，存在一个 $(4n-4) \times (4n-4)$ 矩阵 $A := f|_{\mathfrak{u}_{I,J}}$满足 $[A, I] = 0$和 $[A, J] = 0$,$v \in \mathbb{R}^{4n-4}$ 和 $a \in \mathbb{R}$，使得

$$f = \begin{pmatrix} \tilde{A} & -Jv & Kv & v \\ \mathbf{0} & a & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & a & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

关于分解 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{I,J} \oplus \langle Ke_1 \rangle \oplus \langle Je_1 \rangle \oplus \langle Ie_1 \rangle$。

˜现在，我们根据 A、a、v 来研究 HKT 度量的存在性。

˜定理 23. [1] (I, J, K, g) 是 HKT，当且仅当 $A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{u}_{I,J})$ 且 $v = 0$。

证明. 我们回顾一下，(I, J, K, g) 是 HKT，当且仅当

$$d^{c,I}\omega_I = d^{c,J}\omega_J = d^{c,K}\omega_K.$$

特别地，根据 [3]，对于任意 $L \in \{I, J, K\}$，近阿贝尔李代数上的 Bismut联络的挠率形式为

$$d^{c,L}\omega_L(x, y, z) = -g([Lx, Ly], z) - g([Ly, Lz], x) - g([Lz, Lx], y),$$

对每个 $x, y, z \in \mathfrak{g}$。
由于 $K = IJ$，只需研究何时

$$d^{c,I}\omega_I = d^{c,J}\omega_J.$$

首先，如果 x、y、$z \in \mathfrak{u}_{I,\ J}$那么，由于 $\mathfrak{u}$是阿贝尔的且 $\mathfrak{u}_{I,\ J}$是 I-不变和 J-不变的，

$$d^{c,L}\omega_L(x, y, z) = 0,$$

对每个 $L \in \{I, J\}$均成立。同样，

- $d^{c,L}\omega_L(e_1, e_{2n-2}, e_{2n-1}) = 0$,
- $d^{c,\ L}\omega_L(e_1, e_{2n-2}, e_{2n}) = 0$,
- $d^{c,\ L}\omega_L(e_1, e_{2n-1}, e_{2n}) = 0$,
- $d^{c,\ L}\omega_L(e_{2n-2}, e_{2n-1}, e_{2n}) = 0$,
- $d^{c,\ L}\omega_L(e_1, y, z) = 0$,
- $d^{c,\ L}\omega_L(e_{2n-2}, y, z) = 0$,
- $d^{c,\ L}\omega_L(e_1, e_{2n-2}, z) = 0$,

对每个 $L \in \{I, J, K\}$ 和 $y, z \in \mathfrak{u}_{I,\ J}$。
我们将计算第一个，其余的类似。注意，

$$Ie_{2n-2} = -IKe_1 = Je_1 = e_{2n-1}, \quad Je_{2n-2} = -JKe_1 = -Ie_1 = -e_{2n}.$$

Now,

$$\begin{aligned} d^{c,I}\omega_I(e_1, e_{2n-2}, e_{2n-1}) &= -g([Ie_1, Ie_{2n-2}], e_{2n-1}) - g([Ie_{2n-2}, Ie_{2n-1}], e_1) - g([Ie_{2n-1}, Ie_1], e_{2n-2}), \\ &= -g([e_{2n}, e_{2n-1}], e_{2n-1}) + g([e_{2n-1}, e_{2n-2}], e_1) + g([e_{2n-2}, e_{2n}], e_{2n-2}), \\ &= 0, \end{aligned}$$

因为 $\mathfrak{u}$是阿贝尔的。另一方面，

$$\begin{aligned} d^{c,J}\omega_J(e_1, e_{2n-2}, e_{2n-1}) &= -g([Je_1, Je_{2n-2}], e_{2n-1}) - g([Je_{2n-2}, Je_{2n-1}], e_1) - g([Je_{2n-1}, Je_1], e_{2n-2}), \\ &= g([e_{2n-1}, e_{2n}], e_{2n-1}) + g([e_{2n}, e_1], e_1) - g([e_1, e_{2n-1}], e_{2n-2}), \\ &= g([e_{2n}, e_1], e_1) - g([e_1, e_{2n-1}], e_{2n-2}), \end{aligned}$$

因为 $\mathfrak{u}$是阿贝尔的。此外，$g([e_{2n}, e_1], e_1) = 0$，因为 e_1与 $\mathfrak{u}$正交，而 $g([e_1, e_{2n-1}], e_{2n-2}) = 0$，因为

$$[e_1, e_{2n-1}] = ae_{2n-1} + Kv$$

且该基是正交的。因此，$d^{c,\ J}\omega_J(e_1, e_{2n-2}, e_{2n-1}) = 0$。
其余情形给出以下条件，对每个 $y, z \in \mathfrak{u}_{I,\ J}$,

- $d^{c,\ I}\omega_I(e_{2n-1}, y, z) = d^{c,\ J}\omega_J(e_{2n-1}, y, z)$ 当且仅当 $g(AJy, z) = g(AJz, y)$,
- $d^{c,\ I}\omega_I(e_{2n}, y, z) = d^{c,\ J}\omega_J(e_{2n}, y, z)$ 当且仅当 $g(AIy, z) = g(AIz, y)$,

当且仅当 $g(Kv, z) = 0$, • $d^{c,I}\omega_I(e_1, e_{2n-1}, z) = d^{c,J}\omega_J(e_1, e_{2n-1}, z)$,
当且仅当 $g(v, z) = 0$, • $d^{c,I}\omega_I(e_1, e_{2n}, z) = d^{c,J}\omega_J(e_1, e_{2n}, z)$,

- $d^{c,\ I}\omega_I(e_{2n-2}, e_{2n-1}, z) = d^{c,\ J}\omega_J(e_{2n-2}, e_{2n-1}, z)$ 当且仅当 $g(v, z) = 0$,

- $d^c,\ ^I\omega_I(e_{2n-2},e_{2n},z)\ =d^c,\ ^J\omega_J(e_{2n-2},e_{2n},z)$ 当且仅当 $g(Kv,z)\ =0$,
- $d^c,\ ^I\omega_I(e_{2n-1},e_{2n},z)\ =d^c,\ ^J\omega_J(e_{2n-1},e_{2n},z)$ 始终成立。

我们将明确证明，$d^c,\ ^I\omega_I(e_{2n-1},y,z)\ =d^c,\ ^J\omega_J(e_{2n-1},y,z)$ 当且仅当 $g(AJy,z)\ =g(AJz,y)$。首先，

$$\begin{aligned}d^{c,I}\omega_I(e_{2n-1},y,z)&=-g([Ie_{2n-1},Iy],z)-g([Iy,Iz],e_{2n-1})-g([Iz,Ie_{2n-1}],y),\\&=g([e_{2n-2},Iy],z)+g([Iz,e_{2n-2}],y),\\&=0\end{aligned}$$

因为 $\mathfrak{u}$ 是阿贝尔的。另一方面，，

$$\begin{aligned}d^{c,J}\omega_J(e_{2n-1},y,z)&=-g([Je_{2n-1},Jy],z)-g([Jy,Jz],e_{2n-1})-g([Jz,Je_{2n-1}],y),\\&=g([e_1,Jy],z)+g([Jz,e_1],y),\\&=g(AJy,z)+g(-AJz,y).\end{aligned}$$

因此，$d^c,\ ^I\omega_I(e_{2n-1},y,z)\ =d^c,\ ^J\omega_J(e_{2n-1},y,z)$ 当且仅当 $g(AJy,z)\ =g(AJz,y)$。
类似地，我们证明 $d^c,\ ^I\omega_I(e_1,e_{2n},z)\ =d^c,\ ^J\omega_J(e_1,e_{2n},z)$ 当且仅当 $g(v,z)\ =$ 0，首先，

$$\begin{aligned}d^{c,I}\omega_I(e_1,e_{2n},z)&=-g([Ie_1,Ie_{2n}],z)-g([Ie_{2n},Iz],e_1)-g([Iz,Ie_1],e_{2n}),\\&=g([e_{2n},e_1],z)+g([e_1,Iz],e_1),\\&=-g(ae_{2n}+v,z)+g(AIz,e_1),\\&=-g(v,z),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}d^{c,J}\omega_J(e_1,e_{2n},z)&=-g([Je_1,Je_{2n}],z)-g([Je_{2n},Jz],e_1)-g([Jz,Je_1],e_{2n}),\\&=-g([e_{2n-1},e_{2n-2}],z)-g([e_{2n-2},Jz],e_1)-g([Jz,e_{2n-1}],e_{2n}),\\&=0,\end{aligned}$$

因此，当且仅当 $g(v,z)\ =0$ 时，$d^c,\ ^I\omega_I(e_1,e_{2n},z)\ =d^c,\ ^J\omega_J(e_1,e_{2n},z)$。
因此，由于 $\mathfrak{u}_{I,\ J}$ 是 I-、 J-、 K-不变的，根据前述考虑，超厄米结构是 HKT 当且仅当

- $g(AJy,z)\ =g(AJz,y)$,
- $g(AIy,z)\ =g(AIz,y)$,
- $g(v,z)\ =0$,

对每个 $y,z\in\mathfrak{u}_{I,\ J}$。特别地，我们得到 $v=0$，并且由于 $[A,J]\ =0$ 在 $\mathfrak{u}_{I,\ J}$ 上，$g(AJy,z)\ -g(AJz,y)\ =0$ 对每个 y,z 成立，当且仅当

$$g((AJ-A^tJ^t)y,z)=g((A+A^t)Jy,z)=0,$$

对每个 y,z 成立，当且仅当 $A+A^t=0$ 在 $\mathfrak{u}_{I,\ J}$ 上成立。证明至此结束。 □

˜超K¨ahler度量的存在性可以用 A,a,v 来刻画。

Theo ˜推论 24. $[1]$ (I,J,K,g) 是超K¨ahler的，当且仅当 $A\in\mathfrak{so}(\mathfrak{u}_{I,\ J})$、 $a=0$ 和 $v=0$。

˜证明。根据前一个定理，$Id\omega_I=Jd\omega_J$ 成立当且仅当 $A\in\mathfrak{so}(\mathfrak{u}_{I,\ J})$ 且 $v=0$。根据 $[10,$ 引理 3.6$]$ (I,g) 是 K¨ahler的，当且仅当 $v=0$ 且

$$\begin{pmatrix}\tilde{A}&0&0\\\mathbf{0}&a&0\\\mathbf{0}&0&a\end{pmatrix}.$$

属于 $\mathfrak{so}(\mathfrak{u}_I)$。
˜因此，若 (I,J,K,g) 是超凯勒流形，那么特别地，由于它是 HKT 流形，我们有 $A\in\mathfrak{so}(\mathfrak{u}_{I,\ J})$

˜并且 $v=0$，同时 (I,g) 是凯勒流形，从而得到 $a=0$。反之，若 $A\in\mathfrak{so}(\mathfrak{u}_{I,\ J})$， $a=0$ 并且 $v=0$，那么g是 HKT 流形，即 $Id\omega_I=Jd\omega_J$，且 (I,g) 是凯勒流形，也就是说 $d\omega_I=0$，证明得证。□

由此立即得到

推论 25. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个幺模的 $4n$ 维几乎阿贝尔李代数，配备超复结构 (I,J,K) 和超厄米度量 g。那么，(I,J,K,g) 是 HKT 当且仅当 (I,J,K,g) 是超凯勒结构。

现在我们刻画几乎阿贝尔超复可解流形上 $SL(n,\mathbb{H})$-结构的存在性。为此，我们将命题 2.4] 推广到超复情形。

命题 26. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个实维数为 $4n$ 的几乎阿贝尔李代数，配备超厄米结构 (I,J,K,g,Ω)。那么，$(\mathfrak{g},I,J,K,g,\Omega)$ 存在闭的 $(2n,0)$-形式，当且仅当

$$a+\frac{1}{4}tr\left(\tilde{f}\right)=0,$$

˜其中 a、 f 由定理 21 给出。

证明。取 $\{e_1,\cdots,e_{4n}\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个 g-标准正交基，使得对于 $1\leq p\leq 2n-1$， e_1 属于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$、 $Ie_1=e_{4n}$、$Je_1=e_{4n-1}$、$Ie_{2p}=e_{2p+1}$，并且 $\{\varphi_1=e^1+\sqrt{-1}e^{4n},J\overline{\varphi_1}=e^{4n-1}-\sqrt{-1}e^{4n-2},\varphi_2=e^2+\sqrt{-1}e^3$、$J\overline{\varphi_2}=e^4+\sqrt{-1}e^5$、$\varphi_3=e^6+\sqrt{-1}e^7$、$J\overline{\varphi_3}=e^8+\sqrt{-1}e^9$、$\cdots$、$\varphi_n=e^{4n-6}+\sqrt{-1}e^{4n-5}$、$J\overline{\varphi_n}=e^{4n-4}+\sqrt{-1}e^{4n-3}\}$ 是一个 (1,0)-形式基。由 ∂ 作用于 (1, 0)-形式得到的像，属于 (1, 0)-形式与 $\overline{\varphi_1}$ 的楔积空间。因此，算子 $\overline{\partial}$ 作用于 (1, 0)-形式时，可视为 (1, 0)-形式上的一个端同态。相对于基 $\{\varphi_1,J\overline{\varphi_1},\cdots,\varphi_n,J\overline{\varphi_n}\}$，该端同态为:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & 0 & \tilde{v} \\ 0 & a & \tilde{w} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix},$$

其中 $a=g([e_1,Ie_1],Ie_1)$，A 是相对于基 $\{e_2-\sqrt{-1}e_3,\cdots,e_{4n-4}-\sqrt{-1}e_{4n-3}\}$，$\tilde{v}^T=(v_3-\sqrt{-1}v_2,\cdots,v_{4n-3}-\sqrt{-1}v_{4n-4})$ 和 $\tilde{w}^T=(-v_5-\sqrt{-1}v_4,v_3+\sqrt{-1}v_2,\cdots,-v_{4n-3}-\sqrt{-1}v_{4n-4},v_{4n-5}+\sqrt{-1}v_{4n-6})$，对应于 $ad_{e_1}|_{\mathfrak{u}_{I,\ J,\ K}}$ 的复矩阵，其中 $v_i=g([e_1,Ie_1],e_i)$，适用于 $2\leq i\leq 4n-3$。

现在，我们计算

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\left(\varphi_1\wedge J\overline{\varphi_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_n\wedge J\overline{\varphi_n}\right) &= \left(a+\frac{1}{2}tr\left(\mathbf{A}^T\right)\right)\varphi_1\wedge\overline{\varphi_1}\wedge J\overline{\varphi_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_n\wedge J\overline{\varphi_n},\\ &= \left(a+\frac{1}{2}tr\left(\mathbf{A}\right)\right)\varphi_1\wedge\overline{\varphi_1}\wedge J\overline{\varphi_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_n\wedge J\overline{\varphi_n}.\end{aligned}$$

这里注意到 $tr(\mathbf{A})$ 是实数。事实上，我们注意到基 $\{e_2-\sqrt{-1}e_3,\cdots,e_{4n-4}-\sqrt{-1}e_{4n-3}\}$ 可以表示为 $\{\varphi_2^*=e_2-\sqrt{-1}e_3,(J\overline{\varphi_2})^*=e_4-\sqrt{-1}e_5,\cdots,\varphi_n^*=e_{4n-6}-$

$\sqrt{-1}e_{4n-5}, (J\overline{\varphi_n})^* = e_{4n-4} - \sqrt{-1}e_{4n-3}\}$。因此，

$$\begin{aligned} tr\,(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} g([e_1,\varphi_i^*],\overline{\varphi_i^*}) + g([e_1,(J\overline{\varphi_i})^*],\overline{(J\overline{\varphi_i})^*}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2,6,\cdots,4n-6} g([e_1,e_k],e_k) + g([e_1,Ie_k],Ie_k) + g([e_1,Je_k],Je_k) + g([e_1,JIe_k],JIe_k) \\ &- \frac{1}{2}\sqrt{-1}\sum_{k=2,6,\cdots,4n-6} g([e_1,Ie_k],e_k) - g([e_1,e_k],Ie_k) - g([e_1,JIe_k],Je_k) + g([e_1,Je_k],JIe_k) \\ &= 2\sum_{k=2,6,\cdots,4n-6} g([e_1,e_k],e_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{4n-3} g([e_1,e_i],e_i) = \frac{1}{2}tr\left(\tilde{f}\right), \end{aligned}$$

其中 $\tilde{f}$ 由下式给出 由定理 21 给出。这里，我们利用了如下事实：$[e_1, Le_k] = L[e_1, e_k]$，其中 $L = I, J, K.$

□

我们指出，该结果是 [11, 命题 2.4] 的一个特例，因为由 f 定理 21 给出的˜复化的迹是实数。

因此，采用上文使用的记号，我们得到如下

推论27. 设 $M := \Gamma\backslash G$ 是一个具有 G 几乎阿贝尔李群的 $4n$维可解流形。设 $\mathfrak{g} = \mathbf{Lie}(G)$，且 (I, J, K, g, Ω) 是 M 上的不变超厄米结构。那么，(M, I, J, K, g, Ω) 是 $SL(n, \mathbb{H})$，当且仅当 $a = 0$ 且 $tr\left(\tilde{f}\right) = 0$。

证明. 由于 $M := \Gamma\backslash G$，我们有 G 是幺模的，这等价于

$$tr\left(\tilde{f}\right) = -3a.$$

此外，在可解流形上，不变超厄米结构是 $SL(n, \mathbb{H})$，当且仅当存在一个不变闭 $(2n, 0)$-形式。根据命题 26，这等价于

$$a = -\frac{1}{4}tr\left(\tilde{f}\right) = \frac{3}{4}a.$$

因此得证。 □

5.1. 维数8中的显式构造。设 $\mathfrak{g}$ 是一个8维几乎阿贝尔李代数，其余维一阿贝尔理想为 $\mathfrak{u}$，并设 I, J 是 $\mathfrak{g}$ 上两个反交换的近复结构。设 $\{e_i\}$ 是一个基，使得 $f := ad_{e_1}$, $\mathfrak{u} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\rangle$

$$\begin{gathered} Ie^1 = e^8, \quad Ie^2 = e^3, \quad Ie^4 = e^5, \quad Ie^6 = e^7, \\ Je^1 = e^7, \quad Je^2 = e^4, \quad Je^3 = -e^5, \quad Je^6 = -e^8, \\ Ke^1 = -e^6, \quad Je^2 = e^5, \quad Ke^3 = e^4, \quad Ke^7 = -e^8. \end{gathered}$$

采用上述记号 $\mathfrak{u}_{I,\ J} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$,

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$J=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

因此，实矩阵 A 与 I 和 J 交换，当且仅当它具有如下形式

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&-a_{21}&a_{13}&-a_{23}\\a_{21}&a_{11}&a_{23}&a_{13}\\-a_{13}&-a_{23}&a_{11}&a_{21}\\a_{23}&-a_{13}&-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}.$$

假设 I 和 J 可积，则结构方程变为

$$\begin{aligned}
[e_1,e_2]&=a_{11}e_2+a_{21}e_3-a_{13}e_4+a_{23}e_5\,,\\
[e_1,e_3]&=-a_{21}e_2+a_{11}e_3-a_{23}e_4-a_{13}e_5\,,\\
[e_1,e_4]&=a_{13}e_2+a_{23}e_3+a_{11}e_4-a_{21}e_5\,,\\
[e_1,e_5]&=-a_{23}e_2+a_{13}e_3+a_{21}e_4+a_{11}e_5\,,\\
[e_1,e_6]&=ae_6-v_4e_2+v_5e_3+v_2e_4-v_3e_5\,,\\
[e_1,e_7]&=ae_7-v_5e_2-v_4e_3+v_3e_4+v_2e_5\,,\\
[e_1,e_8]&=ae_8+v_2e_2+v_3e_3+v_4e_4+v_5e_5\,,
\end{aligned}$$

对于某些 v_2、v_3、v_4、$v_5\in\mathbb{R}$。

注意， $\mathfrak{g}$ 是幺模的，当且仅当 $3a+4a_{11}=0$。

(1,0)-形式基为：

$$\varphi^1=e^1+\sqrt{-1}e^8,\quad \varphi^2=e^2+\sqrt{-1}e^3,\quad \varphi^3=e^4+\sqrt{-1}e^5,\quad \varphi^4=e^7-\sqrt{-1}e^6.$$

用微分 ∂ 表示的结构方程为：

$$\partial\varphi_1=0,\quad \partial\varphi_4=-\frac{a}{2}\varphi_1\wedge\varphi_4,$$

$$\partial\varphi_2=\frac{-a_{11}-\sqrt{-1}a_{21}}{2}\varphi_1\wedge\varphi_2+\frac{-a_{13}-\sqrt{-1}a_{23}}{2}\varphi_1\wedge\varphi_3+\frac{v_5+\sqrt{-1}v_4}{2}\varphi_1\wedge\varphi_4,$$

$$\partial\varphi_3=\frac{a_{13}-\sqrt{-1}a_{23}}{2}\varphi_1\wedge\varphi_2+\frac{-a_{11}+\sqrt{-1}a_{21}}{2}\varphi_1\wedge\varphi_3+\frac{-v_3-\sqrt{-1}v_2}{2}\varphi_1\wedge\varphi_4.$$

与超厄米度量对应的 (2, 0)-形式为 $\Omega=\varphi_1\wedge J\overline{\varphi_1}+\varphi_2\wedge J\overline{\varphi_2}=\varphi_1\wedge\varphi_4+\varphi_2\wedge\varphi_3$. HKT条件 $\partial\Omega=0$ 等价于 $a_{11}=v_2=v_3=v_4=v_5=0$.

另一方面，用微分 $\overline{\partial}$ 表示的结构方程为：

$$\overline{\partial}\varphi_1=\frac{a}{2}\varphi_1\wedge\overline{\varphi}_1,\quad \overline{\partial}\varphi_4=-\frac{a}{2}\overline{\varphi}_1\wedge\varphi_4.$$

$$\overline{\partial}\varphi_2=\frac{-a_{11}-\sqrt{-1}a_{21}}{2}\overline{\varphi}_1\wedge\varphi_2+\frac{-a_{13}-\sqrt{-1}a_{23}}{2}\overline{\varphi}_1\wedge\varphi_3+\frac{v_5+\sqrt{-1}v_4}{2}\overline{\varphi}_1\wedge\varphi_4+\frac{v_3-\sqrt{-1}v_2}{2}\varphi_1\wedge\overline{\varphi}_1,$$

$$\overline{\partial}\varphi_3=\frac{a_{13}-\sqrt{-1}a_{23}}{2}\overline{\varphi}_1\wedge\varphi_2+\frac{-a_{11}+\sqrt{-1}a_{21}}{2}\overline{\varphi}_1\wedge\varphi_3+\frac{-v_3-\sqrt{-1}v_2}{2}\overline{\varphi_1}\wedge\varphi_4+\frac{v_5-\sqrt{-1}v_4}{2}\varphi_1\wedge\overline{\varphi}_1.$$

The $SL(2,\mathbb{H})$ condition $\overline{\partial}(\varphi_1\wedge\varphi_4\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3)=0$ is equivalent to $a=-a_{11}$.

我们考虑 (2, 0)形式 $\Phi_1,\Phi_2\in\Omega^{\overline{J},-}(M)$：

$$\Phi_1=\varphi_1\wedge\varphi_2-\varphi_4\wedge\varphi_3,\quad \Phi_2=\varphi_1\wedge\varphi_3-\varphi_2\wedge\varphi_4.$$

那么 $\partial\Phi_1=0$ 等价于 $a_{11}=a,a_{21}=a_{13}=a_{23}=0$ ，而 $\partial\Phi_2=0$ 等价于$a_{11}=-a$, $a_{21}=a_{13}=a_{23}=0$。注意， Φ_1,Φ_2不可能是 ∂-恰当的。

由上述讨论，我们得出

推论 28. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个配备左不变 $SL(2,\mathbb{H})$-结构的 8维非阿贝尔几乎阿贝尔幺模李代数。那么，∂-闭但非 ∂-恰当的~ ~左不变虚形式 (2, 0)-形式的维数非零，当且仅当 $f=0$ 且 $a=0$，其中 f 和 a 由定理 21 给出。特别地，$\mathfrak{g}$ 是幂零的，且不接受任何 HKT度量。

注记 29. 推论 28 中的幂零李代数对应于 $\mathfrak{g}_3$，采用 [1]中的记号。

References

[1] A. Andrada 和 M. L. Barberis。超复几乎阿贝尔可解流形。 *arXiv:2211.09889*, （2022）。（参见第 2、11、13、14 和 18 页。）[2] D. Angella 和 A. Tomassini。论几乎复流形的上同调分解及其变形。*J. Symplectic Geom.*，9(3):403–428，2011。（参见第 1 和 5 页。）[3] R. M. Arroyo 和 R. A. Lafuente。齐性广义闭流的长期行为。

Proc. Lond., （）：–。

Math. Soc. (3) 119 1 266 289, 2019 13

（参见第 页。）[4] M. L. Barberis、I. G. Dotti 和 M. Verbitsky。复幂零流形的典范丛及其在超复几何中的应用。 *Math. Res. Lett.*，16(2):331–347，2009。（参见第 4、8 和 9 页。）[5] C. P. Boyer。关于超厄米四维流形的一则注记。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，102(1):157–164，1988。（参见第 12 页。）[6] I. G. Dotti 和 A. Fino。八维超复幂零李群。 *J. Pure Appl. Algebra*，184(1):41–57，2003。（参见第 10 页。）[7] T. Draghici、T.-J. Li 和 W. Zhang。辛形式与几乎复四维流形的上同调分解。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，（1）：1–17，2010。（参见第 1 和 5 页。）[8] T. Draghici、T.-J. Li 和 W. Zhang。关于几乎复流形的

J 4 *Q. J.*-反不变上

Math. 64 1 83 111, 2013 1, 2, 6, 9

同调。，（）：–。（参见第 页和第 页。）[9] A. Fino 和 G. Grantcharov。具有反对称挠率和特殊全纯群的流形的性质。

Adv., （）：–。

Math. 189 2 439 450, 2004 8 10

（参见第 页和第 页。）[10] A. Fino 和 F. Paradiso。广义 K¨ahler 几乎阿贝尔李群。 *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 200(4):1781–1812，2021。（参见第 14 页。）[11] A. Fino 和 F. Paradiso。几乎阿贝尔李代数上的平衡厄米结构。 *J. Pure Appl. Algebra*，227 2 107186，25，2023 15 16 ( )：论文编号 。（参见第 页和第 页。）[12] A. Fino 和 A. Tomassini。论几乎复流形的一些上同调性质。 *J. Geom. Anal.*，20 1 107 131，2010 1 ( )：–。（参见第 页。）[13] G. Gentili 和 N. Tardini。HKT 流形：霍奇理论、形式性与平衡度量。 *arXiv:2207.09168*, （2022）。（参见第 9 页。）[14] G. Grantcharov、M. Lejmi 和 M. Verbitsky。实维数8超复流形上 HKT 度量的存在性。 *Adv. Math.*，320:1135–1157，2017。（参见第 3、4 和 5 页。）[15] G. Grantcharov 和 Y. S. Poon。具有挠率的超凯勒联络的几何。 *Comm. Math. Phys.*，213 1 19 3 ( )：–37，2000。（参见第 页。）[16] D. Guan。关于复维数四的不可约紧致超凯勒流形的贝蒂数。，（ - ）：–。（参见第 页。）[17] R. Hind 和 A. Tomassini。关于几乎复流形的反不变上同调。 *J. Geom. Anal.*，31 5 4906 4922，2021 1 ( )：–。（参见第 页。）[18] P. S. Howe 和 G. Papadopoulos。具有挠率的超凯勒流形的扭子空间。 *Phys. Lett. B*，379(1-4):80–86，1996。（参见第 1 页。）[19] J. Lauret 和 E. A. R. Valencia。关于李群上的陈-里奇流及其孤立子。 *Mathematische Nachrichten* 288 13 1512 1526, 2015 11 ，（）：–，

四月。（参见第 页。）[20] M. Lejmi 和 P. Weber。四元数巴蒂-切恩上同调与 HKT 度量的存在性。 *Q. J. Math.*，68 3 705 728，2017 4, 5, 6, 7, 8 ( )：–。（参见第 页和第 页。）[21] T.-J. Li 和 W. Zhang。比较驯化与相容的辛锥及几乎复流形的上同调性质。 *Comm. Anal. Geom.*，17(4):651–683，2009。（参见第 5 页。）[22] J. Morrow 和 K. Kodaira。 *Complex manifolds*。Holt, Rinehart and Winston, Inc.，纽约-蒙特利尔，魁北克-伦敦，1971。（参见第 6 页。）[23] M. Obata。具有几乎复、四元数或厄米结构的流形上的仿射联络。

Jpn. J., ：–。

Math. 26 43 77, 1956 1 4

（参见第 页和第 页。）[24] J. Sawon。复维数六的超凯勒流形第二贝蒂数的一个上界。，（）：–。（参见第 页。）[25] L. Sillari 和 A. Tomassini。几乎复流形上的多尔博上同调与

J *Complex*-不变上同

Anal. Oper. Theory 15 7 112, 28, 2021 1

调。，（）：论文编号 。（参见第 页。）

[26] A. Soldatenkov。 *SU*(3) 中 Obata 连接的整体单值群。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(15):3483–3497，2012。（参见第 4 页。）[27] M. Verbitsky。具有挠率的超凯勒流形、超对称与霍奇理论。 *Asian J. Math.*，6(4):679–712，2002。（参见第 3 和 4 页。）[28] M. Verbitsky。典范丛平凡的超复流形及其整体单值群。载于*Moscow Seminar on Mathematical Physics. II* 221 *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* 203 211 ，第卷，页码 –。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007。（参见第 4 页。）

Department of Mathematics, Bronx Community College of CUNY, Bronx, NY 10453, USA.
Email address: mehdi.lejmi@bcc.cuny.edu

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Unità di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Parma, Parco Area delle Scienze 53/A, 43124 Parma, Italy*Email address*: nicoletta.tardini@unipr.it