arXiv:2303.04893v1 [math.RT] 8 Mar 2023

一类戈伦斯坦代数及其对偶

WASSILIJ GN EDIN、SRIKANTH B. IYENGAR 和 HENNING KRAUSE

Abstract. 在近期发表的论文《Gorenstein代数的中山函子及其完备化》中，作者引入了交换诺特环上的一类戈伦斯坦代数，并为各种表示范畴建立了对偶定理。本文为上述研究中的结果提供了更多背景，指出了新的戈伦斯坦代数类，并探讨了它们在张量积、倾斜等标准运算下的行为。

1. Introduction

戈伦斯坦交换环的概念由 Bass 提出 [8]，距今近六十年。它在交换代数和代数几何中一直发挥着核心作用，尤其是在对偶相关研究中。继 Auslander 和 Reiten 的工作之后 [4, 5] 以及 Buchweitz 的工作 [17]，人们认识到，从表示论的角度看，这类环也具有特殊性质，而且这一点并不限于交换语境。事实上，Gorenstein 性质有多种推广形式，可应用于一般的非交换环。尤其是在有限维代数领域，戈伦斯坦代数的表示论仍是一个活跃的研究方向。

受他们与 Benson 和 Pevtsova 合作研究有限群概形及更一般的有限维戈伦斯坦代数的局部对偶的启发，第二和第三位作者在 [46] 中引入了一种戈伦斯坦代数的概念，涵盖了大多数自然出现的戈伦斯坦代数，包括所有交换的戈伦斯坦代数。他们的目标是为这类戈伦斯坦代数上的适当表示范畴建立对偶结果，类似于 Grothendieck 为交换环所建立的结果。Buchweitz [17] 曾在较有限的语境中得到这些结果；关于其与早期文献的联系，感兴趣的读者可参阅 [46]的引言部分。

其中一些对偶曾在与本卷相关的 ICRA研讨会上由第二作者所作的系列讲座中进行讨论。在本文中，我们将重点放在理论的其他方面，包括从不同视角研究 Gorenstein代数，即将其视为有限维戈伦斯坦代数的平坦族；研究保持这一性质的自然构造，尤其是倾斜；以及描述各种自然出现的 Gorenstein代数例子，其中最值得注意的是温和 Gorenstein 代数。虽然这需要回顾来自 [46]，的基本结果，但本文还提出了一些新结果，而且并不仅限于 Gorenstein代数。另一个

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：16GXX；次要分类号：16E35、16E65、13H10。
Key words and phrases. 戈伦斯坦代数、局部对偶、极大Cohen–Macaulay模、Serre对偶、稳定模范畴、倾斜、gentle 代数。

区别这两篇论文的另一个方面是，本文主要关注有限生成模的表示论，而 [46] 则不限于此。事实上，即使只是为了表述其中提出的对偶性陈述，也必须处理无限生成模。

本文的结构安排如下。第2 节回顾与 Gorenstein环相关的基本概念。第3 节给出有限投射代数上复形性质的初步例子，这些性质可以通过其纤维来研究。第4 节和5 节围绕倾斜理论继续讨论这一主题。第6 节引入戈伦斯坦代数，并说明这一概念在某些运算下的不变性。第7 节针对一类特殊的戈伦斯坦代数给出对偶定理，特别是其中一个定理适用于此类代数的奇点范畴（定理7.8）。第8、9 和10 节的最终目标，是在温和代数的背景下具体阐明上一定理中的概念。每一节只需用到前面章节中的少数几个命题。

2. Commutative Gorenstein rings

在本文中， R 是一个交换诺特环。值得牢记的主要例子是代数簇的坐标环，以及源自数论的环。本节回顾交换环上模的内射维数理论的主要特征，由此引出戈伦斯坦环的概念，以及这类环上模的对偶性质。感兴趣的读者可以参阅 Bass 的论文 [8], ，该论文开创了戈伦斯坦环这一研究领域；也可以参阅 Bruns 和 Herzog 的教科书 [16, 第 3]章。

2.1. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个交换局部环；记号表示 $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想， k 是其剩余域， $R/\mathfrak{m}$。令 $d := \dim R$，即 R上的 Krull 维数；由于 R 是局部诺特环，该维数有限。对于任意有限生成的 R-模 M ，有以下等价关系

$$\begin{aligned}
\operatorname{inj\,dim}_R M < \infty &\iff \operatorname{Ext}^i_R(-, M) = 0 \quad \text{for } i \gg 0 \\
&\iff \operatorname{Ext}^i_R(k, M) = 0 \quad \text{for } i \gg 0 \\
&\iff \operatorname{Ext}^i_R(k, M) = 0 \quad \text{for some } i > d \\
&\iff \operatorname{Ext}^{d+1}_R(k, M) = 0\,.
\end{aligned}$$

第一个等价关系基本上由定义得出；第二个来自标准的诺特归纳法，并且要求 M 是有限生成的；参见 [16, 命题 3.1.14]。下一个等价关系是 Fossum、Foxby、Griffith 和 Reiten 的定理 [29, 定理 1.1], ，其证明依赖于大Cohen–Macaulay模的存在。最后一个蕴含是 Ischebeck 的以下结果的推论 [16, 习题 3.1.24]: 当 $\operatorname{inj\,dim}_R M$ 有限时，任意有限生成的 R-模 N 满足

$$\sup\{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ext}^i_R(N, M) \neq 0\} = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R N\,.$$

我们回顾一下， R-模 N 的深度为

$$\operatorname{depth}_R N := \inf\{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ext}^i_R(k, N) \neq 0\}\,.$$

总而言之，我们得到

$$\operatorname{inj\,dim}_R M < \infty \iff \operatorname{inj\,dim}_R M \leq \operatorname{depth} R \iff \operatorname{inj\,dim}_R M = \operatorname{depth} R\,.$$

Bass 曾猜想，若局部环 R 有一个非零的有限生成模，且该模具有有限内射维数，则该环是 Cohen–Macaulay。这个猜想是

局部代数中的“同调猜想”之一，最终由 P. Roberts 作为其证明新交叉定理的推论解决；参见 [66, 67]。鉴于此，可以在上述等价关系中用维数 R 替换深度 R。

2.2. 交换局部环 R 是戈伦斯坦当且仅当 $\operatorname{inj\,dim} R < \infty$。由 2.1 中的讨论可知，$R$ 是戈伦斯坦环，当且仅当 $\operatorname{inj\,dim} R = \dim R$。于是

$$\operatorname{Ext}^i_R(k,R) = \begin{cases} k & i = \dim R, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

也就是说，$\operatorname{RHom}_R(k,R) \cong \Sigma^{-\text{维数}^R} k$。

2.3. 设 R 是一个交换环，不一定是局部环。我们记 $\operatorname{Spec} R$ 为 R的谱，它由 R 中的素理想组成，并赋予扎里斯基拓扑。有限生成 R-模 M 的支撑是子集

$$\operatorname{supp}_R M \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}.$$

它是闭子集 $V(I)$，其中 I 是 M 的湮灭理想，即同态映射 $R \to \operatorname{End}_R(M)$ 的核。

2.4。交换环 R 是戈伦斯坦环，如果它是诺特环，且局部环 $R_\mathfrak{p}$按照2.2的含义是戈伦斯坦环；对于每个 $\mathfrak{p}$ 属于 $\operatorname{Spec} R$；等价地，对于每个 $\mathfrak{p}$ 属于 $\max(\operatorname{Spec} R)$。此时 $\operatorname{inj\,dim} R = \dim R$，并且 R 当且仅当 $\dim R$ 有限时，才有有限内射维数。特别地，R 是阿廷环且为戈伦斯坦环，当且仅当 $\operatorname{inj\,dim} R = 0$；等价地，当 R 是自内射环时。

重要的例子包括正则环（按定义，它们是局部具有有限全局维数的环）、某些行列式环，以及更一般地，某些有限群的不变量环；参见 [16]。

2.5。Nagata [54, 附录 A1] 构造了一个交换诺特环 R，使得对于 $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{p}$ 中的每个 $\mathfrak{p}$，$\operatorname{gl\,dim} R$ 都是有限的（因此 R 是正则环），且 $\operatorname{dim} R = \infty$。因此，该环是戈伦斯坦环，这说明戈伦斯坦并不意味着 $\operatorname{inj\,dim} R$ 是有限的。换言之，即使是在交换环的范畴中，戈伦斯坦也不意味着 Iwanaga–Gorenstein；参见第 6 节。

下面的 Goto 定理 [37] 常常可以将有限内射维数环的已知结果推广到更一般的戈伦斯坦环类。

2.6. 定理. 设 R 为交换 Gorenstein 环。对于任意 M 属于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R)$，有 $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$ 当 $i \gg 0$时成立。□

这一结果的显著之处在于，尽管 R 的内射维数未必有限，$\operatorname{Ext}^*_R(M,R)$ 仍然是有界的。Goto 定理可轻易推出下述定理，它也称为“局部对偶定理”，因为 Grothendieck 的局部对偶定理可以由此直接推得；见[66]。

2.7. 定理. 当 R 为交换 Gorenstein 环时，$\operatorname{RHom}_R(-,R)$ 诱导出一个三角等价 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R)$。□

3. Finite projective algebras

设 R 为交换诺特环。沿用 Gabriel [32]，的术语，有限R-代数 A 是指 A 为结合 R-代数，且作为 R-模有限生成。在这种情况下，A 的左右两侧都是诺特环，其中心 $Z(A)$ 是

诺特环，且 A 是有限 $Z(A)$-代数。因此，对于任意 A-复形 M、$N \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$，即有限生成（左） A-模的有界导出范畴，$\operatorname{Ext}^i_A(M,N)$ 是有限生成的 R-模，因此对每个整数 i，它也是有限生成的 $Z(A)$-模。

我们称 A 为投射 R-代数，意指 A 是一个 R-代数，且作为 R-模是投射的。因此，有限投射 R-代数是一个既有限又作为 R-模投射的 R-代数。例子包括有限群 G 在 R 上的群代数 RG，以及有限箭图 Q（不含环和环路）的箭图代数 RQ。

支撑与忠实性。设 A 是一个有限 R-代数。按照 A 作为R-模的2.3中所述， 的支撑还有另一种解释。

3.1. Gabriel [32] 引入了 A 的谱，记作 $\operatorname{Spec} A$，即 A 中双边素理想的集合。 A 的真双边理想 $\mathfrak{p}$ 是素理想，当且仅当对于 A 的任意两个双边理想 I、J，若 $IJ \subseteq \mathfrak{p}$，则 $I \subseteq \mathfrak{p}$ 或 $J \subseteq \mathfrak{p}$。给定这样一个 $\mathfrak{p}$，其到 R 的收缩 $\mathfrak{p} \cap R$ 仍是素理想，因此得到映射 $\operatorname{Spec} A \to \to \operatorname{Spec} R$。可以证明，其像恰好是 $\operatorname{supp}_R A$，参见 [32, 第五章，证明命题 11]。

这引出了如下问题：何时 $\operatorname{supp}_R A = \operatorname{Spec} R$? 这与 A 作为一个 R-模的忠实性有关，下面将对此作出解释。

3.2. 若一个 R-模 M 的同态映射 $R \to \operatorname{End}_R(M)$是单射，则称其为忠实的。一个 R-代数 A 作为 R-模是忠实的，当且仅当结构映射$R \to A$ 是单射。

当有限生成的 R-模 M 是忠实的时，$\operatorname{supp}_R M = \operatorname{Spec} R$。反之未必成立；例如，若 I 是 R中的幂零理想，则 $\operatorname{supp}_R(R/I) = \operatorname{Spec} R$，但当 $I \neq 0$时， R-模 R/I 并不忠实。

3.3. 引理。设 M 是一个有限生成的投射 R-模。那么，当且仅当 $\operatorname{supp}_R M = \operatorname{Spec} R$时，$M$ 是忠实的。

证明。我们只需验证：当 $\operatorname{supp}_R M = \operatorname{Spec} R$时， R-模 M是忠实的。设 I为同态映射 $\lambda\colon R \to \operatorname{End}_R(M)$的核。由于 M是投射的，对于 $\operatorname{Spec} R$中的每个 $\mathfrak{p}$， $R_{\mathfrak{p}}$-模 $M_{\mathfrak{p}}$ 都是自由的；由于 $\operatorname{supp}_R M = \operatorname{Spec} R$，它也非零。因此所诱导的映射

$$\lambda_{\mathfrak{p}}\colon R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \operatorname{End}_R(M)_{\mathfrak{p}} \cong \operatorname{End}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$$

是单射；由于 M 是有限生成的，同构成立。因此 $I_{\mathfrak{p}} = 0$。由于这对每个素理想 $\mathfrak{p}$ 都成立，故 $I = 0$, 如所求。□

3.4. 设 M 是一个非零有限生成投射 R-模。考虑秩函数

$$\operatorname{Spec} R \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{where } \mathfrak{p} \mapsto \operatorname{rank}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\,.$$

这对于 $\operatorname{Spec} R$ 上的扎里斯基拓扑和$\mathbb{N}$上的离散拓扑是连续的，因此在 $\operatorname{Spec} R$的连通子集上为常值；参见[9, 第三章，定理 7.1]。因此，当 $\operatorname{Spec} R$连通时， M作为一个 R-模，既是投射的又是有限生成的，故为忠实模。一般而言， R 分解为 $R' \times R''$，其中 $\operatorname{Spec} R' = \operatorname{supp}_R M$，即使将 M视为一个 R'-模，它也是有限生成的，并且 $R'' \cdot M = 0$。

由此可知，若 A 是有限投射的 R-代数，那么如有必要，通过取 R 的一个环因子 R'，我们可以假设 A 作为 R-模也是忠实的；等价地说， R 是 A中心的一个子环。

纤维判据。设 A 是一个有限投射 R-代数。对于每个 $\mathfrak{p}$，环 $A \otimes_R k(\mathfrak{p})$ 都是一个有限维 $k(\mathfrak{p})$-代数。因此，可以将 A 视为由环 R（的谱）参数化的有限维代数族。此外，任意 A-复形 M 都定义了如下复形族

$$M_{k(\mathfrak{p})} \coloneqq M \otimes^{\mathrm{L}}_R k(\mathfrak{p}) \qquad \text{for } \mathfrak{p} \text{ in } \operatorname{Spec} R\,.$$

我们将 $A_{k(\mathfrak{p})}$ 视为 $k(\mathfrak{p})$-代数 $A \otimes_R k(\mathfrak{p})$，并将 $M_{k(\mathfrak{p})}$ 看作其上的复形。以下结果验证了这一观点。

若 M 与一个由有限生成投射 A-模组成的有界复形拟同构，则称 A-复形 M 是完美的。

3.5. 命题。设 A 是有限投射 R-代数。对于任意 $M \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$，以下条件等价。

(1) A-复形 M 是完美的；(2) 对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}_R A$， $A_{k(\mathfrak{p})}$-复形 $M_{k(\mathfrak{p})}$ 都是完美的；(3) 对每个 $\mathfrak{m} \in \max(\operatorname{supp}_R A)$， $A_{k(\mathfrak{m})}$-复形 $M_{k(\mathfrak{m})}$ 都是完美的。

证明。 不难验证， （1）⇒（2）⇒（3）。

（3）⇒（1）由于 M 属于$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$，只需验证：对 supp $\mathfrak{m}$ 中的每个极大理想$_R$ A 以及每个简单 $A_{\mathfrak{m}}$-模 L，都有

$$\operatorname{Ext}^i_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, L) = 0 \qquad i \gg 0\,.$$

由 [6, 定理 A.1.2]可得。根据 [53, 推论 5.9], ，由于 $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 包含于$A_{\mathfrak{m}}$ 的雅各布森根中，因此有 $\mathfrak{m}L = 0$，且 $A_{\mathfrak{m}}$ 在 L上的作用经由 $A_{k(\mathfrak{m})}$分解。因此，由标准伴随性可得以下同构：

$$\operatorname{Ext}^i_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, L) \cong \operatorname{Ext}^i_{A_{k(\mathfrak{m})}}(M_{k(\mathfrak{m})}, L) = 0 \qquad i \gg 0\,.$$

等式成立，因为 $M_{k(\mathfrak{m})}$ 是一个完美的 $A_{k(\mathfrak{m})}$-复形。 □

对上一个证明稍作变通，即可得到某些A-模具有投射性的纤维逐点判据。更确切地说，以下结论成立，见[15, 引理 2.19]。

3.6. 引理. 设 A 是一个有限投射 R-代数，且 M 是一个有限生成A-模。当 M 作为一个 R-模是投射的时，有等式

$$\operatorname{proj\,dim}_A M = \sup\{\operatorname{proj\,dim}_{A_{k(\mathfrak{p})}} M_{k(\mathfrak{p})} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}\,.$$

此外，只需对 R中的极大理想取上确界。 □

以下由 Bass 和 Murthy 得出的结果，见 [9, 定理 7.1] 或 [7, 定理 4.1], ，是上文证明 [6, 定理 A.1.2] 的关键要素。该结果在下文的讨论中以及之后也会发挥作用。

3.7. 定理. 设 R 是一个交换诺特环， A 是一个有限 R-代数，且M 是 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 中的一个 A-复形。那么，当且仅当对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}_R A$， $A_{\mathfrak{p}}$-复形$M_{\mathfrak{p}}$ 都是完美的， M 才是完美的。□

值得注意的是，关于内射维数的类似陈述通常并不成立；任何内射维数不是有限的Gorenstein环都能说明这一点；参见2.5。

为了后续使用，我们记录一些可通过纤维检测的 A-复形的其他性质。给定一个复形 $N \in \mathsf{D}(\operatorname{Mod} A)$，我们用$\operatorname{Loc}(N)$和$\operatorname{Thick}(N)$分别表示由 N生成的局部化子范畴和厚子范畴。

3.8. 定理。设 A 是一个有限投射 R-代数，且 M、N 是 A-复形。以下条件等价。

(1) $M \in \operatorname{Loc}(N)$ 在 $\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 中；(2) 对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}_R A$，$M_{k(\mathfrak{p})} \in \operatorname{Loc}(N_{k(\mathfrak{p})})$ 在 $\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A_{k(\mathfrak{p})})$ 中。

证明。 函子 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 到 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A_{k(\mathfrak{p})})$，将 $M \mapsto M_{k(\mathfrak{p})}$ 映为，是正合的并保持余积。这说明 (1)⇒(2)。

(2)⇒(1) 关键在于利用局部到整体原理来判定对象是否属于局部化子范畴，见 [12, §3]。为此，我们将 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 视为一个R-线性三角范畴；参见 [46, §7]。对每个 $\mathfrak{p}$ 属于 $\operatorname{Spec} R$ 的元素，都有一个作用于 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 上的局部上同调函子，记作 $\varGamma_{\mathfrak{p}}(-)$，它扩展了 Grothendieck 引入的、定义在 R上的经典局部上同调函子。该函子可实现为

$$\varGamma_{\mathfrak{p}} M \cong M \otimes^{\mathrm{L}}_R \varGamma_{\mathfrak{p}} R$$

对于 $M \in \mathsf{D}(\operatorname{Mod} A)$，其中 $\varGamma_{\mathfrak{p}} R$ 由应用函子

$$E \longmapsto \bigcup_{n>0} \{x \in E \mid \mathfrak{p}^n \cdot x = 0\}$$

到 $R_{\mathfrak{p}}$ 的内射分解得到。注意，在 $\mathsf{D}(\operatorname{Mod} R)$ 中有

$$\operatorname{Loc}(\varGamma_{\mathfrak{p}} R) = \operatorname{Loc}(k(\mathfrak{p})) \subseteq \operatorname{Loc}(R_{\mathfrak{p}})\,.$$

该等式可由 Neeman [55, 引理 2.9 的论证以及第 528], 页断言 (1) 的证明推出；而包含关系成立，是因为 $k(\mathfrak{p})$ 是一个 $R_{\mathfrak{p}}$-模。应用函子

$$M \otimes^{\mathrm{L}}_R - \colon \mathbf{D}(\operatorname{Mod} R) \longrightarrow \mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$$

得到如下结果:

$$\operatorname{Loc}(\varGamma_{\mathfrak{p}} M) = \operatorname{Loc}(M_{k(\mathfrak{p})}) \subseteq \operatorname{Loc}(M_{\mathfrak{p}})\,.$$

我们的假设是，对每个 $\mathfrak{p}$，$M_{k(\mathfrak{p})}$ 都属于 $\operatorname{Loc}(N_{k(\mathfrak{p})})$。由上述等式可得

$$\operatorname{Loc}(\varGamma_{\mathfrak{p}} M) = \operatorname{Loc}(M_{k(\mathfrak{p})}) \subseteq \operatorname{Loc}(N_{k(\mathfrak{p})}) \subseteq \operatorname{Loc}(N_{\mathfrak{p}})$$

对每个 $\mathfrak{p} \in \in \operatorname{Spec} R$ 都成立。现在我们运用局部到整体原理，得出所需结论：M 属于 $\operatorname{Loc}(N)$。当 R 的 Krull 维数有限时，局部到整体原理见 [12] 的定理 3.1 和推论 3.5；一般情形则归功于 Stevenson [70, 定理 6.9]。□

3.9. 推论。设 A 是有限投射 R-代数，且 M、N 是 A-复形。当 M 和 N 完美时，下列条件等价。

(1) $M \in$ 属于 $\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 中的 $\operatorname{Thick}(N)$；(2) 对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}_R A$，$M_{k(\mathfrak{p})} \in$ 属于 $\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A_{k(\mathfrak{p})})$ 中的 $\operatorname{Thick}(N_{k(\mathfrak{p})})$。

证明。 如定理 3.8 的证明中所述，蕴含关系（1）⇒（2）显然。至于反向蕴含，由于 $\operatorname{Thick}(N_{k(\mathfrak{p})}) \subseteq \operatorname{Loc}(N_{k(\mathfrak{p})})$，根据假设和定理 3.8 可知 M属于 $\operatorname{Loc}(N)$。由于 M和 N是完美对象，因此在 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 中是紧对象，故 M 属于 $\operatorname{Thick}(N)$，正如所要证明的；参见 [51, 命题 3.4。13]。□

正如下一段所解释的，上述结果推广了 Hopkins 和 Neeman 关于交换诺特环的结果。

3.10. 令 $A := R$。则 $R_{k(\mathfrak{p})} = k(\mathfrak{p})$ 是 R 在 $\mathfrak{p}$ 处的剩余域，并且对于任意 R-复形 M，都有 $M_{k(\mathfrak{p})} = M \otimes^{\mathbf{L}}_R k(\mathfrak{p})$。$M$ 的支撑记作 $\operatorname{supp}_R M$，是满足 $H^*(M_{k(\mathfrak{p})}) \neq 0$ 的所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ 的集合。当后者有限生成时，这与 R-模 $H^*(M)$ 的支撑一致；参见 [30, §2]。

给定 R-复形 M，N，条件 $M_{k(\mathfrak{p})}$ 属于 $\operatorname{Loc}(N_{k(\mathfrak{p})}$，对每个 $\mathfrak{p}$ 属于 $\operatorname{supp}_R A$ 的 $\mathfrak{p}$，$_R A$ 若 $H^*(M_{k(\mathfrak{p})}) \neq 0$ 则可推出$H^*(N_{k(\mathfrak{p})}) \neq 0$；等价地，$\operatorname{supp}_R M \subseteq \operatorname{supp}_R N$。因此定理 3.8 可改写为

$$M \in \operatorname{Loc}(N) \text{ in } \mathbf{D}(\operatorname{Mod} R) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{supp}_R M \subseteq \operatorname{supp}_R N\,.$$

这个结果归功于 Neeman，是通过 $\operatorname{Spec} R$ 的子集对 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} R)$ 的局部化子范畴进行分类的关键步骤；参见 [55, 定理 2.8]。

同理，推论 3.9 可表述为：当 M，N 是完美复形时，$\operatorname{supp}_R M \subseteq \operatorname{supp}_R N$ 当且仅当 M 属于 $\operatorname{Thick}(N)$，由此可对完美 R-复形的厚子范畴进行分类，这归功于 Hopkins [41, §4]。

下面给出前述结果的一个简单应用。

3.11. 设 Q 是一个没有有向环的有限箭图。我们考虑路径代数RQ；根据关于 Q 的假设，它是一个有限投射的、甚至是自由的 R-代数。RQ 作为 R-模的一组基由 Q 中的所有路径构成，而乘法由路径的复合诱导。路径代数 RQ 上的模与箭图 Q 的 R- 线性表示相对应。

当 k 是一个域时，kQ 具有有限全局维数，并且拟阵表示理论已经发展得相当完善。特别地，$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kQ)$ 的厚子范畴已根据非交叉划分 [42, 43]得到分类。箭图 Q确定一个 Coxeter群 $W = W(Q)$ 和一个 Coxeter元素 $c \in W$。我们用 $\operatorname{NC}(W, c)$ 表示相应的非交叉划分偏序集。当箭图Q 为 Dynkin型时，存在一个定义良好的对应

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kQ) \supseteq \mathcal{C} \longmapsto \operatorname{cox}(\mathcal{C}) \in \operatorname{NC}(W, c)$$

它给出了 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kQ)$ 的厚子范畴格与偏序集 $\operatorname{NC}(W, c)$ 之间的同构。

设 R 是一个正则交换诺特环。对每个 $\mathfrak{p}$ 属于 $\operatorname{Spec} R$，环 $R_{\mathfrak{p}}Q$ 具有有限全局维数，因为 $R_{\mathfrak{p}}$ 具有有限全局维数。因此，定理 3.7 表明，每个 M 属于 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} RQ)$ 都是完美的。基于这一观察，推论 3.9 中的纤维判据为分类$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} RQ)$ 的所有厚子范畴开辟了一条途径。在一般的交换诺特环 R 上，可以采用一种方法，对 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} RQ)$ 中完美复形的厚子范畴进行分类。

4. Fibre-wise tilting complexes

本节和下一节的出发点是这样一个问题：有限 R-代数之间的导出等价，是否意味着它们在 $\operatorname{Spec} R$ 上的纤维之间存在导出等价。为此，我们回顾导出 Morita 理论中的概念和结果。

导出等价。设 A 是一个有限 R-代数， T 是 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 中的一个复形。环

$$\operatorname{End}(T) \coloneqq \operatorname{End}_{\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)}(T)^{\mathrm{op}}$$

具有有限 R-代数的自然结构。复形 T 是倾斜复形，当且仅当

(1) $\operatorname{Ext}^i_A(T,T) = 0$ 对任意 $i \neq 0$均成立，且 (2) $\operatorname{Thick}(T) = \operatorname{Thick}(A)$ 于 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$ 中成立。

对于这样的复形，函子

$$F \coloneqq \operatorname{RHom}_A(T,-)\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} \operatorname{End}(T))$$

是三角范畴之间的等价。反过来，若 B 是一个与 A导出等价的诺特环，在下文记作 $A \sim B$，那么对于 A 上的一个倾斜复形 T，存在环同构 $B \cong \operatorname{End}(T)$。这些结论由 Rickard 的结果推出 [61, 62]；另见 Keller [48]。

有限投射 R-代数的类在导出等价下并不封闭。K¨onig 和 Zimmermann 在 [50] 中研究了这一现象。它与非纤维逐点倾斜的倾斜复形有关。

4.1. 例。设 R 是域 k 上单变量的多项式环 $k[c]$，且 $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想（c）。二环箭图的 k-线性路径代数 A 是一个有限自由 R-代数：

$$Q\colon\ 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \qquad A \coloneqq kQ \cong \begin{pmatrix} R & \mathfrak{m} \\ R & R \end{pmatrix} \subset \operatorname{Mat}_{2\times 2}(R)\,. \tag{4.2}$$

用单模 $Ae_1/A\alpha$ 替换 A 的投射直和项 Ae_2，可得到 A 的一个倾斜模，它有如下投射分解

$$T \coloneqq (\, Ae_2 \xrightarrow{\cdot\alpha} A\,)\,.$$

由于 $A_{k(\mathfrak{m})} \cong kQ/(\alpha\beta, \beta\alpha)$，可知 $\operatorname{Ext}^{-1}_{A_{k(\mathfrak{m})}}(T_{k(\mathfrak{m})}, T_{k(\mathfrak{m})}) \neq 0$，因此复形 $T_{k(\mathfrak{m})}$ 不是倾斜的。另一方面， R-代数 $B\colon = \operatorname{End}(T)$ 的箭图有一个汇点：

$$B \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ R/\mathfrak{m} & R/\mathfrak{m} \end{pmatrix} \cong kQ^*/I^* \quad \text{for} \quad (Q^*, I^*)\colon\ x \circlearrowright 1 \xrightarrow{y} 2 \quad yx = 0\,.$$

由于 $Z(B) \cong R$ 是戴德金整环，且 $y \in B$ 是一个非零扭元，3.4 表明 B 不可能具有有限投射 R-代数的结构。

最后一个例子引出了如下术语。

4.3. 定义。设 A 为有限投射 R-代数。若复形 T 属于 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$，并且对每个 $\mathfrak{p}$ 属于 $\operatorname{Spec} R$， $A_{k(\mathfrak{p})}$- 复形 $T_{k(\mathfrak{p})}$ 都是倾斜的，则称 T 为纤维逐点倾斜。

在 [62, 定理 2.1] 中，Rickard 证明了一个关于基变换下导出等价的结果，由此可推出以下结论。

4.4. 定理。设 A 和 B 是有限 R-代数，且 $R \to S$ 是交换诺特环的一个环同态，使得 $A \sim B$ 和

$$\operatorname{Tor}^R_n(A,S) = 0 = \operatorname{Tor}^R_n(B,S) \qquad \textit{for } n \geq 1.$$

于是 $A \otimes_R S \sim B \otimes_R S$。更准确地说，如果 T 是 A 的一个倾斜复形，且 $\operatorname{End}(T) \cong B$，那么 $T \otimes^{\mathrm{L}}_R S$ 是 $A \otimes_R S$ 的一个倾斜复形，且存在一个 S-代数的同构 $\operatorname{End}(T \otimes^{\mathrm{L}}_R S) \cong B \otimes_R S$。□

证明定理 4.4 的一种思路是比较复形$X:=\mathrm{RHom}(T,T)$ 的上同调与 $X\otimes^{\mathrm{L}}_R\Gamma$的上同调。这引出了接下来的讨论。

4.5. 命题. 对于 $X\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}R)$，以下条件等价。

(1) $H^i(X)=0$ 对于 $i\neq 0$，且 R-模 $H^0(X)$ 是投射的；(2) $H^i(X_{k(\mathfrak{p})})=0$ 对于 $i\neq 0$，且对每个 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R$；(3) $H^i(X_{k(\mathfrak{m})})=0$ 对于 $i\neq 0$，且对每个 $\mathfrak{m}\in\operatorname{max}(\operatorname{Spec}R)$。

证明。(1)⇒(2) 由于 $H^i(X)=0$ 对于 $i\neq 0$，可得 $X\cong H^0(X)$ 属于 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod}R)$。由此，在 $\mathbf{D}(\operatorname{Mod}R)$ 中得到下面的第一个同构

$$X_{k(\mathfrak{p})}\cong H^0(X)_{k(\mathfrak{p})}\cong H^0(X)\otimes_R k(\mathfrak{p})\,.$$

第二个成立是因为 $H^0(X)$ 是投射的。因此，对于 $i\neq 0$，$H^i(X_{k(\mathfrak{p})})=0$。

(3)⇒(1) 由于 R-模 $H^i(X)$ 是有限生成的，只需验证：对于每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$R_{\mathfrak{m}}$-模 $H^i(X)_{\mathfrak{m}}$ 对于 $i\neq 0$ 为零，并且在 $i=0$ 时为自由模。将 R 和 X 替换为它们在 $\mathfrak{m}$ 处的局部化后，我们可以假设 R 是一个局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$。假设是，对于$i\neq 0$，$H^i(X\otimes^{\mathrm{L}}_R k)=0$，其中 $k:=R/\mathfrak{m}$。

由于 X 属于 D^{b}(模 R)，存在一个拟同构 $F\xrightarrow{\sim}X$，其中每个 F^i 都是有限生成自由 R-模，在 $i\gg 0$ 时为零，且微分满足 $d(F)\subseteq\mathfrak{m}F$；参见 [51, 推论 4.3.19]。特别地

$$H^i(X\otimes^{\mathrm{L}}_R k)\cong H^i(F\otimes_R k)=F^i\otimes_R k\,.$$

因此，假设等价于 $F^i=0\,\text{for}\ i\neq 0$，从而 $X\cong F^0\,\text{in}\,\mathsf{D}(\text{Mod}\ R)$。这就是所需的结论。□

中间纤维。设 $\mathfrak{p}$ 为 R的一个素理想。在下一个命题中，若交换诺特环 $S(\mathfrak{p})$ 的自然环同态 $R\to k(\mathfrak{p})$ 可经由 $S(\mathfrak{p})$ 分解，我们就称其为中间环。经典例子包括局部环 $R_{\mathfrak{p}}$，或其在极大理想处的完备化 $\widehat{R_{\mathfrak{p}}}$。对于有限投射 R-代数A 以及 $\mathsf{D}(\operatorname{Mod}A)$ 中的复形 T，我们定义

$$A_{S(\mathfrak{p})}:=A\otimes_R S(\mathfrak{p})\quad\text{and}\quad T_{S(\mathfrak{p})}:=T\otimes^{\mathrm{L}}_R S(\mathfrak{p})\,.$$

代数 $A_{S(\mathfrak{p})}$ 可以看作一个加厚的或中间纤维。某些中间纤维将在下一节的提升问题中发挥作用。以下陈述是本节的主要结果。

4.6. 命题。设 A 为有限投射 R-代数，并固定 $T\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}A)$。以下条件等价。

（1） A-复形 T 是倾斜的，且 $\operatorname{End}(T)$ 作为 R-模是投射的；（2）对于 $\operatorname{Spec}R$ 中的每个 $\mathfrak{p}$ 以及任意中间环 $S(\mathfrak{p})$，$A_{S(\mathfrak{p})}$- 复形 $T_{S(\mathfrak{p})}$ 是倾斜的，且 $\operatorname{End}(T_{S(\mathfrak{p})})$ 作为 $S(\mathfrak{p})$-模是投射的；（3）对于 $\operatorname{Spec}R$ 中的每个 $\mathfrak{p}$，存在一个中间环 $S(\mathfrak{p})$，使得$A_{S(\mathfrak{p})}$-复形 $T_{S(\mathfrak{p})}$ 是倾斜的，且 $\operatorname{End}(T_{S(\mathfrak{p})})$ 作为 $S(\mathfrak{p})$-模是投射的；（4）对于 $\operatorname{Spec}R$ 中的每个 $\mathfrak{p}$，$A_{k(\mathfrak{p})}$-复形 $T_{k(\mathfrak{p})}$ 是倾斜的。

证明。蕴含关系（1）⇒（2）和（3）⇒（4）由定理 4.4得出。

(4)⇒(1) 假设对于 $\operatorname{Spec}T_{k(\mathfrak{p})}$ 中的每个 $\mathfrak{p}$，R都是倾斜的。则由命题3.5可知，该-复形是完美的。令 $X:=\mathrm{RHom}_A(T,T)$，将其视为一个 R-复形。由于 T 是完美的，存在一个自然同构

$$X_{k(\mathfrak{p})}=\mathrm{RHom}_A(T,T)\otimes^{\mathrm{L}}_R k(\mathfrak{p})\cong\mathrm{RHom}_{A_{k(\mathfrak{p})}}(T_{k(\mathfrak{p})},T_{k(\mathfrak{p})})\tag{4.7}$$

对于 Spec R中的每个 $\mathfrak{p}$，在 D(Mod) 中。由此，(1) 可由推论3.9和命题4.5直接推出。□

此命题表明，某个复形的倾斜性质 T 在 A 具有R-投射自同态环时，相对于任意中间纤维的选择都是局部的。特别地，纤维逐点倾斜复形恰好是具有 R-投射自同态环的倾斜复形。(1) 与 (4) 的等价解释了例 4.1 中这些性质为何同时缺失。我们将在 6.14 中给出纤维逐点倾斜复形的另一种刻画。

4.8. 注。倾斜性质在经典意义下是局部的。更确切地说，对于有限的 R-代数 A 和复形 T，以下条件等价：$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$

(1) A-复形 T 是倾斜的；(2) 对于每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$， $A_{\mathfrak{p}}$-复形 $T_{\mathfrak{p}}$ 都是倾斜的。若 T 是完美的，则上述条件还等价于以下条件：(3) 对于每个 $\mathfrak{m} \in \max(\operatorname{Spec} R)$， $A_{\mathfrak{m}}$-复形 $T_{\mathfrak{m}}$ 都是倾斜的。

这些等价关系的证明采用了 Iyama 和 Kimura 的一个结果 [44, 定理 2.8 (a)] 以及 Rickard 对倾斜复形的刻画 [63, 引理 1。1]。等价关系（1）⇔（2）对 silting 复形同样成立 [44, 定理 2.8 (b)]。

5. Lifting problems

设 A 是有限 R-代数。由于每个局部环 $R_{\mathfrak{p}}$ 的剩余域 k（$\mathfrak{p}$）与其完备化 $R_{\mathfrak{p}}$ 的剩余域同构，因此存在自然的环同态

$$A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} = A \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \widehat{A}_{\mathfrak{p}} \coloneqq A \otimes_R \widehat{R}_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow A_{k(\mathfrak{p})} = A \otimes_R k(\mathfrak{p})\,.$$

Rickard 定理 4.4 给出了关于导出等价的整体到局部图景。

5.1. 推论。设 A 和 B 是有限投射 R-代数，且满足 $A \sim B$。对于 Spec R 中的每个 $\mathfrak{p}$ 以及任意中间环 S（$\mathfrak{p}$），可得 $A_{S(\mathfrak{p})} \sim B_{S(\mathfrak{p})}$。特别地，以下蕴含关系成立。

$$\begin{array}{ccccccc} \textit{global} & & \textit{local} & & \textit{complete local} & & \textit{finite dimensional} \\ A \sim B & \Longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} \sim B_{\mathfrak{p}}\ \forall \mathfrak{p} & \Longrightarrow & \widehat{A}_{\mathfrak{p}} \sim \widehat{B}_{\mathfrak{p}}\ \forall \mathfrak{p} & \overset{(\star)}{\Longrightarrow} & A_{k(\mathfrak{p})} \sim B_{k(\mathfrak{p})}\ \forall \mathfrak{p}\,, \end{array}$$

其中，“ $\forall \mathfrak{p}$”是“对于环 R 的任意素理想 $\mathfrak{p}$ ”的缩写。 □

本节主要关注第三个蕴含的逆命题，这可以视为提升代数的导出等价这一问题。在 R 为戴德金整环，且纤维 $A_{k(\mathfrak{p})}$ 和 $B_{k(\mathfrak{p})}$ 被增厚版本取代的某种设定下，这一问题可以得到解决（定理5.6）。

倾斜复形的提升与代数同构。在 [63, §3] 中，Rickard 证明了倾斜复形的提升结果。

5.2. 定理。设 Λ 是完备局部环 S 上的有限自由 S-代数，其剩余域为 k，并设 T 是 $\Lambda \otimes_S k$的一个倾斜复形。那么，在同构意义下，D(Mod Λ)中恰有一个复形 L 满足

$$L \otimes^{\mathrm{L}}_S k \cong T \quad in \quad \mathbf{D}(\operatorname{Mod}(\Lambda \otimes_S k))\,.$$

此外，复形 L 是倾斜的，End(L) 是有限自由的 S-代数，并且存在 k-代数同构 End(L) $\otimes_S k \cong$ End(T)。□

该定理给出了推论 $\star$ 中（5.1）的一个部分逆命题：若 $A_{k(\mathfrak{p})} \sim B_{k(\mathfrak{p})}$，则存在一个有限自由的 $R_{\mathfrak{p}}$-代数 Γ，满足 $A_{\mathfrak{p}} \sim \Gamma$ 且 $\Gamma \otimes_{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \cong B_{k(\mathfrak{p})}$。因此，提升导出等价的问题归结为提升代数同构的问题。然而，存在剩余域同构但自身不同构的交换局部诺特环。对于某些群代数的块，式（$\star$）的逆命题也不成立 [64, p。192]下面给出另一个箭图论例子。

5.3. 例。令 $n \geq 1$、A 和 B 分别表示以下矩阵环：

$$A := \begin{pmatrix} k[c] & (c) \\ k[c] & k[c] \end{pmatrix} \supset B := \begin{pmatrix} k[c] & (c^n) \\ (c^n) & k[c] \end{pmatrix}.$$

与 A 类似，子环 B 也是有限自由的 R-代数，其中心同构于 $R := k[c]$。与 A 的箭图不同，B 的箭图具有如下关系：

$$B \cong kQ/I \quad \text{for} \quad (Q, I): \ x \circlearrowright 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \circlearrowright y \qquad \begin{matrix} x^{2n} = \beta\alpha\,, & \alpha x = y\alpha\,, \\ y^{2n} = \alpha\beta\,, & \beta y = x\beta\,. \end{matrix}$$

R 的素理想 $\mathfrak{p}$ 处的纤维 $A_{k(\mathfrak{p})}$ 和 $B_{k(\mathfrak{p})}$ 之间的关系如下。

(1) 若 $c \notin \mathfrak{p}$，则有 $(c)_{\mathfrak{p}} = (c^n)_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$，并且存在同构

$$A_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(R_{\mathfrak{p}}) \cong B_{\mathfrak{p}} \quad \text{and} \quad A_{k(\mathfrak{p})} \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(R_{k(\mathfrak{p})}) \cong B_{k(\mathfrak{p})}$$

分别为 $R_{\mathfrak{p}}$-代数和 $k(\mathfrak{p})$-代数的同构。

(2) 若 $c \in \mathfrak{p}$，则 $\mathfrak{p} = (c) =: \mathfrak{m}$。由于 $R/\mathfrak{m} \cong k(\mathfrak{m})$，存在 $k(\mathfrak{m})$-代数的同构

$$A_{k(\mathfrak{m})} \cong \begin{pmatrix} k[c]/(c) & (c)/(c^2) \\ k[c]/(c) & k[c]/(c) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} k[c]/(c) & (c^n)/(c^{n+1}) \\ (c^n)/(c^{n+1}) & k[c]/(c) \end{pmatrix} \cong B_{k(\mathfrak{m})}\,.$$

换言之，两个代数 $A_{k(\mathfrak{m})}$ 和 $B_{k(\mathfrak{m})}$ 都同构于（4.2）中的二环箭图的路径代数，其关系为 $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$。

由于 $\Lambda := A_{\mathfrak{m}}$ 是完备局部环 $R_{\mathfrak{m}}$ 上的有限 $R_{\mathfrak{m}}$-代数，因此它是半完美的，所以任意简单 Λ-模都是 $\Lambda/\mathrm{rad}(\Lambda)$ 的直和项，参见 [53, 例 23.3 和定理 25.3]。由此可得

$$\mathrm{gl\,dim}\,\Lambda = \mathrm{proj\,dim}_{\Lambda}\,\Lambda/\mathrm{rad}(\Lambda) = 1$$

其中，第一个等式由[45, 命题 2 的证明2]得到，第二个等式则可通过计算得出。另一方面，任意简单 $B_{\mathfrak{m}}$-模的投射维数，以及 $B_{\mathfrak{m}}$ 的全局维数都为无穷。因此，$A_{\mathfrak{m}}$ 和 $B_{\mathfrak{m}}$ 并不导出等价。

结合推论5.1可知，尽管纤维 $A_{k(\mathfrak{p})}$和 $B_{k(\mathfrak{p})}$ 在每个理想 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$处都同构，但代数 A 和 B 并不导出等价。改变代数 $n \geq 1$ 的参数 B 可得到一个代数族，其中每个代数在纤维上都与 A导出等价，但整体上并非导出等价。

5.4.注。 在 [26, 引理 8 中，1] Eisele 给出了充分条件（Λ1）–（Λ5），以便将（k）-代数的同构 $\mathfrak{m}$提升为$A_{k(\mathfrak{m})} \cong B_{k(\mathfrak{m})}$ 同构 $A_{\mathfrak{m}} \cong B_{\mathfrak{m}}$（$R_{\mathfrak{m}}$）-代数的同构。在例 5.3中，性质（$\Lambda$3）不成立。Eisele 还研究了与导出等价相关的提升的唯一性[25]。

在 [40], Higman 证明，在以下设置中，可以提升足够大的商之间的同构。

5.5. 定理。设 Λ 和 Γ 是完备离散赋值环 S 上的有限自由 S-代数，并且 $\Lambda\otimes_S Q(S)$ 是可分的 $Q(S)$-代数。令 $\mathfrak{m}$ 表示 S 的极大理想，并对任意 $n\geq 1$，设 $S_n := S/\mathfrak{m}^n$。那么存在整数$\ell := \ell(\Lambda,\mathfrak{m}) \geq 1$，使得任意 S_ℓ-代数的同构 $\Lambda\otimes_S S_\ell \xrightarrow{\sim} \Gamma\otimes_S S_\ell$都可提升为 S-代数的同构 $\Lambda \xrightarrow{\sim} \Gamma$。□

提升导出等价。我们回到最初关于有限投射R代数 A 和 B的设定。我们不考虑素理想 $\mathfrak{p}$ 处的纤维 $A_{k(\mathfrak{p})}$，而是考虑可能更大的中间商环

$$\widehat{A}_{\mathfrak{p}} = A\otimes_R \widehat{R}_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow A_{\mathfrak{p},n} := \widehat{A}_{\mathfrak{p}}\otimes_{\widehat{R}_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n\widehat{R}_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow A_{\mathfrak{p},1} \cong A_{k(\mathfrak{p})}$$

对于某些整数 $n\geq 1$。Rickard 定理可以与 Higman 结果结合起来，从而提升某些中间纤维的导出等价。

5.6. 定理。设 $\mathfrak{p}$ 是 R的非零素理想，且 A 和 B 是戴德金整环 R 上的有限投射R代数，并满足 $Q(S)$-代数 $B\otimes_S Q(S)$ 是可分的，其中 $S := R_{\mathfrak{p}}$。令 ℓ 表示定理 5.5 给出的数 $\ell(B_{\mathfrak{p}},\mathfrak{p}S)$。那么， $A_{\mathfrak{p}}\sim B_{\mathfrak{p}}$ 当且仅当存在一个整数 $n\geq\ell$，使得 $A_{\mathfrak{p},n}\sim B_{\mathfrak{p},n}$。

证明。 设 $n\geq 1$。由定理 4.4 可得“仅当”蕴含。

为证明反向蕴含，令$\Lambda := \Lambda\otimes_S S_n$。设 T 是 $\Lambda_n = A_{\mathfrak{p},n}$的一个倾斜复形，且 $\mathrm{End}(T)\cong B_{\mathfrak{p},n}$。

定理 4.4 蕴含 $T_1 := T\otimes^{\mathbf{L}}_{S_n} S_1$ 是 Λ_1 的一个倾斜复形，且满足 $\mathrm{End}(T_1)\cong B_{\mathfrak{p},1}$。由定理 5.2， T_1 可提升为 Λ 的一个倾斜复形 L，其自同态环 Γ是S-自由的。定理 4.4 表明， $L_n := L\otimes^{\mathbf{L}}_S S_n$ 是 Λ_n 的一个倾斜复形，且 $\mathrm{End}(L_n)\cong\Gamma\otimes_S S_n =: \Gamma_n$。由于 L_n 和 T 都是 T_1在 $\mathsf{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda_n)$中的提升，根据定理 5.2中的唯一性陈述可得 $L_n\cong T$。因此，存在 S_n-代数的同构 $\Gamma_n\cong\mathrm{End}(L_n)\cong\mathrm{End}(T)\cong B_{\mathfrak{p},n}$。

将上述论证应用于整数 $n\geq\ell$，定理 5.5 给出一个同构$\Gamma\cong B_{\mathfrak{p}}$，其为 S-代数。由此可得 $A_{\mathfrak{p}} = \Lambda\sim\Gamma\cong B_{\mathfrak{p}}$。□

最后一个陈述可视为将戈伦斯坦代数的导出等价问题化约为有限维代数问题的第一步。

5.7. 注。Rickard 定理和最后一个证明给出了态射复形之间的双射：一类是 $A_{\mathfrak{p}}$ 的、其自同态环为 $R_{\mathfrak{p}}$-自由的倾斜复形，另一类是任意中间商环$A_{\mathfrak{p},n}$上的此类复形。此双射也可推广至某些不要求 A 具有 R-投射性的情形，以及 silting 复形 [36]，（另见 [26]）。

6. Gorenstein algebras

若结合环 A 两侧均为诺特环，且 $\mathrm{inj\,dim}\,A$和 $\mathrm{inj\,dim}\,A^{\mathrm{op}}$ 均有限，则称其为 Iwanaga–Gorenstein。Zaks [73] 证明了此时 $\mathrm{inj\,dim}\,A = \mathrm{inj\,dim}\,A^{\mathrm{op}}$；另见 [51, 引理 6.2.1]。

6.1. 定义。按照 [46]，如果一个结合环 A 满足以下条件，则称其为戈伦斯坦 R-代数。

(1) A 是有限投射 R-代数；(2) 对 $\mathrm{supp}_R A$ 中的每个 $\mathfrak{p}$，$A_{\mathfrak{p}}$ 都是 Iwanaga–Gorenstein。

这里，$\operatorname{supp}_R A$ 表示 A 作为 R-模的支撑；参见2.3。根据定义可立即得出，A 是戈伦斯坦 R-代数，当且仅当 A^{op} 是戈伦斯坦 R-代数。

6.2. 例。任何交换 Gorenstein 环 R 作为一个 R-代数都是Gorenstein的。任何在域 k 上有限维且为 Iwanaga–Gorenstein 的代数，显然都是 Gorenstein k-代数。

设 R 为交换 Gorenstein 环。对于任意有限群 G，群代数 RG 是一个 Gorenstein R-代数。这可以直接验证；或者更好的是，它可由定理6.8推出。同样地，任何在 R上的有限生成外代数，或 R上的任意矩阵环，都是 Gorenstein R-代数；另见定理 6.12。

在上述所有例子中，我们都从 R 是Gorenstein的这一前提出发。这是必要的，因为有来自 [46, 引理4.1]的如下结果。其逆命题未必成立：考虑一个在域上有限维的代数的情形。

6.3. 引理。当 A 是戈伦斯坦 R-代数时，对每个属于 $\operatorname{supp}_R A$ 的 $\mathfrak{p}$，环 $R_{\mathfrak{p}}$ 都是戈伦斯坦的。

证明。取 $\operatorname{supp}_R A$ 中的一个 $\mathfrak{p}$，并令 $k(\mathfrak{p})$ 表示 $\mathfrak{p}$ 处的剩余域。于是

$$\operatorname{Ext}^i_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), A_{\mathfrak{p}}) \cong \operatorname{Ext}^i_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}), A_{\mathfrak{p}}) = 0 \qquad \text{for } i \gg 0\,,$$

其中，第一个同构由伴随性成立，第二个同构则因为 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 Iwanaga–Gorenstein 而成立。由于 $A_{\mathfrak{p}}$ 作为 $R_{\mathfrak{p}}$-模是有限自由且非零的——这里用到了 $\mathfrak{p}$ 属于 $\operatorname{supp}_R A$ 这一事实——可得

$$\operatorname{Ext}^i_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), R_{\mathfrak{p}}) = 0 \qquad \text{for } i \gg 0\,.$$

因此，局部环 $R_{\mathfrak{p}}$ 是戈伦斯坦的；参见 2.2。 □

上述论证只用到了 $A_{\mathfrak{p}}$ 在一侧具有有限内射维数这一假设。我们将在定理 6.16 的证明中用到这一观察。

6.4。 如 3.4 所述，当 A 是有限投射 R-代数时，可以降至 R 的一个环因子，并确保 A 作为 R-模也是忠实的，等价地说，$\operatorname{supp}_R A = \operatorname{Spec} R$。在这种情况下，若 A 是戈伦斯坦 R-代数，则由引理 6.3，环 R 是戈伦斯坦的。

对基环的依赖。接下来我们讨论 Gorenstein 性质对环 R 的依赖。以下结果基本包含在 [46, 定理 4.6], 中，是关键所在。

6.5. 定理。设 R 是交换诺特环，且 A 是有限投射R-代数。那么， A 作为 R-代数是戈伦斯坦的，当且仅当

$$\operatorname{Ext}^i_A(M, A) = 0 = \operatorname{Ext}^i_{A^{\mathrm{op}}}(N, A) \qquad \textit{for } i \gg 0$$

对于每个 $M \in$ 模 A 和 $N \in$ 模 A^{op}。

证明。 根据 6.4 中的讨论，可以假设 A 也作为一个R-模是忠实的。于是正向推论属于 [46, 定理 46]。同理，对于逆向推论，只需证明所述的 Ext 模消失意味着环 R 是戈伦斯坦的。该证明基本上见引理 6.3 的证明。

设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的一个素理想。那么对于 $i \gg 0$，有

$$\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), A_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}, A)_\mathfrak{p} \cong \operatorname{Ext}^i_A(A \otimes_R R/\mathfrak{p}, A)_\mathfrak{p} = 0$$

其中，第一个同构成立是因为局部化是平坦的，第二个则由伴随性得到。该等式由假设可知；由于 $A \otimes_R R/\mathfrak{p}$ 属于 $\operatorname{mod} A$，该假设适用。由于 A 是有限投射的 R-模，$A_\mathfrak{p}$ 是有限自由的 $R_\mathfrak{p}$-模；它非零，因为 A 在 R 上忠实。因此，对 $i \gg 0$，$\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p})\ R_\mathfrak{p}) = 0$，所以 $R_\mathfrak{p}$ 是戈伦斯坦的。由于这对 $\operatorname{Spec} R$ 中任意的 $\mathfrak{p}$ 都成立，环 R 是戈伦斯坦的。□

由于上述陈述中 Ext 模的消失与环 R 无关，上述结果有如下推论。

6.6. 推论。设 R 和 S 是交换诺特环，且 A 是结合环，并且作为 R 模和 S 模都是有限投射的。那么，A 是戈伦斯坦 R-代数，当且仅当它是戈伦斯坦 S-代数。□

对偶双模。设 A 是有限投射 R-代数。A-双模

$$\omega_{A/R} \coloneqq \operatorname{Hom}_R(A, R)$$

是 R-代数 A 的对偶双模。

以下对 Gorenstein 性质的刻画见 [46,定理 4。6]其证明用到了 Bass 和 Murthy 的结果，该结果回顾于3.7。

6.7. 定理。设 R 是交换 Gorenstein 环，且 A 是有限投射 R-代数。那么，A 是 Gorenstein R-代数，当且仅当 A-双模 $\omega_{A/R}$ 在两侧都是完美的。□

当 A 是交换的，前述结论的正向可以加强为：A-模 $\omega_{A/R}$ 是投射的。这是交换代数的一项特殊性质。

如第3节所述，有限投射 R-代数 A 可以视为一族有限维代数，它们由 Spec 参数化 R。下面的结果进一步印证了这一观点。

6.8. 定理。设 A 是有限投射 R-代数。那么，对于每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}_R A$，$A$ 是 Gorenstein R-代数，当且仅当 $R_\mathfrak{p}$ 是戈伦斯坦代数且 $A_{k(\mathfrak{p})}$ 是 Iwanaga–Gorenstein；等价地，对于每个 $\mathfrak{m} \in \operatorname{max}(\operatorname{supp}_R A)$，结论均成立。

证明。固定 $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}_R A$。$A$ 是 R 上有限投射模这一假设给出

$$(\omega_{A/R})_{k(\mathfrak{p})} = \operatorname{Hom}_R(A, R) \otimes^{\mathrm{L}}_R k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{k(\mathfrak{p})}(A_{k(\mathfrak{p})}, k(\mathfrak{p})) = \omega_{A_{k(\mathfrak{p})}/k(\mathfrak{p})} \tag{6.9}$$

作为 $A_{k(\mathfrak{p})}$-双模。所述结论可直接由用对偶双模刻画 Gorenstein 性质得到；参见定理 6.7 和命题3.5。□

6.10. 推论。若 A 和 B 是 Gorenstein R-代数，则 $A \otimes_R B$ 也是。

证明。由定理 6.8可知，只需验证：当 k 是一个域，且 A 和 B 是有限维 k-代数并且是 Iwanaga–Gorenstein 时，$A \otimes_k B$ 也如此。这是众所周知的；例如参见 [51, 命题6.2。6]。□

众所周知，有限维 k-代数 A的对偶双模$\omega_{A/k}$ 若在一侧是投射的，则在两侧都已是投射的，参见例如 [69,命题 I.8.16 (i) 和 II.7.6]。这一事实可推广到有限投射 R-代数。

6.11. 引理。设 A 是有限投射 R-代数。则$\omega_{A/R}$ 是投射 A-模，当且仅当$\omega_{A/R}$ 是投射 A^{op}-模。

证明。由于存在 R-代数同构 $(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \cong A$，只需证明“仅当”蕴含。假设 $M := \omega_{A/R}$ 作为 A-模是投射的。

设 $\mathfrak{p}$ 是 R的素理想。由于 A 作为 R-模是有限投射的，因此 M也是如此。利用引理 3.6，并注意到 (6.9) 中的同构是 $A_{k(\mathfrak{p})}$-线性的，可知 $A_{k(\mathfrak{p})}$-模 $N := \omega_{A_{k(\mathfrak{p})}/k(\mathfrak{p})}$ 是投射的。由于 $A_{k(\mathfrak{p})}$ 是有限维 $k(\mathfrak{p})$- 代数，N 作为 $(A_{k(\mathfrak{p})})^{\mathrm{op}}$- 模也 是投射的。利用 (6.9) 中的同构同时也是 $(A_{k(\mathfrak{p})})^{\mathrm{op}}$-线性的这一事实，并结合 $(A_{k(\mathfrak{p})})^{\mathrm{op}} \cong (A^{\mathrm{op}})_{k(\mathfrak{p})}$作为 $k(\mathfrak{p})$-代数的同构，可得对于任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，$M_{k(\mathfrak{p})}$ 作为 $(A^{\mathrm{op}})_{k(\mathfrak{p})}$-模是投射的。

由于 R-代数 A^{op} 和 A^{op}-模 M 都是 R上的有限投射对象，再次应用引理3.6 可得 M 是 A^{op}上的投射对象。□

导出莫里塔不变性。下面给出关于 Gorenstein 性质的莫里塔不变性的主要结果。纤维逐点倾斜对象在定义4.3中引入。

6.12. 定理。设 A 和 B 是有限投射的 R-代数，且它们导出等价。那么，A 是 Gorenstein R-代数，当且仅当 B 是 Gorenstein$R$-代数。

证明。假设 R-代数 A 是戈伦斯坦的。设 T 是一个倾斜复形，且 $\operatorname{End}(T) \cong B$。考虑以下等价

$$F := \operatorname{RHom}_A(T, -) \colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} B).$$

在 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 中固定 M。由于 T 和 A 在 $\mathrm{D}(\operatorname{Mod} A)$ 中生成相同的厚子范畴，因此可得到下面的第一个等价：

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_A^i(M, A) = 0 \quad \text{for } i \gg 0 &\iff \operatorname{Ext}_A^i(M, T) \quad \text{for } i \gg 0 \\ &\iff \operatorname{Ext}_B^i(F(M), B) \quad \text{for } i \gg 0 \end{aligned}$$

第二个等价成立，因为 $F(T) \cong B$，且 F是范畴等价。由于 F 是一个等价，我们得出：对于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 中的每个 M，$\operatorname{Ext}_A^*(M, A)$ 有界，当且仅当对于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} B)$ 中的每个 N，$\operatorname{Ext}_B^*(N, B)$ 有界。

由于 T 是 $\mathrm{D}(\operatorname{Mod} A)$ 中的一个倾斜复形，其对偶 $\operatorname{RHom}_A(T, A)$ 是 $\mathrm{D}(\operatorname{Mod} A^{\mathrm{op}})$ 中的倾斜复形，其自同态代数为 B^{op}；参见 [51, 注 9.2.7]。因此，上述结论也适用于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}})$ 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} B^{\mathrm{op}})$。

定理 6.5 现在可得 B 是戈伦斯坦的。交换 A 和 B，利用相同的论证即可得到逆向结论。□

（经典）Morita 等价是纤维逐点倾斜的，因此命题 4.6 以及前面的结果给出：

6.13. 推论。设 A 是一个戈伦斯坦 R-代数。若 B 与 A Morita 等价，则 B 也是一个戈伦斯坦 R-代数。□

6.14. 设 A 是有限的 R-投射代数，且 T 是 A 的一个倾斜复形。根据 [1, 推论 2.3、引理 4.1 (3)]，R- 代数 $\operatorname{End}(T)$ 是投射的 R- 模，当且仅当对于任意 $i > 0$，$\operatorname{Ext}_A^i(T, \omega_{A/R} \otimes_A^{\mathrm{L}} T) = 0$。特别地，若 $T \cong \omega_{A/R} \otimes_A^{\mathrm{L}} T$ 属于 $\mathrm{D}(\operatorname{Mod} A)$，则 T 是纤维逐点倾斜的。

6.15。 有限的 R-代数 A 是 对称的，如果存在一个同构 $\omega_{A/R} \cong A$，其为 A-双模。如果 R 是戈伦斯坦的，那么有限投射对称 R-代数由定理6.7 可知是戈伦斯坦的。

根据 Abe 和 Hoshino 的定理 [1, 定理 4。3], 对称有限投射R代数，因此由 6.12可知，对称戈伦斯坦代数在导出等价下封闭。对于满足某些深度条件的 Gorenstein 环上的对称有限 R代数 R [45, 定理 3.3、3.1(1)]。

上同调诺特环。设 A 是一个诺特环。如 [11, §4],所述，$\mathrm{D^b(mod}\ A)$ 的分次中心记为 $Z^*(\mathrm{D^b(mod}\ A))$。遵循 Avramov 和 Iyengar 的说法，如果存在一个分次交换环 S 以及一个分次环同态 $S \to Z^*(\mathrm{D^b(mod}\ A))$，使得对于所有 M、N属于 $\mathrm{D^b(mod}\ A)$，$\mathrm{Ext}^*_A(M,N)$ 都是诺特 S-模，那么我们称环 A 是上同调诺特的。特别地， A 是诺特 S^0-模，因此 $Z(A)$ 是一个诺特环，并且 A 是一个有限生成的 $Z(A)$-模；例如，这可由 Formanek 的工作推出 [28]。

6.16. 定理。设 A 是有限投射 R-代数。若 A 关于 S 上同调诺特，则 A^{op} 关于 S 也上同调诺特，并且 A 这个 R-代数是戈伦斯坦的。

证明。我们可以假设 R 是 A 中心的一个子环；参见 3.4 中的讨论。对于任意 M 属于 $\mathbf{D^b}$(模 A) 的元素， S 对 $\mathrm{Ext}^*_A(M,A)$ 的作用经由 $\mathrm{Ext}^*_A(A,A) = A$分解，因此上同调诺特条件意味着

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,A) = 0 \qquad \text{for } i \gg 0\,.$$

现在，类似于引理 6.3 证明中的论证可得，环 R是戈伦斯坦的。详情如下：我们希望验证，对于 $\mathfrak{m}$ 这个 R 的极大理想， $R_{\mathfrak{m}}$ 是戈伦斯坦的。令 k 表示 $\mathfrak{m}$ 处的剩余域，根据前面的讨论，对于 $i \gg 0$ 可得到下面的等式

$$\mathrm{Ext}^i_{R_{\mathfrak{m}}}(k, A_{\mathfrak{m}}) \cong \mathrm{Ext}^i_R(k,A) \cong \mathrm{Ext}^i_A(A \otimes_R k, A) = 0\,.$$

第一个同构成立，是因为 $\mathrm{Ext}^i_R(k,A)$ 被 $\mathfrak{m}$ 消去，因此它本身已是 $\mathfrak{m}$-局部的。由于 $A_{\mathfrak{m}}$ 是一个非零有限秩自由 $R_{\mathfrak{m}}$-模，因此 $\mathrm{Ext}^i_{R_{\mathfrak{m}}}(k,R_{\mathfrak{m}}) = 0$对 $i \gg 0$成立，进而 $R_{\mathfrak{m}}$是戈伦斯坦的；参见2.1。

鉴于 R 是戈伦斯坦的，定理2.7 可得函子

$$\mathrm{RHom}_R(-,R)\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\ A) \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\ A^{\mathrm{op}})$$

是一个（反变）范畴等价；它是自身的拟逆。由此可知， A^{op} 关于 S是上同调诺特的，因此如前所述，对于 $\mathrm{D^b(mod}\ A^{\mathrm{op}})$ 中的每个 N 和 $i \gg 0$，都有 $\mathrm{Ext}^i_{A^{\mathrm{op}}}(N,A) = 0$。

现在，定理6.5 可得 R-代数 A 是戈伦斯坦的。 □

6.17. 例。上同调诺特环的例子包括群代数 kG，其中 k 是一个域，而 G 是一个有限群，甚至可以是有限（超）群概形。在这些情况下，能够见证这一性质的环 S 是 G的上同调环。

更一般地，域 k 上满足 Erdmann、Holloway、Snashall、Solberg、Taillefer 意义下的 Fg 性质的任何有限维代数 A [27], 都是上同调诺特的，其中 S 是 A 上的 Hochschild 上同调环。

Buchweitz 的工作。设 R 是一个交换诺特环。在 [17] Buchweitz 在第7章研究环映射 $\varphi\colon\ R \to A$ 满足以下性质。

(1) A 是一个有限 R-代数，作为 R-模具有有限投射维数；(2) A 是 Iwanaga–Gorenstein 环。

条件（1）比定义 Gorenstein代数的相应条件6.1更弱，而（2）则更强。似乎可以沿着上文以及[46], 中提出的思路发展戈伦斯坦代数理论；在该理论中，不要求 A 是一个投射 R-代数，而是允许它在 R上具有有限投射维数，如 Buchweitz 的定义所示。在这种情况下，纤维 $A_{k(\mathfrak{p})}$将不再是环，而是关于域 k（$\mathfrak{p}$）有限维的微分分次代数。我们还必须处理不一定交换的戈伦斯坦微分分次代数；Frankild 和 Jørgensen [31],以及 Dwyer、Greenlees 和 Iyengar [24]也研究过这类代数。推进这一计划的一个动机是，所提出的定义涵盖了一些自然的例子族；这些例子理应被视为戈伦斯坦代数，但并未纳入我们目前的框架。下一节讨论的温和代数便是其中一类；此外，还有一些代数，它们通过倾斜但不一定是纤维逐点倾斜的复形，与戈伦斯坦代数导出等价。

7. 极大 Cohen–Macaulay 模

本节讨论 Gorenstein代数上的极大 Cohen–Macaulay 模。我们再次从交换环开始。

7.1. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个交换局部环。如果深度$_R M \geq \dim R$，则有限生成的 R-模 M 是极大 Cohen–Macaulay 模；等价地，如果

$$\operatorname{Ext}^i_R(k, M) = 0 \qquad \text{for } i < \dim R\,.$$

当 $M \neq 0$ 时，总有 $\operatorname{Ext}^{\dim R}_R(k, M) \neq 0$，参见 [29, 定理（1.1）],，因此一个这样的模是极大 Cohen–Macaulay 模，当且仅当深度$_R M = \dim R$。

现在设 R 是一个 Gorenstein局部环。由 Grothendieck局部对偶定理 [16, 定理 3.5.8] 可立即得出，M 是极大 Cohen–Macaulay 模，当且仅当

$$\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0 \qquad \text{for } i \geq 1\,.$$

注意，由于 R是戈伦斯坦的，因此 inj dim $R = \dim R$，如 2.1 中所述，所以对任意 $M \in$ 模 R，都有

$$\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0 \qquad \text{for } i \geq \dim R + 1\,.$$

因此，简单的维数平移论证表明，对于任意 M in mod R the$R$-模，若 $i \geq \dim R$，则 $\Omega^i_R(M)$ 是极大 Cohen–Macaulay 模。

这引出了以下定义。

7.2. 设 R 为交换 Gorenstein 环。若对 $i \geq 1$，有 $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$，则 R-模 M in mod R 是极大 Cohen–Macaulay 模。

由于一个有限生成的 R-模当且仅当其在任意素（等价地，极大）理想处的局部化为零时才为零，因此，有限生成的 R-模 M 是极大 Cohen–Macaulay 模，当且仅当对于 Spec R 中所有 $\mathfrak{p}$，$R_\mathfrak{p}$-模 $M_\mathfrak{p}$ 都是极大 Cohen–Macaulay 模；等价地，对于 max(Spec R) 中所有 $\mathfrak{p}$，结论均成立。

与局部情形一样，有如下结果。

7.3. 推论。设 R 为交换 Gorenstein 环， M 为有限生成R-模，并令 $s := \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ext}^i_R(M,R) \neq 0\}$。当 $i \geq s$ 时， R-模 $\Omega^i_R(M)$ 是极大 Cohen–Macaulay。□

Goto 定理2.6 保证 s 是有限的，因此对任意 M ，所有足够高阶的上同调核模都是极大 Cohen–Macaulay。值得注意的是， s没有一致的上界，因为 inj dim R不一定有限；参见 2.5。

戈伦斯坦代数。 设 A 是一个 Gorenstein R-代数。有限生成的 A-模 M 是 极大 Cohen–Macaulay ，如果 $\operatorname{Ext}^i_A(M,A) = 0$ 对 $i \geq 1$成立。注意，这一性质不依赖于 R；另见推论 6.6。

7.4. 引理。设 A 是一个戈伦斯坦 R-代数，且 M 是一个有限生成的 A-模。如果 M 作为 A-模是极大 Cohen–Macaulay，那么它作为 R-模也同样是极大 Cohen–Macaulay。反之，若$\omega_{A/R}$ 在 A 上或在 A^{op}上是投射的，则结论成立；特别地，当 A 是交换的时也成立。

证明。 当 M 是极大 Cohen–Macaulay 时，由标准的维数平移论证可得 $\operatorname{Ext}^i_A(M, W) = 0$ 对于 $i \geq 1$ 以及任意 A-模 W（其投射维数有限）。将这一观察应用于 $W := \omega_{A/R}$，根据定理6.7，这样做是合理的，从而证明了下面的等式：

$$\operatorname{Ext}^i_R(M,R) \cong \operatorname{Ext}^i_A(M,\omega_{A/R}) = 0 \quad \text{for } i \geq 1\,.$$

该同构由伴随性得到。因此， M 作为R-模也是极大 Cohen–Macaulay。该同构还表明，当 M 作为 R-模是极大 Cohen–Macaulay 时，对于 $i \geq 1$，有 $\operatorname{Ext}^i_A(M,\omega_{A/R}) = 0$ 。

关于 $\omega_{A/R}$ 的两个投射性假设由引理 6.11 等价。当 A^{op}-模 $\omega_{A/R}$ 是投射模时，$A \cong \operatorname{Hom}_R(\omega_{A/R}, R)$ 是 $\omega^n_{A/R}$ 的直和项，其中 $n \geq 1$ 是某个整数；这意味着 $\operatorname{Ext}^i_A(M,A) = 0$ 对于 $i \geq 1$ 成立，从而得到反向结论。□

在上面的陈述中，逆命题对一般的非交换环并不成立：例如，考虑域 k 上的有限维代数 A ，使得A 是戈伦斯坦的，但不是自内射的。在这种情况下，并非每个有限维A-模都是极大 Cohen–Macaulay 模，但每个 k-模都是极大 Cohen–Macaulay 模。这凸显了交换语境的一个重要特征。

尽管如此，交换环上极大 Cohen–Macaulay 模理论的许多方面仍然适用，包括 Goto 定理 2.6 及其推论2.7。下述陈述记录了这一点，它可以通过简单地归约到交换情形来证明；详见 [46, 定理 4。6] 。

7.5. 定理。当 A 是戈伦斯坦代数时，函子 $\operatorname{RHom}_A(-,A)$ 诱导范畴等价

$$\operatorname{RHom}_A(-,A)\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}})\,.$$

特别地，对于任意有限生成的 A-模 M ，都有 $\operatorname{Ext}^i_A(M,A) = 0$ ，其中$i \gg 0$，因此上同调核模 $\Omega^i_A(M)$ 在 $i \gg 0$ 时是极大 Cohen–Macaulay 模。□

戈伦斯坦 R-代数A 上的极大 Cohen–Macaulay 模构成一个 Frobenius 正合范畴，其正合结构继承自 mod A，投射/内射对象为有限生成的投射 A-模。我们将相应的稳定范畴记作 mCM(A)。对于任意 A-模 M, N，记

$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)$，表示 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 对所有可经由投射 A-模分解的态射所成理想取商。

令 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 为由 奇点范畴 的 A Buchweitz 引入的 [17] 以及由 Orlov 独立引入的 [58]。这是 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 对完美复形的厚子范畴取商所得；参见 [51, §6.2]。以下结果由 Buchweitz [17, 定理 4.4。1] 针对 Iwanaga–Gorenstein 环证明。下文所述版本出自 [46, 定理 6。5]。

7.6. 定理。当 A 是一个戈伦斯坦 R-代数时，极大 Cohen–Macaulay 模范畴到 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 的嵌入诱导出三角范畴之间的等价 $\mathrm{mCM}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(A)$。□

与 Buchweitz 的工作 [17] 一样，也可以将 $\mathrm{mCM}(A)$ 识别为投射 A-模的无环复形的同伦范畴；参见 [46, §6]。

对偶。我们关注 $\mathrm{mCM}(A)$ 的对偶性质。为此，我们指出，当 A 是戈伦斯坦 R-代数时，正合函子

$$\omega_{A/R} \otimes^{\mathrm{L}}_A - \colon \mathbf{D}(\operatorname{Mod} A) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{D}(\operatorname{Mod} A)$$

是一个等价，并在 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 上诱导一个等价；参见 [46, 定理 4.5]。由于 A-模 $\omega_{A/R}$ 在两侧都是完美的，该函子将完美复形映为完美复形，因此诱导出一个范畴等价

$$\omega_{A/R} \otimes^{\mathrm{L}}_A - \colon \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)\,.$$

参见 [46, 命题 6.7]。

7.7. 设 R 是一个交换诺特局部环，E 是其剩余域的内射包。我们考察 Matlis 对偶函子

$$(-)^\vee := \mathrm{Hom}_R(-,E)$$

在 R-模范畴上。有限 R-代数 A 若对每个非极大素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，环 $A_{\mathfrak{p}}$ 都具有有限全局维数，则称其具有孤立奇点。这一术语源自 Buchweitz 的工作 [17, 定义 7.7.3]，且不同于 Auslander 对孤立奇点的定义。

当戈伦斯坦 R-代数 A 具有孤立奇点时，对于任意对象 $M, N \in \mathrm{mCM}(A)$，对每个非极~~大素理~~想 $\mathfrak{p}$，都有 $\mathrm{Hom}_{~~A~~}(M,N)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Hom}_{~~A_{\mathfrak{p}}~~}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) = 0$，由 [4, 引理 7.6 c)]，可知；结合定理 7.6 可得，$\mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 中每个态射空间都是一个 R有限长度模；另见 [17, 小节 (C.4.2)]。

7.8. 定理。设 R 是一个局部环，A 是一个具有孤立奇点的戈伦斯坦 R-代数。对于 M, $N \in \mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(A)$，存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)}(M,N)^\vee \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)}(N, \Sigma^{d-1}(\omega_{A/R} \otimes^{\mathrm{L}}_A M))\,,$$

其中 d 是 R的 Krull 维数。换言之，奇点范畴 $\mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 具有 Serre对偶，其 Serre 函子为 $\Sigma^{d-1}(\omega_{A/R} \otimes^{\mathrm{L}}_A -)$。□

前述结果归功于 Buchweitz [17, 定理 7.7.5]，，该结果推广了 Auslander [4] 以及 Auslander 和 Reiten [5]的结果；另见 [46, 推论 9.3]。一个值得注意的推论是，$\mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(A)$中存在几乎分裂序列；这得益于 Reiten 和 Van den Bergh [60]的工作。

7.9. 多项独立研究表明，等价

$$\Sigma^d(\omega_{A/R}\otimes^{\mathrm{L}}_A -)\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)\xrightarrow{\simeq}\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$$

在 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 的某个全子范畴上限制为 Serre 函子，其态射空间是有限长度 R-模，见 [34, 定理 7.2。14], [45, 定理 3。7], [49, 引理 4。1]以及 [71, 引理 6.4。1]。

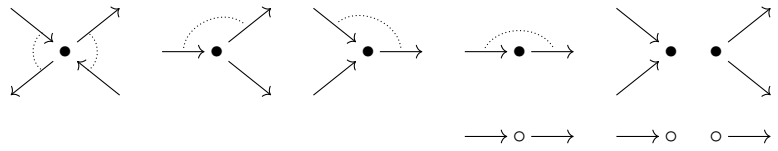
在 [46] 中的工作始于这样一个问题：定理7.8 中的 Serre 对偶是否是某种更一般对偶陈述的表象，该陈述适用于所有戈伦斯坦R-代数，而不只是具有孤立奇点的代数。这样的对偶定理确实存在，但要发现它，必须拓宽视野，将极大 Cohen–Macaulay 模的无限生成类比对象——即 Gorenstein投射模——也纳入考量，并将上述结果推广到这一一般性情形。所有这些内容都在 [46]中作了说明。这项研究受到交换代数与代数几何中的 Grothendieck对偶理论的指引；该理论涵盖并推广了这些领域中的经典 Serre 对偶。另一个灵感来源是第二、第三作者与 Benson 和 Pevtsova 合作的研究 [13, 14]，探讨有限群及群概形的稳定模范畴中的对偶现象。

8. Gentle algebras

本节讨论温和代数。它们在表示论中经常出现，由 Assem 和 Skowro´nski 在研究 Dynkin型 $\mathbb{A}$ [3] 的迭代倾斜代数时引入。

设 k 为一个域。若一个 k-代数与形如 kQ/I 的代数 Morita等价，其中 Q 是有限箭图，且 I 是由长度为二的路径生成的理想，并且任意顶点处的局部形状均为下列情形之一，则称该代数为 gentle。

(8.1)



零关系用虚线表示。为便于后续讨论，顶点分为两类，分别用实心圆和空心圆表示。

严格地说，箭图 $Q:=(Q_0,Q_1,s,t)$ 和理想 I 须满足以下条件。

(Ge1) 对每个 $i\in Q_0$，从 i 出发的箭至多有两条。**(Ge2)** 对每个 $i\in Q_0$，以 i 为终点的箭至多有两条。**(Ge3)** 对每个 $\alpha\in Q_1$，至多存在一条箭 β，使得 $s(\beta)=t(\alpha)$ 且$\beta\alpha\in I$；并且至多存在一条箭 β'，使得 $s(\beta')=t(\alpha)$ 且 $\beta'\alpha\notin I$。**(Ge4)** 对每个 $\beta\in Q_1$，至多存在一条箭 α，使得 $t(\alpha)=s(\beta)$ 且$\beta\alpha\in I$；并且至多存在一条箭 α'，满足 $t(\alpha')=s(\beta)$ 且 $\beta\alpha'\notin I$。
请注意，在 Q 中，我们从右向左复合路径。

温和代数是 Koszul 代数。设 k 是一个域，$Q:=(Q_0,Q_1,s,t)$ 是一个有限箭图。设 Q^{op} 是通过反转箭而得到的反箭图，因此

$$Q_0^{\mathrm{op}}:=Q_0\qquad\text{and}\qquad Q_1^{\mathrm{op}}:=\{\alpha^-\mid\alpha\in Q_1\}$$

其中 $s(\alpha^-):=t(\alpha)$ 且 $t(\alpha^-):=s(\alpha)$。令 Q_2 表示长度为 2 的路径集合，并固定一个划分 $Q_2=P_+\sqcup P_-$。不难验证代数

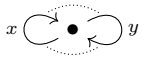
$kQ/\langle P_-\rangle$（不一定是有限维的）是 gentle 的，当且仅当 $kQ^{\mathrm{op}}/\langle P_-^{\mathrm{op}}\rangle$ 是 gentle 的，其中 $P_-^{\mathrm{op}} := \{\alpha^- \mid \alpha \in P_+\}$。

现在假设代数 $A := kQ/\langle P_-\rangle$ 是温和的。那么 A 按路径长度分次，并且有分解 $A_0 = \bigoplus_{i\in Q_0} S_i$ 为简单 A-模。每个箭 $\alpha\colon\ i \to j$ 对应一个扩张 ξ_α：$0 \to S_i \to E_\alpha \to S_j \to 0$。Green 和 Zacharia 的一个定理 [39] 表明代数 A 是 Koszul 代数，而代数 $kQ^{\mathrm{op}}/\langle P_-^{\mathrm{op}}\rangle$ 与 Koszul 对偶 $A^! \cong \mathrm{Ext}_A^*(A_0,\ A_0)$ 通过赋值 $\alpha^- \mapsto \xi_\alpha$相对应。

例如，考虑具有分拆的双环箭图



$P_+ = \{x^2, y^2\}$,

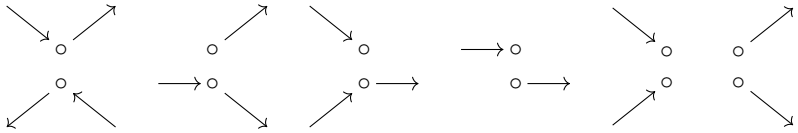


$P_- = \{xy, yx\}$.

那么代数 $A := k\langle x,y\rangle/(x^2,y^2)$ 是温和的，其 Koszul 对偶为 $A^! \cong k[x,y]/(xy)$。

粘合 gentle 代数。在本节余下部分中，我们固定一个代数 $A := kQ/I$ 使得 (Q,I) 满足上述条件 (Ge1)–(Ge4)。此外，令 $\mathfrak{m} := (c) \subset R := k[c]$。gentle 代数 A 具有一些与如下定义的箭图的路径代数 $B := kQ'$ 相同的性质。

为了得到 Q'，我们将图（8.1）中的每个完整顶点拆分为一对顶点：



形式上，箭图 $Q' := (Q'_0, Q'_1, s', t')$ 定义如下。令 Q_0^* 表示满足以下条件的所有顶点 $i \in Q_0$ 的子集：没有任何箭从 Q 出发或终止于 i。设$Q'_0 := Q_0^* \cup \{s_\alpha, t_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}/\sim$，其中 $\sim$是满足以下条件的最小等价关系：对于任意满足 $s(\beta) = t(\alpha)$ 且 $\beta\alpha \notin I$的 $\alpha,\beta \in Q_1$，均有 $s_\beta \sim t_\alpha$。设 $Q'_1 := Q_1$,$s'(\alpha) := [s_\alpha]$，并且对任意 $\alpha \in Q'_1$，有 $t'(\alpha) := [t_\alpha]$。

环 B 是 Burban 和 Drozd 在研究[18, 19, 20] 的表示论时使用的一项核心工具 A。下一条引理中的陈述在类似情形下已为人所知；参见 [19, 引理 2。12] 和 [20, 定理 3。11]。

8.2. 引理。在上述记号下，以下陈述成立。

~(1) 箭图 Q' 是有限个等向型 $\mathbb{A}$ 或 $\mathbb{A}$箭图的并。换言之，存在数 $0 \le m \le n$，$\ell_1, \dots, \ell_n \ge 1$，使得环的同构 $B \cong \prod_{v=1}^m T_{\ell_v}(k) \times \prod_{v=m+1}^n T_{\ell_v}(R)$ 成立，其中

$$T_{\ell_v}(k) := \{(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\ell_v\times\ell_v}(k) \mid a_{ij} = 0 \text{ for any } 1 \le i < j \le \ell_v\},$$
$$T_{\ell_v}(R) := \{(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\ell_v\times\ell_v}(R) \mid a_{ij} \in \mathfrak{m} \text{ for any } 1 \le i < j \le \ell_v\}.$$

(2) 令 J_A 表示由其箭图中的箭生成的 A的双边理想。类似地，令 J_B 表示 B的箭理想。存在一个典范单态射 $\iota\colon\ A \hookrightarrow B$，它是 k-代数之间的态射，且满足 $\iota(J_A) = J_B$。

证明。(1) (Ge3) 和 (Ge4) 的性质保证，对每个顶点，在 Q,I) 中至多有一条箭射出，至多有一条箭射入。Q'。

(2) 所讨论的态射 ι 由唯一的 k-代数态射给出，其中$\alpha \mapsto \alpha$ 对应 $\alpha \in Q_1$，$e_i \mapsto e_i$ 对应 $i \in Q_0^*$，而 $e_i \mapsto \sum_{j \in Q_0'(i)} e_j$ 对应 $i \in Q_0 \backslash Q_0^*$，其中

$$Q_0'(i) := \{[s_\beta] \mid \beta \in Q_1 \colon s(\beta) = i\} \cup \{[t_\alpha] \mid \alpha \in Q_1 \colon t(\alpha) = i\}$$

是 Q_0' 的子集，其中只有一个或两个元素。 □

上述构造可以反向进行：给定一组 Q' 同向箭图$\widetilde{\ }$，其类型为 $\mathbb{A}$ 或 $\mathbb{A}$，可以按照 Q' 中箭的关系，识别某些顶点对，从而拼接出一个温和箭图（Q，I）。事实上，任何温和箭图都可以通过这种方式得到。

温和代数的完备化。 温和代数的维数 A 与以下概念有关。对于任意一支箭 $\alpha \in Q_1$，存在唯一一条以 α_1 为起点的极大无重复路径 $p_\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1 \notin I \colon = \alpha$ 由 (Ge3) 可知。换言之，所有 n 箭 p_α 各不相同， $p_\alpha \notin I$ 并且对于任意一支箭 $\beta \in Q_1$ 满足$s(\beta) = t(\alpha_n)$，可得 $\beta = \alpha_1$ 或 $\beta\alpha_n \in I$。我们称 p_α 为一个容许圈，如果它是一条满足 $\alpha_1\alpha_n \notin I$的循环路径。

接下来，我们考虑无限维 gentle 代数的某些完备化。

8.3. 引理。假设箭图 (Q, I) 含有一个容许圈。以下结论成立。

(1) 存在一个有限 R-代数之间的典范单态射 $\iota\colon A \hookrightarrow B$。 (2) 对任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \backslash \{\mathfrak{m}\}$，存在有限 $R_\mathfrak{p}$-代数之间的同构 $\widehat{A_\mathfrak{p}} \cong \prod_{v=1}^{n} \operatorname{Mat}_{\ell_v \times \ell_v}(\widehat{R_\mathfrak{p}})$，其中 $n, \ell_1, \dots, \ell_n \geq 1$。 (3) 环 $A_\mathfrak{m}$ 是一个有限 $R_\mathfrak{m}$-代数，它同构于路径代数 A 关于其箭理想 J_A 的完备化；并且 $Q(R_\mathfrak{m})$-代数 $A_\mathfrak{m} \otimes_{\widehat{R}_\mathfrak{m}} Q(R_\mathfrak{m})$ 是半单的。

证明。 (1) 将 c 在 $R = k[c]$ 中与 (Q, I) 的所有容许圈之和相对应，可得到一个 R-代数映射 $\phi\colon R \to A$。该映射与引理 8.2 (2) 中的嵌入 ι 复合后，将 c 映到 Q' 中所有无重复循环路径之和，并赋予上环 B 有限 R-代数的结构。将 $\iota\colon A \hookrightarrow B$ 视为 R-模之间的单态射，可知 A 也是一个有限 R-代数。

(2) 令 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \backslash \{\mathfrak{m}\}$。对于 B 的任意环因子 $T_{\ell_v}(k)$ 以及 $c \notin \mathfrak{p}$，均有 $cB \subseteq \iota(A)$ 和 $cT_{\ell_v}(k) = 0$。这些观察表明，按照引理 8.2 (1) 中的记号， $\iota_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p}) = B_\mathfrak{p} \cong \prod_{v=1}^{n}(T_{\ell_v}(R))_\mathfrak{p} \cong \prod_{v=1}^{n} \operatorname{Mat}_{\ell_v \times \ell_v}(R_\mathfrak{p})$。取完备化即得结论 (2)。

(3) 映射 ι 导出一个代数单同态 $\widehat{\iota}_\mathfrak{m}\colon A_\mathfrak{m} \hookrightarrow B_\mathfrak{m}$ 在形式幂级数环 $R_\mathfrak{m} \cong k[\![c]\!]$ 上。由于 $\widehat{\iota}_\mathfrak{m}$ 具有有限维余核， $A_\mathfrak{m} \otimes_{k[\![c]\!]} k((c)) \cong B_\mathfrak{m} \otimes_{k[\![c]\!]} k((c))$ 是一个半单 $k((c))$-代数。由于 $J_A^n \subseteq A\mathfrak{m} \subseteq J_A$ 对于某个 $n \geq 1$，因此 $A_\mathfrak{m}$ 是 J_A-进完备的。 □

最后一个引理表明，无限维 gentle 代数 A 在其中心子环 R的某个素理想处只有一种有意义的完备化。对于有限维温和代数，最后一个引理有一个更简单的类似结论，其中环 R必须替换为域 k，而 $A_\mathfrak{m}$ 可以认作代数 A 本身。

有限射影温和代数。此时，我们可以说明温和代数 A 何时满足戈伦斯坦 6.1 (1) R-代数关于环 $R = k[c]$。

8.4. 命题。采用上述记号，以下条件等价。

(1) A 具有有限投射 R-代数的结构；(2) B 具有有限投射 R-代数的结构；(3) Q' 的每个箭都位于某个循环路径上；(4) Q 的每个箭都位于某个容许圈上。

证明。(1)⇒(2) 由(1)可知， Q_0^* 为空，且 A 没有与k同构的环因子。结合引理 8.2，假设(1)蕴含 B 可视为一个有限 R-模，使其箭理想 $J := J_B$ 作为 R-模是无挠的。由于 $J\,\mathrm{tor}_R(B) + \mathrm{tor}_R(B)\,J \subseteq \mathrm{tor}_R(J) = 0$，且 B 没有简单环因子， B也必定无挠，因此是 R上的投射模。注意，形如 $T_{\ell_v}(k)$的三角矩阵环不能赋予投射 R-模的结构。因此， B 的每个不可分解环因子都与形如 $T_{\ell_v}(R)$的矩阵环同构，这等价于性质(2)。

(2)⇒(3) 可由刚才提到的对（2）的刻画推出。
(3)⇔(4) 根据箭图 Q' 的定义成立。
(3)⇒(1) 由（3）可知， B 的每个环因子都是形如 $T_{\ell_v}(R)$ 的矩阵环。我们可以重复引理 8.3 (1) 的证明，并补充说明 $\iota\phi$ 赋予环 B 有限投射 R-代数结构。因此，其 R-子代数A 作为 R-模也是有限且投射的。□

温和代数是 Iwanaga–Gorenstein 代数。Geiß 和 Reiten 在代数同时为有限维时证明了这一点 [33] ；一般情形则见[51, 命题 6.29]。事实上，内射维数可以显式计算。

8.5. Koszul 对偶提示了一个与极大无重复无关系路径类似的概念。具体而言，对于任意一条箭$\alpha \in Q_1$ （Ge3）蕴含存在唯一一条由两两不同的箭组成、以 α_1 开始的路径 $d_\alpha = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1 := \alpha$，使得 $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$，且对任意 $1 \le i < n$，都有 $\alpha_{i+1}\alpha_i \in I$；对于任意满足 $s(\beta) = t(\alpha_n)$ 的箭$\beta \in Q_1$，可推出 $\beta = \alpha_1$ 或 $\beta\alpha_n \notin I$。若 d_α 是一条满足 $\alpha_1\alpha_n \in I$ 的循环路径，我们称其为微分圈；否则称为微分游走。

我们为 gentle 代数 $A = kQ/I$ 定义整数 $w(A)$如下。若 (Q, I) 中至少存在一个微分游走，则令 $w(A)$ 等于所有微分游走长度的最大值；若 $A\tilde{}$的每个不可分解环因子都同构于 k，或同构于一个等向有限箭图 $\mathbb{A}$的路径代数模去其箭理想的平方，则 $w(A) := 0$；在其余情况下， $w(A) := 1$。

8.6. 命题。gentle 代数 A 是 Iwanaga–Gorenstein。其内射维数由 $w(A)$给出。□

8.7.注。温和代数 A 成为戈伦斯坦 R- 代数的唯一障碍在于 A 可能不是一个 R-模。Crawley-Boevey 指出，箭图（Q^*, I^*）的路径代数中就出现了这种情况，见例 4.1。这再次表明，应放宽 6.1 中的条件（1），允许 A 在 R上具有有限射影维数；参见第 6 节末尾关于 Buchweitz 工作的讨论。

本文余下部分将聚焦于无限维温和戈伦斯坦代数的箭理想完备化。为简便起见，以下称其为温和 Gorenstein 代数。

9. Serre duality for gentle Gorenstein algebras

从现在起，设 (Q, I) 为一个温和箭图，其中每支箭都位于某个容许圈上。等价地，Q 是一个有限箭图，理想 I 由长度为二的路径生成，并且每个顶点要么是具有温和关系的 2-正则顶点，要么是过渡顶点：



与上一节不同，我们用 R 表示形式幂级数环 $k[\![c]\!]$，用 A 表示无限维路径代数关于其箭理想的完备化 kQ/I。根据引理 8.3 (3) 和命题8.4，环 A 是一个温和戈伦斯坦 R-代数。

本节旨在明确描述对偶双模 $\omega_{A/R} := \mathrm{Hom}_R(A, R)$。其计算思路与 Ladkani 的工作相似 [52]，并且在 [35] 中已针对箭图 Q 仅含 2-正则顶点的情形进行了研究。对双模 $\omega_{A/R}$ 的描述需要引入一些记号，这些记号在下一节中不会用到。该描述的主要结论总结于推论9.8。

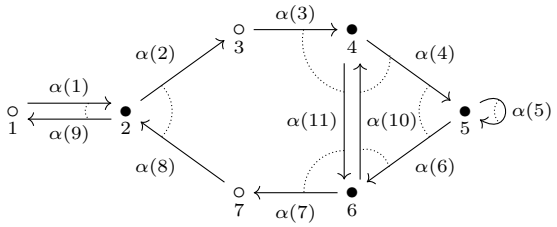
9.1. 对于任意箭 $\alpha \in Q_1$，存在唯一的箭 $\sigma(\alpha) \in Q_1$，使得 $\sigma(a)a \notin I$。此外，α 是某个长度为 $\ell_\alpha \geq 1$ 的唯一容许圈 c_α 的起点。我们可以通过结构映射将环 A 视为戈伦斯坦 R-代数

$$R = k[\![c]\!] \longrightarrow A, \quad c \longmapsto \sum_{\alpha \in Q_1} c_\alpha \tag{9.2}$$

对于任意整数 $1 \leq n < \ell_\alpha$，我们用 α_n 表示以箭 α 开始且不包含于理想 I 中的唯一长度为 n 的路径，用 $c_\alpha \partial^n$ 表示满足 $(c_\alpha \partial^n)\alpha_n = c_\alpha$ 的唯一路径。路径 $c_\alpha \partial^n$ 也可以通过从路径 c_α 中删去前 n 个箭得到。使用这些记号时，我们默认假设$\alpha \neq c_\alpha$。令 Q_0^r 和 Q_0^t 分别表示 2-正则顶点集和过渡顶点集。令 Q_1^t 表示所有起始于过渡顶点的箭的集合。

为了确定 A 的一个 R-线性基，我们选取一个映射 $\varepsilon\colon Q_1 \to \{-1, 1\}, \alpha \mapsto \varepsilon_\alpha := \varepsilon(\alpha)$，使得对于任意不同的箭 α, β，若 $s(\alpha) = s(\beta)$，则有 $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$；并且对于任意箭 $\gamma \in Q_1^t$，有 $\varepsilon_\gamma = -1$。最后，令 Q_1^+ 表示所有满足 $\varepsilon_\alpha = 1$ 的箭 α 的集合。

9.3. 例。下图的箭图由长度分别为二和九的环粘合而成：



对于这个箭图，我们可以选取 $\varepsilon_{\alpha(i)} := (-1)^i$ 作为 $i \neq 8$，并选取 $\varepsilon_{\alpha(8)} := -1$。

不难验证以下结论。

9.4. 引理。作为一个 R-模，A 有一个 R-线性基

$$\mathcal{B} := \{e_i \mid i \in Q_0\} \cup \{\alpha_n \mid \alpha \in Q_1,\ 1 \le n < \ell_\alpha\} \cup \{c_\beta \mid \beta \in Q_1^+\}\,. \qquad \square$$

对于任意路径 $p \in \mathcal{B}$，令 $p^*\colon A \to R$ 表示唯一的 R-线性映射，使得对任意 $q \in \mathcal{B}$，有 $p^*(q) = \delta_{pq}$，其中表示克罗内克δ。

每个顶点 $i \in Q_0$ 诱导出一个不可分解的投射 A-模 $P_i := Ae_i$。其极大左子模的交记作 $\mathrm{rad}(P_i)$。对偶双模的左 A-模结构在以下意义下几乎是正则的。

9.5. 命题。存在一个左 A-模同构

$$\vartheta\colon A^\circ := \Big(\bigoplus_{i\in Q_0^r} P_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j\in Q_0^t} \mathrm{rad}(P_j)\Big) \xrightarrow{\sim} \omega_{A/R} = \mathrm{Hom}_R(A, R)\,.$$

更确切地说，ϑ 是唯一满足以下条件的左 A-线性映射

$$e_i \longmapsto c^*_{\beta(i)} \text{ for any } i \in Q_0^r, \quad \text{and} \quad \gamma(j) \longmapsto -(c_{\gamma(j)}\partial)^* \text{ for any } j \in Q_0^t$$

其中，$\beta(i)$ 表示 Q_1^+ 中起始于 i 的唯一箭，而 $\gamma(j)$ 表示起始于 j 的唯一箭。

证明。首先，我们计算 ϑ 在 $i \in Q_0^r$ 的 P_i 的一个 R-线性基上的取值。令 $c_i := c_{\beta(i)}$。对于任意 $p \in \mathcal{B}$，有 $\vartheta(pe_i) = p\cdot\vartheta(e_i) = p\cdot c_i^* = c_i^*(\_p) = \sum_{q\in\mathcal{B}} c_i^*(qp)\, q^*$. 可以证明，$c_i^*(qp) \neq 0$ 当且仅当 $qp = c_i^2$ 或 c_α，其中箭头 α 起始于 i。在这种情况下，分别有 $c_i^*(qp) = c$ 或 ε_α。由此可得$\vartheta(e_i) = e_i\cdot\vartheta(e_i)$，对于 $i \in Q_0^r$，有 $\vartheta(c_i) = e_i^* + c\,c_i^*$，并且对于任意 $\alpha \in Q_1\backslash Q_1^t$ 和 $1 \le n < \ell_\alpha$，有 $\vartheta(\alpha_n) = \varepsilon_\alpha(c_\alpha\partial^n)^*$。

接下来，对于 $j \in Q_0^t$，我们描述 ϑ 在 $\mathrm{rad}(P_j)$ 上的一个 R-线性基。设 $\gamma := \gamma(j)$。对于任意的 $p, q \in \mathcal{B}$，有 $(c_\gamma\partial)^*(qp) \neq 0$ 当且仅当 $qp = c_\gamma\partial$；这仅在 $p = e_{t(\gamma)}$ 或 $\sigma(\gamma)_n$ 且满足 $1 \le n < \ell_\gamma$ 时才可能发生。通过与前一种情形类似的论证，可得 $e_{t(\gamma)}\cdot\vartheta(\gamma) = \vartheta(\gamma)$，$\vartheta(\gamma_n) = \sigma(\gamma)_{n-1}\cdot\vartheta(\gamma) = -(c_\gamma\partial^n)^*$ 对于 $1 < n < \ell_\gamma$ 成立，且 $\vartheta(c_\gamma) = c_\gamma\partial\cdot\vartheta(\gamma) = -e_j^*$。这也表明 ϑ 定义良好。

令 $\psi\colon \omega_{A/R} \to A^\circ$ 为唯一的 R-线性映射，使得对于 $i \in Q_0^r$，有 $e_i^* \mapsto c_{\beta(i)} - ce_i$；对于 $j \in Q_0^t$，有 $e_j^* \mapsto -c_{\gamma(j)}$；对于 $\beta \in Q_1^+$，有 $c_\beta^* \mapsto e_{s(\beta)}$；并且对于 $\alpha \in Q_1$ 和 $1 \le n < \ell_\alpha$，有 $\alpha_n^* \mapsto \varepsilon_{\sigma^n(\alpha)}c_\alpha\partial^n$。可以验证，$\psi$ 是映射 ϑ 的逆映射。$\square$

9.6. 为了描述 $\omega_{A/R}$ 的右 A-模结构，我们还需要一些概念。令 $\nu := \widehat{\nu_\varepsilon}\colon A \to A$ 为唯一 k-代数态射 $\nu_\varepsilon\colon kQ/I \to kQ/I$ 的完备化，使得对任意 $i \in Q_0$，$e_i \mapsto e_i$，且对任意 $\alpha \in Q_1$，$\alpha \mapsto \varepsilon_{\sigma(\alpha)}\varepsilon_\alpha\alpha$。特别地，$(Q, I)$ 中的每条路径 p 都与 $\nu(p)$ 相差一个符号。

令 A_ν 为一个 A-双模，其左 A-模结构是正则的，右 A-模结构则由 ν 扭曲，也就是说，对任意 $x \in A_\nu$ 和 $a \in A$，我们设 $x\cdot_\nu a := x\,\nu(a)$。令 A_ν° 为 A_ν 的子双模，由满足 $i \in Q_0^r$ 的幂等元 e_i 以及箭 $\gamma \in Q_1^t$ 生成。这个扭曲双模就是对偶双模。

9.7. 定理。左侧的 A-线性同构 $\vartheta\colon\ A_\nu^\circ \xrightarrow{\sim} \omega_{A/R}$ 是 A-双线性的。

证明。对于任意顶点 $i \in Q_0^r$，定义 $c_i := c_{\beta(i)}$，其中 $\beta(i)$ 是 Q_1^+ 中起点为 i 的箭。固定 $i \in Q_0^r$ 和 $p \in \mathcal{B}$。令 $h := s(p)$。
– 若 $t(p) \neq i$，则有 $\vartheta(e_i)\,p = 0 = \vartheta(e_i\cdot_\nu p)$。– 假设 $t(p) = i$。顶点 h 的类型导致以下几种情况。

– 假设 $h \in Q_0^r$。对于任意 $q \in \mathcal{B}$，可以验证 $c_h^*(q\,\nu(p)) = c_i^*(pq)$。因此，$\vartheta(e_i \cdot_\nu p) = \vartheta(\nu(p)\,e_h) = c_h^*(-\nu(p)) = \sum_{q\in\mathcal{B}} c_h^*(q\,\nu(p))\ q^* = c_i^*(p-) = \vartheta(e_i)\ p$。– 否则，$h \notin Q_0^r$。那么，对于一条箭 $\alpha \in Q_1^t$，$p = \alpha_n$，且 $1 \le n < \ell_\alpha$。等式 $c_i^*(p(c_\alpha\partial^n)) = \varepsilon_{\sigma^n}(\alpha)$ 蕴含 $\vartheta(e_i \cdot_\nu p) = -\varepsilon_{\sigma^n}(\alpha)\,\vartheta(\alpha_n) = \varepsilon_{\sigma^n}(\alpha)\,(c_\alpha\partial^n)^* = \sum_{q\in\mathcal{B}} c_i^*(p\,q)\,q^* = c_i^*(p-) = \vartheta(e_i)p$。

令 $\gamma \in Q_1^t$。置 $j := s(\gamma)$ 以及 $\varepsilon := \varepsilon_{\sigma(\gamma)}$。对于任意 $p \in \mathcal{B}$，若 $t(p) \neq j$ 且 $\vartheta(\gamma \cdot_\nu e_j) = \vartheta(\gamma) = \vartheta(\gamma)\,e_j$，则有 $\vartheta(\gamma \cdot_\nu p) = 0 = \vartheta(\gamma)\cdot p$。此外，对于任意 $1 < n < l_\alpha$ 以及 $\vartheta(\gamma\cdot_\nu c_\gamma\partial) = -e^*_{t(\gamma)} - \delta_{\varepsilon,\ +}\, c\, c^*_{\sigma(\gamma)} = \vartheta(\gamma)\cdot c_\gamma\partial$，可以计算得到 $\vartheta(\gamma \cdot_\nu c_\gamma\partial^n) = -\sigma(\gamma)_{n-1} = \vartheta(\gamma)\cdot c_\gamma\partial^n$。由于 ϑ 是 R-线性的，结论得证。□

该定理给出了文中所述范畴 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 的相对 Serre 函子的明确描述，参见 7.9。下面我们不需要定理9.7 的精确表述，只需使用其近似版本。

9.8. 推论. 对于任意由投射 A-模构成的复形 P，复形 $\omega_{A/R}\otimes_A P$ 可通过以下方式得到：将 P 中每个不可分解模 P_j 替换为其根基 $j \in Q_0^t$，并对每个微分中的每条路径施加某种符号变换。□

在下面的应用中，符号变换不会影响同构类。

10. Singularity categories of gentle Gorenstein algebras

与上一节一样，我们研究温和箭图的路径代数的箭头理想完备化 A，其中每个箭都位于一个容许圈上，并将 A 视为一个 R-代数，其环为 $R = k[\![c]\!]$，通过结构映射 (9.2) 给出。

本节中，我们给出奇点范畴的描述$\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(A)$，见定理 10.13。这是 Kalck 关于有限维温和代数结果的一个类似结论 [47]。由此得到的 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(A)$ 的描述，也可由 Bennett-Tennenhaus 的工作通过对等价的无环投射复形同伦范畴中的不可分解对象进行分类而得出 [10]；或者利用 Burban 和 Drozd 在 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 这一更大的范畴中所采用的技术 [18] 以及 [19]。

我们的方法建立在序上的格的表示论之上。一个关键点是，推论9.8 允许计算非投射 A-格的 Auslander-Reiten 平移。在确定了 A-格的整个 Auslander-Reiten 箭图之后，我们将沿着范畴链转换分类结果

$$\operatorname{lat}(A) \longleftarrow \operatorname{mCM}(A) \longrightarrow \underline{\operatorname{mCM}}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)\,.$$

对于其他具有易于处理的格范畴（例如表示有限型范畴）的戈伦斯坦代数，这一方法或许也很有用。

格的 Auslander-Reiten 理论。令 $\operatorname{lat}(A)$ 表示有限生成 A-模的满子范畴，其中的模是自由的，或者等价地，按照 7.2 的意义，它们是 R 上的极大 Cohen–Macaulay R-代数 A上的格。为避免与后文的极大 Cohen–Macaulay A-模这一概念混淆，我们将采用后一个术语。

10.1. 根据 [4, 命题 I.7.3], ，存在一个正合对偶

$$(-)^* := \operatorname{Hom}_R(-,R)\colon \operatorname{lat}(A^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{lat}(A)\,.$$

此外，存在一个函子同构

$$\mathrm{Hom}_A(-,A)^* \cong \omega_{A/R}\otimes_A - \colon \mathrm{proj}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{inj}\,\mathrm{lat}(A) \tag{10.2}$$

从而得到有限生成投射A-模范畴与A-格正合范畴中的内射对象全子范畴之间的等价。

引理 8.3 (3) 表明 A 是一个有限秩自由 R-代数，使得 $Q(R)$-代数$A\otimes_R Q(R)$ 是半单的。由此得到以下推论。

10.3. 引理。在上述设定中，以下陈述成立。

(1) A-模 L 是 A-格，当且仅当存在一个 A-线性嵌入，将 L 嵌入有限生成的投射 A-模中。(2) 对任意有限生成的 A-模 M 和 N 以及任意整数 $i>0$，R-模 $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ 是一个挠模。

第一个结论由 [21, Exercise 23.1], 所知；第二个结论由 [21, Proposition 25.5] 的证明可得。为求完整起见，我们给出论证。

证明。在下文中，$Q(R)$ 简记为 Q。

(1) 假设 L 是一个 A-格。由于 $A\otimes_R Q$ 是自内射的，$L\otimes_R Q$ 可嵌入 $(A\otimes_R Q)^n$，其中某个 $n\geq 0$。令 ι 表示以下 A-线性复合

$$L \xhookrightarrow{\eta_L} L\otimes_R Q \hookrightarrow (A\otimes_R Q)^n \xrightarrow{\sim} A^n\otimes_R Q\,.$$

令 x_1、$x_2\ldots x_m$ 为 L 的生成元。对于任意 $1\leq i\leq m$，我们可将 $\iota(x_i)$ 写成 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^{\ell_j} a_{ijk}\otimes_R \frac{r_{ijk}}{s_{ijk}}$。令 s 为所有分母 s_{ijk} 的乘积。由于 $\iota(Ls)\subseteq \mathrm{Im}\ \eta_{A^n}$，存在一个 A-线性嵌入，将 $L\cong Ls$ 嵌入 A^n 中。

反之，由于 A 是戴德金整环 R 上的有限生成投射模，范畴 $\mathrm{lat}(A)$ 包含 $\mathrm{proj}(A)$，并且对子模封闭。

(2) 在上述记号下，$A\otimes_R Q$ 的半单性意味着

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\otimes_R Q \cong \mathrm{Ext}^i_{A\otimes_R Q}(M\otimes_R Q, N\otimes_R Q) = 0\,. \qquad \square$$

更重要的是，范畴 $\mathrm{lat}(A)$ 根据 Auslander [4]的结果存在几乎分裂序列。下述结论允许利用代数 $\omega_{A/R}$ 的对偶双模 A来计算这些序列。

10.4. 命题。设 L 是一个非投射的 A-格。取一个投射覆盖$\pi\colon P_1\twoheadrightarrow L$，以及一个 A-线性单态射 $\iota\colon L\hookrightarrow P_0$ 到一个有限生成投射 A-模中。那么存在一个A-格的同构 $\tau(L)\cong \mathrm{Ker}(\omega_{A/R}\otimes_A \partial_1)$，其中 ∂_1 表示复合 $\iota\pi\colon P_1\longrightarrow P_0$。

证明。将 $(-,A):=\mathrm{Hom}_A(-,A)$ 应用于 L 的极小投射表示

$$P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

可得一个 A^{op}-模的正合列

$$0\longrightarrow (L,A)\xrightarrow{(\pi,A)}(P_1,A)\xrightarrow{(\partial_2,A)}(P_2,A)\longrightarrow \mathrm{Tr}(L)\longrightarrow 0$$

带有 $\mathrm{Tr}(L):=\mathrm{Coker}\,(\partial_2,\ A)$ 和 $\Omega(\mathrm{Tr}(L))\cong\mathrm{Coker}(\pi,\ A)$。根据 [4, 命题 I.8。8] Auslander-Reiten 平移 L 由下式给出

$$\tau(L):=(\Omega(\mathrm{Tr}(L)))^*=\mathrm{Ker}((\pi,A)^*)\,,\qquad \text{where } (-)^*:=\mathrm{Hom}_R(-,R)\,.$$

由于 $\Omega(\mathrm{Tr}(L))$ 嵌入到一个 A^{op}-格中，它本身也是一个 A^{op}-格，因此 $(\pi, A)^*$ 是满射。引理 10.3 保证存在一个嵌入 $\iota\colon L \hookrightarrow P_0$，并表明 $\mathrm{Coker}(\iota, A) = \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Coker}\,\iota, A)$ 是 R 上的挠对象。因此 $(\mathrm{Coker}(\iota, A))^*$ 为零，从而 $(\iota, A)^*$ 是单射。

因此存在一个行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau(L) & \longrightarrow & (P_1, A)^* & \xrightarrow{(\pi,A)^*} & (L, A)^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{P_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{P_0}\cdot(\iota,A)^*} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\omega_{A/R}\otimes_A \partial_1) & \longrightarrow & \omega_{A/R}\otimes_A P_1 & \xrightarrow{\omega_{A/R}\otimes_A\partial_1} & \omega_{A/R}\otimes_A P_0 & & \end{array}$$

其中 η_{P_1} 和 η_{P_0} 是函子同构（10.2）的特化。蛇引理蕴含所诱导的 A-线性映射 ϕ 是双射。□

从顶点和箭到格。虽然上一小节的陈述可推广到更一般的情形，但下面的结果涉及关于温和戈伦斯坦 R-代数 A 上格的具体组合性质。

由（10.2）可知，每个顶点 $j \in Q_0$ 都对应一个不可分解投射 A-模 $P_j = Ae_j$ 以及一个不可分解的 A-格

$$I_j := \omega_{A/R}\otimes_A P_j \cong \begin{cases} \mathrm{rad}(P_j) & \text{if } j \text{ is a transition vertex,} \\ P_j & \text{if } j \text{ is 2-regular,} \end{cases}$$

其中最后一个同构是推论9.8的一个特例。

Q 的箭也会产生具有适度性质的格。按照前面的记号，对于一个 A-格 L，我们用 $\mathrm{End}_A(L)$ 表示 A-线性自同态模去那些可经由投射 A-模分解的自同态所成的理想后的商。

10.5. 引理. 对任意箭 $\alpha \in Q_1$，以下陈述成立。

(1) 左理想 $L_\alpha := A\alpha$ 是一个不可分解的 A-格。(2) 对任意箭 $\beta \in Q_1$，任意非同构 $f\colon L_\beta \to L_\alpha$ 都可经由投射覆盖 $\pi\colon P_{t(\alpha)} \to L_\alpha$, $p \mapsto p\alpha$ 分解。(3) 有 $\mathrm{End}_A(L_\alpha) \cong R$ 且 $\mathrm{End}_A(L_\alpha) \cong k$。(4) 格 L_α 是投射的，当且仅当 $t(\alpha)$ 是一个过渡顶点。

证明. 这些结论是以下观察的推论。

(1) 范畴 $\mathrm{lat}(A)$ 对子模封闭。(2) 映射 f 由 $f(\beta) \in e_{t(\beta)}A\alpha$ 右乘给出。(3) 若 $\alpha = \beta$，则有 $f(\alpha) \in k[\![c_\alpha]\!]$。(4) 满态射 π 当且仅当 $\mathrm{Ker}\,\pi = 0$ 时分裂。

□

接下来，我们计算 Auslander-Reiten 平移 τ 在所有非投射箭理想上的作用。

10.6. 引理。设 $\alpha \in Q_1$ 满足 $t(\alpha)$ 不是过渡顶点。令 $\varrho(\alpha)$ 表示 (Q, I) 中唯一满足 $s(\varrho(\alpha)) = t(\alpha)$ 且 $\varrho(\alpha)\alpha \in I$ 的箭。那么序列

$$0 \longrightarrow L_{\varrho(\alpha)} \longrightarrow P_{t(\alpha)} \xrightarrow{\pi} L_\alpha \longrightarrow 0 \tag{10.7}$$

是 A-格范畴中的一个几乎分裂序列。因此 $\tau(L_\alpha) \cong L_{\varrho(\alpha)} \cong \Omega(L_\alpha)$。

证明。 由于 $t(\alpha)$ 是 2-正则的，箭 $\beta := \varrho(\alpha)$ 定义良好，并且 L_α 是一个非投射的 A- 格，由引理 10.5 得出。（Q, I）中的关系给出 $\operatorname{Ker}\pi = L_\beta$。由于投射覆盖 π: $P_{t(\alpha)} \twoheadrightarrow L_\alpha$ 与嵌入$L_\alpha \hookrightarrow P_{s(\alpha)}$ 的复合由右乘 α给出，命题10.4 和推论9.8 推出

$$\tau(L_\alpha) \cong \operatorname{Ker}(\omega_{A/R} \otimes_A \partial_1) \cong \operatorname{Ker}(P_{t(\alpha)} \xrightarrow{\cdot(\pm\alpha)} I_{s(\alpha)}) \cong L_\beta \cong \Omega(L_\alpha)\,.$$

Auslander-Reiten 公式表明，$\operatorname{Ext}^1_A(L_\alpha, \tau(L_\alpha)) \cong \operatorname{End}_A(L_\alpha)^\vee \cong k$。这意味着，任何非分裂正合列 $0 \to \tau(L_\alpha) \to E \to L_\alpha \to 0$ 上的A-格，以及（10.7）都是几乎分裂的。□

最后一个引理表明，可以计算箭理想的投射分解。

10.8。任意一支箭 $\alpha \in Q_1$ 都是唯一一条路径 d_α 的起始部分：$= \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$，该路径在 8.5 中引入，并由此确定 L_α 的投射分解如下。

(1) 若 d_α 是微分圈，则 L_α 的投射分解是周期性的：

$$\dots P_{t(\alpha_1)} \xrightarrow{\cdot\alpha_1} P_{t(\alpha_n)} \xrightarrow{\cdot\alpha_n} \dots P_{t(\alpha_3)} \xrightarrow{\cdot\alpha_3} P_{t(\alpha_2)} \xrightarrow{\cdot\alpha_2} P_{t(\alpha_1)}$$

(2) 否则， d_α 是微分游走，且 L_α 的投射分解是有限的：

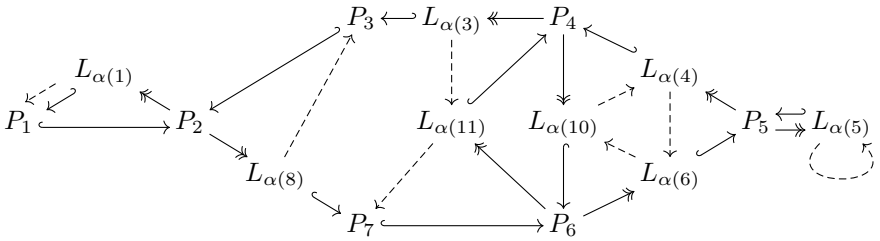
$$\dots 0 \longrightarrow P_{t(\alpha_n)} \xrightarrow{\cdot\alpha_n} \dots P_{t(\alpha_3)} \xrightarrow{\cdot\alpha_3} P_{t(\alpha_2)} \xrightarrow{\cdot\alpha_2} P_{t(\alpha_1)}$$

将上同调核加入箭理想和某些根嵌入的投射分解中，可得到范畴 $\mathsf{lat}(A)$ 的完整图景。特别地，任何不可分解的 A-格要么是投射的，要么是一个箭理想。

10.9.命题。 -格的 Auslander-Reiten 箭图 由以下形式的上同调核序列 (10.7)以及包含映射 $\operatorname{rad}(P_j) \hookrightarrow P_j$ 给出，其中每个过渡顶点 j 属于 Q_0。

证明。为简化表述，假设箭图 Q 是连通的。(Q, I) 中的每个微分圈都会在 Auslander-Reiten 箭图 $\Gamma_{\mathsf{lat}(A)}$中诱导出一个周期性的 τ-轨道。过渡顶点之间的每个微分游走都会产生一个完整的有限 τ-轨道。通过不可分解投射模的根嵌入和投射覆盖补全这些轨道，可得到箭图$\Gamma_{\mathsf{lat}(A)}$的一个完整连通分支 $\mathcal{C}$。
Wiedemann [72] 的一个结果蕴含 $\mathcal{C} = \Gamma_{\mathsf{lat}(A)}$。□

10.10.例。 例 A-格的 Auslander-Reiten 箭图 9.3 有三个有限轨道和两个周期轨道 τ，以虚线箭头标示：



10.11. 注。 也可以应用 Drozd–Kiriˇcenko 排斥引理[23] (另见 [22]) 来推导命题 10.9。或者，可以利用 A 的研究来确定不可分解 [38] 或 [65] 关于 $B\ddot{}ackstr\ddot{}$ om 序，然后通过 Roggenkamp 的方法计算它们的 Auslander-Reiten 箭图 [68]。

极大 Cohen–Macaulay 模与奇点范畴。 根据引理 7.4，我们可以将 极大 Cohen–Macaulay A-模 定义为 A-格M ，满足 $\operatorname{Ext}^i_A(M,A) = 0$ 对 $i \geq 1$成立。与第 7 节一样，我们用 mCM(A) 表示这类模的稳定范畴。

在 10.8 中计算的投射分解可用于证明以下结果。

10.12. 引理。箭 $\alpha \in Q_1$ 出现在微分循环中，当且仅当其左理想 L_α 是一个非投射的极大 Cohen–Macaulay A-模。□

根据命题 8.4 和 8.6， A 是一个戈伦斯坦 R-代数。此外，引理 8.3 (3) 表明， A 具有孤立奇点。特别地， A 的对偶双模根据定理 7.8，在 A上诱导出一个 Serre 函子。

10.13. 定理。温和戈伦斯坦 R-代数 A的奇点范畴 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 有如下描述。

(1) Q 中所有出现在微分循环中的箭 Q_1^{dc}的集合，与范畴 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 中不可分解对象的同构类集合之间存在一个双射，给出为

$$Q_1^{dc} \xrightarrow{\sim} \operatorname{ind} \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)\,, \qquad \alpha \longmapsto L_\alpha\,,$$

其中，每个箭理想 L_α 都视为 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 中的一个对象。

(2) 对任意 $\alpha, \beta \in Q_1^{dc}$，都有 $\dim_k \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)}(L_\alpha, L_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$。

(3) 对任意箭 $\alpha \in Q_1^{dc}$，都有同构

$$\omega_{A/R} \otimes^{\mathrm{L}}_A L_\alpha \cong L_\alpha \quad \textit{and} \quad \Sigma^{-1}(L_\alpha) \cong L_{\varrho(\alpha)} \textit{ in } \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)\,,$$

其中， $\varrho(\alpha)$ 表示唯一满足 $s(\varrho(\alpha)) = t(\alpha)$ 且 $\varrho(\alpha)\alpha \in I$ 的箭。

证明。 (1) 命题 10.9 和引理 10.12给出了前三个范畴中所有不可分解对象在同构意义下的描述:

$$\operatorname{lat}(A) \longleftarrow \operatorname{mCM}(A) \longrightarrow \underline{\operatorname{mCM}}(A) \xrightarrow[\text{Thm.7.6}]{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)\,.$$

(2) 可结合上图以及引理 10.5 (2) 和 (3) 得出。

(3) 由于 $\omega_{A/R} \otimes^{\mathrm{L}}_R -$ 在 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 上诱导了 Serre 函子，前面的陈述（2）给出了第一个同构。第二个同构由引理 10.6以及 mCM(Σ) 上的移位函子 A与 Ω^{-1} 同构这一事实得出（例如，参见 [51, 定理 6.2。5]）。□

正如 Kalck 对有限维温和代数的观察所示， [47], 半单范畴 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 仍然包含一些有用的同调信息：其移位轨道的数量和长度。特别地，任意两个导出等价的温和 Gorenstein 代数具有相同数量和长度的微分圈。

10.14.例。例 9.3 中的箭图的奇点范畴由 $L_{\alpha(4)}$ 的移位轨道给出，该轨道长度为三，并且有移位不变对象$L_{\alpha(5)}$。

10.15. 注。任何温和箭图都会产生一个嵌入定向曲面的图，并带有某些附加数据。在这一背景下，温和箭图的微分循环可以视为其嵌入图的某些面。

在 [59] Palu、Pilaud 和 Plamondon 提供了局部温和箭图这一更一般的类别与某些定向

曲面上的嵌入图之间的显式双射。两个温和箭图的 Koszul 对偶会转化为其相关图之间一种自然的对偶关系，参见 [57] 和 [59]。

Amiot、Plamondon 和 Schroll [2] 以及 Opper [56] 利用由 Opper、Plamondon 和 Schroll [57]所完善的相应曲面的几何模型，对有限维温和代数的导出等价类进行了分类。关于温和代数的更全面概述，请参阅其中的引言。

致谢。我们谨向 Ragnar-Olaf Buchweitz 致以谢意，感谢他在学术思想上的启发；他开创性的专著[17] 是本项目的重要灵感来源。该著作的座右铭“受交换代数指引，但不为其所引领”，也完全可以作为 [46] 和本文的副标题。我们感谢合作者 Luchezar Avramov、Dave Benson、John Greenlees 和 Julia Pevtsova，感谢他们慷慨分享关于戈伦斯坦现象与对偶的见解。我们还要感谢 Janina Letz 对本文早期版本提出的意见和修正。作者衷心感谢匿名审稿人对本文提出的重要修正以及在行文阐述方面给出的宝贵建议。第一作者谨向波鸿鲁尔大学代数研究组致谢，感谢他们提供了富有启发性的研究环境。第二作者感谢 ICRA研讨会的组织者给予在该论坛上展示这项工作的机会，也感谢本卷的编辑们给予的耐心。

资助。WG 在撰写本文期间获得波鸿鲁尔大学的全额资助。SBI 部分获得 NSF资助项目DMS-2001368 的资助。

References

[1] H. Abe 和 M. Hoshino，导出等价与戈伦斯坦代数，《纯粹与应用代数杂志》211 (2007)，第 1 期，55–69。 ↑ 15, 16。[2] C. Amiot、P.-G. Plamondon 和 S. Schroll，通过绕数和 Arf 不变量得到温和代数的一个完备导出不变量，预印本 2019年， arXiv:1904.02555。 ↑ 31。[3] I. Assem 和 A. Skowro ´ n **195** 1987 2, nski，类 269 290 ↑ 20 型为 ˜A 的迭代倾斜代数，《数学杂志》 ( )，第 – 期，页码 .。[4] M. Auslander，由对象确定的函子与态射，载于 *Representation theory of algebras (Proc. Conf., Temple Univ., Philadelphia, Pa., 1976)* 1 244 ，–。纯粹与应用数学讲义，37，Dekker，纽约，1978年。 ↑ 1, 19, 26, 27。[5] M. Auslander 和 I. Reiten，Cohen–Macaulay 与 Gorenstein Artin代数，载于 *Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Bielefeld, 1991)* 221 245, ，–。《数学进展丛书》，95，Birkh¨auser，巴塞尔，1991年。 ↑ 1, 19。[6] L. L. Avramov 和 S. B. Iyengar，Noether代数上的同调维数，作为附录载于 *Support varieties and modules of finite projective dimension for modular Lie superalgebras*，《代数与数论》15 (2021)，第 5 期。 ↑ 5。[7] L. L. Avramov、S. B. Iyengar 和 J. Lipman，复形的反身性与刚性。I. 交换环。《代数与数论》4 (2010)，第 1 期，47–86。↑ 5。[8] H. Bass，Gorenstein环的普遍性，《数学杂志》82 (1963)，8–28。 ↑ 1, 2。[9] H. Bass， *Algebraic K-theory*，W. A. Benjamin, Inc.，纽约-阿姆斯特丹，1968年。↑ 4, 5。[10] R. Bennett-Tennenhaus，温和代数的半完备推广的函子滤过，博士论文，利兹大学，2017年， http://etheses.whiterose.ac.uk/19607/ ↑ 26。[11] D. J. Benson、S. B. Iyengar 和 H. Krause，三角范畴的局部上同调与支撑，《高等师范学院科学研究所年刊》 ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 41 (2008)，第 4 期，573–619。↑ 16。[12] D. J. Benson、S. B. Iyengar 和 H. Krause，三角范畴的分层，《拓扑学杂志》4 (2011)，第 3 期，641–666。 ↑ 6。[13] D. J. Benson、S. B. Iyengar、H. Krause 和 J. Pevtsova，有限群概形表示的局部对偶，《组合数学》155 (2019)，第 2 期，424–453。 ↑ 1, 20。

[14] D. J. Benson、S. B. Iyengar、H. Krause 和 J. Pevtsova，有限维戈伦斯坦代数的奇点范畴的局部对偶，名古屋数学杂志 244，(2021)，1–24。↑1, 20。[15] D. J. Benson、S. B. Iyengar、H. Krause 和 J. Pevtsova，群表示的纤维分层，预印本 2022年， arXiv:2204.10431v3。↑5。[16] W. Bruns 和 J. Herzog， *Cohen–Macaulay rings*，《剑桥高等数学研究》，39，（第二版）剑桥大学出版社，剑桥，1998年。↑2, 3, 17。[17] R.-O. Buchweitz，极大 Cohen–Macaulay 模与 Tate上同调，《数学调查与专著》，262，美国数学会，2021年；
https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/16682 的出版版本，附录由 L. L. Avramov、B. Briggs、S. B. Iyengar 和 J. C. Letz 撰写。↑1, 17, 19, 31。[18] I. Burban 和 Yu. A. Drozd，节点代数的导出范畴，《代数杂志》272 (2004)，第 1 期，46–94。↑21, 26。[19] I. Burban 和 Yu. A. Drozd，温和代数与斜温和代数的导出范畴：同调代数与矩阵问题，预印本 2017年，
arXiv:1706.08358 ↑21, 26。[20] I. Burban 和 Yu. A. Drozd，非交换节点曲线与导出驯性代数，预印本 2019年， arXiv:1805.05174 ↑21。[21] C. W. Curtis 和 I. Reiner，
Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders. 1981
重印本。威利经典图书馆。威利-因特科学出版社。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1990年。↑27。[22] Yu. A. Drozd，排斥引理与几乎分裂序列，《乌克兰数学杂志》73:6 (2021)，780–798。↑29。[23] Yu. A. Drozd 和 V. V. Kiriˇcenko，关于拟巴斯序。《苏联科学院通报：数学辑》36 (1972)，328–370。↑29。[24] W. G. Dwyer、J. P. C. Greenlees 和 S. Iyengar，代数与拓扑中的对偶，《数学进展》200 (2006)，第 2 期，357–402。↑17。[25] F. Eisele， p-进提升问题与导出等价。《代数杂志》356 (2012)，90–114。↑11。[26] F. Eisele，silting 复形与导出皮卡群的双射，《伦敦数学会杂志》(2) 106 (2022)，1008–1060。↑11, 12。[27] K. Erdmann、M. Holloway、N. Snashall、Ø. Solberg 和 R. Taillefer，自内射代数的支撑簇， K-理论 33 (2004)，第 1 期，67–87。↑16。[28] E. Formanek，忠实诺特模。《美国数学会会刊》41 (1973)，381–383。↑16。[29] R. Fossum、H.-B. Foxby、P. Griffith 和 I. Reiten，极小内射分解及其在对偶化模与戈伦斯坦模中的应用。《高等科学研究所数学出版物》45 (1975)，193–215。↑2, 17。[30] H.-B. Foxby，平坦模的有界复形。《纯粹与应用代数杂志》15 (1979)，149–172。↑7。[31] A. Frankild 和 P. Jørgensen，戈伦斯坦微分分次代数。《以色列数学杂志》135 (2003)，327–353。↑17。[32] P. Gabriel，阿贝尔范畴，《法国数学会通报》90 (1962)，323–448。↑3, 4。[33] Ch. Geiß 和 I. Reiten，温和代数是戈伦斯坦代数，载于 *Representations of algebras and related topics* 129 133, 45, 2005 ，–
菲尔兹研究所通讯，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，.。↑23。[34] V. Ginzburg，卡拉比-丘代数，预印本 2006年， arXiv:math/0612139 ↑20。[35] W. Gnedin，带状图序的卡拉比-丘性质，预印本 2019 arXiv:1908.08895 ，。
↑24
[36] W. Gnedin，换环下的倾斜理论，预印本 2022年， arXiv:2204.00608 ↑12。[37] S. Goto， $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$的消失，《京都大学数学杂志》22 (1982/83年)，第 3 期，481–484。↑3。[38] E. L. Green 和 I. Reiner，整表示与图表。《密歇根数学杂志》25 (1978)，第 1 期，53–84。↑29。[39] E. L. Green 和 D. Zacharia，单项式代数的上同调环。《数学手稿》85 (1994)，第 1 期，11–23。↑21。[40] D. G. Higman，关于序的同构，《密歇根数学杂志》6 (1959年)，255–257。↑11。[41] M. J. Hopkins，同伦论中的整体方法，载于 *Homotopy Theory (Durham 1985)*，73 117, 96, 1987 – 伦敦数学会讲义系列，剑桥大学出版社，剑桥，.。↑7。

[42] A. Hubery 和 H. Krause, 《非交叉划分的一种范畴化》, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18 (2016), no. 10, 2273–2313. ↑ 7. [43] C. Ingalls 和 H. Thomas, 《箭图的非交叉划分与表示》, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562. ↑ 7. [44] O. Iyama 和 Y. Kimura, 《诺特代数上模子范畴的分类》, 预印本 2021, arXiv:2106.00469 ↑ 10. [45] O. Iyama 和 I. Reiten, 《卡拉比-丘代数上的 Fomin-Zelevinsky 变异与倾斜模》。Amer. J. Math. 130 (2008), no. 4, 1087–1149. ↑ 11, 16, 20. [46] S. B. Iyengar 和 H. Krause, 《戈伦斯坦代数的中山函子及其完备化》, 《法国数学会通报》150 (2022), no. 2, 347–391. ↑ 1, 2, 6, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20 31, . [47] M. Kalck, 《温和代数的奇异范畴》, Bull. Lond. Math. Soc.

47 2015 1, ( ), 65 74 ↑ 26 30
no. – . , . [48] B. Keller, 《DG 范畴的导出》, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 1, 63–102. ↑ 8. [49] B. Keller, 《卡拉比-丘三角范畴》, 载于 *Trends in representation theory of algebras and related topics* 467 489, ¨ 2008 ↑ 20 , –
EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, . . [50] S. K
¨
24 1996 6, 1897 1913 ↑ 8
onig 和 A. Zimmermann, 《倾斜遗传序》, Comm. Algebra ( ), no. – . . [51] H. Krause, *Homological theory of representations*, 《剑桥高等数学研究》, 剑桥大学出版社, 195, 剑桥, 2022年。↑ 6, 9, 12, 14, 15, 19, 23, 30. [52] S. Ladkani, 《闭曲面上的雅可比代数》, 预印本 2012, arXiv:1207.3778 ↑ 24. [53] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, 《数学研究生教材》, 131。施普林格出版社, 纽约, 1991年。↑ 5, 11. [54] M. Nagata, *Local rings*, 修订再版, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1975年。↑ 3. [55] A. Neeman, $D(R)$ 的色塔, Topology 31, no. 3, (1992), 519–532. ↑ 6, 7. [56] S. Opper, 《温和代数的自等价与完备导出不变量》, 预印本 2019, arXiv:1904.04859 ↑ 31. [57] S. Opper、P.-G. Plamondon 和 S. Schroll, 《温和代数导出范畴的几何模型》, 预印本 2018, arXiv:1801.09659 ↑ 31. [58] D. O. Orlov, 《奇异三角范畴与 Landau-Ginzburg 模型中的 D-膜》, Proc. Steklov Inst. Math. 2004, no. 3(246), 227–248; 译自 Tr. Mat. Inst. Steklova 246 (2004), Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 240–262. ↑ 19. [59] Y. Palu、V. Pilaud 和 P.-G. Plamondon, 《局部 gentle 代数的非吻合与非交叉复形》, J. Comb. Algebra 3 (2019), no. 4, 401–438. ↑ 30, 31. [60] I. Reiten 和 M. Van den Bergh, 《满足 Serre对偶的诺特遗传阿贝尔范畴》, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 295–366. ↑ 19. [61] J. Rickard, 《导出范畴的莫里塔理论》。J. London Math. Soc. (

2 **39** 1989 3,) ( ), 436 456 ↑ 8
no. – . . [62] J. Rickard, 《作为导出函子的导出等价》。J. London Math. Soc. (2) 43 (1991), no. 1, 37–48. ↑ 8. [63] J. Rickard, 《倾斜复形的提升定理》。J. Algebra 142 (1991), no. 2, 383–393. ↑ 10. [64] J. Rickard, 《有限群模表示论中的三角范畴》, 载于 *Derived equivalences for group rings*, 177–198, 数学讲义, 1685, Springer, 柏林, 1998. ↑ 11. [65] C. M. Ringel 和 K. W. Roggenkamp, 《序表示论中的图示方法》, J. Algebra 60 (1979), no. 1, 11–42. ↑ 29. [66] P. Roberts, *Homological invariants of modules over commutative rings*, S´数学研讨会´论文集 Sup´erieures, 72, 蒙特利尔大学出版社, 蒙特利尔, 魁北克, 1980年。↑ 3. [67] P. Roberts, 《交定理》, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. ( ), no. – . . [68] K. W. Roggenkamp, 《B¨ackstr¨om 序的 Auslander-Reiten 种》, J. Algebra 85 (1983), no. 2, 449–476. ↑ 29. [69] A. Skowro´nski 和 K. Yamagata, *Frobenius algebras. I. Basic representation theory*. 《EMS 数学教材》, 欧洲数学会 (EMS), 苏黎世, 2011年。↑ 14.

[70] G. Stevenson, 《通过张量三角范畴作用得到的支撑理论》, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 219–254. ↑ 6. [71] M. Van den Bergh, 《非交换保赋解》, 载于 *The legacy of Niels Henrik Abel*, 749 770, 2004 ↑ 20 – Springer, 柏林, . .[72] A. Wiedemann, 《序的 Brauer-Thrall I 及其在 Auslander-Reiten 图中带环的序上的应用》, 载于 *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, 350–357, 数学讲义, 903, Springer, 柏林—纽约, 1981. ↑ 29. [73] A. Zaks, 《半初等环的内射维数》, J. Algebra **13** (1969), 73–86. ↑ 12.

Wassilij Gnedin, Institut für Mathematik, Universität Paderborn, 33098 Paderborn, Germany, gnedin@math.uni-paderborn.deSrikanth B. Iyengar, Department of Mathematics, University of Utah, Salt LakeCity, UT 84112, U.S.A., Srikanth.B.Iyengar@utah.eduHenning Krause, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 33501 Bielefeld,Germany, hkrause@math.uni-bielefeld.de