arXiv:2303.04895v1 [cs.AI] 8 Mar 2023

拓扑斯视角下的形态逻辑：符号人工智能的应用

Marc Aiguier[1], Isabelle Bloch[2], Salim Nibouche[1] 和 Ram´on Pino P´erez[3]

1. MICS，CentraleSupelec，巴黎萨克雷大学，法国 marc.aiguier@centralesupelec.fr 2. 索邦大学，法国国家科学研究中心，LIP6，巴黎，法国 isabelle.bloch@sorbonne-universite.fr 3. CRIL-CNRS，阿尔图瓦大学，法国 pinoperez@cril.fr

摘要

模态逻辑已被证明有助于完成符号人工智能（AI）中的许多推理任务，例如信念修正和空间推理等。另一方面，数学形态学（MM）是一种用于结构非线性分析的理论，已在图像分析中得到广泛发展和应用。其数学基础依托于代数、完备格和拓扑学。数学形态学与数理逻辑（主要是模态逻辑）之间已建立了紧密联系。本文从拓扑斯视角（即对空间进行推广并连接逻辑、集合与拓扑学的范畴结构）出发，进一步发展并推广数学形态学与模态逻辑之间的联系。此外，我们还借助拓扑斯的内语言和内逻辑。我们将结构元素、膨胀和腐蚀定义为态射。随后，我们引入结构邻域的概念，并证明基于结构邻域的膨胀和腐蚀可导出一种构造性模态逻辑，并为其提出一个可靠且完备的证明系统。最后，我们展示了由此定义的模态逻辑（本文称为形态逻辑）非常适合用于定义具体且高效的算子，以实现知识修正、合并、新知识的溯因，乃至空间推理。

关键词：数学形态学、托扑斯、构造模态逻辑、邻域语义。

1 引言

模态逻辑已被证明有助于符号人工智能（AI）中的许多推理任务，例如信念修正、空间推理等。

预印本，提交至《国际近似推理杂志》2023年3月10日

另一方面，数学形态学（MM）是一种用于结构非线性分析的理论，广泛应用于图像分析。在确定性框架下，其数学基础依托于代数、完备格和拓扑学。数学形态学与数理逻辑，尤其是模态逻辑之间，已建立起紧密联系。于是，必要性 $\Box$ 和可能性 $\Diamond$模态分别通过两种基本的数学形态学算子，即腐蚀和膨胀 [19,48,37]来诠释。这种诠释使得非经典推理的表达变得简单，其中包括修正、合并、溯因 [3,4,20,33],和空间推理 [2,5,13]。

腐蚀 ε和膨胀 δ 是数学形态学的两种基本运算，通常根据结构元素 B 定义，用于探测空间结构，并对其进行膨胀或腐蚀。更形式化地说，在集合论情形下，设 E 为一个欧几里得空间（通常为 $\mathbf{R}^d$ 或 $\mathbf{Z}^d$，其中 d 为空间维数）。设 B （结构元素）为 E的子集，并设 $B_x = \{x + b \mid b \in B\}$ 为它在点 $x \in E$处的平移。则集合 X 被结构元素 B 膨胀定义为 $\delta[B](X) = \{x \in E \mid \check{}B_x \cap X \neq \emptyset\}$，其中 $\check{}B$ 表示 B 关于空间原点的对称集；而 X 的腐蚀定义为$\varepsilon[B](X) = \{x \in E \mid B_x \subseteq X\}$。结构元素 B 也可以等价地定义为 E上的一个二元关系，即。

$$B : \begin{cases} E \to \mathcal{P}(E) \\ x \mapsto B_x \end{cases}$$

其中 $\mathcal{P}(E)$ 是 E 的幂集。在此设定下，以下性质成立[1]：

- 腐蚀与交集可交换，并保持 E,
- 膨胀与并集可交换，并保持空集，且
- 由同一结构元素定义的腐蚀和膨胀，是关于补运算的对偶算子。

这一切意味着，腐蚀和膨胀都是模态算子，也就是说，元组 $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, {}^c, \emptyset, E, \varepsilon[B], \delta[B])$是一个模态代数。因此，在这种解释下，模态逻辑是描述空间变换的工具；在此设定中，模态逻辑已被有效应用于符号人工智能 [5,13,16]。

迄今为止，数学形态学（MM）与逻辑之间的这种联系一直是在集合框架中研究的——

[1] 请注意，更一般地说，在数学形态学中，格上的代数腐蚀和膨胀实际上分别定义为与下确界和上确界可交换的运算（即 $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ 中的交集和并集）。这些更一般形式的算子不一定涉及结构元素。因此，前两项性质在更一般的设定下更像是定义。

（并扩展至模糊集）。此后，数学形态学（MM）已扩展到一大类代数结构，例如图 [27,28,46,62]，超图 [17,18]，单纯复形 [29]，各种逻辑等。这些扩展均已证明有助于知识表示和推理，同时考虑低层信息（点或点的邻域）、结构信息（例如基于区域或对象之间的空间关系）、先验知识、语义等。

为了抽象地考虑所有这些扩展，我们现在拟从托扑斯的视角进一步探究二值数学形态学与模态逻辑之间的联系 [2]。因此，借用 O. Caramello 在 [25] 中的一番话：每个托扑斯都体现着某种现实领域，这一领域可能成为知识对象（也就是说，对这一现实的理想化实例化就是该托扑斯的点）。托扑斯构成一种范畴结构，由 A. Grothendieck 于 20 世纪 60 年代初提出 [35]，它推广了空间、数学宇宙的概念；就本文所关注的内容而言，也推广了知识表示的概念。选择托扑斯的理由如下。从哲学角度看，这一选择契合托扑斯的精神；正如 [61] 所阐述的，托扑斯可视为将几何命题逻辑推广到谓词逻辑，并由此建立逻辑、集合与拓扑学之间的连接。作为林登鲍姆代数的范畴版本，托扑斯可以将型视为对象、将函数符号和项视为态射、将谓词视为子对象，从而处理谓词。本文提出的框架基于这一托扑斯观，旨在定义并在任意空间结构中使用数学形态学。

随后，所提出的定义和运算将增强 MM 的推理能力，拓展此前关于形态学模态逻辑的研究 [5,13]。这些定义和运算还将使我们能够为具有拓扑风格 [60] 、通常用于空间推理 [1] 的模态赋予形态学语义，而这些模态无法直接通过腐蚀和膨胀获得；实际上，由于其定义中包含双重量化 $\forall/\exists$，这些模态的性质更接近开运算和闭运算这类形态学算子（其特定形式是腐蚀与膨胀的复合）。在 [34] 中，MM 已扩展到基于邻域概念的结构元素，这种邻域概念与一个类似的拓扑学概念相近。接下来，我们提议将这项初步工作扩展到托扑斯框架。为了在这一新框架中获得腐蚀和膨胀通常预期具备的性质，我们必须对这些新的结构邻域施加一个附加条件；这将是把拓扑学和逻辑学中的标准概念——滤子——调整后应用于托扑斯框架。由此，我们将得到一个内部 CS4 模态代数，其含义依照 [7] 中对此概念的界定（即，腐蚀对应一个内部内部代数，而膨胀对应一个较弱版本的内部闭包代数，因为

[2] 前面提到的所有扩展都可以用其范畴为拓扑斯的预层来表示。

膨胀不对上界保持分配性（因此严格来说，它们并非膨胀） [3]）。这样，我们便能够从托扑斯视角为构造性模态逻辑赋予邻域语义。

在逻辑方面，相关的扩展可见于制度 [5] 和满足系统 [3,4], 的上下文中，从而在联邦式框架下涵盖了许多不同的逻辑。该框架也应用于典型的推理问题（修正、溯因、空间推理）。

其他研究者已经探讨过在拓扑斯中解释模态逻辑。我们可以引用 [8,57]。为了获得具备适当性质的模态算子（与上界和下界交换，并保持最大元和最小元），这些研究考察了内部海廷代数之间的伴随，因此这些伴随具有保持性和交换性的良好性质 [45]。在这里，我们提出一种适用范围较窄但更具构造性的模态算子定义，通过腐蚀和膨胀来定义这些算子。

第 2 节介绍一些关于拓扑斯的预备知识。我们回顾一些与拓扑斯相关的概念、记号和术语，尤其是 Lawvere 和 Tierney 的初等托扑斯 [42]。本文的一项重要贡献是基于拓扑斯的逻辑论述，运用其内部语言，从而能够以一种近似于对集合和函数进行推理的方式来推理拓扑斯。本文所考虑的数学形态学代数框架使这一点尤为重要。第 3 节在初等托扑斯框架下阐述结构元素的概念以及两个基本算子：膨胀和腐蚀。第 4 节进一步将结构元素的概念扩展为结构邻域系统。这一概念最初见于 [34]，现推广至拓扑斯，旨在将数学形态学应用于逻辑推理。第 5 节提出一种在命题模态逻辑中考察模态的新方法，其灵感来自将这些模态解释为膨胀和腐蚀，并以结构邻域模拟可达关系（例如，可用于空间推理等）。该扩展在拓扑斯中通过数学形态学实现构造性模态逻辑，也将通常在集合上考察的邻域语义 [50], 扩展到了拓扑斯。文中还定义了语法和语义，并给出了一个可靠且完备的证明系统。最后，第 6 节通过符号人工智能和知识表示中的典型示例展示所提出的方法，包括信念修正、合并、溯因和空间推理。附录汇总了有用的记号。

[3] 在 [7], 中，作者基于计算机应用指出，在直觉主义框架下，可以摒弃这一最后的性质 [32,52,63]。

2 预备知识

本文使用了许多来自初等托扑斯范畴论的术语和记号。本文引入的概念会用到范畴论中的一些基本概念（范畴、函子、自然变换、极限、余极限、笛卡尔闭），此处不再赘述；感兴趣的读者可参阅 [12,43] 等教科书。

2.1 记号

全文中，$\mathcal{C}$ 表示一个一般的范畴，X、Y和 Z 表示 $\mathcal{C}$中的对象。当 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔闭范畴时，我们用 X^Y 表示X 和 Y的指数对象。符号 f、g和 h 表示态射。给定一个态射$f\colon X \to Y$，我们用 $\mathrm{dom}(f) = X$ 表示 f 的定义域，用 $\mathrm{cod}(f) = Y$表示 f的陪域；F、G、$H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$表示函子，$\alpha$、$\beta\colon F \Rightarrow G$表示自然变换。恒等态射记为 Id，始对象和终对象分别记为 $\emptyset$ 和 $\mathbb{1}$。最后，单态射记为 $\rightarrowtail$，也就是说，如果 m 是从 X 到 Y的单态射，则记作 $m\colon X \rightarrowtail Y$。

2.2 初等托普斯

托扑斯 $\mathcal{C}$ 是一个有限完备的笛卡尔闭范畴，并带有一个子对象分类器 Ω。具有子对象分类器意味着存在一个从终对象出发的态射 $true\colon \mathbb{1} \to \Omega$，使得对于每个单态射$m\colon Y \rightarrowtail X$，都存在唯一的态射 $\chi_m\colon X \to \Omega$（称为 m 的特征态射），使得下图是一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{!} & \mathbb{1} \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle true} \\ X & \xrightarrow[\chi_m]{} & \Omega \end{array}$$

设 $X \in |\mathcal{C}|$ 是一个对象，其子对象集定义如下：

$$\mathrm{Sub}(X) = \{[m] \mid \mathrm{cod}(m) = X \text{ and } m \text{ is a monomorphism}\}$$

其中 $[m]$ 是根据等价关系得到的 m 的等价类

$m \simeq m'$ 当且仅当 $\mathrm{cod}(m) = \mathrm{cod}(m')$，且 $\mathrm{dom}(m)$ 与 $\mathrm{dom}(m')$ 同构。如果没有歧义，后文中我们可以简单地用 m 代替 $[m]$。

我们将 Sub(X) 上的偏序 $\preceq_X$ 定义如下：对于所有 $f:\ Y \rightarrowtail X$以及 $g:\ Z \rightarrowtail X$

$$[f] \preceq_X [g] \Longleftrightarrow \exists h : Y \rightarrowtail Z, f = g \circ h$$

通常， $\succeq_X$ 表示逆序。已知 Sub(X) 是一个海廷代数 [39],，即（Sub(X) $\preceq_X$）是一个分配有界格，其中 $[Id_X]$和 $[\emptyset \rightarrowtail X]$ 分别为最大和最小元素，并且它具有一个蕴含 $\rightarrow$，其是交运算 $\wedge$的右伴随。

由于 $\mathcal{C}$ 是有限完备的，子对象导出了反变函子 Sub : $\mathcal{C}^{op} \rightarrow Pos$，其中 Pos 是偏序集范畴；该函子将每个 $X \in |\mathcal{C}|$（ $\mathcal{C}$的对象）对应到 Sub(X)，并将每个态射 f: $X \rightarrow X'$ 对应到映射 Sub(f) : Sub(X') $\rightarrow$ Sub(X)，该映射将每个 $[Y' \rightarrowtail X']$ 对应到$[Y \rightarrowtail X]$，使得该图为

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X' \end{array}$$

一个拉回。

每个托扑斯还具有以下性质 [11,39]:

• 它也具有有限余极限，因此存在一个始对象 $\emptyset$ 和一个终对象 1，它们分别是空图的余极限和极限。

• 每个态射 f 都可以唯一地分解为 $m_f \circ e_f$，其中 e_f 是满态射， m_f 是单态射。 e_f 的陪域通常记作 Im(f)，称为 f的像，因此 ($A \xrightarrow{f} B$) =($A \xrightarrow{e_f}$ Im(f) $\overset{m_f}{\rightarrowtail} B$)。

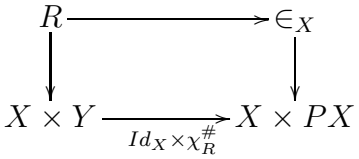
• 每个对象 $X \in \mathcal{C}$ 都有一个幂对象，其定义为 Ω^X，记作 PX。作为幂对象，它满足以下伴随性质:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, PY)$$

给定一个态射 $f \in$Hom$_{\mathcal{C}}(X \times Y, \Omega)$（分别为 $f \in$Hom$_{\mathcal{C}}(X, PY)$），我们用 $f_{\#}$ 表示它在上述双射下对应的态射。态射 $f^{\#}$称为 f的转置。注意，根据构造，我们有 $(f_{\#})^{\#} = f$。

特别地，恒等态射 Id_{PX}: $PX \rightarrow PX$是子对象 $\in_X \rightarrowtail X \times PX$的特征态射，使得对于每个对象 $Y \in \mathcal{C}$和每个单态射 $R \rightarrowtail X \times Y$，都存在唯一的

态射 $R \to \in_X$ 使下图成为一个拉回：



拓扑斯具有足够良好的集合性质，可以内化一种逻辑，使人们能够像在集合中选取元素一样进行推理，并在内部容纳构造性证明，即既不使用排中律，也不使用选择公理。本文将广泛使用拓扑斯的这种内部语言。为避免论文的阐述过于繁琐，关于这种内部语言的细节，请读者参阅附录。

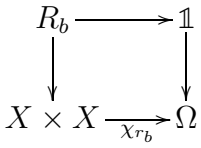
3 拓扑斯中的数学形态学

3.1 定义

基于结构元素的数学形态学可以相当简单地推广到拓扑斯。设 $\mathcal{C}$ 是一个拓扑斯。

定义 1（结构元素）。结构元素是一个态射 $b: X \to PX$，其中 $X \in \mathcal{C}$。

根据拓扑斯性质，给定一个结构元素 $b: X \to PX$，存在唯一的子对象 r_b: $R_b \rightarrowtail X \times X$，使得 $b = \chi^{\#}_{r_b}$，即



是一个拉回图。

$\breve{}$我们将 b 记作：$X \to PX$ 对态射 $R_b \rightarrowtail X \times X \xrightarrow{\Delta_{X\times X}} (X \times X) \times (X \times X) \xrightarrow{p_2 \times p_1} X \times X$的像进行分类的态射的转置，其中，$\Delta$ 表示对角态射，p_i 表示到第 i 个空间的投影。其在托扑斯 $\mathcal{C}$ 的内部语言中的描述如下：

$$\breve{b}(y) = \{x : X \mid y \in_X b(x)\}$$

定义 2（腐蚀）。设 $b: X \to PX$ 为一个结构元素。由 b进行的腐蚀是态射 $\varepsilon[b]: PX \to PX$，其转置对态射 $r: R \rightarrowtail PX \times X$ 进行分类（即 $\varepsilon[b] = \chi^{\#}_r$），其中 R 是以下图表的拉回：

图表:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \succeq_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ PX \times X & \xrightarrow[Id \times b]{} & PX \times PX \end{array}$$

在托扑斯 $\mathcal{C}$的内部逻辑中，这表示为:

$$\varepsilon[b](Y) = \{x : X \mid b(x) \preceq_X Y\}$$

定义3（膨胀）。设 $b:\ X \to PX$ 是一个结构元素。由 b进行的膨胀是态射 $\delta[b]:\ PX \to PX$，它刻画了态射 $R \rightarrowtail X \times X \times PX \to PX \times X$的像，其中第二个态射是末一个和第一个论据中的投影，而 R 是下图的拉回:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_{\breve{b}} \times \in_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times X \times PX & \xrightarrow[Id \times \Delta_X \times Id]{} & X \times X \times X \times PX \end{array}$$

在托扑斯 $\mathcal{C}$的内部逻辑中，这意味着:

$$\delta[b](Y) = \{x : X \mid \exists y.\ y \in_X \breve{b}(x) \ \wedge\ y \in_X Y\}$$

备注1。我们很容易将腐蚀和膨胀扩展到形如 $b:\ X \to PY$的任意结构元素，并定义态射$\varepsilon[b]$、 $\delta[b]:\ PY \to PX$。第3.2节给出的所有结果都可以轻易地适用于此类结构元素。

给定一个结构对象 $b:\ X \to PX$，我们有两个自然变换 $\overline{\varepsilon[b]}$、 $\overline{\delta[b]}:$ Sub $\Rightarrow$ Sub，它们由下列两个交换图给出:

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \\ {\scriptstyle Hom(Id_{\mathbb{1}}, \varepsilon[b])}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\varepsilon[b]}_X} \\ Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \\ {\scriptstyle Hom(Id_{\mathbb{1}}, \delta[b])}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\delta[b]}_X} \\ Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \end{array}$$

我们将在下一节看到，当结构元素 b 满足以下公式时:

$$\forall x.x \in_X b(x)$$

ˆ 因此， $\overline{\delta[b]}$ 是一个切赫闭包算子。

3.2 结果

我们在集合框架中得到了数学形态学的所有结果。这些不同结果的证明，在托扑斯 $\mathcal{C}$ 的内部逻辑中，仿照了我们在集合上的数学形态学框架中找到的经典证明。原因在于，这些经典证明都是构造性直觉主义证明，也就是说，它们既不使用选择公理，也不使用排中律。由于这些证明相当简单但形式化程度很高，为避免正文过于冗长，请读者参阅附录中给出的详细证明。

命题 1（伴随）。内部逻辑中的以下公式是有效的：

$$\forall Y.\, \forall Z.\, \delta[b](Y) \preceq_X Z \iff Y \preceq_X \varepsilon[b](Z)$$

根据命题 1，$(PX, \wedge, \vee, \Rightarrow, \varepsilon[b], \delta[b], \bot, \top)$ 是一个内部 HGC-代数，即一个配备保序伽罗瓦连接 $[30]$, 的海廷代数，因此可以从托扑斯视角为 $[30]$ 中引入的带伽罗瓦连接的直觉主义命题逻辑（IntGC）提供语义。命题 2。腐蚀和膨胀关于 $\preceq_X$ 是单调的，并且分别保持最小上界和最大下界。此外，我们有：

- $\varepsilon[b](X) = X$，并且
- $\delta[b](\emptyset) = \emptyset$。

最后，$\varepsilon[b]$ 和 $\delta[b]$ 分别关于 $\preceq_X$ 是反扩张的和扩张的，当且仅当公式 $\forall x.\ x \in_X b(x)$ 有效。更正式地说，这最后两个性质意味着以下两个陈述均有效：

(1) $\vdash (\forall x.\, x \in_X b(x)) \Leftrightarrow (\forall Y.\, \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y)$
(2) $\vdash (\forall x.\, x \in_X b(x)) \Leftrightarrow (\forall Y.\, Y \preceq_X \delta[b](Y))$

当 $\mathcal{C}$ 完备时（例如预层托扑斯），如果我们更新语法，使其包含任意幂对象 PX 上以集合为指标的极限和余极限，那么保持性质可以扩展如下：

$$\varepsilon[b](\textstyle\bigwedge_{i\in I} Y_i) = \bigwedge_{i\in I}(\varepsilon[b](Y_i)) \qquad ; \qquad \delta[b](\textstyle\bigvee_{i\in I} Y_i) = \bigvee_{i\in I}(\delta[b](Y_i))$$

对于任意指标集 I。这意味着 $\varepsilon[b]$、$\delta[b]$ 的单调性。
命题 3. $\varepsilon[b](\neg_X Y) = \neg_X \delta[\check{b}](Y)$ 且 $\delta[\check{b}](\neg_X Y) \preceq_X \neg_X \varepsilon[b](Y)$，其中 $\neg_X$ 是内海廷代数 PX 的伪补。

证明。由 $\mathcal{C}$ 的底层内部逻辑是直觉主义逻辑这一事实可直接得出。

□

如果 $\mathcal{C}$是一个布尔拓扑斯，我们还可得出 $\neg_X \varepsilon[b](Y) \preceq_X \delta[\check{b}](\neg_X Y)$，因此有此相等关系。

通常，腐蚀与膨胀的复合并不等于恒等算子，而是产生另外两个算子，称为开运算（定义为 $\delta[b] \circ \varepsilon[b]$）和闭运算（定义为 $\varepsilon[b] \circ \delta[b]$）。开运算和闭运算具有以下性质。

命题4. $\varepsilon[b] \circ \delta[b]$ （闭运算）和 $\delta[b] \circ \varepsilon[b]$ （开运算）满足以下性质：

- $\varepsilon[b] \circ \delta[b]$ 和 $\delta[b] \circ \varepsilon[b]$ 是单调的；
- $\varepsilon[b] \circ \delta[b]$ 是扩张的；
- $\delta[b] \circ \varepsilon[b]$ 是反扩张的；
- $\varepsilon[b] \circ \delta[b] \circ \varepsilon[b] = \varepsilon[b]$；
- $\delta[b] \circ \varepsilon[b] \circ \delta[b] = \delta[b]$；
- $\varepsilon[b] \circ \delta[b]$ 和 $\delta[b] \circ \varepsilon[b]$ 是幂等的。

4 结构邻域：内部拓扑

在基于集合的 [34], 数学形态学中，已有工作将其推广到一种称为结构邻域系统的新框架。在此，我们提议将这一推广扩展到托扑框架。因此，我们提议使用一种宽松的结构元素概念（称为结构邻域），来推广第 3 节中的所有概念。这一扩展的动机主要在于逻辑。事实上，本文旨在将数学形态学应用于逻辑，即所谓的形态逻辑（见第 5 节）；事实证明，它可用于对知识、信念或偏好建模，也可用于对修正、融合、溯因或空间推理等经典推理方法建模 [3,4,5,13,21,24]。

4.1 结构邻域：定义与结果

在所提出的结构邻域框架中，可以恢复经典腐蚀和膨胀的许多性质，但需要为结构邻域附加条件。这些附加条件引出了一种在拓扑学和逻辑中极为重要的数学构造，即滤子。

考虑托扑斯 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 。

定义 4（滤子）。我们通过以下关于变量 F 的公理，在 X 中形式化滤子的概念：PPX：

- 对有限交封闭：

$$\forall A.\, \forall B.\, A \in_{PX} F \ \wedge \ B \in_{PX} F \ \Rightarrow \ A \wedge B \in_{PX} F$$

- 上闭:

$$\forall A.\, \forall B.\, A \in_{PX} F \;\wedge\; A \preceq_X B \;\Rightarrow\; B \in_{PX} F$$

- 非空:

$$X \in_X F$$

- 严格:

$$\forall A.\, A \in_{PX} F \;\Rightarrow\; (\exists x.\, x \in_X A)$$

上述公式定义了一个态射 $\mathcal{F}\colon PPX \to \Omega$。

滤子使我们能够基于拓扑邻域的概念（见定义 7），在给定的托扑斯上内部定义一种拓扑学。
定义 5（结构邻域）。结构邻域是一个态射 $N\colon X \to PPX$，它满足以下两个公式:

(1) $\forall x.\, \mathcal{F}(N(x))$，其中 $\mathcal{F}$是定义 4 中引入的态射 (2) $\forall x. \forall A. A \in_{PX} N(x)$ $\Rightarrow x \in_X A$

定义 6（腐蚀与膨胀）。考虑一个结构邻域 $N\colon X \to PPX$。我们根据以下公式定义态射 $\varepsilon[N]\colon PX \to PX$:

$$\forall Y.\, \varepsilon[N](Y) = \{x : X \mid Y \in_{PX} N(x)\}$$

以及根据以下公式定义的态射 $\delta[N]\colon PX \to PX$:

$$\begin{aligned}\forall Y.\, \delta[N](Y) &= \{x : X \mid \exists F.\, \mathcal{F}(F) \;\wedge\; Y \in_{PX} F \;\wedge\; N(x) \preceq_{PX} F\} \\ &= \{x : X \mid \forall A.\, A \in_{PX} N(x) \;\Rightarrow\; \exists y.\, y \in_X A \wedge Y\}\end{aligned}$$

给定一个结构邻域 $N\colon X \to PPX$，我们还有两个自然变换 $\overline{\varepsilon[N]}, \overline{\delta[N]}$: Sub $\Rightarrow$ Sub，由以下两个交换图给出:

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \\ {\scriptstyle Hom(Id_{\mathbb{1}}, \varepsilon[b])}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\varepsilon[N]}_X} \\ Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \\ {\scriptstyle Hom(Id_{\mathbb{1}}, \delta[b])}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\delta[N]}_X} \\ Hom(\mathbb{1}, PX) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Sub}(X) \end{array}$$

命题 5. $\varepsilon[N]$ 和 $\delta[N]$ 是单调的。此外:

- $\varepsilon[N]$ *verifies:*
  - $\forall A.\, \forall B.\, \varepsilon[N](A \wedge B) = \varepsilon[N](A) \wedge \varepsilon[N](B)$.
  - $\varepsilon[N](X) = X$.
  - $\forall Y. \varepsilon[N](Y) \preceq_X Y$.
- $\delta[N]$ 验证:
  - $\forall A.\, \forall B.\, \delta[N](A \vee B) \;\succeq_X\; \delta[N](A) \;\vee \delta[N](B)$.
  - $\delta[N](\emptyset) = \emptyset$。
  - $\forall Y. Y \preceq_X \delta[N](Y)$。

- $\forall Y.\, \varepsilon[N](\neg_X Y) \preceq_X \neg_X \delta[N](Y)$

证明。 - 单调性：考虑变量 $x:\ X, Y:\ PX, Z:\ PX$，以及F：PPX，根据 $\mathcal{F}$ 的定义，我们有：

$$\begin{aligned} Y \preceq_X Z \ \vdash\ & ((\mathcal{F}(F) \ \wedge\ Y \in_{PX} F) \ \Rightarrow\ Z \in_{PX} F) \\ \vdash\ & ((\mathcal{F}(F) \ \wedge\ Y \in_{PX} F \ \wedge\ N(x) \preceq_{PX} F) \\ & \Rightarrow\ (\mathcal{F}(F) \ \wedge\ Z \in_{PX} F \ \wedge\ N(x) \preceq_{PX} F)) \end{aligned}$$

然后，对 F 和 x 进行量化（并利用以下事实：若 $\varphi \vdash_{x,\ \vec{x}} \psi$ 则$\exists x.\, \varphi \vdash_{\vec{x}} \exists x.\, \psi$），我们有：

$$Y \preceq_X Z \ \vdash\ \varepsilon[N](Y) \preceq_X \varepsilon[N](Z)$$

- $\varepsilon[N]$ 与 $\wedge$的交换性：考虑变量 $A:\ PX$和B：PX。根据单调性（递增性），我们已经有 $\varepsilon[N](A \wedge B) \preceq_X \varepsilon[N](A) \wedge \varepsilon[N](B)$。下面证明另一个包含关系。

对于变量 x: X，我们有：

$$\begin{aligned} x \in_X (\varepsilon[N](A) \wedge \varepsilon[N](B)) \ \Rightarrow\ & A \in_{PX} N(x) \ \wedge\ B \in_{PX} N(x) \\ \Rightarrow\ & (A \wedge B) \in_{PX} N(x) \\ \Rightarrow\ & x \in_X \varepsilon[N](A \wedge B) \end{aligned}$$

- 单位元：对于变量 $x : X$，我们有：

$$\begin{aligned} x \in_X \varepsilon[N](X) \ \Leftrightarrow\ & X \in_{PX} N(x) \\ \Leftrightarrow\ & x \in_X X \end{aligned}$$

- 反扩张性：对于变量 x: X，我们有：

$$\begin{aligned} x \in_X \varepsilon[N](Y) \ \Leftrightarrow\ & Y \in_{PX} N(x) \\ \Rightarrow\ & x \in_X Y \end{aligned}$$

- 对于膨胀 $\delta[N]$，单调性、交换性和下界保持性的证明类似（单调性论证以及 $\emptyset$的定义）。我们来证明扩张性：设 $x:\ X$ 为一个变量。设 $x \in_X Y$。假设 $\forall A.A \in_{PX} N(x)$。那么 $x \in_X A$。又由于 $x \in_X Y$，我们有 $x \in_X A \wedge Y$。因此 $x \in_X \delta[N](Y)$（在膨胀的定义中取 $y = x$）。

- *D*等式：对于变量 $Y\colon\ PX$ 和 $x\colon\ X$，我们有 $\neg_X Y \wedge Y = \emptyset$，于是：

$$\begin{aligned}
x \in_X \varepsilon[N](\neg_X Y) &\Rightarrow \neg_X Y \in_{PX} N(x) \\
&\Rightarrow \neg_X Y \in_{PX} N(x) \ \wedge\ (\forall y.\, \neg(y \in_X \neg_X Y \wedge Y)) \\
&\Rightarrow \exists A.\, A \in_{PX} N(x) \ \wedge\ (\forall y.\, \neg(y \in_X A \wedge Y)) \\
&\Rightarrow \exists A.\, A \in_{PX} N(x) \ \wedge\ \neg(\exists y.\, y \in_X A \wedge Y) \\
&\Rightarrow \exists A.\, \neg(A \in_{PX} N(x) \ \Rightarrow\ \exists y.\, y \in_X A \wedge Y) \\
&\Rightarrow \neg(\forall A.\, A \in_{PX} N(x) \ \Rightarrow\ \exists y.\, y \in_X A \wedge Y) \\
&\Rightarrow \neg(x \in \delta[N](Y)) \\
&\Rightarrow x \in \neg_X \delta[N](Y)
\end{aligned}$$

至此证明完成。 □

$\varepsilon[N]$和 $\delta[N]$的定义具有拓扑风格。然而，它们不满足内部算子和闭包算子分别所需的某些性质（它们不是幂等的，且 $\delta[N]$ 不能分配于 $\vee$）。在第4.2节中，我们将把结构邻域的集合限制为拓扑邻域（见定义 7）。结构邻域足以为模态逻辑 IT 提供语义，而这一新的结构邻域族将使我们能够定义腐蚀和膨胀，使它们在 PX上构成一个内部 CS4 模态代数。

例 1（从结构元素到邻域）。每个结构元素 $b\colon\ X \to PX$都自然地给出一个结构邻域 $N_b\colon\ X \to PPX$，定义如下：

$$\forall x.\, N_b(x) = \{Y : PX \mid Y \succeq_X b(x)\}$$

命题 6. $\varepsilon[N_b] = \varepsilon[b]$ 和 $\delta[N_b] = \delta[\breve{b}]$。

证明。

$$\begin{aligned}
x \in_X \varepsilon[N_b](Y) &\Leftrightarrow Y \in_{PX} N_b(x) \\
&\Leftrightarrow Y \succeq_X b(x) \\
&\Leftrightarrow x \in_X \varepsilon[b](Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in_X \delta[N_b](Y) &\Rightarrow \exists F.\, \mathcal{F}(F) \ \wedge\ Y \in_{PX} F \ \wedge\ N_b(x) \preceq_{PX} F \\
&\Rightarrow \exists F.\, \mathcal{F}(F) \ \wedge\ Y \in_{PX} F \ \wedge\ b(x) \in_{PX} F \\
&\Rightarrow \exists F.\, \mathcal{F}(F) \ \wedge\ (Y \wedge b(x)) \in_{PX} F \\
&\Rightarrow \exists y.\, y \in_X (Y \wedge b(x)) \\
&\Rightarrow x \in \delta[\breve{b}](Y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \in \delta[\breve{b}](Y) &\Rightarrow \exists y.\ y \in_X (Y \wedge b(x)) \\
&\Rightarrow \exists F.\ F = \{Z : PX \mid Z \succeq_X (Y \wedge b(x))\} \\
&\qquad \wedge\ \mathcal{F}(F)\ \wedge\ Y \in_{PX} F\ \wedge\ N_b(x) \preceq_{PX} F \\
&\Rightarrow x \in_X \delta[N_b](Y)
\end{aligned}
$$

在第二个蕴含中，我们使用了这样一个事实：如果 $Z \succeq_X Y \wedge b(x)$ 且 $\exists y.\ y \in_X Y \wedge b(x)$，那么 $\exists y.\ y \in_X Z$，由此得到 $\mathcal{F}$ 的最后一个公理。其他公理显然都满足。

□

因此，我们证明了基于结构邻域的膨胀和腐蚀实际上推广了基于结构元素的膨胀和腐蚀：通过将每个结构元素 $b\colon X \to PX$ such that $x \in_X b(x)$ 与其对应的结构邻域 $N_b\colon X \to PPX$ 对应起来。

命题 7. 对于所有结构邻域 $M, N\colon X \to PPX$，以下断言等价：

(1) 伴随：$\forall Y.\ \forall Z.\ \delta[N](Y) \preceq_X Z \Leftrightarrow Y \preceq_X \varepsilon[M](Z)$。(2) 对偶结构元素：存在一个结构元素 $b\colon X \to PX$ such that $M = N_b$ and $\delta[N] = \delta[N_{\breve{b}}]$。

证明。我们已经证明了 $2 \Rightarrow 1$。现在证明 $1 \Rightarrow 2$。

如果 $\delta[N]$ 和 $\varepsilon[M]$ 之间具有伴随性质，那么考虑任意变量 $x\colon X$ 的 $Y = \{x\}$，特别可以得到：

$$
\forall x.\ \forall Z.\quad \delta[N](\{x\}) \preceq_X Z \ \Leftrightarrow\ \{x\} \preceq_X \varepsilon[M](Z) \ \Leftrightarrow\ Z \in M(x)
$$

因此，我们必然有：

$$
\forall x.\ M(x) = \{Z : PX \mid \delta[N](\{x\}) \preceq_X Z\} = N_b(x)
$$

其中 $b\colon X \to PX$ 是由以下方式定义的结构元素：

$$
\forall x.\ b(x) = \delta[N](\{x\})
$$

因此，我们构造出了一个满足 $M = N_b$ 的结构元素 b。现在来证明我们必然有 $\delta[N] = \delta[N_{\breve{b}}]$。

By 根据命题 6，我们有 $\delta[N_{\breve{b}}] = \delta[b]$ 和 $\varepsilon[M] = \varepsilon[N_b] = \varepsilon[b]$。因此，

Theo将 rem 1 与关于 N 和 M 的伴随假设结合，可得：

$$\begin{aligned}\forall Y.\,\forall Z.\quad \delta[N_{\check{b}}](Y) \preceq_X Z &\Leftrightarrow \delta[b](Y) \preceq_X Z\\ &\Leftrightarrow Y \preceq_X \varepsilon[b](Z)\\ &\Leftrightarrow Y \preceq_X \varepsilon[M](Z)\\ &\Leftrightarrow \delta[N](Y) \preceq_X Z\end{aligned}$$

特别地，分别考虑 $Z = \delta[N_{\check{b}}](Y)$ 和 $Z = \delta[N](Y)$：

$$\forall Y.\,\delta[N](Y) \preceq_X \delta[N_{\check{b}}](Y) \qquad ; \qquad \forall Y.\,\delta[N_{\check{b}}](Y) \preceq_X \delta[N](Y)$$

由此证明得证。 □

注 2. 当 $\mathcal{C}$ 是布尔拓扑斯，且假设 $\neg\neg\varphi = \varphi$ 成立时，我们还有 $N = N_{\check{b}}$。事实上，我们有 $\varepsilon[N](Y) = \neg_X\delta[N](\neg_X Y) =_\smile \smile\neg_X\delta[b](\neg_X Y) = \varepsilon[b](Y)$，即 $Y \in N(x) \Leftrightarrow b(x) \preceq_X Y$。

4.2 拓扑邻域

定义 7（拓扑邻域）。拓扑邻域是一个结构邻域 $N\colon\ X \to PPX$ 满足：

$$\forall x.\,\forall A.\,A \in_{PX} N(x) \Rightarrow \begin{pmatrix}\exists B.\,B \in_{PX} N(x) \wedge\\ (\forall y.\,y \in_X B \Rightarrow A \in_{PX} N(y))\end{pmatrix}$$

命题 8（内部算子）。若 $N\colon\ X \to PPX$ 是一个拓扑邻域，则 $\varepsilon[N]$ 是 PX 中的一个内部内部算子，即它满足以下性质：

(1) $\forall Y.\,\varepsilon[N](Y) \preceq_X Y$。(2) $\varepsilon[N](X) = X$。
(3) $\forall Y.\,\forall Z.\,\varepsilon[N](Y \wedge Z) = \varepsilon[N](Y) \wedge \varepsilon[N](Z)$。
(4) $\forall Y.\,\varepsilon[N](\varepsilon[N](Y)) = \varepsilon[N](Y)$】【。

证明。前三个性质已在命题 5 中证明。下面证明最后一个性质。考虑一个变量 $Y\colon\ PX$。我们已经有

$\varepsilon[N](\varepsilon[N](Y)) \preceq_X \varepsilon[N](Y)$。反过来，对于一个变量 x： X，我们有：

$$\begin{aligned} x \in_X \varepsilon[N](Y) &\Rightarrow Y \in_{PX} N(x) \\ &\Rightarrow \exists B.\, B \in_{PX} N(x) \wedge (\forall y.\, y \in_X B \Rightarrow Y \in_{PX} N(y)) \\ &\Rightarrow \exists B.\, B \in_{PX} N(x) \wedge (\forall y.\, y \in_X B \Rightarrow y \in_X \varepsilon[N](Y)) \\ &\Rightarrow \exists B.\, B \in_{PX} N(x) \wedge B \preceq_X \varepsilon[N](Y) \\ &\Rightarrow \varepsilon[N](Y) \in_{PX} N(x) \\ &\Rightarrow x \in_X \varepsilon[N](\varepsilon[N](Y)) \end{aligned}$$

□

命题 9. 如果 N: $X \to PPX$是一个拓扑邻域，那么 $\delta[N]$满足以下性质：

(1) $\forall Y.\, Y \preceq_X \delta[N](Y)$。(2) $\delta[N](\emptyset) = \emptyset$。(3) $\forall Y.\, \delta[N](\delta[N](Y)) = \delta[N](Y)$。

证明。前两个性质已在命题 5 中证明。下面证明最后一个性质。考虑一个变量 x ： X。那么，我们有以下蕴涵：

$$x \in_X \delta[N](\delta[N](Y)) \Rightarrow (\forall A.A \in_{PX} N(x) \Rightarrow \exists y.y \in_X \delta[N](Y) \wedge A) \tag{1}$$

But

$$A \in_{PX} N(x) \Rightarrow \begin{pmatrix} \exists B.B \in_{PX} N(x) \wedge \\ (\forall y \in_X B \Rightarrow A \in_{PX} N(y)) \end{pmatrix} \tag{2}$$

此外，由于 $B \in_{PX} N(x)$，我们有

$$\exists y.y \in_X \delta[N](Y) \wedge B \tag{3}$$

Now,

$$y \in_X \delta[N](Y) \Rightarrow \forall C.C \in_{PX} N(y) \Rightarrow \exists z.z \in_X Y \wedge C \tag{4}$$

根据蕴含 2 和 4，我们有 $A \in_{PX} N(y)$，于是

$$\exists z.z \in_X Y \wedge A$$

由此可以得出 $x \in \delta[N](Y)$，因此 $\delta[N](\delta[N](Y)) \preceq_X \delta[N](Y)$。

最后， $\delta[N](Y) \preceq_X \delta[N](\delta[N](Y))$ 是第一条性质的直接推论，因此我们有 $\forall Y.\, \delta[N](\delta[N](Y)) = \delta[N](Y)$。 □

因此，对于任意拓扑邻域 N， $\overline{\delta[N]}$ 是一个闭包算子，我们可以为其关联两个自然变换 $\eta : Id \Rightarrow \overline{\delta[N]}$ 和 μ: $\overline{\delta[N]} \circ \overline{\delta[N]} \Rightarrow \overline{\delta[N]}$，于是 $(\overline{\delta[N]}, \eta, \mu)$ 是一个单子。

根据命题 8 和命题 9，由于 $\delta[N]$ 不对 $\vee$ 分配，我们得到元组 $(PX, \preceq_X, \wedge, \vee, \neg_X, \emptyset, \varepsilon[N], \delta[N])$ 是一个内部 $CS4$- 模态代数 [7]，因此非常适合从拓扑斯视角为构造性模态逻辑 $CS4$ 提供语义（我们将在第 5 节中这样做）。现在，我们离得到一个闭包代数已不远。为此，我们必须施加以下补充条件：

$$\forall A.\, \forall B.\, \delta[N](A \vee B) \preceq_X \delta[N](A) \vee \delta[N](B)$$

请注意，实际上存在一些 $\delta[N]$ 使得这个不等式成立（此时，该条件与扩张性结合起来会使 $\delta[N]$ 与 $\vee$可交换）。在这种情况下，我们便定义了 $X \in \mathcal{C}$上的内部拓扑，而 $\varepsilon[N]$和 $\delta[N]$则分别解释为拓扑意义上的内部和闭包概念。

在此上下文中，我们可以将两个态射 $open, closed\colon PX \to \Omega$ 分别定义为 $\varepsilon[N]$与 Id_{PX}、以及 $\delta[N]$与 Id_{PX}的等化子，由此在托扑斯 $\mathcal{C}$ 的内部语言中得到以下刻画：

- $open(Y) \Leftrightarrow \varepsilon[N](Y) = Y$
- $closed(Y) \Leftrightarrow \delta[N](Y) = Y$

由此我们得到以下拓扑空间中的标准结果：命题 10。伴随成立，当且仅当开运算等价于闭运算，即以下命题成立：对于每个 $N\colon X \to PPX$

$$Adjunction(\varepsilon[N], \delta[N]) \Leftrightarrow (\forall W,\ open(W) \Leftrightarrow close(W))$$

其中 $Adjunction(\varepsilon[N], \delta[N])$ 定义如下：

$$Adjunction(\varepsilon[N], \delta[N]) \equiv (\forall Y.\, \forall Z.\, \delta[N](Y) \preceq_X Z \Leftrightarrow Y \preceq_X \varepsilon[N](Z))$$

证明。($\Rightarrow$) 假设满足伴随关系。设 Y 是闭的，即 $\delta[N](Y) = Y$，于是 $\delta[N](Y) \preceq_X Y$。根据伴随关系，我们有 $Y \preceq_X \varepsilon[N](Y)$。但是，我们也知道 $\varepsilon[N](Y) \preceq_X Y$，于是 $\varepsilon[N](Y) = Y$。因此，Y 也是开的。将此结论应用于补集，可得所有开集都是闭集。

($\Leftarrow$) 假设 $\delta[N](Y) \preceq_X Z$。根据定理 5，我们有

$$\varepsilon[N](\delta[N](Y)) \preceq_X \varepsilon[N](Z)$$

我们知道 $\delta[N](Y)$ 是闭的，因此根据假设，它是开的。由此可得 $\varepsilon[N](\delta[N](Y)) = \delta[N](Y)$。但是，$\delta[N]$ 是扩张的，因此 $Y \preceq_X \delta[N](Y)$，由此可得 $Y \preceq_X \varepsilon[N](Z)$。

伴随蕴含的另一方向也可用类似方法证明。 □

5 形态逻辑：托扑斯中的模态解释

利用元组（PX，$\wedge$，$\vee$，$\neg_X$，$\emptyset$，$\varepsilon[N]$，$\delta[N]$）是定义 7 中所定义的结构邻域族 N 的内模态代数这一事实，本节将从拓扑斯视角为构造性模态逻辑给出邻域语义。按照范畴逻辑的惯例，我们提出一个以序列演算形式表述的蕴涵系统，并证明其完备性结果。

语法。令 PV 为一个可数集合，其元素称为命题变量，并用字母 p、$q\ldots$ 表示。公式集合 Φ 由以下文法定义：

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

其中 p 遍历 PV。

语义。令 $\mathcal{C}$ 为一个托扑斯。在本节中，我们假设 $\mathcal{C}$ 是非退化的（即 $\emptyset \neq \mathbb{1}$，因此 $true \neq false$）。由于结构邻域涵盖结构元素 $b : X \to PX$，使得 $\forall x.x \in_X b(x)$（参见例 1），我们分别用形态学算子 $\overline{\varepsilon[N]}_X$ 和 $\overline{\delta[N]}_X$（其中 $N : X \to PPX$，且 $X \in \mathcal{C}$）来解释模态算子 $\Box$ 和 $\Diamond$。根据命题 5，这意味着 $\overline{\varepsilon[N]}_X$ 是反扩张的，而 $\overline{\delta[N]}_X$ 是扩张的，因此 Kripke 图式成立。

给定一组命题变量 PV，一个 PV-模型，或简称模型，$\mathcal{M}$ 是一个三元组 (X, N, ν)，其中：

- X 是 $\mathcal{C}$的一个对象，
- $N : X \to PPX$ 是一个结构邻域，并且
- $\nu : PV \to \mathrm{Sub}(X)$ 是一个称为赋值的映射。

若要为 CS4 模态逻辑赋予语义，我们将范围限制在满足 N 是拓扑邻域的模型 (X, N, ν) 上。我们用 Mod 表示 PV-模型的类。

模型 $\mathcal{M}$ 中公式的语义是一个映射 $[\![\mathcal{M}]\!]( ) : \Phi \to \mathrm{Sub}(X)$，通过对公式进行结构归纳定义如下：

- $[\![\mathcal{M}]\!](\top) = Id_X$,
- $[\![\mathcal{M}]\!](\bot) = \emptyset \rightarrowtail X$ ($\emptyset \rightarrowtail X$ 是 $\mathrm{Sub}(X)$ 的最小子对象),
- $[\![\mathcal{M}]\!](p) = \nu(p)$,
- $[\![\mathcal{M}]\!](\neg\varphi) = [\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\bot)$

- $[\![\mathcal{M}]\!](\varphi \wedge \psi) = [\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \wedge [\![\mathcal{M}]\!](\psi)$（$[\![\mathcal{M}]\!](\varphi)$ 和 $[\![\mathcal{M}]\!](\psi)$ 的下确界），
- $[\![\mathcal{M}]\!](\varphi \vee \psi) = [\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \vee [\![\mathcal{M}]\!](\psi)$（$[\![\mathcal{M}]\!](\varphi)$ 和 $[\![\mathcal{M}]\!](\psi)$ 的上确界），
- $[\![\mathcal{M}]\!](\varphi \Rightarrow \psi) = [\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \rightarrow [\![\mathcal{M}]\!](\psi)$
- $[\![\mathcal{M}]\!](\Box\varphi) = \overline{\varepsilon[N]}_X([\![\mathcal{M}]\!](\varphi))$
- $[\![\mathcal{M}]\!](\Diamond\varphi) = \overline{\delta[N]}_X([\![\mathcal{M}]\!](\varphi))$

我们写作 $\mathcal{M} \models \varphi$ 当且仅当 $[\![\mathcal{M}]\!](\varphi) = Id_X$，此时对于每个 $\iota \in \mathsf{Sub}(X)$，我们写作 $\mathcal{M} \models_\iota \varphi$，表示 $\iota \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\varphi))$（$\preceq_X$ 是 $\mathsf{Sub}(X)$ 上的序）。我们用 $Mod(\varphi)$ 表示模型类 $\mathcal{M}$，使得 $\mathcal{M} \models \varphi$。最后，给定一组公式 Γ 和一个公式 φ，我们写作 $\Gamma \models \varphi$，表示对于每个模型 $\mathcal{M}$，若其对每个公式 $\psi \in \Gamma$ 都验证 $\mathcal{M} \models \psi$，则有 $\mathcal{M} \models \varphi$。

L引理 1. 对于任意模型 $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$，以及任意公式 φ, ψ，我们有 *ve:*

$$\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \psi \textit{ iff } [\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\psi)$$

证明。$\mathsf{Sub}(X)$ 是一个海廷代数，因此满足以下性质：

$$[\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\psi) \Longleftrightarrow ([\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \rightarrow [\![\mathcal{M}]\!](\psi) = Id_X)$$

□

一个可靠且完备的蕴涵系统。按照范畴逻辑的惯例，我们提出一个以序列演算形式表述的蕴涵系统。定义 8（序列）。给定两个公式 $\varphi, \psi \in \Phi$，序列是形如 $\varphi \vdash \psi$ 的表达式。对于模型 $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$，若满足：$[\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\psi)$，则该序列有效，记作$\varphi \models_{\mathcal{M}} \psi$。

序列演算由推理规则构成，这些规则使我们能够从一组其他序列推导出一个序列（或一组序列），记作：

$$\frac{\Gamma}{\sigma}$$

表示序列 σ 可以由一组序列 Γ 推导得出。双线代替单线则表示每个序列都可以由另一个序列推导得出。

考虑以下规则，其中 $\varphi \dashv\vdash \psi$ 是 $\varphi \vdash \psi$和 $\psi \vdash \varphi$的简写：

- 恒等规则：

$$\varphi \vdash \varphi$$

- 公理：
  · 保持性。 $\Box\top \dashv\vdash \top$，以及 $\Diamond\bot \dashv\vdash \bot$

· 对偶性。 $\Box\neg\varphi \vdash \neg\Diamond\varphi$
· 分配律。 $\Box(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \Box\varphi \wedge \Box\psi$ 和 $\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi \vdash \Diamond(\varphi \vee \psi)$
· 公理 K。 $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$
· 公理 T。 $\Box\varphi \vdash \varphi$，以及 $\varphi \vdash \Diamond\varphi$
· S4 公理。 $\Box\varphi \vdash \Box\Box\varphi$，以及 $\Diamond\Diamond\varphi \vdash \Diamond\varphi$ （当模型限制为拓扑邻域时）

· 经典性。 $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ （当 $\mathcal{C}$ 是布尔拓扑斯时）

- 不一致性:

$$\bot \vdash \psi$$

- 重言式:

$$\varphi \vdash \top$$

- 切割规则:

$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \psi \vdash \chi}{\varphi \vdash \chi}$$

- 合取规则:

$$\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \quad \varphi \wedge \psi \vdash \psi \quad \varphi \wedge \varphi \dashv\vdash \varphi \quad \varphi \wedge \psi \dashv\vdash \psi \wedge \varphi$$

$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \varphi \vdash \chi}{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}$$

- 析取规则:

$$\varphi \vdash \varphi \vee \psi \qquad \psi \vdash \varphi \vee \psi \qquad \varphi \vee \psi \dashv\vdash \psi \vee \varphi$$

$$\frac{\varphi \vdash \chi \qquad \psi \vdash \chi}{\varphi \vee \psi \vdash \chi}$$

- 分配律:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \dashv\vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

- 蕴含规则:

$$\frac{\varphi \wedge \psi \vdash \chi}{\varphi \vdash \psi \Rightarrow \chi}$$

- 否定规则:

$$\neg\varphi \dashv\vdash \varphi \Rightarrow \bot$$

- 模态规则:

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\Box\varphi \vdash \Box\psi}$$

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\Diamond\varphi \vdash \Diamond\psi}$$

定理 1（可靠性）。如果 $\varphi \vdash s$ 是一个可证明的序列，那么它对每个模型 $\mathcal{M}$ 都有效。

证明。通过对推导进行结构归纳即可证明这一点。根据语义的定义方式，几乎所有情况都显而易见。例如，模态规则直接源于以下事实：对于每个模型 $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$，$\overline{\varepsilon[N]}_X$ 和 $\overline{\delta[N]}_X$ 都是单调的。 □

下面证明该推理系统的完备性。与亨金标准方法 [38], 一样，我们的构造依赖于这样一个事实：任何一致公式集都可以扩展为极大一致公式集。

设 $\Gamma \subseteq \Phi$ 为一个公式集。对于每个 $\varphi \in \Phi$，我们记 $\Gamma \vdash \varphi$，表示序列 $\varphi \vdash\!\dashv \top$ 可以通过对所有满足 $\psi \in \Gamma$的序列 $\psi \vdash\!\dashv \top$ 使用推理规则得到。若 Γ 满足 $\Gamma \nvdash \bot$（即不能从 Γ得到 $\bot \vdash\!\dashv \top$），则称其为相容的。

根据佐恩引理，当 Γ 相容时，存在一个包含 Γ的极大一致公式集 $\overline{\Gamma}$。 [4]

命题 11。设 Δ 为一个极大一致公式集。存在一个模型 $\mathcal{M}_\Delta$，使得对于每个 $\varphi \in \Phi$:

$$[\![\mathcal{M}_\Delta]\!](\varphi) = Id_X \textit{ iff } \varphi \in \Delta$$

证明。 $\mathcal{M}_\Delta = (X, N, \nu)$ 是任意一个满足以下条件的模型:

- $X \in |\mathcal{C}|$ 是一个不同于初始对象的对象（这总是可能的，因为我们假设 $\mathcal{C}$ 是非退化的）。
- $\nu : p \in PV \mapsto \begin{cases} Id_X & \text{if } p \in \Delta \\ \emptyset \rightarrowtail X & \text{otherwise} \end{cases}$

注意，对 N 没有施加任何约束。

命题中的等价关系通过对 φ 作结构归纳来证明。基本公式和命题联结词的情形很容易证明。接下来，我们来证明模态算子 $\Box$ 的情形（模态算子 $\Diamond$ 的证明基本相同）。因此，设 φ 具有形式 $\Box\psi$。

($\Longrightarrow$) 假设 $[\![\mathcal{M}_\Delta]\!](\varphi) = Id_X$。由反扩张性，我们必然有 $[\![\mathcal{M}_\Delta]\!](\psi) = Id_X$。因此，由归纳假设可得 $\psi \in \Delta$，即 $\psi \vdash\!\dashv \top$ 是由 Δ 得到的；根据模态算子的规则，$\Box\psi \vdash\!\dashv \top$ 也同样如此，由此我们可以得出

$$\Box\psi \in \Delta$$

[4] 即 $\overline{\Gamma}$ 相容，也就是说 $\overline{\Gamma} \nvdash \bot$，并且不存在一个严格包含 Γ 的相容公式集（即对于每个公式 $\varphi \in \Phi$，$\varphi \in \overline{\Gamma}$ 或 $\neg\varphi \in \overline{\Gamma}$ 必有一个成立，但二者不能同时成立）。

($\Longleftarrow$) 假设 $\Box\psi \in \Delta$。于是我们有 $\psi \in \Delta$。否则，这意味着序列 $\psi \vdash \bot$ 可以从 Δ 推导出来；根据与模态相关的公理，我们可以得出 $\varphi \vdash \bot$，这与假设矛盾。因此，根据归纳假设，我们有 $[\![\mathcal{M}_\Delta]\!](\psi) = Id_X$，由此可以得出 $[\![\mathcal{M}_\Delta]\!](\varphi) = Id_X$。 □

定理 2（完备性）。如果 $\varphi \vdash \psi$ 是一个有效的序列，那么它是可证明的。

证明。如果 $\varphi \vdash \psi$ 不可证明，那么集合 $\Gamma = \{\neg(\varphi \Rightarrow \psi)\}$ 是相容的。设 $\overline{\Gamma}$ 是一个包含 Γ 的极大一致公式集。根据命题 11，存在一个模型 $\mathcal{M}_{\overline{\Gamma}} = (X, N, \nu)$，使得 $[\![\mathcal{M}_{\overline{\Gamma}}]\!](\neg(\varphi \Rightarrow \psi)) = Id_X$，于是 $\varphi \not\models \psi$。 □

6 符号人工智能的应用

6.1 信念修正

信念修正是指智能体的信念随着新获取的知识而演变的过程。在逻辑框架中，智能体的信念和知识通过公式进行形式化定义。在实践中，在这种情形下，问题可描述为：在添加新公式后，如何消解理论中的不一致性。在实践中，智能体的信念和知识数量有限，因此可以用一个公式来表示。

模态逻辑通常用于形式化信念，因为它们能够表达关于其他智能体信念的信念。因此，我们在此假设，智能体的信念由模态公式形式化，而信念修正将通过一个算子 $\circ$ 来定义，该算子作用于两个公式 φ 和 ψ 之间，用以表达如何将 φ 转换为一个公式 φ'，使得 $\varphi' \wedge \psi$ 相容 [40]。 [5]

人们已经确立了一种公理化方法，即 AGM 理论 [6], ，用来描述修正算子 $\circ$ 的恰当运行方式。AGM 公设如下：

- （$G1$）如果 ψ 是相容公式，那么 $\varphi \circ \psi$也是相容公式
- （$G2$） Mod（$\varphi \circ \psi$） $\subseteq Mod$（ψ）
- (*G*3) 如果 $\varphi \wedge \psi$ 相容，那么 $\varphi \circ \psi = \varphi \wedge \psi$

[5] φ 通常是有限组信念的合取，这些信念本身由公式 [40]定义。

• ($G4$) 如果 $\varphi \equiv \varphi'$ 和 $\psi \equiv \psi'$，那么 $Mod(\varphi \circ \psi) = Mod(\varphi' \circ \psi')$（$\equiv$ 表示公式在逻辑上等价）
• ($G4$'），若 $\psi \equiv \psi'$，则 $Mod(\varphi \circ \psi) = Mod(\varphi \circ \psi')$
• ($G5$) $Mod((\varphi \circ \psi) \wedge \chi) = Mod(\varphi \circ (\psi \wedge \chi))$，若 $(\varphi \circ \psi) \wedge \chi$ 相容

公设 ($G4$) 意味着语法完全独立。不过，我们接下来会看到，当修正算子对知识库应用句法变换时（此处由公式 φ 指定），公设 ($G4$) 将不再能够得到保证。我们的专用于逻辑 CS4 的修正算子（见下文）便是如此，因此引入了公设 ($G4$')。

基于膨胀的修正算子。根据我们对模态的解释，对于每个 $\varphi \in \Phi$，都有

$$Mod(\varphi) \subseteq Mod(\Diamond\varphi)$$

（这仅仅是膨胀具有扩张性的结果。）

沿用 [16], 中提出的方法，接下来的思路是对 φ 的模型类进行膨胀，直至与 ψ 的模型类相交。然后，按照 [16] 中针对命题逻辑的定义，我们将算子 $\circ$ 定义如下:

$$\varphi \circ \psi = \Diamond^n \varphi \wedge \psi$$

其中 $n = \min\{k \in$ 自然数集 $\mid \Diamond^k \varphi \wedge \psi$ 相容$\}$ 且 $\Diamond^n \varphi = \underbrace{\Diamond \ldots \Diamond}_{n \ times} \varphi$.

命题 12. 算子 $\circ$ 满足 AGM 公设（$G1$）-（$G5$）。

证明. $\circ$ 显然满足公设（$G1$）、（$G2$）和（$G3$）。

让我们证明（$G4$）。设 $\varphi \equiv \varphi'$ 且 $\psi \equiv \psi'$。这意味着 Mod（φ）$=Mod$（φ'），且 Mod（ψ）$= Mod$（ψ'）。根据算子 $\circ$的定义，我们有 Mod（$\varphi \circ \psi$）$= Mod$（$\Diamond^n \varphi$）$\cap Mod$（ψ）。因此，我们有 Mod（$\varphi \circ \psi$）$=Mod$（$\Diamond^n \varphi$）$\cap Mod$（ψ'）。同理，Mod（$\varphi \circ \psi'$）$= Mod$（$\Diamond^m \varphi$）$\cap Mod$（ψ'），进而 Mod（$\varphi \circ \psi'$）$= Mod$（$\Diamond^m \varphi$）$\cap Mod$（ψ）。显然，对于每个 $k \in$自然数集，都有 Mod（$\Diamond^k \varphi$）$= Mod$（$\Diamond^k \varphi'$）。这意味着 $n \leq m$ 和 $m \leq n$ 均成立，即 $n = m$，且 Mod（$\varphi \circ \psi$）$= Mod$（$\varphi' \circ \psi'$）。

现在证明（$G5$）。由于（$\varphi \circ \psi$）$\wedge \chi$ 是相容的，我们有 Mod（$\varphi \circ \psi$）$\wedge \chi \neq \emptyset$。令 $\mathcal{M} \in Mod$（$\varphi \circ \psi$）$\wedge \chi$。这意味着 $\mathcal{M} \in Mod$（$\Diamond^n \varphi \wedge \psi \wedge \chi$）。根据算子 $\circ$的定义，$\varphi \circ (\psi \wedge \chi) = \Diamond^m \varphi \wedge \psi \wedge \chi$。这意味着 $n \leq m$; 由于 $\Diamond$ 是扩张的，我们于是有 $\mathcal{M} \in Mod$（$\Diamond^m \varphi$），进而有 $\mathcal{M} \in Mod$（$\varphi \circ$（$\psi \wedge \chi$））。相反的包含关系可用同样的论据证明。 □

如果我们认为模态逻辑的 S4 公理是有效的，上述方法就不起作用了。事实上，在这种情况下，序列 $\Diamond\Diamond\varphi \vdash \Diamond\varphi$ 是有效的。因此，定义修正算子的另一种方法是将必然性模态改为可能性模态。的确，直观地说，如果修正无法对所有状态都保持相容，那么它可以对其中某些状态保持相容。在 [3] 中，人们采用了类似的方法，在集合框架中定义一阶逻辑和模态逻辑中的修正算子。这些修正算子的定义利用了布尔推理。因此，修正算子被定义在范式公式上。在直觉主义框架中，这样的公式范式并不存在。因此，当托扑斯 $\mathcal{C}$ 不是布尔的时，我们为修正算子提出如下定义：首先定义两个映射ρ、κ：$\Phi \to \Phi$，它们作用于公式上，即

- $\rho(\top) = \top$ 和 $\kappa(\top) = \top$
- $\rho(\bot) = \bot$ 和 $\kappa(\bot) = \bot$
- $\rho(p) = p$ 和 $\kappa(p) = p$，其中 $p \in PV$。
- $\rho(\varphi \Rightarrow \psi) = (\kappa(\varphi) \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \rho(\psi))$ 和$\kappa(\varphi \Rightarrow \psi) = (\varphi \Rightarrow \kappa(\psi)) \vee (\rho(\varphi) \Rightarrow \psi)$
- $\rho(\varphi @ \psi) = (\rho(\varphi) @ \psi) \vee (\varphi @ \rho(\psi))$ 和$\kappa(\varphi @ \psi) = (\kappa(\varphi) @ \psi) \vee (\varphi @ \kappa(\psi))$，其中 $@ \in \{\wedge, \vee\}$
- $\rho(\neg\varphi) = \neg\kappa(\varphi)$ 和 $\kappa(\neg\varphi) = \neg\rho(\varphi)$
- $\rho(\Box\varphi) = \Diamond\varphi$ 和 $\kappa(\Box\varphi) = \Box\kappa(\varphi)$
- $\rho(\Diamond\varphi) = \Diamond\rho(\varphi)$ 和 $\kappa(\Diamond\varphi) = \Box\varphi$

命题 13. 对于每个公式 φ 以及每个模型 $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$，我们有 $[\![M]\!](\varphi) \preceq_X [\![M]\!](\rho(\varphi))$ 和 $[\![M]\!](\kappa(\varphi)) \preceq_X [\![M]\!](\varphi)$。

证明。证明通过对 φ 进行结构归纳完成。基本情形显而易见。对于一般情形，必须考虑 φ 的几种形式。这里，我们证明蕴含和否定的结果。其他情形都相当直接。

- φ 具有 $\psi \Rightarrow \chi$ 的形式。
  · 对于映射 ρ。根据定义，我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\psi \Rightarrow \chi) = [\![\mathcal{M}]\!](\psi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$$

根据 $\to$的定义，$[\![\mathcal{M}]\!](\psi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$ 是 $\mathrm{Sub}(X)$ 中满足以下条件的最大元素 ι：

$$[\![\mathcal{M}]\!](\psi) \wedge \iota \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$$

根据归纳假设，我们有 both $[\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\psi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\psi)$ and$[\![\mathcal{M}]\!](\chi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\chi))$。因此，我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\varphi)) \wedge [\![\mathcal{M}]\!](\psi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\chi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$$

and

$$[\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \wedge [\![\mathcal{M}]\!](\psi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\chi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\chi))$$

接着，根据 $\to$ 的泛性质（即 $\wedge$的伴随），我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\psi \Rightarrow \chi) = [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\varphi \Rightarrow \chi))$$

· 对于映射 κ。根据定义，我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\psi \Rightarrow \kappa(\chi)) = [\![\mathcal{M}]\!](\psi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\chi))$$

and

$$[\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi) \Rightarrow \chi) = [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi)) \to [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$$

根据 $\to$的定义，$[\![\mathcal{M}]\!](\psi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\chi))$ 和 $[\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi)) \to [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$ 是 $\mathsf{Sub}(X)$ 中满足以下条件的最大元 ι 和 θ

$$[\![\mathcal{M}]\!](\psi) \wedge \iota \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\chi))$$

and

$$[\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi)) \wedge \theta \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$$

根据归纳假设，我们有 $[\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\chi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\chi)$ 和$[\![\mathcal{M}]\!](\psi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi))$，于是根据 $\to$的泛性质，我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\psi \Rightarrow \kappa(\chi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\psi \Rightarrow \chi)$$

and

$$[\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi) \Rightarrow \chi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\psi \Rightarrow \chi)$$

- φ具有 $\neg\psi$ 的形式。
  · 对于映射 ρ。根据定义，我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\neg\psi) = [\![\mathcal{M}]\!](\psi) \to [\![\mathcal{M}]\!](\bot)$$

根据 $\to$ 的定义，我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\psi) \wedge [\![\mathcal{M}]\!](\neg\psi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\bot)$$

根据归纳假设，我们有 $[\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\psi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\psi)$，再根据 $\to$的泛性质，可以得出

$$[\![\mathcal{M}]\!](\neg\psi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\neg\kappa(\psi))$$

因此 $[\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\varphi))$。
· 对于映射 κ。根据定义，我们有

$$[\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\neg\psi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi)) \to [\![\mathcal{M}]\!](\bot)$$

根据 $\to$的定义，我们得到

$$[\![\mathcal{M}]\!](\rho(\psi)) \wedge [\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\neg(\psi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\bot)$$

根据归纳假设，我们有 $[\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\neg\psi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\neg\psi)$，再根据 $\rightarrow$的泛性质，我们可以得出

$$[\![\mathcal{M}]\!](\kappa(\neg\psi)) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\neg\psi)$$

□

定义映射 τ： $\Phi \rightarrow \Phi$ 如下:

$$\tau : \begin{cases} \Phi \rightarrow \Phi \\ \varphi \mapsto \begin{cases} \chi & \text{if } \rho(\varphi) = \varphi \\ \rho(\varphi) & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

其中 χ是一个重言式。
命题 14. 对每个公式 φ，都有:

- 扩张性。 $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\tau(\varphi))$
- 穷尽性。存在 $k \in$自然数集，使得 $Mod(\tau^k(\varphi)) = Mod$

算子 τ 是一个扩张算子，但不是膨胀。

证明。显然，穷尽性成立。设 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi)$。根据语义的定义，这意味着 $[\![\mathcal{M}]\!](\varphi) = Id_X$。如果 φ 是命题公式，我们知道 $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\Diamond\varphi)$。否则，根据命题 13，我们有 $[\![\mathcal{M}]\!](\varphi) \preceq_X [\![\mathcal{M}]\!](\rho(\varphi))$，于是 $[\![\mathcal{M}]\!](\rho(\varphi)) = Id_X$。□

我们定义如下修正算子 $\circ$:

$$\varphi \circ \psi = \tau^n(\varphi) \wedge \psi$$

其中 $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \tau^k(\varphi) \wedge \psi \text{ 相容}\}$ 且 $\tau^n(\varphi) = \tau(\overbrace{\ldots\tau}^{n \text{ times}}(\varphi)\ldots)$.

命题 15。算子 $\circ$ 满足 AGM 公设（$G1$）-（$G3$）、（$G4$'）和（$G5$）。

证明。该证明与命题 12 的证明基本相似。 □

极小性结果。在此前的一篇论文中， [3], 我们独立于任何逻辑，证明了一个极小化结果；该结果最初由 H. Katsuno 和 A.- O. Mendelzon [40]在命题逻辑框架下证明。这个结果是一个表示定理，意味着满足 AGM 公设的修正算子会引发极小变化，也就是说， $\varphi\circ\psi$ 的模型是ψ 的模型中，根据某种用于衡量模型之间

接近程度的距离而言最接近{v5}的模型。该结果基于忠实赋值这一概念，其定义如下所述。
定义 9（忠实赋值）。赋值是一个映射，它为每个公式 φ a 指定一个定义在模型上的二元关系 $\preceq_\varphi$ 。如果该赋值满足以下两个条件，我们就称它是忠实的（FA）：

(1) 如果 $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in Mod(\varphi)$，那么 $\mathcal{M} \not\prec_\varphi \mathcal{M}'$(2) 对每个 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi)$ 以及每个模型 $\mathcal{M} \notin Mod(\varphi)$，都有 $\mathcal{M} \prec_\varphi \mathcal{M}'$。

（$\mathcal{M} \prec_\varphi \mathcal{M}'$ 表示 $\mathcal{M} \preceq_\varphi \mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{M}' \not\preceq_\varphi \mathcal{M}$）。
命题16。修正算子 $\circ$满足 AGM 公设，当且仅当存在一个 FA，将每个公式 φ 映射到一个二元关系 $\preceq_\varphi$，使得对每个公式 ψ

$$Mod(\varphi \circ \psi) = Min(Mod(\psi), \preceq_\varphi)$$

其中 $Min(Mod(\psi), \preceq_\varphi) = \{\mathcal{M} \in Mod(\psi) \mid \forall \mathcal{M}' \in Mod(\psi)\ \mathcal{M}' \not\prec_\varphi \mathcal{M}\}.$

命题16的证明见附录。它与 [3] 中给出的总体结果（见定理 1）基本相似，只是此处的结果涉及公式，而非理论。因此，证明中需要重新定义一个特定的 FA。 [3] 中用于证明这一表示定理的 FA，是对原论文 [40], 提出的 FA 的改编；但后者无法适用于模态逻辑 [6]的框架。

6.2 收缩

信念变更领域中考虑的其他重要算子是收缩算子 [6]。与修正算子不同，收缩算子的目标是移除新信息。

利用上一小节中定义修正算子时得到的结果，我们现在可以通过 Harper恒等式 [36], 按以下方式定义收缩算子：

$$\varphi \dot{-} \psi = (\varphi \circ \neg\psi) \vee \varphi \qquad \textbf{(Harper identity)}$$

良定义的收缩算子应满足以下公设： [7]

(C1) $\varphi \vdash \varphi \dot{-} \psi$

[6] 原因在于，与命题逻辑不同，模型的有效模态公式集合不一定能由单个模态公式定义。[7] 我们按照 [26]中的方式给出公设的表述。

(C2) 若 $\varphi \nvdash \psi$，则 $\varphi \dot{-} \psi \vdash \varphi$(C3) 若 $\varphi \dot{-} \psi \vdash \psi$，则 $\vdash \psi$(C4) 若 $\varphi \vdash \psi$，则 $(\varphi \dot{-} \psi) \wedge \psi \vdash \varphi$(C5) 若 $\psi_1 \equiv \psi_2$ 则 $\varphi \dot{-} \psi_1 \equiv \varphi \dot{-} \psi_2$(C6) $\varphi \dot{-} (\psi \wedge \beta) \vdash (\varphi \dot{-} \psi) \vee (\varphi \dot{-} \beta)$ (C7) 若 $\varphi \dot{-} (\psi \wedge \beta) \nvdash \psi$，则 $\varphi \dot{-} \psi \vdash \varphi \dot{-} (\psi \wedge \beta)$

现在我们可以得出以下结果。根据命题 15 以及修正与收缩之间对偶性的标准事实，其证明可直接推出 [6]:

命题17。设 $\dot{-}$是由 Harper 恒等式定义的算子，其中$\circ$ 是命题 15 中的修正算子。那么， $\dot{-}$满足 (C1-C7)。

6.3 合并

当各方的信念发挥对称作用时，另一个广受关注的问题是信念合并，亦称融合。设 $\varphi_1 ... \varphi_m$ 为表示智能体信念的 m 公式。与修正类似，这些信念的融合可以通过膨胀 δ 来定义，或者更好地说，通过 τ 算子（按第6.1节中的方式定义）来定义:

$$Merging(\varphi_1 ... \varphi_m) = \tau^n(\varphi_1) \wedge ... \wedge \tau^n(\varphi_m)$$

其中 τ 的定义与修正中的定义相同，并且

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \wedge_{i=1}^{m} \tau^k(\varphi_i) \text{ is consistent}\}$$

已有研究 [21,24] 表明，基于膨胀的这种合并等价于一种由特定距离和聚合函数定义的合并算子，并满足 [41], 中引入的一组理性公设，但语法独立性除外，因为 τ中涉及句法运算。 [8]

[8] 当然，如果我们将融合定义为

$$Merging(\varphi_1 ... \varphi_m) = \Diamond^n(\varphi_1) \wedge ... \wedge \Diamond^n(\varphi_m)$$

那么， [41] 中的所有理性公设都得以满足，因为语法完全独立。

6.4 溯因

溯因是这样一个过程：给定理论 T和观察 φ，寻找最佳解释 ψ，使得 $T \cup \{\psi\} \models \varphi$。关于 T 的 φ，有许多候选解释。在逻辑框架中，遵循我们在 [4]中的先前工作（该工作不依赖特定逻辑来研究溯因），我们也将把溯因作为一种推理形式来研究。直观地说，寻找关于 T 的 φ的候选解释，就是在保持与 φ相容的同时，切割／侵蚀 T 的模型类。因此，溯因可以被视为修正的对偶，因而其过程是在 Mod（$T \cup \{\varphi\}$）中尽可能多地进行切割，同时保留极小性性质。为此，我们提出将 [4] 中发展的抽象方法实例化到我们的范畴形态逻辑框架 [9]中。在直觉主义框架中，为了绕开公式缺少范式这一问题，我们提出如下映射ζ： $\Phi \to \Phi$： 令 χ 为一个矛盾式

$$\zeta : \begin{cases} \Phi \to \Phi \\ \varphi \mapsto \begin{cases} \chi & \text{if } \kappa(\varphi) = \varphi \\ \kappa(\varphi) & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

其中， κ 是第6.1节中定义的映射。
命题 18. 映射 ζ 对每个相容公式 $\varphi \in \Phi$ 均满足：

- 反扩张性。 $Mod(\zeta(\varphi)) \subseteq Mod(\varphi)$
- 真空性。存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $Mod(\zeta^k(\varphi)) = \emptyset$。

在 [4], 中，满足此类条件的映射称为收缩。

证明。 ζ是反扩张的，因为根据命题 13 κ也是如此。真空性质成立，因为经过有限步，我们总能到达矛盾式 χ。 □

根据 [4], 、 ζ，我们可以如下定义两个模型类族 $\mathcal{C}_{lcr}$ 和 $\mathcal{C}_{lnr}$ [10]：设 T 为一个有限的模态公式集合， φ 为一个公式，且 $T \cup \{\varphi\}$ 相容

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{lcr} = \{Mod(\zeta^k(\bigwedge T) \wedge \varphi) \mid k \in \mathbb{N}, Mod(\zeta^k(\bigwedge T) \wedge \varphi) \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{lnr} = \{Mod(\zeta^k(\bigwedge T \wedge \varphi)) \mid k \in \mathbb{N}, Mod(\zeta^k(\bigwedge T \wedge \varphi)) \neq \emptyset\}$$

[9] [4] 中的抽象方法已应用于模态逻辑的情形，但采用的是集合论框架。在这里，与之前一样，我们必须将这一实例化调整为直觉主义框架。[10] lcr 表示最后一致收缩， lnr 表示最后非平凡收缩

其中，若 $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$，则 $\bigwedge T = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$。

请注意，由于真空性质，在 $\mathcal{C}_{lcr}^{\varphi}$ 和 $\mathcal{C}_{lnr}^{\varphi}$ 中都存在唯一的有限大小极大链。因此，$\mathcal{C}_{lcr}^{\varphi}$ 和$\mathcal{C}_{lnr}^{\varphi}$ 对于集合论包含关系都是闭的，且都是良基的。在 [4], 中，满足这些条件的任何子族都称为切割。

这两个切割导出以下两个解释关系：

$$\varphi \rhd_{\mathcal{C}_{lcr}} \psi \Longleftrightarrow \begin{cases} Mod(T \cup \{\psi\}) \neq \emptyset, \text{ and} \\ Mod(T \cup \{\psi\}) \subseteq Mod(\zeta^n(\bigwedge T) \wedge \varphi) \end{cases}$$

其中 $n = \sup\{k \in \mathbf{N} \mid Mod(\zeta^k(\bigwedge T) \wedge \varphi) \neq \emptyset\}$;

$$\varphi \rhd_{\mathcal{C}_{lnr}} \psi \Longleftrightarrow \begin{cases} Mod(T \cup \{\psi\}) \neq \emptyset, \text{ and} \\ Mod(T \cup \{\psi\}) \subseteq Mod(\zeta^m(\bigwedge T \wedge \varphi)) \end{cases}$$

其中 $m = \sup\{k \in \mathbf{N} \mid Mod(\zeta^k(\bigwedge T \wedge \varphi)) \neq \emptyset\}$。

根据 [4], 中的定理 2、3 和 4，可直接得出这两个解释关系满足 [53] 中定义的全部或部分（理性）公设，我们将其汇总于表1。

理性公设	$\rhd_{\mathcal{C}_{lcr}}$	$\rhd_{\mathcal{C}_{lnr}}$
LLE 和 RLE	√	√
RS	√	√
E-Con	√	√
ROR	√	√
E-反身性	√	√
E-CM	√	
E-C-Cut	√	

表1
理性公设之间的联系，以及 [53] 和 $\rhd_{\mathcal{C}}$所满足的性质 $_{lcr}$ and $\rhd_{\mathcal{C}_{lnr}}$.

[53] 的原始公设见表2。

6.5 空间推理：RCC-8

定性空间推理的定义域中有一部分涉及空间实体之间的拓扑关系。此处我们提议应用已定义的

LLE：如果 $\vdash_\Sigma \alpha \leftrightarrow \alpha'$ 且 $\alpha \rhd \gamma$，那么 $\alpha' \rhd \gamma$。RLE：如果 $\vdash_\Sigma \gamma \leftrightarrow \gamma'$ 且 $\alpha \rhd \gamma$，那么 $\alpha \rhd \gamma'$。E-CM：如果 $\alpha \rhd \gamma$ 且 $\gamma \vdash_\Sigma \beta$，那么 $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$。E-C-Cut：如果 $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ 且 $\forall \delta\, [\alpha \rhd \delta \Rightarrow \delta \vdash_\Sigma \beta\,]$，那么 $\alpha \rhd \gamma$。RS：如果 $\alpha \rhd \gamma$、$\gamma' \vdash_\Sigma \gamma$ 且 $\gamma' \nvdash_\Sigma \bot$，那么 $\alpha \rhd \gamma'$。ROR：如果 $\alpha \rhd \gamma$ 且 $\alpha \rhd \delta$，那么 $\alpha \rhd (\gamma \vee \delta)$。E-反身性：如果 $\alpha \rhd \gamma$，那么 $\gamma \rhd \gamma$。E-Con：$\nvdash_\Sigma \neg\alpha$ 当且仅当存在 γ，使得 $\alpha \rhd \gamma$。
表2 根据理论 Σ表述的 [53], 的理性公设。

形态逻辑转向部分整体拓扑学，更准确地说，是转向 RCC-8 模型 [56]。该理论允许通过连接谓词 C 定义若干拓扑关系，并且在文献中常用一阶逻辑对其进行形式化。下面回顾 RCC-8 理论的八种关系（不包括其形式化定义）：

- 非连接 DC。 $DC(XY)$ 表示区域 X 与区域 Y 不连接;
- 外部连接 EC。 $EC(X,Y)$ 表示 X 与 Y 外部连接（与邻接的概念相近）;
- 部分重叠 PO。 $PO(X,Y)$ 表示 X 与 Y 相交但不相等;
- 切向真部分（及其逆关系）TPP（及 TPP_i）。$TPP(X,Y)$（及 $TPP_i(X,Y)$）表示 X（及 Y）是 Y（及 X）的切向真部分;
- 非切向真部分（及其逆关系） $NTPP$（及 $NTPP_i$）。$NTPP(X,Y)$（及 $NTPP_i(X,Y)$）表示 X（及 Y）是 Y（及 X）的非切向真部分;
- 相等 EQ。 $EQ(X,Y)$ 表示 X 和 Y 是相同的区域。

如 [5,13,16], 所示，本文定义的形态逻辑为其中一些关系提供了简单的公理化。

设 $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$ 是一个模型。 X 的子对象是空间实体（即区域），公式则是这些实体的组合。RCC-8关系可以表述如下:

- $C(X,Y)$: $\varphi \wedge \psi$;
- $DC(XY)$: $\neg(\varphi \wedge \psi)$;
- $EC(X,Y)$: $\neg(\varphi \wedge \psi)$, 且 $\Diamond\varphi \wedge \psi$ 和 $\varphi \wedge \Diamond\psi$;
- $PO(X,Y)$: $\varphi \wedge \psi$ 且 $\varphi \wedge \neg\psi$ 且 $\neg\varphi \wedge \psi$;
- $TPP(X,Y)$: $\varphi \Rightarrow \psi$ 且 $\Diamond\varphi \wedge \neg\psi$;
- $NTPP(X,Y)$: $\varphi \Rightarrow \psi$ 和 $\varphi \Rightarrow \Box\psi$;

- $EQ(X,Y)$: $\varphi \Leftrightarrow \psi$。

其中， φ 和 ψ 是分别定义区域 X 和 Y的公式。下面详细说明其中一些公式的含义:

- 对于 EC: 两个区域 X 和 Y 不相交，但只要将其中一个膨胀（使用 $\Diamond$），它们就会相交。
- 对于 TPP: X包含于 Y，但 X的膨胀（由 $\Diamond\varphi$表示）不包含于其中。
- 对于 $NTPP$: X包含于 Y，也包含于 Y的腐蚀结果中。

其他关系的含义都很直观。

7 结论

本文在托扑框架中进一步探讨了 MM 与模态逻辑之间的紧密联系，这一联系于二十年前在 [13] 中首次提出。拓扑斯的优势在于，它们将空间和子空间的概念加以推广，进而涵盖了大量已被证明有助于知识表示与推理的代数结构。

随后，我们从拓扑斯视角推广了 MM，并将其扩展为：对于拓扑斯 $\mathcal{C}$ 中的对象 X，将幂对象 PX 扩展到 PPX，以此定义结构邻域。接着，我们证明，腐蚀和膨胀这两种形态学运算具备使 PX 成为内模态代数的所有性质，因此可以用于在拓扑斯语境下为构造性模态逻辑赋予邻域语义。

据我们所知，MM 从未脱离特定结构进行独立研究。在完备格语境下，基本 MM 算子的定义并不涉及代数定义中的结构元素概念。因此，我们的工作首次提出了脱离特定结构（集合、图等）对 MM 进行推广。将结构元素和结构邻域的概念纳入考量，使我们得以在拓扑斯框架中推广克里普克模型和邻域模型的概念。

所提出的基本算子扩展依赖于定义为态射 $X \to PX$ 的结构元素。随后，将使用结构元素的膨胀和腐蚀定义为具有特定性质的态射 $PX \to PX$。研究表明，膨胀、腐蚀及其复合都具有与经典形态学中类似的性质（伴随、单调性.....）。值得注意的是，本文主要结果的证明极大地受益于托扑斯的内在逻辑。鉴于其基础逻辑是直觉主义逻辑，作为未来的工作，

使用形式化证明管理系统（如 Coq[11]）来验证这些证明，或许会很有意义。

最后，我们引入了结构邻域和拓扑邻域，由此得到模态代数，并为其提出了一个可靠且完备的蕴涵系统。

由此，我们提出了将其应用于人工智能中的典型推理问题，例如修正、合并、溯因，以及基于RCC-8关系的空间推理。

现在让我们谈谈未来工作的其他一些方向。

通过谓词提升的概念统一形态学算子。根据双射对应 $\mathbf{Hom}(X, PY) \simeq \mathbf{Sub}(X \times Y)$，结构元素和结构邻域可以视为映射，它们将每个元素 x 与和它存在关系的元素相匹配。通过余代数的概念 [58]可以对其进行推广。在计算机科学中，余代数已在 Set（集合范畴）中得到研究；在这一框架下，谓词提升的概念 [51] 被确认为模态算子语义的基础概念。谓词提升的概念可以扩展到任意托扑斯。具体来说，设有一个托扑斯 $\mathcal{C}$和一个函子 T：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}$。那么，谓词提升就是一个自然变换$\lambda$：$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P} \circ T$（请回忆，$\mathcal{P}$ 是第 2 节中介绍的反变函子）。于是，结构元素 b 定义为一个态射（余代数）b：$X \to T(X)$。如果我们将态射 b^{-1}：$PT(X) \to PX$定义如下：

$$b^{-1}(Y) = \{x : X \mid \exists y.y \in_{T(X)} Y \wedge b(x) = y\}$$

形态学算子 $op[b]$：$PX \to PX$由此定义：$op[b] = b^{-1} \circ \lambda_X$。由此，若形态学算子 $op[b]$ 与 $\wedge$（分别与 $\vee$）可交换，则称其为腐蚀（分别为膨胀）。

更深入地研究这一统一框架，应能让我们将余代数理论推广到 Set 范畴以外的其他拓扑斯，并进一步推广数学形态学及其在模态逻辑中的应用。除此之外，这还将使我们能够在更抽象的层面研究双模拟等概念，以及在余代数理论中得到广泛研究的相关保留结果。

扩展到模糊情形。在定性空间推理中引入不确定性是惯常做法。因此，作为未来的工作，我们建议将我们的方法扩展到模糊情形。首先需要在

[11] https://coq.inria.fr/

托扑斯中引入模糊性。有一些研究表明，模糊集通常不构成托扑斯 [10,31,54], ，但将托扑斯扩展到模糊情形的研究却很少。据我们所知，这一做法仅在 [55]中提出过。因此，我们可以借鉴这项工作，在托扑斯中引入模糊性。这样，我们便能在这一框架下，将基于结构元素的腐蚀和膨胀扩展到模糊情形。在集合论框架下，自早期研究 [9,22] 以来，文献中已提出了若干针对带结构元素的模糊集的数学形态学定义（综述参见 [14,23,47] ）。我们可以借鉴 [14,15,59] 中从托扑斯视角出发、运用合取和蕴涵所发展的方法。更一般地，我们可以用任意格 L替代传统的 $[0,1]$ 区间，从而为双极信息开辟道路（正向信息包括偏好、论据、观察等，负向信息则包括约束、攻击等）。这有望应用于基于偏好的推理、论证、空间推理等领域。

预托普斯结构。有些空间结构并非拓扑斯，而只是预托普斯。最具代表性的例子是紧豪斯多夫空间范畴。预托普斯的性质（正合性和扩张性）使其成为一种非常类似集合的范畴。此外，它们还具有内部逻辑。要将我们的工作扩展到这类结构，难点在于如何绕过幂对象的缺失；本文提出的许多概念都建立在这一概念之上。

参考文献

[1] M. Aiello、G. Bezhanishvili、I. Bloch 和 V. Goranko。《物理空间逻辑——从古代到当今》。Synthese，186(3):619–632，2012年。[2] M. Aiello 和 B. Ottens。《关于空间推理的数学形态逻辑视角》。载于国际人工智能联合会议（IJCAI'07），第205–211页，2007年。[3] M. Aiguier、J. Atif、I. Bloch 和 C. Hudelot。《信念修正、最小改变与松弛：基于满足系统的通用框架及其在描述逻辑中的应用》。人工智能，256:160–180，2018年。[4] M. Aiguier、J. Atif、I. Bloch 和 R. Pino P´erez。《基于满足系统、切割与收缩的任意逻辑中的解释关系》。《国际近似推理杂志》，102:1–20，2018年。[5] M. Aiguier 和 I. Bloch。《分层机构中基于数学形态学的逻辑对偶概念：空间推理应用》。《应用非经典逻辑杂志》，29(4):392–429，2019年。

[6] C. Alchourron、P. Gardenfors 和 D. Makinson。《论理论变更逻辑》。《符号逻辑杂志》，50(2):510–530，1985年。[7] N. Alechina、M. Mendler、V. de Paiva 和 E. Ritter。《构造性S4模态逻辑的范畴语义与Kripke语义》。载于第15届国际计算机科学逻辑研讨会，LNCS第2142卷。施普林格出版社，2003年。[8] S. Awodey、K. Kishida 和 H.-C. Kotzsch。《高阶模态逻辑的拓扑斯语义》。《逻辑与分析》，228:591–636，2014年。[9] B. De Baets。《模糊数学形态学中的幂等闭运算与开运算》。载于北美模糊信息处理学会（NAFIPS），第228–233页。IEEE计算机学会，1995年。[10]M. Barr。《模糊集理论与拓扑斯理论》。《加拿大数学通报》，29(4)，1986年。[11]M. Barr 和 C. Wells。《拓扑斯、三元组与理论》。施普林格出版社，1985年。[12]M. Barr 和 C. Wells。《计算机科学范畴论》。Prentice-Hall，1990年。[13] I. Bloch。《用于定性空间推理的基于数学形态学的模态逻辑》。《应用非经典逻辑杂志》，12(3-4):399–423，2002年。[14]I. Bloch。《模糊数学形态学中的对偶性与伴随：模糊腐蚀与膨胀的一般形式》。《模糊集与系统》，160:1858–1867，2009年。[15]I. Bloch。《双极模糊集上的数学形态学：一般代数框架》。《国际近似推理杂志》，53:1031–1061，2012年7月。[16]I. Bloch、S. Blusseau、R. Pino P´erez、E. Puybareau 和 G. Tochon。《数学形态学与人工智能之间的若干关联》。《离散几何与数学形态学国际会议》，LNCS第12708卷，第457–469页。施普林格出版社，2021年。[17] I. Bloch 和 A. Bretto。《超图上的数学形态学及其在相似性与正核中的应用》。《计算机视觉与图像理解》，117:342–354，2013年。[18]I. Bloch、A. Bretto 和 A. Leborgne。《基于赋值和数学形态学算子的超图鲁棒相似性》。《离散应用数学》，183:2–19，2015年。[19]I. Bloch、H. Heijmans 和 C. Ronse。《空间逻辑手册》，章节“数学形态学”，第857–947页。施普林格出版社，2007年。[20]I. Bloch 和 J. Lang。《迈向数学形态逻辑》。载于 B. Bouchon-Meunier、J. Gutierrez-Rios、L. Magdalena 和 R. Yager 编，《构建智能系统的技术》，第367–380页。施普林格出版社，2002年。

[21]I. Bloch、J. Lang、R. Pino P´erez 和 C. Uzc´ategui。知识动态的形态学：修正、融合与溯因。技术报告 arXiv:1802.05142，arXiv cs.AI，2018年2月。[22]I. Bloch 和 H. Maˆıtre。构建模糊数学形态学：替代方法。载于国际模糊系统会议（FUZZIEEE），第1303–1308页。IEEE计算机学会，1993年。[23]I. Bloch 和 H. Maˆıtre。模糊数学形态学：比较研究。《模式识别》，28(9):1341–1387，1995年。[24]I. Bloch、R. Pino-P´erez 和 C. Uzcategui。知识动态的统一处理。载于知识表示与推理原理国际会议（KR），第329–337页。AAAI出版社，2004年。[25]O. Caramello 和 L. Lafforgue。本体、知识表示与格罗滕迪克拓扑斯。受邀报告，语义学研讨会，拉格朗日中心，华为，2022年。[26]T. Caridroit、S. Konieczny 和 P. Marquis。命题逻辑中的收缩。《国际近似推理杂志》，80(2):428–442，2017年。[27]J. Cousty、L. Najman、F. Dias 和 J. Serra。图上的形态学滤波。《计算机视觉与图像理解》，117:370–385，2013年。[28]J. Cousty、L. Najman 和 J. Serra。图空间中的一些形态学算子。载于 M. Wilkinson 和 J. Roerdink 编，《国际数学形态学研讨会》（ISSM09），第5720卷（LNCS），第149–160页。施普林格出版社，2009年。[29] F. Dias、J. Cousty 和 L. Najman。单纯复形空间上的一些形态学算子。载于计算机图像离散几何（DGCI11），第6607卷（LNCS），第441–452页。施普林格出版社，2011年。[30]W. Dzik、J. Jarvinen 和 M. Kondo。带伽罗瓦连接的直觉主义命题逻辑。《IGPL逻辑杂志》，18(6)，2010年。[31]M. Eytan。拓扑斯逻辑的一个视角。《模糊集与系统》，5:47–67，1981年。[32]M. Fairtlough 和 M. Mendler。命题松弛逻辑。《信息与计算》，137，1997年。[33]N. Gorogiannis 和 A. Hunter。使用膨胀算子合并一阶知识。载于第五届信息与知识系统基础国际研讨会（FoIKS'08），第4932卷（LNCS），第132–150页，2008年。[34]A. Goy、M. Aiguier 和 I. Bloch。从结构元素到结构邻域系统。载于数学形态学及其在信号与图像处理中的应用——第14届国际数学形态学研讨会（ISMM 2019），第11564卷（LNCS），第16–28页，2019年。

[35]A. Grothendieck。关于同调代数的若干问题。《东北数学杂志》，9:119–221，1957年。[36] W.L. Harper。理性概念变迁。载于科学哲学协会双年会（PSA），第2卷，第462–494页，美国密歇根州东兰辛，1977年。科学哲学协会。[37]H.J.A.M. Heijmans 和 C. Ronse。数学形态学的代数基础。第一部分：膨胀与腐蚀。《计算机视觉、图形与图像处理》，50:245–295，1990年。[38] L. Henkin。一阶函数演算的完备性。《符号逻辑杂志》，14(3):159–166，1949年。[39]P. Johnstone。《大象素描：拓扑斯理论纲要》。第1卷和第2卷。牛津大学出版社，2002年。[40]H. Katsuno 和 A.-O. Mendelzon。命题知识库修正与最小改变。《人工智能》，52:263–294，1991年。[41] S. Konieczny 和 R. Pino P´erez。基于逻辑的合并。《哲学逻辑杂志》，40(2):239–270，2011年。[42]F.-W. Lawvere。拓扑斯、代数几何与逻辑导论。载于哈利法克斯会议，《数学讲义》第274卷，第1–12页。施普林格，1972年。[43] S. MacLane。《工作数学家的范畴论》。施普林格出版社，1971年。[44]S. McLane 和 I. Moerdijk。《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论初步导论》。施普林格科学与商业媒体，2012年。[45]M. Menni 和 C. Smith。伴随性模式。《哲学逻辑杂志》，42(1)，2013年。[46]F. Meyer 和 J. Stawiaski。图上的形态学与最小生成树。载于 M. Wilkinson 和 J. Roerdink 编，《国际数学形态学研讨会》（ISSM09），第5720卷（LNCS），第161–170页。施普林格出版社，2009年。[47]M. Nachtegael 和 E. E. Kerre。数学形态学的经典与模糊方法。载于 E. E. Kerre 和 M. Nachtegael 编《图像处理中的模糊技术》，《模糊性与软计算研究》第1章，第3–57页。Physica-Verlag，施普林格，2000年。[48]L. Najman 和 H. Talbot。《数学形态学：从理论到应用》。ISTE-Wiley，2010年6月。[49]G. Osius。初等拓扑斯中的逻辑与集合论工具。载于 F.-W. Lawvere、C. Mauer 和 G.-C. Wraith 编《模型论与拓扑斯》，第297–346页。施普林格出版社，2002年。[50]E. Pacuit。模态逻辑的邻域语义。施普林格，2017年。

[51]D. Pattinson。《余代数模态逻辑：局部后承的可靠性、完备性与可判定性》。理论计算机科学，309(1)：177–193，2003。[52]F. Pfenning 和 R. Davies。《模态逻辑的判断式重构》。计算机科学中的数学结构，11(4)，2001。[53]R. Pino-P´erez 和 C. Uzc´ategui。《跳向解释而非妄下结论》。人工智能，111(2)：131–169，1999。[54] A. M. Pitts。《模糊集不构成拓扑斯》。《模糊集与系统》，8：101–104，1982。[55]S. Puechmorel。《拓扑斯中的模糊性》。载于 IEEE 国际模糊系统会议（FUZZ-IEEE），1998。[56]D. Randell、Z. Cui 和 A. Cohn。《一种基于区域与连接的空间逻辑》。载于 B. Nebel、C. Rich 和 W. Swartout（编），《知识表示与推理原理》KR'92，第 165–176 页，圣马特奥，加利福尼亚州，1992。Kaufmann。[57]G. Reyes 和 H. Zolfaghari。《双海廷代数、拓扑斯与模态》。《哲学逻辑杂志》，25：25–43，1996。[58]J. J. M. M. Rutten。《泛余代数：系统理论》。理论计算机科学，249(1)：3–80，2000。[59]P. Sussner。《数学形态学视角下的格模糊变换》。《模糊集与系统》，288：115–128，2016。[60] J. van Benthem 和 G. Bezhanishvili。《空间逻辑手册》，章节《空间模态逻辑》，第 217–298 页。施普林格出版社，2007。[61]S. Vickers。《空间逻辑手册》，章节《作为空间的局部与拓扑斯》，第 429–496 页。施普林格出版社，多德雷赫特，2007。[62]L. Vincent。《图与数学形态学》。《信号处理》，16(4)：365–388，1989。[63]D. Wijesekera。《构造性模态逻辑 I》。《纯粹与应用逻辑年刊》，50，1990。

托扑斯中的逻辑与内部语言

拓扑斯的一个有趣特征是，我们可以对拓扑斯中的对象和态射进行推理，“仿佛它们是集合和函数” [39,42]。这是因为我们可以在拓扑斯中进行逻辑推理。事实上，我们可以在拓扑斯中定义逻辑联结词。这里，我们回顾命题联结词的定义 $\{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow\}$以及常量的定义 $true$, $false$。

• 根据子对象分类器的定义，我们有一个单态射 $true:\ \mathbb{1} \rightarrowtail \Omega$，进而还有一个态射$(true, true):\ \mathbb{1} \rightarrowtail \Omega \times \Omega$，它也是一个单态射。因此，根据子对象分类器的定义，$\wedge:\ \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$是它的特征态射。

• $\vee : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ 分类态射$[(true, Id_\Omega), (Id_\Omega\, true)] : \Omega + \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$ 的像，其中 $+$表示余积。

• 态射 $\Rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ 是 $\preceq \rightarrowtail \Omega \times \Omega$ 的特征态射，其中 $\preceq$ 是 $\wedge$ 与第一参数上的投影$p_1 : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ 的等化子。

• 最后，唯一的态射 $\emptyset \rightarrowtail \mathbb{1}$ 是一个单态射。记其特征态射为$false:\ \mathbb{1} \rightarrow \Omega$。于是，$\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ 定义为复合态射 $\Rightarrow \circ (Id_\Omega \times false)$。

因此，幂对象 $\Omega = P\mathbb{1}$ 是一个内海廷代数[12]，所以逻辑是直觉主义的。事实上，通过双射 $\mathrm{Sub}(X \times Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, PY)$，对于托扑斯 $\mathcal{C}$中的每个对象 X，PX都是一个内海廷代数。于是，我们可以定义偏序 $\preceq_X$，将其视为 $\mathcal{C}$ 的一个对象，使得$\preceq_X$是 $\wedge:\ PX \times PX \rightarrow PX$与 $p_1:\ PX \times PX \rightarrow PX$的等化子，其中$p_1$ 是对偶组第一参数上的投影。

对于每个托扑斯 $\mathcal{C}$，我们都可以定义其内部语言 $\mathcal{L}_\mathcal{C}$，它由 $\mathcal{C}$的对象所定义的类型组成，并据此按如下方式定义项：

- $true:\ X$;
- $x : X$，其中 x 是变量，X 是类型;
- $f(t):\ Y$，其中 $f:\ X \rightarrow Y$是 $\mathcal{C}$ 的态射，$t:\ X$ 是项;
- $< t_1, \ldots, t_n >:\ X_1 \times \ldots \times X_n$，如果对于每个 i，$1 \leq i \leq n$，$t_i:\ X_i$都是项;
- $(t)_i:\ X_i$，如果 $t:\ X_1 \times \ldots \times X_n$是项;
- $\{x:\ X \mid \alpha\}:\ PX$若 $\alpha : \Omega$是一个项;
- $\sigma = \tau : \Omega$，若 σ 和 τ是同一类型的项;
- $\sigma \in_X \tau : \Omega$，若 $\sigma:\ X$和 $\tau:\ PX$是项;
- $\sigma \preceq_X \tau : \Omega$，若 $\sigma, \tau:\ PX$是项;
- $\varphi\ @\ \psi : \Omega$，若 $\varphi : \Omega$和 $\psi : \Omega$是满足 $@ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$的项;

[12]托扑斯中的内海廷代数是一个内格 L，它配备两个态射 $\wedge, \vee:\ L \times L \rightarrow L$，使得表达 $\wedge$和 $\vee$标准定律的图表可交换；还配备顶和底，它们是态射 $\bot, \top:\ \mathbb{1} \rightarrow L$，满足 $\wedge \circ (Id_L \times \top) = Id_L$和 $\vee \circ (Id_L \times \bot) = Id_L$；此外还配备一个态射 $\Rightarrow:\ L \times L \rightarrow L$，该态射满足由以下恒等式给出的图表：

- $x \Rightarrow x = \top$
- $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$和 $y \wedge (x \Rightarrow y) = y$
- $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$

- $\neg\varphi:\ \Omega$ 若 $\varphi:\ \Omega$ 是一个项;
- $Qx.\varphi:\Omega$，如果 $x:\ X$ 和 $\varphi:\Omega$ 是项，且 $Q\in\{\forall,\exists\}$。

类型为 Ω 的项称为公式。

项的语义取决于其类型。因此，类型为$X\neq\Omega$ 的项的语义将由态射定义，而类型为 Ω 的项将解释为子对象。

如果项或公式的每个自由变量都出现在$\vec{x}$中，我们就称变量序列 $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ 是该项或公式的合适上下文。记 $X_{\vec{x}}$ 为当 $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ 且每个 $x_i:\ X_i$ 时的积 $X_1\times\ldots\times X_n$。那么，上下文 $\vec{x}$ 中 $t:\ X$ 的语义（记作 $[\![t]\!]_{\vec{x}}$）是一个从 $X_{\vec{x}}$ 到 X的态射。它按照 t的结构递归定义如下:

- $[\![x_i:\ X_i]\!]_{\vec{x}}=p_i$ 其中 $p_i:\ X_{\vec{x}}\to X_i$ 是关于第 i^{th} 个参数的显然投影;

- $[\![f(t)]\!]_{\vec{x}}=f\circ[\![t]\!]_{\vec{x}}$;
- $[\![<t_1,\ldots,t_n>]\!]_{\vec{x}}=([\![t_1]\!]_{\vec{x}},\ldots,[\![t_n]\!]_{\vec{x}})$;
- $[\![(t)_i]\!]_{\vec{x}}=p_i\circ[\![t]\!]_{\vec{x}}$其中 p_i是元组中关于第 i^{th} 个参数的投影;
- $[\![\{x:\ X\mid\alpha\}]\!]_{\vec{x}}$ 是唯一的态射 $r:\ X_{\vec{x}}\to PX$，使得下图构成一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \in_X \\ {\scriptstyle [\![\alpha]\!]_{(x,\vec{x})}}\downarrow & & \downarrow \\ X\times X_{\vec{x}} & \xrightarrow{Id_X\times r} & X\times PX \end{array}$$

公式 φ :Ω 在上下文 $\vec{x}$ 中的语义，记作 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$，被解释为 Sub($X_{\vec{x}}$) 的一个子对象，并递归定义如下:

- $[\![true]\!]_{\vec{x}}=Id_{X_{\vec{x}}}$;
- 当 $\varphi=\sigma=\tau$ 时，则 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$ 等化 $[\![\sigma]\!]_{\vec{x}}$ 和 $[\![\tau]\!]_{\vec{x}}$;
- 当 $\varphi=\sigma\in_X\tau$ 时，则 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}:\ R\rightarrowtail X_{\vec{x}}$，其中 R 是该图表的拉回

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \in_X \\ {\scriptstyle [\![\varphi]\!]_{\vec{x}}}\downarrow & & \downarrow \\ X_{\vec{x}} & \xrightarrow[[\![\sigma]\!]_{\vec{x}}\times[\![\tau]\!]_{\vec{x}}]{} & X\times PX \end{array}$$

- if $\varphi=\sigma\preceq_X\tau$，那么 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}:\ R\rightarrowtail X_{\vec{x}}$ 其中 R 是该图表的拉回

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \preceq_X \\ {\scriptstyle [\![\varphi]\!]_{\vec{x}}}\downarrow & & \downarrow \\ X_{\vec{x}} & \xrightarrow[[\![\sigma]\!]_{\vec{x}}\times[\![\tau]\!]_{\vec{x}}]{} & PX\times PX \end{array}$$

• 若 $\varphi = \varphi_1$ @ φ_2，则 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}} = [\![\varphi_1]\!]_{\vec{x}}$ @ $[\![\varphi_2]\!]_{x_t}$，其中 @ 是$\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ 中的算子，作用于海廷代数 Sub($X_{\vec{x}}$)；
• $[\![\neg\varphi]\!]_{\vec{x}} = \neg_{X_{\vec{x}}}([\![\varphi]\!]_{\vec{x}})$，其中 $\neg_{X_{\vec{x}}}([\![\varphi]\!]_{\vec{x}})$ 是 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$ 在 Sub($X_{\vec{x}}$) 中的伪补；

• $[\![\forall x.\varphi]\!]_{\vec{x}} = \forall_p([\![\varphi]\!]_{(\vec{x},\ x)})$ 其中 $p\colon X_{\vec{x}} \times X \to X_{\vec{x}}$ 是投影，而 $\forall_p$ 是拉回函子 p^*: Sub($X_{\vec{x}}$) $\to$Sub($X_{\vec{x}} \times X$) 的右伴随，这里将海廷代数 Sub($X_{\vec{x}}$) 和 Sub($X_{\vec{x}} \times X$) 视为范畴。

• $[\![\exists x.\varphi]\!]_{\vec{x}}$ 是 $p \circ [\![\varphi]\!]_{(\vec{x},\ x)}$ 的像，其中 p 是与上文相同的投影。

等价地，任意公式 φ : Ω 的语义都可以定义为从 $X_{\vec{x}}$ 到 Ω 的一个态射，方法是将 φ 解释为 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$的分类态射。

我们记作 $\mathcal{C} \models_{\vec{x}} \varphi$ 当 $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}} = Id_{X_{\vec{x}}}$ （$Id_{X_{\vec{x}}}$ 是 Sub($X_{\vec{x}}$) 中的顶元）。然而，要实际证明关于拓扑斯的性质，最好的方法是使用内部逻辑。对于任意逻辑，这种内部逻辑都通过一组推理规则来定义，这些规则允许我们从其他真命题推出真命题。为了更好地描述这一点，我们需要引入序列这一概念。

定义 10（序列）。给定两个公式 φ 和 ψ，序列是形如 $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ 的表达式，其含义是：在上下文 $\vec{x}$中， ψ 是 φ的逻辑后果。

请注意，如果序列 $\vec{x}$ 为空，那么我们将简单地记作 $\vdash$和 $\models$。

随后，演绎系统被定义为序列演算，即一组推理规则，这些规则允许我们从其他序列推导出一个序列（参见[39,44,49] ，其中介绍了该演绎系统）。

B 第 3.2 节的证明

B.1 命题 1（伴随）的证明

我们先回顾一个有用的引理。
引理2。

$$\varphi \Rightarrow \psi \dashv\vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \varphi$$

其中 $A \dashv\vdash B$ 是 $A \vdash B$ 和 $B \vdash A$ 的简写。

因此，命题 1 的结果基于以下两个命题。命题 19。

$$\vdash_{\vec{x}} Y \preceq_X Z \Leftrightarrow (\forall x.\ x \in_X Y \Rightarrow x \in_X Z)$$

证明。

$$\begin{aligned} Y \preceq_X Z &\vdash_{Y,Z} Y \wedge Z = Y \\ &\vdash_{Y,Z,x} x \in_X Y \wedge x \in_X Z \Leftrightarrow x \in_X Y \\ &\vdash_{Y,Z,x} x \in_X Y \Rightarrow x \in_X Z \\ &\vdash_{Y,Z} \forall x.\ x \in_X Y \Rightarrow x \in_X Z \end{aligned}$$

□

命题 20. 以下陈述成立：

$$\vdash \forall y.\ y \in_X Y \Rightarrow (\forall x.\ x \in_X b(y) \Rightarrow x \in_X \delta[b](Y))$$

证明. 利用内部逻辑中的全称量化规则和蕴含规则，这相当于证明

$$y \in_X Y \wedge y \in_X \breve{b}(x) \vdash_{Y,y,x} x \in_X \delta[b](Y)$$

（我们利用这一事实：$x \in_x b(y) \Leftrightarrow y \in_X \breve{b}(x)$）。结合膨胀的定义，应用存在量化规则即可得出结论。事实上，根据存在量化规则，我们有

$$\exists y.\ y \in_X Y \wedge y \in_X \breve{b}(x) \vdash_{Y,x} true$$

然后，根据假设引入规则，我们可以写成

$$\exists y.\ y \in_X Y \wedge y \in_X \breve{b}(x) \vdash_{Y,x} \exists y.\ y \in_X Y \wedge y \in_X \breve{b}(x)$$

接着，根据膨胀的定义，我们有

$$\exists y.\ y \in_X Y \wedge y \in_X \breve{b}(x) \vdash_{Y,x} x \in_X \delta[b](Y)$$

利用存在量化规则，这等价于

$$y \in_X Y \wedge y \in_X \breve{b}(x) \vdash_{Y,y,x} x \in_X \delta[b](Y)$$

□

注意，命题 20 中相反的蕴含 $\Leftarrow$ 同样成立。

现在很容易证明伴随性质。其证明与上述证明基本相似。

证明。命题 1：根据定义，任意对象Y的膨胀和腐蚀：PX 都定义了子对象 $\varepsilon[b](Y) \rightarrowtail X$ 和 $\delta[b](Y) \rightarrowtail X$。膨胀和腐蚀

两者的结果都是映射 $\mathsf{Sub}(X) \to \mathsf{Sub}(X)$。此外，根据命题 20，我们有

$$\vdash_Y \forall y.\, y \in_X Y \Rightarrow (\forall x.\, x \in_X b(y) \Rightarrow x \in_X \delta[b](Y))$$

根据命题 19，我们可推得

$$\vdash_Y \forall y.\, y \in_X Y \Rightarrow b(y) \preceq_X \delta[b](Y)$$

于是，我们得到以下等价关系：

$$\begin{aligned}
\vdash_{Y,Z} \delta[b](Y) \preceq_X Z &\Leftrightarrow \forall y.\, y \in_X Y \Rightarrow b(y) \preceq_X Z \\
&\Leftrightarrow \forall y.\, y \in_X Y \Rightarrow y \in_X \varepsilon[b](Z) && \text{(definition of erosion)} \\
&\Leftrightarrow Y \preceq_X \varepsilon[b](Z) && \text{(Proposition 19)}
\end{aligned}$$

□

B.2 命题 2 的证明

我们来证明腐蚀的性质。首先证明单调性：

$$\vdash_{Y,Z} Y \preceq_X Z \Longrightarrow \varepsilon[b](Y) \preceq_X \varepsilon[b](Z)$$

我们有以下蕴涵：

$$\begin{aligned}
Y \preceq_X Z \vdash_{Y,Z} \forall x.\, x \in_X \varepsilon[b](Y) &\Rightarrow b(x) \preceq Y && \text{（腐蚀的定义）} \\
&\Rightarrow b(x) \preceq Z && \text{（} \preceq_X \text{ 的假设和传递性）} \\
&\Rightarrow x \in_X \varepsilon[b](Z) && \text{(definition of erosion)} \\
&\Rightarrow \varepsilon[b](Y) \preceq_X \varepsilon[b](Z) && \text{(Proposition 19)}
\end{aligned}$$

下面证明腐蚀与合取的交换性：

$$\vdash \forall Y.\, \forall Z.\, \varepsilon[b](Y \wedge Z) = \varepsilon[b](Y) \wedge \varepsilon[b](Z)$$

根据腐蚀的定义，我们有

$$\vdash_{Y,Z} \forall x.\, x \in_X \varepsilon[b](Y \wedge Z) \Leftrightarrow b(x) \preceq_X Y \wedge Z$$

然后我们得到

$$\vdash_{Y,Z} \forall x.\, x \in_X \varepsilon[b](Y \wedge Z) \Leftrightarrow b(x) \preceq_X Y \wedge b(x) \preceq_X Z$$

根据腐蚀的定义，我们可以推导出

$$\vdash_{Y,Z} \forall x.\ x \in_X \varepsilon[b](Y \wedge Z) \Leftrightarrow x \in_X \varepsilon[b](Y) \wedge x \in_X \varepsilon[b](Z)$$

即：

$$\vdash_{Y,Z} \forall x.\ x \in_X \varepsilon[b](Y \wedge Z) \Leftrightarrow x \in_X \varepsilon[b](Y) \wedge \varepsilon[b](Z)$$

这可以推广到任意合取。

现在，我们来证明 $\vdash \varepsilon[b](X) = X$。根据腐蚀的定义，我们有

$$\vdash \forall x.\ x \in_X \varepsilon[b](X) \Leftrightarrow b(x) \preceq_X X$$

现在，根据拓扑斯性质，我们有

$$\vdash \forall x.\ b(x) \preceq_X X$$

然后，根据切割规则，我们可以写出

$$\vdash \forall x.\ x \in_X \varepsilon[b](X)$$

由此可得

$$\vdash \varepsilon[b](X) = X$$

最后，我们来证明腐蚀具有反扩张性的充要条件，并首先证明：

$$\vdash (\forall x.\ x \in_X b(x)) \Rightarrow (\forall Y.\ \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y)$$

根据蕴涵联结词和全称量词的规则，这等价于证明以下命题：

$$\forall x.\ x \in_X b(x) \vdash_Y \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y$$

根据假设引入规则，我们有

$$\forall x.\ x \in_X b(x) \vdash_Y \forall x.\ x \in_X b(x)$$

然后，根据全称量词的规则，可得

$$\forall x.\ x \in_X b(x) \vdash_{Y,x} x \in_X b(x)$$

根据削弱规则，我们有

$$\forall x.\ x \in_X b(x),\ x \in_X \varepsilon[b](Y) \vdash_{Y,x} x \in_X b(x)$$

现在，根据假设引入规则和 $\varepsilon[b]$ 的定义，我们得到

$$\forall x.\ x \in_X b(x),\ x \in_X \varepsilon[b](Y) \vdash_{Y,x} b(x) \preceq_X Y$$

然后，根据命题 19，我们推得

$$\forall x.\ x \in_X b(x),\ x \in_X \varepsilon[b](Y) \vdash_{Y,x} x \in_X Y$$

根据蕴含规则，我们得到

$$\forall x.\ x \in_X b(x) \vdash_{Y,x} x \in_X \varepsilon[b](Y) \Rightarrow x \in_X Y$$

根据全称量词规则，可得：

$$\forall x.\ x \in_X b(x) \vdash_Y \forall x.\ x \in_X \varepsilon[b](Y) \Rightarrow x \in_X Y$$

根据命题 19，我们可以由此得出

$$\forall x.\ x \in_X b(x) \vdash_Y \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y$$

现在证明相反的序列：我们有

$$\forall Y.\ \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y \vdash_Y \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y$$

然后通过代换：

$$\forall Y.\ \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y \vdash_x \varepsilon[b](b(x)) \preceq_X b(x)$$

根据定义，我们有 $\vdash_x x \in_X \varepsilon[b](b(x))$，因此通过弱化规则和有限合取规则，我们有：

$$\begin{aligned}\forall Y.\ \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y \vdash_x x \in_X \varepsilon[b](b(x)) \wedge \varepsilon[b](b(x)) \preceq_X b(x)\\ \vdash_x x \in_X b(x)\end{aligned}$$

由此根据全称量化规则得证：

$$\forall Y.\ \varepsilon[b](Y) \preceq_X Y \vdash_Y \forall x.\ x \in_X b(x)$$

膨胀的证明基本类似。

我们只证明膨胀具有扩张性的充要条件。我们有：

$$\begin{aligned}(\forall x.\ x \in_X b(x)) \ \wedge\ x \in_X Y &\vdash_{Y,x} x \in_X b(x) \wedge x \in_X Y\\ &\vdash_{Y,x,y} y = x \wedge y \in_X \breve{b}(x) \wedge y \in_X Y\\ &\vdash_{Y,x} \exists y.\ y = x \wedge y \in_X \breve{b}(x) \wedge y \in_X Y\\ &\vdash_{Y,x} \exists y.\ y \in_X \breve{b}(x) \wedge y \in_X Y\\ &\vdash_{Y,x} x \in \delta[b](Y)\end{aligned}$$

根据蕴含规则和全称量化规则，我们推导出：

$$\forall x.\ x \in_X b(x) \vdash \forall Y.\ Y \preceq_X \delta[b](Y)$$

反之：

$$\begin{aligned}\forall Y.\ Y \preceq_X \delta[b](Y) &\vdash_x \{x\} \preceq_X \delta[b](\{x\})\\ &\vdash_x x \in_X \delta[b](\{x\})\\ &\vdash_x \exists y.\ x \in_X b(y) \wedge y \in_X \{x\}\\ &\vdash_x \exists y.\ x \in_X b(x)\\ &\vdash_x x \in_X b(x)\end{aligned}$$

并根据全称量化：

$$\forall Y.\ Y \preceq_X \delta[b](Y) \vdash \forall x.\ x \in_X b(x)$$

B.3 命题4的证明

- 单调性直接由 $\varepsilon[b]$ 和 $\delta[b]$的单调性推得。
- 闭运算的扩张性。显然，我们有

  $$\vdash_Y \delta[b](Y) \preceq_X \delta[b](Y)$$

  随后根据伴随性质，可以得出

  $$\vdash_Y Y \preceq_X \varepsilon[b](\delta[b](Y))$$

- 开运算的反扩张性。显然，我们有

  $$\vdash_Y \varepsilon[b](Y) \preceq_X \varepsilon[b](Y)$$

  然后根据伴随性质，我们可以得出

  $$\vdash_Y \delta[b](\varepsilon[b](Y)) \preceq_X Y$$

- 保持性。根据开运算的反扩张性，我们有

  $$\vdash_Y \delta[b](\varepsilon[b](Y)) \preceq_X Y$$

  然后根据腐蚀的单调性，我们可以得出

  $$\vdash_Y \varepsilon[b](\delta[b](\varepsilon[b](Y))) \preceq_X \varepsilon[b](Y)$$

  为了证明反方向，我们显然有

  $$\vdash_Y \delta[b](\varepsilon[b](Y)) \preceq_X \delta[b](\varepsilon[b](Y))$$

然后根据伴随性质，我们可以得出结论：

$$\vdash_Y \varepsilon[b](Y) \preceq_X \varepsilon[b](\delta[b](\varepsilon[b](Y)))$$

方程 $\delta[b] \circ \varepsilon[b] \circ \delta[b] = \delta[b]$ 可用类似的方法证明。

- 幂等性。由保持性质可直接得出。

B.4 命题16的证明

($\Longrightarrow$) 假设修正算子 $\circ$ 满足 AGM 公设。定义 $\preceq_\psi^\varphi$ 在 $Mod(\psi)$上的二元关系如下：

$$\mathcal{M} \preceq_\psi^\varphi \mathcal{M}' \text{ iff } \mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \psi) \text{ and } \mathcal{M}' \notin Mod(\varphi \circ \psi)$$

令 $f(t) = \preceq_\varphi = \bigcup_\psi \preceq_\psi^\varphi$。我们先证明 $\preceq_\varphi$ 是一个 FA。然后，再证明映射 f 是一个 FA。

- 设 $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in Mod(\varphi)$，并假设 $\mathcal{M} \preceq_\varphi \mathcal{M}'$。这意味着存在 ψ 使得 $\mathcal{M} \preceq_\psi^\varphi \mathcal{M}'$，即 $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in Mod(\psi)$、$\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \psi)$ 和 $\mathcal{M}' \notin Mod(\varphi \circ \psi)$。因此，我们有 $\varphi \wedge \psi$ 相容，进而根据公设（$G3$），$\varphi \circ \psi = \varphi \wedge \psi$。于是我们得到 $\mathcal{M}' \in Mod(\varphi \circ \psi)$，这就产生了矛盾。
- 令 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi)$，并令 $\mathcal{M}' \notin Mod(\varphi)$。根据 $\preceq_\varphi$ 的定义，我们有 $\mathcal{M} \preceq_\top^\varphi \mathcal{M}'$。现在，假设 $\mathcal{M}' \preceq_\varphi \mathcal{M}$。这意味着存在 ψ 使得 $\mathcal{M}' \preceq_\psi^\varphi \mathcal{M}$。因此，我们有 $\mathcal{M}$、$\mathcal{M}' \in Mod(\psi)$、$\mathcal{M}' \in Mod(\varphi \circ \psi)$ 和 $\mathcal{M} \notin Mod(\varphi \circ \psi)$；又由于 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi)$，我们有 $\varphi \wedge \psi$ 是相容的。根据公设（$G3$），我们于是得到 $\varphi \circ \psi = \varphi \wedge \psi$，进而得到 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \psi)$，这就产生了矛盾。

现在我们来证明 $Mod(\varphi \circ \psi) = Min(Mod(\psi) \preceq_\varphi)$。

- 设 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \psi)$，并假设 $\mathcal{M} \notin Min(Mod(\psi) \preceq_\varphi)$。根据公设 ($G2$)，$\mathcal{M} \in Mod(\psi)$。根据假设，存在 $\mathcal{M}' \in Mod(\psi)$，使得 $\mathcal{M}' \prec_\varphi \mathcal{M}$。这意味着存在一个公式 δ，使得$\mathcal{M}' \in Mod(\varphi \circ \delta)$ 且 $\mathcal{M} \notin Mod(\varphi \circ \delta)$。根据关系 $\preceq_\delta^\varphi$ 的定义，我们知道 $\psi \wedge \delta$ 相容，因此根据公设 ($G5$)，我们可以写出

$$Mod((\varphi \circ \psi) \wedge \delta) = Mod((\varphi \circ \delta) \wedge \psi) = Mod(\varphi \circ (\psi \wedge \delta))$$

因此，我们有 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \delta)$，这就产生了矛盾。

- 令 $\mathcal{M} \in Min(Mod(\psi) \preceq_\varphi)$。假设 $\mathcal{M} \notin Mod(\varphi \circ \psi)$。再假设 $\mathcal{M}' \in Mod(\varphi \circ \psi)$。根据 $\preceq_\psi^\varphi$ 的定义，我们有 $\mathcal{M}' \preceq_\psi^\varphi \mathcal{M}$，进而得到 $\mathcal{M}' \preceq_\varphi \mathcal{M}$。现在，假设 $\mathcal{M} \preceq_\varphi \mathcal{M}'$。这意味着存在 δ 使得 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \delta)$ 且 $\mathcal{M}' \notin Mod(\varphi \circ \delta)$。但是，

$\mathcal{M}' \in Mod(\psi \wedge \delta)$，根据公设（$G5$），我们有

$$Mod((\varphi \circ \psi) \wedge \delta) = Mod((\varphi \circ \delta) \wedge \psi) = Mod(\varphi \circ (\psi \wedge \delta))$$

因此，我们有 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \delta)$，这与假设矛盾。由此，我们刚刚证明了 $\mathcal{M}' \prec_\varphi \mathcal{M}$，这与假设矛盾。

($\Longleftarrow$) 现在假设，对于一个修正操作 $\circ$，存在一个 FA，它将任意公式 φ 映射到一个满足命题16条件的二元关系 $\preceq_\varphi$。我们来证明 $\circ$ 满足 AGM 公设。

- ($G1$) 由于 ψ 相容，我们有 $Min(Mod(\psi) \preceq_\varphi) \neq \emptyset$，于是根据假设，$\varphi \circ \psi$ 相容。

- ($G2$) 设 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \psi)$。根据假设，我们有

$$\mathcal{M} \in Min(Mod(\psi), \preceq_\varphi)$$

于是 $\mathcal{M} \in Mod(\psi)$。

- ($G3$) 假设 $\varphi \circ \psi$ 相容。
  ·我们来证明 $Mod(\varphi \circ \psi) \subseteq Mod(\varphi \wedge \psi)$。令 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ \psi)$。因此，我们有 $\mathcal{M} \in Mod(\psi)$。假设 $\mathcal{M} \notin Mod(\varphi)$。令 $\mathcal{M}' \in Mod(\varphi)$。根据 FA 的定义，我们有 $\mathcal{M}' \prec_\varphi \mathcal{M}$，这与 $\mathcal{M} \in Min(Mod(\psi) \preceq_\varphi)$ 的事实矛盾。

  ·我们来证明 $Mod(\varphi \wedge \psi) \subseteq Mod(\varphi \circ \psi)$。令 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \wedge \psi)$ 为满足 $\mathcal{M} \notin Mod(\varphi \circ \psi)$ 的一个模型。我们有 $\mathcal{M} \in Mod(\psi)$。根据假设，存在一个模型 $\mathcal{M}' \in Mod(\psi)$，使得 $\mathcal{M}' \prec_\varphi \mathcal{M}$，于是 $\mathcal{M} \notin Mod(\varphi)$，这就产生了矛盾。

- ($G4$) 假设 $\psi \equiv \psi'$。这意味着 $Mod(\psi) = Mod(\psi')$，于是 $Min(Mod(\psi) \preceq_\varphi) = Min(Mod(\psi') \preceq_\varphi)$。因此我们可以得出结论，$Mod(\varphi \circ \psi) = Mod(\varphi \circ \psi')$。

- ($G5$) 假设 $(\varphi \circ \psi) \wedge \chi$ 是相容的。
  · 假设 $\mathcal{M} \in Mod((\varphi \circ \psi) \wedge \chi)$。再假设 $\mathcal{M} \notin Min(\varphi \circ (\psi \wedge \chi))$。这意味着存在 $\mathcal{M}' \in Mod(\psi \wedge \chi)$，使得 $\mathcal{M}' \prec_\varphi \mathcal{M}$。于是我们有 $\mathcal{M}' \in Mod(\psi)$，从而得到 $\mathcal{M} \prec_\varphi \mathcal{M}'$，这就产生了矛盾。

  · 假设 $\mathcal{M} \in Mod(\varphi \circ (\psi \wedge \chi))$。于是我们有 $\mathcal{M} \in Mod(\psi \wedge \chi)$。现在，我们有

$$Min(Mod(\psi \wedge \chi), \preceq_\varphi) = Min(Mod(\psi), \preceq_\varphi) \cap Mod(\chi)$$

然后 $\mathcal{M} \in Mod((\varphi \circ \psi) \wedge \chi)$。