arXiv:2303.04897v2 [math.CV] 5 Aug 2023

`非凯勒形式下有界域中的退化复 Monge-Ampère 方程¨

MOHAMMED SALOUF

ABSTRACT. 本文研究有界严格伪凸域上的复 Monge-Ampère 方程的弱解，其形式为 $(\omega + dd^c\varphi)^n = F(\varphi, .)d\mu$，其中 ω 是光滑 (1, 1)-形式，$0 \leq F$ 是连续非递减函数，μ 是正的非极性测度。我们的结果拓展了 Kołodziej 和 Nguyen [KN15、KN23a、KN23b] 关于有界解的先前研究，以及 Cegrell [Ceg98、Ceg04、Ceg08], Czy˙z [Cz09], Benelk- ourchi [Ben09、Ben15] 等人对 $\omega = 0$ 和/或 $F = 1$ 情形的研究。

1. INTRODUCTION

设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界严格伪凸域。根据定义，存在一个定义在 ¯Ω 某个邻域内的光滑强多重次调和函数 ρ，使得 $d\rho \neq 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，且 $\Omega = \{\rho < 0\}$。

Monge-Amp`ere 算子在光滑函数 u 上定义如下：

$$(dd^c u)^n := 4^n n! \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) dV_n.$$

当 u 是多重次调和函数时，即 $dd^c u$ 是正的 (1, 1)-形式时，上述定义给出一个光滑体积形式。在奠基性工作 [BT76], 中，Bedford 和 Taylor 成功地将 $(dd^c u)^n$ 定义为所有局部有界多重次调和函数 u对应的正 Radon 测度。众所周知，将该算子推广到无界拟次调和函数上是一项棘手的工作。Cegrell 在 [Ceg98、Ceg04、Ceg08] 中引入了若干类（无界）多重次调和函数 u，对于这些函数，Monge-Amp`ere 算子 $(dd^c .)^n$ 有良好的定义，并具有自然的收敛性质。在这一系列论文中，他详细研究了狄利克雷问题的解。在 [Ben09、Ben15] 中，Benelkourchi 以 [GZ07] 的思路研究了加权能量类，并完整刻画了权函数为凸函数或齐次函数时狄利克雷问题的解。我们的第一个主要结果对具有类似多项式行为的凹权函数 χ 给出了相同的刻画，即满足

$$-t\chi'(t) \leq -M\chi(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}^-,$$

且具有统一的正常数 M。我们用 $\mathcal{W}_M^+$ 表示此类权重的集合。

日期：2023年8月8日。2010年数学主题分类。32W20、32U05、32Q15、35A23。关键词和短语。Monge-Amp`ere 型方程，Cegrell 类。作者获得 CNRST 的资助，资助来自卓越研究资助计划，项目编号为 18 UCD2022。

定理 A（定理 3.5）。设 μ 为正 Radon 测度，且设 $\chi \in \mathcal{W}_M^+$。以下条件等价：

(1) 存在唯一的函数 $\phi \in \mathcal{E}_\chi(\Omega)$，使得 $\mu = (dd^c\phi)^n$；(2) $\chi(\mathcal{E}_\chi(\Omega)) \subset L^1(d\mu)$；(3) 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_\Omega -\chi \circ \psi d\mu \leq C,$$

对所有 $\psi \in \mathcal{E}_0(\Omega)$，$E_\chi(\psi) \leq 1$；

(4) 存在正的常数 A 使得

$$\int_\Omega -\chi \circ \psi d\mu \leq A \max(1, E_\chi(\psi)), \ \forall \psi \in \mathcal{E}_0(\Omega).$$

上一条定理中的等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 最初由 [GZ07] 在紧 K¨ahler 流形的情形下提出猜想。近期，[TV21]和 [DDL23]肯定地解决了这一问题。我们的证明借鉴了 [DDL23] 中的思想，其中多重次调和包络发挥着关键作用。

接下来，我们将注意力转向复 Monge-Ampère 型方程的解：给定一个在多极集上消失的正 Radon 测度 μ以及一个有界可测函数 $F\colon \mathbb{R} \times \Omega \to [0, +\infty[$，该函数关于第一个变量连续且单调不减，我们感兴趣的是研究以下方程

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = F(\varphi, .)d\mu. \tag{1.1}$$

这里，ω 是在 Ω 的某个邻域上定义的光滑 (1,1)-形式。我们还要强调，我们不假设 ω 是闭的。Monge-Amp`ère 算子的狄利克雷问题 $(dd^c.)^n$ 对应于 $F = 1$ 且 $\omega = 0$的情形。

S. Ko lodziej 和 N.C. Nguyen 已研究了方程 (1.1) 的有界解，见[KN15, KN23a, KN23b]。为了研究无界解，我们首先引入 Cegrell 类的自然推广。设 $\phi \in \mathcal{E}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ 是一个最大函数。对于 $\mathcal{K}(\Omega) \in \{\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{E}_p(\Omega), \mathcal{E}_\chi(\Omega), \mathcal{N}(\Omega)\}$，我们定义类 $\mathcal{K}(\Omega, \omega, \phi)$ 如下：

$$u \in \mathcal{K}(\Omega, \omega, \phi) \Leftrightarrow u \in \mathrm{PSH}(\Omega, \omega) \text{ and } u + \rho \in \mathcal{K}(\Omega, \phi).$$

这里，ρ 是定义在 $\bar{\Omega}$ 的某个邻域内、属于 $\mathcal{C}^2$ 类的多重次调和函数，并且在 $\partial\Omega$ 上满足$\rho = 0$，且 $\omega \leq dd^c\rho$。集合 $\mathcal{K}(\Omega, \omega)$ 对应于 $\mathcal{K}(\Omega, \omega, \phi)$，其中 $\phi = 0$。当 $\omega = dd^c\rho$时，集合 $\mathcal{F}(\Omega, \omega)$ 和 $\mathcal{E}_\chi(\Omega, \omega)$ 与 [CKZ11] 中给出的相应集合一致。

下面的结果表明，Monge-Amp`ère 算子 $(\omega + dd^c.)^n$ 在类 $\mathcal{K}(\Omega, \omega, \phi)$ 上定义良好。

定理 B（定理 4.10）。对于所有 $u \in \mathcal{E}(\Omega, \omega)$，Monge-Amp`ère 测度 $(\omega + dd^c u)^n$ 在 Ω 中定义良好，且为拉东测度。此外，若 $(u_j)_j$ 是 $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ 中的递减序列，并收敛到 $u \in \mathcal{E}(\Omega, \omega)$，则序列 $((\omega + dd^c u_j)^n)_j$ 弱收敛到 $(\omega + dd^c u)^n$。

在我们的情形下，直接改编 Cegrell 的证明行不通，因为无法进行分部积分。事实上，由于参考形式并非闭形式，应用斯托克斯定理会产生若干挠率项，即使势有界，也难以控制。此外，下面的例 5.1 表明，算子 $(\omega + dd^c.)^n$ 可能不具备算子 $(dd^c.)^n$ 的基本性质。

为证明定理 B，我们将 ω 分解为有限个形如 $f\alpha$ 的 (1, 1)-形式之和，其中 f 是光滑函数，α 是正的闭 (1, 1)-形式。于是，$(\omega + dd^c.)^n$ 可以写成若干项之和，这些项涉及混合 Monge-Amp`ere 算子。

定义算子 $(\omega + dd^c.)^n$ 后，一个自然的问题是：方程 (1.1) 在类 $\mathcal{K}(\Omega\ \omega, \phi)$ 中是否存在解？这个方程最早出现在紧 K¨ahler 流形上构造 K¨ahler–Einstein 度量的问题中。当 $\omega = 0$ 时，Bedford 和 Taylor 在严格伪凸域中得到了该方程的有界解 $\mathbb{C}^n$ [BT79]。这一结果已在许多情形下得到推广 [Kol95, CK06, ACCH08, Cz09, HH11, Ben13]。

最近，Kołodziej 和 Nguyen 将这一问题推广到了算子 $(\omega+dd^c.)^n$。他们证明，当测度 μ 被某个函数 $v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ 的 Monge-Amp`ère 测度所控制时，方程 (1.1) 存在有界解 [KN23b, 定理 3.1]。在这里，我们将这一结果推广到更奇异的测度 μ，并寻求无界弱解。

定理 C（定理 5.8）。假设 $\mu \leq (dd^c u)^n$ 被某个函数 $u \in \mathcal{K}(\Omega)$ 的 Monge-Amp`ère 测度所控制。那么存在唯一确定的 $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega\ \omega, \phi)$，满足方程 (1.1)。

关于这一结果，在 $\omega = 0$ 的情形下已有若干研究成果。Kołodziej 证明，若 μ 被有界拟次调和函数 [Kol95] 的 Monge-Amp`ère 测度所控制，则方程 $\mu = (dd^c u)^n$ 存在唯一有界解 $u$。基于这一结果，Cegrell 刻画了算子 $(dd^c.)^n$ 在 $\mathcal{K}(\Omega)$ 上的值域 [Ceg98, Ceg04, Ceg08]。随后，Ahag、Cegrell、Czy˙z 和 Hiep 在 $\mathcal{K}(\Omega)$ 中建立了次解定理 [ACCH08]。他们证明，若 $\mu$ 被属于 $\mathcal{E}(\Omega)$ 的某个函数的 Monge-Amp`ère 测度所控制，则方程 $\mu = (dd^c u)^n$ 在 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中有解。在 [Cz09], Czy˙z 证明，若 μ 是 $\mathcal{N}^a(\Omega)$ 中某个函数的 Monge-Amp`ère 测度，则方程 $(dd^c u)^n = F(., u)d\mu$ 存在唯一解 $u \in \mathcal{N}^a(\Omega\ \phi)$。当 $\omega > 0$ 时，Kołodziej 和 Nguyen 已获得方程 (1.1) 的有界解 [KN15, KN23a, KN23b]。

前一定理中的唯一性部分是以下比较原理的推论，该原理推广了 [Ceg04, 定理 5.15], [Ceg08，定理 4.4],[KN15，推论 3.4]以及 [KN23b，命题 2.2]。

定理 D（推论 5.7）。设 $\mu \leq \nu$ 为在多极集上消失的正 Radon 测度。假设 $u \in \mathcal{N}(\Omega\ \omega, \phi)$ 和 $v \in \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 满足条件，使得 $v \leq \phi$ 在 $\partial\Omega$ 中，

$$(\omega + dd^c u)^n = F(u, .)d\mu\ and\ (\omega + dd^c v)^n = F(v, .)d\nu.$$

那么 $u \geq v$。

我们简要说明比较原理的证明思路，该思路受 [LN22]启发。我们考虑以下多重次调和包络

$$P(u - v) := \sup\{\varphi \in \mathrm{PSH}^-(\Omega) : \varphi \leq u - v\},$$

不妨设 $u \leq v$。利用包络的 Monge-Amp`ère 测度集中在接触集 $\{P(u - v) = u - v\}$ 上这一事实，我们证明 $(dd^c P(u - v))^n = 0$，因此 $u = v$。

论文的组织如下。第 2 节中，我们回顾后文将要使用的 Cegrell 类的一些性质。随后，我们转而研究多重次调和包络。第 3 节 посвящен于研究狄利克雷

问题在加权能量类 $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ 中对于 $\chi \in \mathcal{W}_M^+$ 的情形。在第4节中，我们证明算子 $(\omega + dd^c\cdot)^n$ 在大集合 $\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 上定义良好，并且沿递减序列连续。定理 C 和定理 D 的证明将在第5节中给出。

在本文中，Ω 表示 $\mathbb{C}^n$ 和$n \geq 1$的一个有界严格伪凸域。

Acknowledgment

我谨向我的导师 Omar Alehyane 和 Chinh H. Lu 表达感谢，感谢他们向我介绍这一主题，慷慨地传授知识和专业经验，并付出了大量时间。作者感谢审稿人提出的宝贵建议，这些建议改进了论文的表述。

2. Cegrell's classes

本节首先简要介绍 Cegrell 类，然后研究多重次调和包络。

2.1. 类 $\mathcal{E}_0$、 $\mathcal{E}$、 $\mathcal{E}_p$、 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{N}$。 在 [Ceg98 中，Ceg04], Cegrell 引入了以下以其名字命名的类:

$$\mathcal{E}_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : u = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ and } \int_\Omega (dd^c u)^n < +\infty\},$$

$$\mathcal{E}(\Omega) = \{u \in \mathrm{PSH}^-(\Omega) : \forall z \in \Omega, \exists V \in \mathcal{V}(z), \exists (u_j)_j \subset \mathcal{E}_0(\Omega),$$
$$u_j \searrow u \text{ on } V \text{ and } \sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < +\infty\},$$

$$\mathcal{F}(\Omega) = \{u \in \mathrm{PSH}^-(\Omega) : \exists u_j \in \mathcal{E}_0(\Omega),\ u_j \searrow u \text{ and } \sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < +\infty\},$$

且对于 $p > 0$,

$$\mathcal{E}_p(\Omega) = \{u \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \exists (u_j)_j \subset \mathcal{E}_0(\Omega),\ u_j \searrow u \text{ and } \sup_j \int_\Omega |u_j|^p (dd^c u_j)^n < +\infty\}.$$

我们有如下包含关系

$$\mathcal{E}_0(\Omega) \subset \mathcal{E}_p(\Omega) \cap \mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{E}_p(\Omega) \cup \mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega).$$

若 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$，则 $(dd^c u)^n$ 根据 [Ceg04 定理 4.2] 定义了一个正 Radon 测度。集合 $\mathcal{E}(\Omega)$ 是使 Monge-Amp`ère 算子 $(dd^c\cdot)^n$ 定义良好且沿递减序列连续的最大集合 [Ceg04 定理 4.5]。

我们回顾 [Ceg08] 中定义的类 $\mathcal{N}(\Omega)$。令 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$，并设 (Ω_j) 是 Ω 的严格伪凸子域的一个基本序列。定义

$$u_j = \sup\{\varphi \in \mathrm{PSH}^-(\Omega) : \varphi \leq u \text{ on } \mathcal{C}\Omega_j\}.$$

注意，对于每个 j，我们都有 $u \leq u_j \leq u_{j+1}$。类 $\mathcal{N}(\Omega)$ 是满足 $\tilde{u} := (\lim u_j)^* = 0$ 的 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ 的集合。我们有

$$\mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega) \text{ and } \mathcal{E}_p(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega),\ \forall p.$$

我们用 $\mathcal{E}^a(\Omega)$ 表示满足 $(dd^c\cdot)^n$ 在多极集上消失的 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ 的集合。以下结果称为比较原理。

定理 2.1（ [Ceg08] 中的定理 3.12 和推论 3.13）。设 $u \in \mathcal{N}^a(\Omega)$，并设 $v \in \mathcal{E}(\Omega)$。则有

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c v)^n \leq \int_{\{u<v\}} (dd^c u)^n.$$

特别地，如果 $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ ，那么 $u \geq v$。

下面的定理说明了 Monge-Amp`ère 算子在 $\mathcal{N}^a(\Omega)$ 上的值域。

定理 2.2（ [Ceg08] 中的命题 5.2）。设 μ 是一个在多极集上消失的正 Radon 测度。假设存在 $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$，满足 $\psi \neq 0$，且 $\int_\Omega \psi d\mu > -\infty$。那么存在唯一确定的 $u \in \mathcal{N}^a(\Omega)$，使得

$$(dd^c u)^n = \mu.$$

注意，Cegrell 在 [Ceg08，例 5.3] 中指出，该定理的逆命题并不成立。

2.2. 多重次调和包络。本小节致力于研究以下多重次调和包络：对于可测函数 f，包络$P(f)$ 定义为

$$P(f) = \left(\sup\{\varphi \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \varphi \leq f\}\right)^*.$$

过去十年来，许多作者都对这一对象产生了兴趣（更多信息请参见 [BT82、DDL18、GLZ19、Do20], 以及其中的参考文献）。我们将利用这个包络证明一个一般的比较原理（见定理 5.6 的证明），并证明引言中的定理 A。

首先，我们来证明以下命题。

命题 2.3. 若 f 是可测函数，则

$$P(f) = \sup\{\varphi \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \varphi \leq f \ \textit{quasi-everywhere}\},$$

其中，准处处是指在一个多极集之外。特别地，若 (f_j) 是一个收敛到 f 的可测函数递减序列，则 $P(f_j)$ 递减收敛到 $P(f)$。

证明. 记右侧的函数为 h。我们需要证明 $P(f) = h$。由 [BT82，命题 5.1] 可知，$P(f) \leq f$ 准处处成立，因此 $P(f) \leq h$。另一方面，根据 Choquet 引理，存在 $\varphi_j \in \mathrm{PSH}^-(\Omega)$，使得 $\varphi_j \leq f$ 准处处成立，且 $h^* = (\sup \varphi_j)^*$。由于可数个多极集的并仍是多极集，可知 $h^* \leq f$ 准处处成立，进而有 $h = h^* \in \mathrm{PSH}(\Omega)$。由于 $h \leq f$ 准处处成立，存在 $\phi \in \mathrm{PSH}^-(\Omega)$，使得对所有 $\varepsilon > 0$， $h + \varepsilon\phi \leq f$ 处处成立。因此 $h + \varepsilon\phi \leq P(f)$。令$\varepsilon \to 0$，得到 $h \leq P(f)$ 准处处成立，因这些函数是拟次调和函数，故其处处成立。由此可得 $P(f) = h$。

设 (f_j) 是一个收敛到 f 的可测函数递减序列。显然，序列 $(P(f_j))_j$ 是递减的，并且对于所有 j， $P(f) \leq P(f_j)$。另一方面，对于每个 j，我们有 $P(f_j) \leq f_j$ 准处处成立。因此，$\lim P(f_j) \leq f$准处处成立，从而 $\lim P(f_j) = P(f)$。□

下述定理是 BT82 推论 9 对准连续函数的推广。

定理 2.4。假设 f 是准连续的，$f \le 0$，且存在 $\psi \in \mathcal{E}^a(\Omega)$ 使得 $\psi \le f$。那么 $P(f) \in \mathcal{E}^a(\Omega)$，并且 $(dd^c P(f))^n$ 集中于 $\{P(f) = f\}$。

在证明定理之前，我们先回顾 [BT82] 中定义的 Monge-Amp`ère 容量的定义：给定一个 Borel 子集 $E \subset \Omega$，定义

$$\mathrm{Cap}(E) := \sup\left\{\int_E (dd^c u)^n : \ u \in \mathrm{PSH}(\Omega),\ -1 \le u \le 0\right\}.$$

若函数 f 满足：对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 Borel 子集 $E \subset \Omega$，使得 $\mathrm{Cap}(E) \le \varepsilon$，且 f 在 $\Omega \setminus E$ 上的限制连续，则称该函数为准连续函数。

现在我们开始证明定理 2.4。

证明。首先假设 f 有下界。对于每个 $j \ge 1$，都存在一个开集 $U_j \subset \Omega$，使得 $\mathrm{Cap}(U_j) \le 2^{-j-1}$，且 f 在 $\Omega \setminus U_j$ 上的限制连续。取 $\cup_{k\ge j} U_k$ 后，我们可以假设序列 U_j 单调递减。根据 Tietze 延拓定理，存在一个在 Ω 上连续的函数 f_j，使得$f_j = f$ 在 $D_j := \Omega \setminus U_j$。我们可以假设存在常数 C_0，使得$-C_0 \le f_j \le 0$，对所有 j 均成立。对每个 j，定义

$$g_j := \sup_{k\ge j} f_k.$$

我们注意到，g_j 在 Ω 中是下半连续的，$g_j = f$ 在 D_j 上，且 $g_j \searrow g$ 在 Ω 中。由于序列 (D_j) 递增，因此对于所有 $k \le j$，$g_j = f$ 在 D_k 上成立。于是令 $j \to +\infty$，可得对于所有 k，$g = f$ 在 D_k 上成立。由此推得 $g = f$ 在 Ω 中准处处成立，因此由命题 2.3，$P(f) = P(g)$。由于 g_j在 Ω 中是下半连续的，根据扫掠方法，由 BT82，推论 9.2], ，我们有

$$\int_\Omega (g_j - P(g_j))(dd^c P(g_j))^n = 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |f - P(g_j)|(dd^c P(g_j))^n \\
&\qquad = \int_{D_j} |f - P(g_j)|(dd^c P(g_j))^n + \int_{U_j} |f - P(g_j)|(dd^c P(g_j))^n \\
&\qquad = \int_{D_j} (g_j - P(g_j))(dd^c P(g_j))^n + \int_{U_j} |f - P(g_j)|(dd^c P(g_j))^n \\
&\qquad \le 2C_0 \int_{U_j} (dd^c P(g_j))^n \\
&\qquad \le 2(C_0)^{n+1} \int_{U_j} (dd^c P(g_j)/C_0)^n \\
&\qquad \le 2(C_0)^{n+1}\mathrm{Cap}(U_j) \le (C_0)^{n+1} 2^{-j}.
\end{aligned}$$

函数 $|f - P(g_j)|$ 一致有界，并依容量收敛到准连续函数 $f - P(f)$，因为

$$||f - P(g_j)| - f + P(f)| \le |P(g_j) - P(f)|,$$

而序列 $(P(g_j))_j$ 递减至 $P(f)$。因此，由 [GZ17, 定理 4.26] 可知，$|f-P(g_j)|(dd^cP(g_j))^n$ 弱收敛到 $(f-P(f))(dd^cP(f))^n$。因此

$$0=\liminf_{j\to+\infty}\int_\Omega|f-P(g_j)|(dd^cP(g_j))^n\geq\int_\Omega(f-P(f))(dd^cP(f)^n\geq 0.$$

由此我们推知，$(dd^cP(f))^n$ 集中在接触集 $\{P(f)=f\}$ 上。为证明一般情形，我们用 f_j 逼近 $f:=\max(f,-j)$。然后

$$\int_{\{P(f_j)<f_j\}}(dd^cP(f_j))^n=0.$$

固定 $C>0$，根据 [KH09，定理 4.1]，可得

$$\int_{\{P(f_j)<f_j\}\cap\{P(f)>-C\}}(dd^c\max(P(f_j),-C))^n=0.$$

固定一个整数 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$\int_{\{P(f_k)<f\}\cap\{P(f)>-C\}}(dd^c\max(P(f_j),-C))^n=0\ \forall j\geq k,$$

因为在这种情况下 $\{P(f_k)<f\}\subset\{P(f_j)<f_j\}$。令

$$h_k=(\max(f,P(f_k))-P(f_k))\times(\max(P(f),-C)+C).$$

函数 h_k 为正、有界、准连续，并且满足

$$\int_\Omega h_k(dd^c\max(P(f_j),-C))^n=0\ \ \forall j\geq k.$$

令 $j\to+\infty$，再次由 [GZ17，定理 4.26] 得

$$\int_{\{P(f_k)<f\}\cap\{P(f)>-C\}}(dd^c\max(P(f),-C))^n=0.$$

接下来，令 $k\to+\infty$，可得

$$\int_{\{P(f)<f\}\cap\{P(f)>-C\}}(dd^c\max(P(f),-C))^n=0.$$

由 [KH09，定理 4.1]，于是有

$$\int_{\{P(f)<f\}\cap\{P(f)>-C\}}(dd^cP(f))^n=0.$$

最后令 $C\to+\infty$，即可得到该结果，因为 $(dd^cP(f))^n$ 不赋质量于多重极集。□

注 2.5. 我们对某些 $\psi\in\mathcal{E}^a(\Omega)$ 使用假设 $\psi\leq f$，以确保 $P(f)\in\mathcal{E}^a(\Omega)$。如果 $P(f)\in\mathcal{E}(\Omega)$ 给多极集 $\{P(f)=-\infty\}$ 赋予正测度，那么同样的证明表明，测度 $(dd^cP(f))^n$ 在 $\{P(f)<f\}\cap\{P(f)>-\infty\}$ 上消失。

3. High energy classes

本节中，我们研究以下狄利克雷问题的解的存在性

$$(dd^c u)^n = \mu \quad u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega), \tag{3.1}$$

其中 μ 是一个在多极集上消失的正 Radon 测度。方程 (3.1) 已由 Benelkourchi [Ben09、Ben15] 在凸权重或齐次权重的情形下进行研究。我们将这些结果推广到一类特殊的凹函数χ。

首先，回顾在 [GZ07] 中定义的类 $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$；我们用 $\mathcal{W}^-$（分别用 $\mathcal{W}^+$）表示凸（分别为凹）的递增函数 $\chi\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ 的集合，其中满足 $\chi(-\infty) = -\infty$。集合 $\mathcal{W}_M^+$ 由具有以下性质的函数 $\chi \in \mathcal{W}^+$ 构成

$$|t\chi'(t)| \le M|\chi(t)|, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^-.$$

令 $\chi \in \mathcal{W} := \mathcal{W}^- \cup \mathcal{W}^+$。集合 $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ 定义为

$$\mathcal{E}_\chi(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{PSH}(\Omega) : \exists (u_j)_j \subset \mathcal{E}_0(\Omega),\ u_j \searrow u \ \text{ and } \sup_j \int_\Omega -\chi \circ u_j (dd^c u_j)^n < +\infty \right\}.$$

对于 $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega)$，我们采用记号

$$E_\chi(u) = \int_\Omega -\chi(u)(dd^c u)^n.$$

下面的引理在后续证明中将非常有用。

引理 3.1（ [TV21]中的引理 2.2）。若$\chi \in \mathcal{W}_M^+$，则

$$-\chi(ct) \le -c^M \chi(t),$$

对所有 $t \le 0$ 以及所有 $c \ge 1$均成立。

上一个引理使我们能够证明以下命题:

命题 3.2。固定 $\chi \in \mathcal{W}_M^+$。

(i) 对所有 $t < 0$，我们有 $\chi(t) < 0$；特别是

$$\mathcal{E}_\chi(\Omega) = \{ u \in \mathcal{N}^a(\Omega) : \chi(u) \in L^1((dd^c u)^n) \}.$$

(ii) 集合 $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ 是一个凸锥。

证明。

(i) 用反证法，假设存在 $t_0 < 0$，使得 $\chi(t_0) = 0$。若 $t_0 \le -1$，则 $\chi(-1) = 0$。若 $t_0 > -1$，则

$$-\chi(-1) = -\chi(t_0/|t_0|) \le \frac{1}{|t_0|^M}\chi(t_0) = 0.$$

因此在两种情况下都有 $\chi(-1) = 0$。令 $t \in \mathbb{R}_-$。我们有

$$-\chi(t) = -\chi((-t) \times (-1)) \le -\max(|t|^M, |t|)\chi(-1) = 0.$$

我们得出 $\chi = 0$，这显然荒谬，因为 $\chi(-\infty) = -\infty$。

第二个断言由 [HH11，推论 3.3] 得出。

(ii) 根据 [Ben09，命题 4.3]，集合 $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ 是凸的。只需证明，若 $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega)$，则 $2u$ 也成立。由上一个引理可轻易得出这一结论:

$$E_\chi(2u) = 2^n \int_\Omega -\chi(2u)(dd^c u)^n \le 2^{n+M} E_\chi(u).$$

□

在 [BGZ08，定义 4.1]，中，作者为递增函数 χ 定义了以下类别

$$\tilde{\mathcal{E}}_\chi(\Omega)=\{u\in \mathrm{PSH}^-(\Omega):\int_0^{+\infty} t^n\chi'(-t)\mathrm{Cap}_\Omega(u<-t)dt<+\infty\}.$$

他们证明了以下包含关系

$$\tilde{\mathcal{E}}_\chi(\Omega)\subset\mathcal{E}_\chi(\Omega)\subset\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\chi}}(\Omega),$$

where $\tilde{\chi}(t)=\chi(t/2)$ [BGZ08，命题 4.2]。我们有如下观察 n:

命题 3.3. 若 $\chi\in\mathcal{W}_M^+$，则 $\tilde{\mathcal{E}}_\chi(\Omega)=\mathcal{E}_\chi(\Omega)$。

证明。我们有

$$\mathcal{E}_\chi(\Omega)\subset\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\chi}}(\Omega)\subset\mathcal{E}_{\tilde{\chi}}(\Omega).$$

因此，只需证明 $\mathcal{E}_{\tilde{\chi}}(\Omega)\subset\mathcal{E}_\chi(\Omega)$。令 $u\in\mathcal{E}_{\tilde{\chi}}(\Omega)$。我们有

$$E_\chi(u)=\int_\Omega -\chi(u)(dd^cu)^n\le 2^M\int_\Omega -\chi(u/2)(dd^cu)^n=2^ME_{\tilde{\chi}}(u)<+\infty.$$

□

定理 3.4. 固定 $\chi\in\mathcal{W}_M^+$，并令 $u,v\in\mathcal{E}_\chi(\Omega)$。我们有

$$\int_\Omega -\chi\circ u(dd^cv)^n\le\lambda^{-n}E_\chi(2\lambda v)+2^M\lambda^{-n}E_\chi(u),$$

对所有 $\lambda>0$。

证明. 该证明借鉴了 [Ben09 中定理 5.1] 的思路。

固定 $\lambda>0$。利用以下事实

$$(u<-t)\subset(u<\lambda v-t/2)\cup(\lambda v<-t/2),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\lambda^n\int_\Omega -\chi(u)(dd^cv)^n&=\int_\Omega -\chi(u)(dd^c\lambda v)^n\\&=\int_0^{+\infty}(dd^c\lambda v)^n(\chi\circ u<-t)dt\\&=\int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^c\lambda v)^n(u<-t)dt\\&\le\int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^c\lambda v)^n(u<\lambda v-t/2)dt\\&+\int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^c\lambda v)^n(\lambda v<-t/2)dt.\end{aligned}$$

一方面

$$\int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^c\lambda v)^n(\lambda v<-t/2)dt\le\int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^c2\lambda v)^n(2\lambda v<-t)dt=E_\chi(2\lambda v).$$

另一方面，根据 [Ceg08，推论 3.13]

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^c\lambda v)^n(u<\lambda v-t/2)dt &\le \int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^cu)^n(u<\lambda v-t/2)dt\\ &\le \int_0^{+\infty}\chi'(-t)(dd^cu)^n(u<-t/2)dt\\ &\le \int_\Omega -\chi(2u)(dd^cu)^n\\ &\le 2^M E_\chi(u).\end{aligned}$$

□

以下结果对应于凸权重或齐次权重情形下的 [Ben15, 定理 6]（对于情形 $\chi(t)=t$, 另见 [ACC12, 定理 A]）。

定理 3.5. 设 μ 为一个正 Radon 测度，并设 $\chi\in\mathcal{W}_M^+$。以下条件等价：

(1) 存在唯一的函数 $\phi\in\mathcal{E}_\chi(\Omega)$，使得 $\mu=(dd^c\phi)^n$；(2) $\chi(\mathcal{E}_\chi(\Omega))\subset L^1(d\mu)$；(3) 存在一个常数 $C>0$，使得

$$\int_\Omega -\chi\circ\psi d\mu\le C,$$

对于所有 $\psi\in\mathcal{E}_0(\Omega)$, $E_\chi(\psi)\le 1$;

(4) 存在一个正数 A，使得

$$\int_\Omega -\chi\circ\psi d\mu\le A\max(1,E_\chi(\psi)),\ \ \forall\psi\in\mathcal{E}_0(\Omega).$$

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 的蕴含是显然的，因为 $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ 是一个凸锥，并且

$$\int_\Omega -\chi\circ u(dd^cv)^n\le E_\chi(u+v)<+\infty,\ \ \forall u,v\in\mathcal{E}_\chi(\Omega).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 的证明与 [Ben15 中定理 6] 的 (2) $\Rightarrow$ (3) 的证明类似；为方便读者，我们在此重述。运用反证法，设 $(u_j)\in\mathcal{E}_0(\Omega)$，使得 $E_\chi(u_j)\le 1$ 并且

$$\int_\Omega -\chi(u_j)d\mu\ge 2^{3Mj}.$$

考虑函数

$$u:=\sum_j\frac{1}{2^{2j}}u_j.$$

由于 $(u<-s)\subset\cup_j(u_j<-2^js)$，我们得到

$$\mathrm{Cap}_\Omega(u<-s)\le\sum_j\mathrm{Cap}_\Omega(u_j<-2^js)$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty s^n\chi'(-s)\mathrm{Cap}_\Omega(u<-s)ds\\&\leq\int_0^\infty s^n\chi'(-s)\sum_j\mathrm{Cap}_\Omega(u_j<-2^js)ds\\&=\sum_j 1/2^{nj}\int_0^\infty(2^js)^n\chi'(-s)\mathrm{Cap}_\Omega(u_j<-2^js)ds.\end{aligned}$$

通过变量替换 $t=2^js$，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty s^n\chi'(-s)\mathrm{Cap}_\Omega(u<-s)ds\\&=\sum_j 1/2^{nj}\int_0^\infty t^n\chi'(-2^{-j}t)\mathrm{Cap}_\Omega(u_j<-t)2^{-j}dt\\(*)&\leq\sum_j 1/2^{(n+1)j}\int_0^\infty t^n\chi'(-t)\mathrm{Cap}_\Omega(u_j<-t)dt\\&\leq\sum_j 1/2^{(n+1)j}<\infty.\end{aligned}$$

(∗) 由以下事实可知成立： χ 是凹函数，因此 χ' 是非递增的。这证明了 $u\in\mathcal{E}_\chi(\Omega)$，并由命题 3.3 得出 $u\in\mathcal{E}_\chi(\Omega)$。

由于 $u\leq 2^{-2j}u_j$，我们得到 $\chi(u)\leq\chi(2^{-2j}u_j)$，因为 χ是递增的。由引理 3.1 可知 $\chi(u)\leq 2^{-2Mj}\chi(u_j)$，因此

$$\int_\Omega-\chi(u)d\mu\geq 2^{-2Mj}\int_\Omega-\chi(u_j)d\mu\geq 2^{Mj}.$$

这与 (2) 矛盾。

接下来证明蕴含关系 (3) ⇒ (4)。考虑满足 $E_\chi(\psi)\geq 1$ 的 $\psi\in\mathcal{E}_0(\Omega)$。若 $E_\chi(\psi)\leq 2^{n+1}$，则 $E_\chi(1/2\,\psi)\leq 1$，因此

$$\int_\Omega-\chi(\psi)d\mu\leq 2^M\int_\Omega-\chi(1/2\,\psi)d\mu\leq 2^MC.$$

设 $E_\chi(\psi)\geq 2^{n+1}$，并记 $\varepsilon=1/E_\chi(\psi)$。对于 $f=\chi^{-1}(\varepsilon\chi(\psi))$，考虑包络

$$P(f)=\sup\{h\in\mathrm{PSH}(\Omega):h\leq f\}.$$

显然， $P(f)\in\mathcal{E}_0(\Omega)$，因为 f是上半连续的，且满足 $f\geq\psi$。定理 2.4 推出

$$1_{\{P(f)<f\}}(dd^cP(f))^n=0.$$

因此可得

$$\begin{aligned}E_\chi(P(f))&=\int_\Omega-\chi(P(f))(dd^cP(f))^n\\&=\int_{\{P(f)=f)\}}-\chi(f)(dd^cP(f))^n\\&=\varepsilon\int_\Omega-\chi(\psi)(dd^cP(f))^n.\end{aligned}$$

对 $\lambda = 1/2$ 应用定理 3.4，我们得到

$$E_\chi(P(f))) \leq 2^n \varepsilon E_\chi(P(f)) + 2^{M+n}.$$

这意味着

$$E_\chi(P(f)) \leq \frac{2^{M+n}}{1-2^n\varepsilon} \leq 2^{M+n+1},$$

因此

$$E_\chi(1/2^{M+1} \times P(f)) \leq 1.$$

此外，由于 $P(f) \leq f = \chi^{-1}(\varepsilon\chi(\psi))$，我们得到

$$\int_\Omega -\chi(\psi)d\mu \leq \varepsilon^{-1}\int_\Omega -\chi(P(f))d\mu \leq 2^{M(M+1)}CE_\chi(\psi).$$

我们得出结论，对于所有 $\psi \in \mathcal{E}_0(\Omega)$，均有

$$\int_\Omega -\chi(\psi)d\mu \leq 2^M C + 2^{M(M+1)}CE_\chi(\psi) \leq A\max(1, E_\chi(\psi)),$$

其中我们取了 $A = 2^{M(M+1)+1}C$。

对于蕴含 (4) $\Rightarrow$ (1)，令 $\tilde{\mu} = 1/(2A)\,\mu$，我们有

$$\int_\Omega -\chi(\psi)d\tilde{\mu} \leq 1/2\max(1, E_\chi(\psi)), \quad \forall \psi \in \mathcal{E}_0(\Omega).$$

由于

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\max(1,t)}{2t} = 1/2 < 1,$$

我们可以构造一个函数 $\tilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\Omega)$，使得 $\tilde{\mu} = (dd^c\tilde{u})^n$（论证与 [Ben15, 定理 6] 中蕴含 (5) $\Rightarrow$ (1) 的证明相同）。令 $u = (2A)^{1/n}\tilde{u}$，即可得出结论。□

4. Definition of the Monge-Ampère operator $(\omega + dd^c\cdot)^n$

本节研究光滑实 (1, 1)-形式 ω（不一定是闭形式）对应的算子 $(\omega + dd^c\cdot)^n$。由 Bedford 和 Taylor 的工作可知，该算子在 $\mathrm{PSH}(\Omega, \omega) \cap L^\infty(\Omega)$[BT76] 上定义良好（详细构造见 [KN15]）。在此，我们将此定义推广到无界函数 $u \in \mathcal{E}(\Omega, \omega)$。

4.1. 电流 $(dd^c\cdot)^k$。首先，我们证明对于任意 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ 和任意 $1 \leq k \leq n$，电流 $(dd^cu)^k$ 都有良好定义。以下命题对我们的工作至关重要。

命题 4.1. 固定 $p \in \{1, .., n\}$，并设 α 是定义在 Ω 的某个邻域内的光滑 $(p,p)-$ 形式。可以写成

$$\alpha = \sum_{j\in J} f_j T_j,$$

其中

- J 是一个有限集；
- $(f_j)_{j\in J}$ 是复值光滑函数；
- $T_j = dd^cu_1^j \wedge .. \wedge dd^cu_p^j$，其中，对于每个 $j \in J$ 以及每个 $i = 1,..,p$，u_i^j 是定义在 Ω 的某个邻域中的¯光滑负多重次调和函数。

证明。写作

$$\alpha = i^{p^2} \sum_{|I|=|K|=p} \alpha_{IK} dz_I \wedge d\bar{z}_K.$$

因此，只需证明对于所有 l、k，(1, 1)-形式 $dz_l \wedge d\bar{z}_k$ 都可以表示为闭正 (1, 1)-形式与光滑系数的线性组合。对于 $l = k$，这显然成立。对于 $l \neq k$，由 [Dem12，引理 1.4] 可得

$$\begin{aligned} 4dz_l \wedge d\bar{z}_k = &(dz_l + dz_k) \wedge \overline{(dz_l + dz_k)} - (dz_l - dz_k) \wedge \overline{(dz_l - dz_k)} \\ &+ i(dz_l + idz_k) \wedge \overline{(dz_l + idz_k)} - i(dz_l - idz_k) \wedge \overline{(dz_l - idz_k)}. \end{aligned}$$

注意

$$T_j = dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_p^j,$$

其中，函数 u_1^j、....、 u_p^j 取为

$$|z_k|^2 - R, \ |z_l \pm z_k|^2 - R \text{ and } |z_l \pm iz_k|^2 - R,$$

其中 $1 \leq l$、$k \leq n$，且 $R > 0$ 足够大。因此证明完成。 □

现在，当 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ 时，我们将 $(dd^c u)^k$ 定义为闭正 (k, k)-电流。设 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$，并设 α 是在 $\bar{\Omega}$ 的一个邻域内定义的光滑 $(n-k, n-k)$-形式。记

$$\alpha = \sum f_j T_j,$$

其中 f_j 和 T_j 如命题 4.1 所述。由 [Ceg04 的定理 4.2], $(dd^c u)^k \wedge T_j$定义了一个拉东测度。我们将 $(dd^c u)^k \wedge \alpha$ 定义为

$$(dd^c u)^k \wedge \alpha = \sum f_j (dd^c u)^k \wedge T_j.$$

由 [Ceg08 的引理 3.2],，若 $(v_s)_s \in \mathcal{E}(\Omega)$，$v_s \searrow u$，则序列 $\left((dd^c v_s)^k \wedge T_j\right)_s$弱收敛到 $(dd^c u)^k \wedge T_j$。因此

$$(dd^c v_s)^k \wedge \alpha \longrightarrow (dd^c u)^k \wedge \alpha \quad weakly.$$

现在假设

$$\alpha = \sum f_j T_j = \sum g_l S_l,$$

对于 $f_j, g_l \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$，且 T_j, S_l 如命题 4.1 所述。我们证明

$$\sum f_j (dd^c u)^k \wedge T_j = \sum g_l (dd^c u)^k \wedge S_l.$$

令 $(u_s)_s$ 为 u的标准正则化。若 $D \subset\subset \Omega$，则当 s充分大时， $u_s \in \mathcal{E}(D)$，并且 $u_s \searrow u$ 于 D。由于

$$\sum f_j (dd^c u_s)^k \wedge T_j = \sum g_l (dd^c u_s)^k \wedge S_l, \quad \forall s,$$

[Ceg08 的引理 3.2]给出

$$\sum f_j (dd^c u)^k \wedge T_j = \sum g_l (dd^c u)^k \wedge S_l.$$

由此得证下面的定理。

定理 4.2. 设 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$。对于所有 $k \in \{1, .., n\}$，电流 $(dd^c u)^k$ 都有定义。此外，若 $(u_j)_j$ 是 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中收敛到 u 的递减序列，则序列 $\left((dd^c u_j)^k\right)_j$ 弱收敛到 $(dd^c u)^k$。

4.2. 类 $\mathcal{K}(\Omega\ \omega,\phi)$。设 ω 是定义在 $\bar{\Omega}$ 的某邻域内的光滑实 (1, 1)-形式。我们用 $\mathcal{P}_\omega(\Omega)$ 表示满足 $\rho=0$ 于 $\partial\Omega$ 且 $\omega\le dd^c\rho$ 的 $\rho\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\cap\mathrm{PSH}(\Omega)$ 的集合。

下文中，我们将 ϕ 称为 $\mathcal{E}(\Omega)\cap\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ 中的拟数最大函数；这里“最大”意味着 $(dd^c\phi)^n=0$。回顾一下，对于 $\mathcal{K}(\Omega)\in\{\mathcal{E}(\Omega),\ \mathcal{F}(\Omega),\ \mathcal{E}_p(\Omega),\mathcal{E}_\chi(\Omega)\ \mathcal{N}(\Omega)\}$，集合 $\mathcal{K}(\Omega\ \phi)$ 定义为

$$u\in\mathcal{K}(\Omega,\phi)\Leftrightarrow u\in\mathrm{PSH}(\Omega)\text{ and }\phi\ge u\ge\phi+\tilde{u},$$

对于 $\tilde{u}\in\mathcal{K}(\Omega)$，见 Ceg98、Aha07、Ceg08、Ben15]。

固定 $\rho\in\mathcal{P}_\omega(\Omega)$。我们将集合 $\mathcal{K}(\Omega\ \omega,\phi)$ 定义为

$$u\in\mathcal{K}(\Omega,\omega,\phi)\Leftrightarrow u\in\mathrm{PSH}(\Omega,\omega)\text{ and }u+\rho\in\mathcal{K}(\Omega,\phi).$$

注4.3。注意，最后一个定义不依赖于 ρ。事实上，设$\rho'\in\mathcal{P}_\omega(\Omega)$。若 $u+\rho\in\mathcal{K}(\Omega\ \phi)$，则有

$$\phi+\tilde{u}\le u+\rho\le\phi$$

对某个 $\tilde{u}\in\mathcal{K}(\Omega)$ 成立。由于 ϕ 是最大函数，我们得到 $u+\rho'\le\phi$。另一方面

$$u+\rho'\ge u+\rho+\rho'\ge\phi+\tilde{u}+\rho'.$$

这意味着 $u+\rho'\in\mathcal{K}(\Omega\ \phi)$。

注4.4. 取 $\phi=0$，类 $\mathcal{K}(\Omega\ \omega):=\mathcal{K}(\Omega\ \omega,0)$ 是通常的 Cegrell类 $\mathcal{K}(\Omega)$ 的推广。

我们有如下观察:

命题4.5.

$$\mathcal{K}(\Omega,\omega,\phi)\subset\mathcal{E}(\Omega,\omega).$$

证明. 设 $\rho\in\mathcal{P}_\omega(\Omega)$。若 $u\in\mathcal{K}(\Omega\ \omega,\phi)$，则 $u+\rho\in\mathcal{K}(\Omega\ \phi)$。由此可得 t

$$0\ge\phi\ge u+\rho\ge\phi+\tilde{u},$$

对某个 $\tilde{u}\in\mathcal{K}(\Omega)$ 成立。因此 $u\in\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$。 □

4.3. 基本性质。在本小节中，我们研究算子 $(\omega+dd^c.)^n$ 的一些基本性质。首先证明集合 $\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 始终是拟次调和函数集 $\mathrm{PSH}(\Omega\ \omega)$ 的非空子集。

命题 4.6。

$$\mathrm{PSH}^-(\Omega,\omega)\cap L^\infty_{loc}(\Omega)\subset\mathcal{E}(\Omega,\omega).$$

证明。设 $\rho\in\mathcal{P}_\omega(\Omega)$。若 $u\in\mathrm{PSH}^-(\Omega\ \omega)\cap L^\infty_{loc}(\Omega)$，则 $u+\rho\in\mathrm{PSH}^-(\Omega)\cap L^\infty_{loc}(\Omega)\subset\mathcal{E}(\Omega)$，因此 $u\in\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$。 □

$\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 中的函数不一定是负的。不过，我们有如下观察:

Pr命题 4.7。存在一个常数 C，使得对每个 $u\in\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$，都有 $u\le C$。

证明。设 $\rho\in\mathcal{P}_\omega(\Omega)$。若 $u\in\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$，则 $u+\rho\le0$，因此 $u\le\sup(-\rho)$。我们取 $C=\sup(-\rho)$。□

其他基本事实见以下命题:

命题 4.8。

- $\mathcal{E}(\Omega,0)=\mathcal{E}(\Omega)$.

- 设 ω' 是定义在 Ω 邻域内的另一个光滑 (1,1)-形式。我们有$\omega \leq \omega' \Rightarrow \mathcal{E}($Ω $\omega) \subset \mathcal{E}(\Omega\ \omega')$。特别地，若 $\omega \geq 0$则 $\mathcal{E}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$。

证明。对于第一个陈述，我们在 $\mathcal{E}(\Omega, 0)$ 的定义中取 $\rho = 0$。要证明第二个陈述，我们取 $\rho \in \mathcal{P}_{\omega'}(\Omega)$。□

4.4. Monge-Amp`ère 算子 $(\omega + dd^c.)^n$ 在 $\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 上的定义。设 $u \in \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$, 并设 $\rho \in \mathcal{P}_\omega(\Omega)$。记

$$(\omega + dd^c u)^n = (\omega - dd^c\rho + dd^c(u+\rho))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (dd^c(u+\rho))^k \wedge \gamma^{n-k},$$

其中 $\gamma = dd^c\rho - \omega$ 是一个半正 (1, 1)-形式。由定理 4.2，$(dd^c(u+\rho))^k \wedge \gamma^{n-k}$ 定义了一个正 Radon 测度。由线性性，我们可以定义算子 $(\omega + dd^c u)^n$。我们需要验证 $(\omega + dd^c u)^n$ 与 ρ 无关：设 $\rho' \in \mathcal{P}_\omega(\Omega)$。于是，只需证明

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (dd^c(u+\rho))^k \wedge (dd^c\rho - \omega)^{n-k} \\ =&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (dd^c(u+\rho'))^k \wedge (dd^c\rho' - \omega)^{n-k}. \end{aligned}$$

设 $D \subset\subset \Omega$，且 (u_j) 为 u 的标准正则化。我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (dd^c(u_j+\rho))^k \wedge (dd^c\rho - \omega)^{n-k} \\ =&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (dd^c(u_j+\rho'))^k \wedge (dd^c\rho' - \omega)^{n-k} \end{aligned}$$

o当 j 足够大时，n D 成立。令 $j \to +\infty$，则结论由定理 4.2 得出 .

De定义 4.9。设 $u \in \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$。我们通过公式定义算子 $(\omega + dd^c u)^n$ a

$$(\omega + dd^c u)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (dd^c(u+\rho))^k \wedge (dd^c\rho - \omega)^{n-k},$$

其中 $\rho \in \mathcal{P}_\omega(\Omega)$。

作为定理 4.2 的推论，我们得到以下结果：

定理 4.10。Monge-Amp `ere 算子 $(\omega + dd^c.)^n$ 在类 $\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 上良定义。此外，若 $(u_j)_j \subset \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 是一个收敛到 $u \in \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 的递减序列，则 Radon 测度序列 $((\omega + dd^c u_j)^n)_j$ 弱收敛到 $(\omega + dd^c u)^n$。

注 4.11. 我们对算子 $(\omega + dd^c.)^n$ 的构造提供了更多有用的信息。特别是，它表明，对于 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$，研究测度 $(\omega + dd^c u)^n$ 依赖于对混合 Monge-Amp`ere 测度的研究

$$dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_k, \quad u_1, \ldots u_k \in \mathcal{E}(\Omega).$$

这一注记将在后续内容中发挥很大作用。

5. Degenerate complex Monge-Ampère equations

本节中，我们研究狄利克雷问题解的存在性

$$(\omega + dd^c u)^n = F(u, .)d\mu,$$

对于在多极集上消失的正 Radon 测度 μ，以及一个有界可测函数 F： $\mathbb{R} \times \Omega \to [0, +\infty[$，该函数关于第一个变量连续且单调不减。

首先，我们讨论算子 $(\omega + dd^c .)^n$ 的一些性质。

5.1. 算子 $(\omega + dd^c .)^n$ 在 $\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 上的性质。下面的例子表明，算子 $(dd^c .)^n$ 与算子 $(\omega + dd^c .)^n$ 之间存在很大差异。

例 5.1. 设 Ω 表示 $\mathbb{C}^2$ 中的单位球，并令 $\omega = |z_1|^2\, dd^c|z_2|^2$。(1,1)– 形式 ω 是半正的，并且

$$dd^c\omega = dd^c|z_1|^2 \wedge dd^c|z_2|^2 = 4/\pi\ dV_2,$$

其中 dV_2 是 $\mathbb{C}^2$上的勒贝格测度。对于

$$u = \max(\log|z|, -1) \text{ and } v = \max(\log|z|, -1/2),$$

我们有 $u, v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$，在 Ω 上有 $u \le v$，并且在 $\partial\Omega$的一个邻域中有 $u = v$。然而

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\omega + dd^c u)^2 - (\omega + dd^c v)^2 \\
&= \int_\Omega (dd^c u)^2 - (dd^c v)^2 + 8/\pi \int_\Omega (u - v) d\lambda(z) \\
&= 8/\pi \int_\Omega (u - v) dV_2 < 0.
\end{aligned}$$

这与 [BT82，推论 4.3] 相矛盾，并证明 Cegrell 的若干不等式不能推广到算子 $(\omega + dd^c .)^n$。

我们用 $\mathcal{K}^a(\Omega\ \omega)$ 表示满足以下条件的 $u \in \mathcal{K}(\Omega\ \omega)$ 的集合：测度 $(\omega + dd^c u)^n$在多极集上为零。我们有以下命题：

命题 5.2. 若 $u \in \mathcal{E}^a(\Omega\ \omega)$，则对于所有 $\rho \in \mathcal{P}_\omega(\Omega)$，都有 $u + \rho \in \mathcal{E}^a(\Omega)$。

证明. 设 A是 Ω 的一个多极子集。我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_A (\omega + dd^c u)^n \\
&= \int_A (dd^c(u + \rho))^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \int_A (dd^c\rho - \omega)^k \wedge (dd^c(u + \rho))^{n-k}.
\end{aligned}$$

设 $\sigma \in \mathcal{P}_{-\omega}(\Omega)$。 [ACCH08，引理 4.4] 对所有 $1 \le k \le n$ 均成立：

$$\begin{aligned}
\int_A (dd^c\rho - \omega)^k \wedge (dd^c(u + \rho))^{n-k} &\le \int_A (dd^c(\rho + \sigma)))^k \wedge (dd^c(u + \rho))^{n-k} \\
&\le \left(\int_A (dd^c(\rho + \sigma))^n \right)^{k/n} \left(\int_A (dd^c(u + \rho))^n \right)^{(n-k)/n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此 $(dd^c(u + \rho))^n(A) = 0$ 和 $u + \rho \in \mathcal{E}^a(\Omega)$。 □

算子 $(\omega + dd^c .)^n$ 满足最大值原理，与算子 $(dd^c .)^n$ [KH09，定理 4.1]中的最大值原理类似（另见 [BGZ08，定理 2.2]）。

定理 5.3. 若 $u, v \in \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$，则

$$1_{\{u>v\}}(\omega + dd^c u)^n = 1_{\{u>v\}}(\omega + dd^c \max(u, v))^n.$$

证明. 固定 $\rho \in \mathcal{P}_\omega(\Omega)$。记

$$(\omega + dd^c u)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (dd^c(u + \rho))^k \wedge (dd^c\rho - \omega)^{n-k},$$

and

$$(dd^c\rho - \omega)^{n-k} = \sum f_j T_j,$$

其中 f_j 和 T_j 与命题 4.1 中的一样。由线性，只需证明

$$1_{\{u>v\}}(dd^c \max(u + \rho, v + \rho))^k \wedge T_j = 1_{\{u>v\}}(dd^c(u + \rho))^k \wedge T_j.$$

但这正是 [KH09, 定理 4.1]。 □

我们将从前面的定理推出若干推论。

推论 5.4. 设 $u, v \in \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$，且 μ 是一个在多极集上消失的正 Radon 测度。若

$$(\omega + dd^c u)^n \geq \mu \ \text{ and } (\omega + dd^c v)^n \geq \mu,$$

then

$$(\omega + dd^c \max(u, v))^n \geq \mu.$$

证明. 由于情形是局部的，不妨设 $\mu(\Omega)$ 有限。由定理 5.3，得

$$(\omega + dd^c \max(u, v))^n \geq 1_{\{u>v\}}(\omega + dd^c u)^n + 1_{\{u<v\}}(\omega + dd^c v)^n \geq 1_{\{u\neq v\}}\mu.$$

若 $\mu(\{u = v\}) = 0$，则结论成立。 [GZ07, 推论 1.10]的证明表明

$$\mu(\{u = v + t\}) = 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus I,$$

其中 I 至多可数。取 $\varepsilon_j \in \mathbb{R} \setminus I$, $\varepsilon_j \searrow 0$。得

$$(\omega + dd^c \max(u, v + \varepsilon_j))^n \geq \mu.$$

因此，只需令 $\varepsilon_j \to 0$。 □

下述推论在 $\omega = 0$ 的情形下回到了 J. P. Demailly [Dem91, 命题 11.9]。

Co推论 5.5. 设 $u, v \in \mathcal{E}(\Omega\ \omega)$。若 $(\omega + dd^c v)^n$ 在多极集上消失，则 n

$$(\omega + dd^c \max(u, v))^n \geq 1_{\{u>v\}}(\omega + dd^c u)^n + 1_{\{u\leq v\}}(\omega + dd^c v)^n.$$

特别地，若还满足 $u \geq v$ ，则

$$1_{\{u=v\}}(\omega + dd^c u)^n \geq 1_{\{u=v\}}(\omega + dd^c v)^n.$$

证明。第一个断言的证明与推论 5.4 的证明相同。第二个断言可由第一个断言轻易推出。
□

5.2. $\mathcal{N}^a(\Omega\ \omega,\phi)$ 中的比较原理。经典的比较原理（针对作用于有界拟次调和函数的算子 $(dd^c.)^n$ ）已在 [BT82，推论 4.4] 中得到证明。该结果已推广至类 $\mathcal{F}^a(\Omega)$ [Ceg04，定理 5.15],，又推广至更大的类 $\mathcal{N}^a(\Omega\ \phi)$ [Ceg08，定理 4.4]，以及算子 $(\omega+dd^c.)^n$ [KN15，推论 3.4]。我们提出以下一般形式：

定理 5.6. 设 $u\in\mathcal{N}^a(\Omega\ \omega,\phi)$，并设 $v\in\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$。若

$$(\omega+dd^cu)^n\le(\omega+dd^cv)^n\ \ on\ \{u<v\},$$

则 $u\ge v$。

证明。令 $\psi=\max(u,v)$。由推论 5.5 可得

$$\begin{aligned}(\omega+dd^c\psi)^n&\ge 1_{\{u\ge v\}}(\omega+dd^cu)^n+1_{\{u<v\}}(\omega+dd^cv)^n\\&\ge(\omega+dd^cu)^n.\end{aligned}$$

令 $f:=u-\psi$，我们证明 $f=0$。定义

$$P(f):=\sup\{h\in\mathrm{PSH}(\Omega)\ ;\ h\le f\}.$$

由 [BT82，命题 5.1] 可得 $P(f)^*=P(f)$ 几乎处处成立，因此 $P(f)^*\le u-v$ 几乎处处成立。由此可得 $P(f)^*+v\le u$ 几乎处处成立，因此处处成立，因为这些都是拟次调和函数。由此可得 $P(f)^*=P(f)$。设 $\rho\in\mathcal{P}_\omega(\Omega)$。由命题 5.2 可知 $u+\rho\in\mathcal{N}^a(\Omega\ \phi)$。因此，对某个 $\tilde{u}\in\mathcal{N}^a(\Omega)$，有 $\tilde{u}+\phi\le u+\rho\le\phi$。由此可得 $\tilde{u}\le u+\rho-\phi\le f$，因为 $\psi+\rho=\max(u+\rho,v+\rho)\le\phi$，这由 ϕ 的最大性得到。因此，根据 [Ceg08，推论 3.14]，有 $\tilde{u}\le P(f)$，且 $P(f)\in\mathcal{N}^a(\Omega)$。

设 $D=\{P(f)=f\}$，由于 $P(f)\le f$，由推论 5.5 得

$$1_D(\omega+dd^c(\psi+P(f)))^n\le 1_D(\omega+dd^cu)^n\le 1_D(\omega+dd^c\psi)^n.$$

由此可得 $1_D(dd^cP(f))^n=0$，因此根据定理 2.4，$(dd^cP(f))^n=0$。由 [Ceg08，引理 3.12] 可得 $P(f)=0$。因此，我们得出$f=0$，从而有 $u\ge v$。□

引言中的定理 D 直接由上一定理得出。

推论 5.7（引言中的定理 D）。设 $\mu\le\nu$ 为在多极集上消失的正 Radon 测度。假设 $u\in\mathcal{N}(\Omega\ \omega,\phi)$ 和 $v\in\mathcal{E}(\Omega\ \omega)$ 满足：在 $\partial\Omega$ 中，$v\le\phi$，

$$(\omega+dd^cu)^n=F(u,.)d\mu\ and\ (\omega+dd^cv)^n=F(v,.)d\nu.$$

那么 $u\ge v$。

证明。由推论 5.5 可得

$$\begin{aligned}(\omega+dd^c\max(u,v))^n&\ge 1_{\{u>v\}}(\omega+dd^cu)^n+1_{\{u\le v\}}(\omega+dd^cv)^n\\&\ge 1_{\{u>v\}}F(u,.)d\mu+1_{\{u\le v\}}F(v,.)d\mu\\&=F(\max(u,v),.)d\mu\\&\ge F(u,.)d\mu=(\omega+dd^cu)^n,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是因为函数 F 关于第一个变量单调不减。定理 5.6 蕴含 $u\ge v$。□

5.3. 狄利克雷问题的解。本小节研究在 $\mathcal{K}(\Omega\ \omega,\phi)$ 中求解复 Monge-Amp`ère 型方程这一主要问题，其中$\phi\in\mathcal{E}(\Omega)\cap\mathcal{C}^0(\Omega)$ 是最大，且 $\mathcal{K}\in\{\mathcal{F}^a,\ \mathcal{E}_p,\ \mathcal{E}_\chi,\ \mathcal{N}^a\}$。以下定理将 Czy˙z [Cz09] 的结果推广到算子 $(\omega+dd^c.)^n$，其中 ω 是任意光滑实 (1, 1)-形式。

定理 5.8（引言中的定理 C）。设 μ 是一个在多极集上消失的正 Radon 测度，并考虑一个有界可测函数 $F:\mathbb{R}\times\Omega\to[0,+\infty[$，它关于第一个变量连续且非递减。若 $\mu\leq(dd^cw)^n$ 对某个 $w\in\mathcal{K}(\Omega)$ 成立，则存在唯一确定的 $u\in\mathcal{K}(\Omega\ \omega,\phi)$，使得

$$(\omega+dd^cu)^n=F(u,.)d\mu.$$

在给出最后一个定理的证明之前，我们需要将 Kołodziej 和 Nguyen 的次解定理 [KN23a, 定理 4.1] 推广到 ω 仅为实数的情形。

引理 5.9（Kołodziej 和 Nguyen 的次解定理）。设 $\varphi\in\mathcal{C}^0(\partial\Omega)$，且设 μ 为一个正 Radon 测度。假设对于一个有界拟次调和函数 v，有 $\mu\leq(dd^cv)^n$，且 $v=0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。那么，存在 $u\in$ 拟次调和$(\Omega\ \omega)\cap L^\infty(\Omega)$，$u=\varphi$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，并且使得

$$(\omega+dd^cu)^n=\mu.$$

¯证明。取满足 $dd^c\sigma>-\omega$ 的 $\sigma\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$。将 [KN23b, 定理 2.3] 应用于 $\omega+dd^c\sigma$ 和 $F(.+\sigma,.)$，可得 $w\in\mathrm{PSH}(\Omega\ \omega+dd^c\sigma)$，$w=\varphi-\sigma$ 在 $\partial\Omega$ 上，且满足

$$(\omega+dd^c\sigma+dd^cw)^n=F(w+\sigma,.)d\mu.$$

因此，只需取 $u=w+\sigma$。 □

注 5.10. 同样的证明表明，当 ω 仅为实数时，[KN15, 推论 3.4] 和 [KN23b, 命题 2.2]仍然成立。

下面转而证明定理 5.8。

定理 5.8 的证明。由 [Ceg04, 定理 5.11], ，存在 $\psi\in\mathcal{E}_0(\Omega)$ 和 $f\in L^1_{loc}((dd^c\psi)^n)$，使得 $\mu=f(dd^c\psi)^n$。由 [KN23b, 定理 2.3] 可知，对每个 j，存在 $u_j\in\mathrm{PSH}(\Omega\ \omega)\cap L^\infty(\Omega)$，使得 $u_j=\phi$ 在 $\partial\Omega$ 上，且

$$(\omega+dd^cu_j)^n=F(u_j,.)\min(f,j)(dd^c\psi)^n.$$

序列 $(u_j)_j$ 由 [KN23b, 命题 2.2]可知是递减的。

固定 $\rho\in\mathcal{P}_\omega(\Omega)\cap\mathcal{P}_{-\omega}(\Omega)$。由 [ACCH08, 定理 4.14] 可知，存在$h\in\mathcal{K}(\Omega\ \phi)$使得

$$F(\phi-\rho,.)d\mu=(dd^ch)^n,$$

因为 F 有界，且对于某个 $w\in\mathcal{K}(\Omega)$，$\mu\leq(dd^cw)^n$。利用函数 F 关于第一个变量单调不减这一事实，我们有

$$(\omega+dd^cu_j)^n\leq F(u_j,.)d\mu\leq F(\phi-\rho,.)d\mu\leq(\omega+dd^c(h+\rho))^n.$$

推论 5.4 给出

$$(\omega+dd^cu_j)^n\leq(\omega+dd^c\max(u_j,h+\rho))^n.$$

由于 $u_j = \phi \geq h + \rho$ 在 $\partial\Omega$ 上，由 [KN15，推论 3.4] 可知 $u_j \geq h + \rho$在 Ω 中处处成立，因此函数 $u := \lim_j u_j$ 属于 $\mathcal{K}(\Omega\ \omega, \phi)$。定理 4.10 给出

$$(\omega + dd^c u)^n = \lim(\omega + dd^c u_j)^n \ \text{ weakly.}$$

由于 F 在第一个变量上有界且连续，由勒贝格控制收敛定理可得

$$(\omega + dd^c u_j)^n = F(u_j, .)\min(f, j)(dd^c\psi)^n \to F(u, .)d\mu,$$

在测度的弱意义下。这意味着

$$(\omega + dd^c u)^n = F(u, .)d\mu.$$

由推论 5.7，解 u 唯一确定。 □

因此，在上一定理中取 $F = 1$，可得到算子 $(\omega + dd^c.)^n$ 值域的如下描述。

推论 5.11. 设 μ 为正 Radon 测度。以下陈述等价：

(i) 方程 $\mu = (dd^c u)^n$ 有一个解 $u \in \mathcal{K}(\Omega)$；(ii) 方程 $(\omega + dd^c v)^n = \mu$ 有唯一解 $v \in \mathcal{K}(\Omega\ \omega)$；(iii) 方程 $(\omega + dd^c\varphi)^n = \mu$ 有唯一解 $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega\ \omega, \phi)$。

证明。蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (ii) 和 (i) $\Rightarrow$ (iii) 可由定理 5.8 得出。等价性由 [Ceg98, 定理 8.2], [Ceg08, 定理 3.9], [ACCH08, 定理 4.14] 和 [Ben15, 定理 11] 得出。□

References

[Aha07] P. ˚Ahag, 《有界域中复 Monge-Amp`ère 算子的狄利克雷问题》, $\mathcal{F}(f)$, 《密歇根数学杂志》55 (2007) 123-138。[ACC12] P. ˚Ahag、U. Cegrell、R. Czy˙z, 《关于狄利克雷原理与问题》, 《斯堪的纳维亚数学》110(2) (2012)，235-250。[ACCH08] P. ˚Ahag、U. Cegrell、R. Czy˙z、P. H. Hiep, 《多极集上的 Monge-Amp`ère 测度》, 《纯粹与应用数学杂志》(9) 92 (2009)，第 6 期，613-627。[BT76] E. Bedford、B. A. Taylor, 《复 Monge-Amp`ère 算子的狄利克雷问题》, 《发明数学》37，1–44 (1976)。(https://doi.org/10.1007/BF01418826)[BT79] E. Bedford、B. A. Taylor, 《复 Monge-Amp`ère 型方程的狄利克雷问题》，载于：Byrnes, C.（编），《偏微分方程与几何》。Dekker，39-50，(1979)。[BT82] E. Bedford、B. A. Taylor, 《多重次调和函数的新容量》, 《数学学报》149，1–40 (1982)。(https://doi.org/10.1007/BF02392348)[Ben09]S. Benelkourchi, 《带权多复能量》, 《势分析》31，1-20 (2009)。(https://doi.org/10.1007/s11118-009-9119-7)[Ben13] S. Benelkourchi, 《超凸域上复 Monge-Amp`ère 方程的弱解》, 《波兰数学年刊》112(3):239-246 (2013)。[Ben15] S. Benelkourchi, 《带权多复能量 II》, 《国际偏微分方程杂志》(2015)。(https://dx.doi.org/10.1155/2015/947819)[BGZ08] S. Benelkourchi、V. Guedj、A. Zeriahi, 《具有弱奇性的多重次调和函数》, 《Kiselmanfest 论文集》，2006。《乌普萨拉大学学报》，纪念 C. Kiselman 的会议论文集（Kiselmanfest，乌普萨拉，2006 年 5 月）（即将出版）。[Ceg98]U. Cegrell, 《多复能量》, 《数学学报》180 (1998)，187-217。DOI: 10.1007/BF02392899[Ceg04]U. Cegrell, 《复 Monge-Amp`ère 算子的一般定义》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）54 (2004)，159-179。(www.numdam.org/articles/10.5802/aif.2014/)[Ceg08] U. Cegrell, 《复 Monge-Amp`ère 算子的一般狄利克雷问题》, 《波兰数学年刊》94.2 (2008)，131-147。(http://eudml.org/doc/280684)

[CK06] U. Cegrell、S. Ko lodziej, 《复 Monge-Amp`ère 型方程与解的稳定性》, 《数学年刊》334(4), 713–729。(2006)。doi:10.1007/s00208-005-0687-6[CKZ11] U. Cegrell、S. Ko lodziej、A. Zeriahi, 《多重次调和函数的极大次延拓》, 《图卢兹科学学院年刊：数学》´第 6 辑, 第 20 卷 (2011) 第 S2 期, 第 101-122 页。(http://www.numdam.org/articles/10.5802/afst.1307/)[Cz09] R.Czy˙z, 《Cegrell 类中的复 Monge-Amp`ère 算子》, 《数学论文集》（数学学位论文）466 (2009), 83 页。[DDL18] T. Darvas、E. Di Nezza、C. H. Lu, 《大上同调类中全质量流的奇性类型》, 《组合数学》154 (2018), 380–409。[DDL23] T. Darvas、E. Di Nezza、C. H. Lu, 《紧致 K¨ahler 流形上的相对多重势理论》, 预印本, 2023。[Dem91]J. P. Demailly, 《多复变函数中的势理论》, (http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html), (2016)。[Dem12]J. P. Demailly, 《复解析与微分几何》, 自行出版的电子书, (http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/)。[Do20] H. S. Do, 《多重次调和函数的一个积分定理》, 《数学分析与应用杂志》495, 124741。10.1016/j.jmaa.2020.124741。[GZ07] V. Guedj、A. Zeriahi, 《拟多重次调和函数的带权 Monge-Amp`ère 能量》, 《泛函分析杂志》250(2), 442-482。(2007)。[GZ17] V. Guedj、A. Zeriahi, 《退化复 Monge-Amp`ère 方程》, 《EMS 数学论丛》第 26 卷, 欧洲数学学会, (2017)。[GLZ19] V. Guedj、C. H. Lu、A. Zeriahi, 《多重次调和包络与上解》, 《微分几何杂志》113 (2019), 273-313。[HH11] L. M. Hai、P. H. Hiep, 《多重次调和函数的若干加权能量类》, 《势分析》34, 43–56 (2011)。https://doi.org/10.1007/s11118-010-9179-8[KH09] N. V. Khue、P. H. Hiep, 《Cegrell 类中复 Monge-Amp`ère 算子的比较原理及其应用》, Ams, 第 361 卷, 5539-5554 (2009)。[Kol95] S. Ko lodziej, 《复 Monge-Amp`ère 算子的值域 II》, 《印第安纳大学数学杂志》44 (1995), 765-782。[Kol05] S. Ko lodziej, 《复 Monge-Amp`ère 方程与多重势理论》, 《美国数学学会回忆录》178 (2005)。[KN15] S. Ko lodziej、N. C. Nguyen, 《Hermitian 流形上的复 Monge-Amp`ère 方程弱解》, 《分析、复几何与数学物理》。《当代数学》第 644 卷（美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2015）, 141-158。[KN23a] S. Ko lodziej、N. C. Nguyen, 《带边界 Hermitian 流形上的 Monge-Amp`ère 方程的狄利克雷问题》, 《变分法与偏微分方程》62 (2023), 第 1 期, 论文第 1 篇。[KN23b] S. Ko lodziej、N. C. Nguyen, 《带边界紧致 Hermitian 流形上的 Monge–Amp`ère 型方程弱解》, 《几何分析杂志》33.1 (2023): 15。[LN22] C. H. Lu、V. D. Nguyen, 《紧致 K¨ahler 流形上具有给定奇性的复 Hessian 方程》, 《比萨高等师范学院科学年刊》系列 5, 23 (2022), 第 1 期, 425–462。[TV21] D. D. Thai、D. V. Vu, 《有限能量类中具有解的复 Monge-Ampere 方程》, (2021) arXiv:2010.08619v2。

Department of Mathematics, Faculty of Sciences El Jadida, Chouaib Doukkali University. 24000 El Jadida. Morocco.电子邮箱：salouf.m@ucd.ac.ma