arXiv:2303.04899v1 [math.PR] 8 Mar 2023

随机偏微分方程 SEIRS 流行病模型：适定性与长期行为

Yuqi Li* 和Lihua Zhang†

摘要。 流行病模型的研究在数理流行病学中发挥着重要作用。许多研究使用常微分方程、偏微分方程或随机微分方程研究流行病模型。与这些研究不同，我们使用随机偏微分方程分析 SEIRS（易感-暴露-感染-康复-易感）模型。具体而言，我们考察空间变量和时空白噪声对流行病模型的影响。基于温和解的概念，我们构造压缩映射，并通过不动点论证和因子分解方法证明随机偏微分方程的适定性。我们还找到了持久性和灭绝的充分条件，以确定解的长期行为。我们希望这项工作能为日益复杂的流行病模型及相关数值模拟研究提供一些新思路。

关键词。 随机偏微分方程、SEIRS 流行病模型、温和解、因子分解方法、长期行为

1. 引言。 关于流行病模型已有许多研究，这些模型在数理流行病学中发挥着重要作用 Kermack and McKendrick (1972,1932)。在这一研究领域中，基本模型是以下 SIS模型 L.J.S. Allen(2007)，事实上它是一个常微分方程。

$$\begin{cases} dS(t) = [-\alpha \frac{S(t)I(t)}{S(t)+I(t)} + rI(t)]dt, \quad t > 0, \\ dI(t) = [\alpha \frac{S(t)I(t)}{S(t)+I(t)} - rI(t)]dt, \quad t > 0, \\ S(0) = S_0 \geqslant 0, I(0) = I_0 \geqslant 0, \end{cases}$$

其中 $S(t)$ $I(t)$ 分别是易感人群和感染人群的密度， α 是感染率， r 是康复率。该基本模型假设不存在免疫、出生和死亡，实际上它是一个循环系统，即 SISISISI $\cdots$。关于SIS模型的更多结果可参见N.T. Dieu and Nhu (2019)； Peng (2009)； Peng and Liu(2009)。

此外，人口还可以划分为易感者、感染者和康复者，另一个经典模型是以下 SIR模型 Britton andLindholm(2009)，它同样是一个常微分方程。

$$\begin{cases} dS(t) = [\Lambda - \mu_S S(t) - \alpha \frac{S(t)I(t)}{S(t)+I(t)}]dt, \quad t > 0, \\ dI(t) = [\alpha \frac{S(t)I(t)}{S(t)+I(t)} - (r+\mu_I)I(t)]dt, \quad t > 0, \\ dR(t) = [-\mu_R R(t) + rI(t)]dt, \quad t > 0, \\ S(0) = S_0 \geqslant 0, I(0) = I_0 \geqslant 0, R(0) = R_0 \geqslant 0, \end{cases}$$

其中， $R(t)$表示康复人群的密度， Λ 是人口补充率， μ_S， μ_I， μ_R 分别是易感者、感染者和康复者的死亡率。

*北京邮电大学理学院，中国北京，100876（Llyq@bupt.edu.cn）。

†通讯作者。北京邮电大学理学院，中国北京，100876（zhlh@bupt.edu.cn）。

此手稿仅供审阅。

随着流行病模型的发展，人们已普遍认识到，模型中应考虑空间依赖D.H. Nguyen和Yin (2020，这能更好地反映空间变化，进而使模型成为偏微分方程，例如以下流行病反应扩散模型D.H. Nguyen和Yin (2020)；Wang和Zhao (2012)；L. Zhang和Zhao (2015)。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}S(t,x) = k_1 \triangle S(t,x) + \Lambda(x) - \mu_1(x)S(t,x) - \alpha(x)\frac{S(t,x)I(t,x)}{S(t,x)+I(t,x)} + r(x)I(t,x), \text{ in } \mathbb{R}^+ \times \mathcal{O}, \\ \frac{\partial}{\partial t}I(t,x) = k_2 \triangle I(t,x) - \mu_2(x)I(t,x) + \alpha(x)\frac{S(t,x)I(t,x)}{S(t,x)+I(t,x)} - r(x)I(t,x), \text{ in } \mathbb{R}^+ \times \mathcal{O}, \\ \partial_\nu S(t,x) = \partial_\nu I(t,x) = 0, \text{ in } \mathbb{R}^+ \times \partial\mathcal{O}, \\ S(0,x) = S_0(x), I(0,x) = I_0(x), \text{ in } \mathcal{O}, \end{cases}$$

其中， $\triangle$ 是关于空间变量的拉普拉斯算子， $\mathcal{O}$ 是边界为 $\mathbb{R}^d$（$d \geqslant 1$）的有界区域， $\partial_\nu S$， $\partial_\nu I$ 表示方向导数，其中 ν为 $\partial\mathcal{O}$上的外法向方向； k_1 和 k_2 是正数，分别表示易感者和感染人群密度的扩散率。此外， $\Lambda(x)$ $\mu_1(x)$ $\mu_2(x)$ $\alpha(x)$ $r(x)$ 是非负函数。

一方面，上述模型均未考虑噪声，但环境中往往不可避免地会出现随机噪声扰动。近年来，一种常见的方法是在上述确定性模型中加入随机噪声扰动，关于随机流行病模型的研究也日益增多N.T. Dieu 和 Yin (2016);Du 和 Nhu (2017, 2018); N. T. Hieu 等 (2015). 另一方面，除了$S(t)$ $I(t)$ $R(t)$，还可以考虑暴露者种群 $E(t)$。自然地，我们可以考虑同时包含空间变量 x 和时空白噪声$W(t, x)$的 SEIRS（易感者-暴露者-感染者-康复者-易感者）流行病模型吗?

本文利用随机偏微分方程分析 SEIRS 模型。具体而言，我们考察空间变量和时空白噪声对流行病模型的影响。基于温和解，我们在第3.1节运用不动点论证和因子分解方法构造压缩映射，并证明随机偏微分方程的适定性。在第3.2节，我们找出持久性和灭绝的充分条件，以确定解的长期行为。在第2节，我们给出符号与假设，第4节对全文进行总结。我们希望这项工作能为日益复杂的流行病模型及相关数值模拟研究提供一些新思路。

2. 预备知识。

2.1. 符号与假设。 • $\mathcal{L}$：一个具有 $\mathbb{R}^d$ $d \geqslant 1$边界的有界区域，其中 C^2 $|\mathcal{L}| = 1$, 其中 $|\mathcal{L}|$ 是 $\mathbb{R}^d$中 $\mathcal{L}$ 的体积；为简单起见，初始值是非随机的。

• $(\Omega$ $\mathcal{F}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathbb{P})$：一个完备滤过概率空间。
• $L^p\big(\Omega;\ C\big([0,T];\ C(\bar{\mathcal{L}};\ \mathbb{R}^4)\big)\big)$：所有取值于$\bar{\mathcal{L}}$的可预测 C过程构成的空间，其中 $C\big([0,T];\ C(\bar{\mathcal{L}};\ \mathbb{R}^4)\big)$, $\mathbb{P}$-几乎处处，范数为$L_{t,\ p}$如下

$$|u|^p_{L_{t,p}} := \mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}|u(s)|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)},$$

其中

本手稿仅供审阅。

$$|u|_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)} = \Big(\sum_{i=1}^{4} \sup_{x\in\bar{\mathcal{L}}} |u_i(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

- 定义 $L^2(\mathcal{L};\mathbb{R})$-值维纳过程

$$W_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_{k,i}} B_{k,i}(t) e_k, i = 1,2,3,4,$$

其中 $\{a_{k,i}\}_{k=1}^{\infty}$ 是满足 ∞ $i=1$ 2 3 4 a_i $_i <$: $= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,}$ ， ， ， ， ， $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是标准正交基。

- 定义 H 是巴拿赫空间 $C($ 上确界 $_{k\in\mathbb{N}}^{-} |e_k|_{L^\infty(\mathcal{L};\ \mathbb{R})}$ = 上确界 $_{k\in\mathbb{N}}$ 本质上确界 $_{x\in\mathcal{L}}$ $e_k(x) < \infty$， $|u|_H$: = 上确界 $_{x\in\bar{\mathcal{L}}} |u(x)|$。
- 令 A_i 为 $k_i\triangle$ 在 H中的诺伊曼实现， $i=1$， 2， 3， 4， $A=(A_1$， A_2， A_3， $A_4)$。

2.2. SPDE SEIRS 流行病模型。 我们利用由（2.1给出的随机偏微分方程组提出一个 SEIRS 流行病模型

$$\begin{cases} dS(t,x) = [k_1\triangle S(t,x) + \Lambda(x) - \mu_1(x)S(t,x) - \alpha(x)\frac{S(t,x)I(t,x)}{S(t,x)+I(t,x)+E(t,x)+R(t,x)} \\ \qquad +\beta(x)R(t,x)]dt + S(t,x)dW_1(t,x), \quad \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathcal{L}, \\ dE(t,x) = [k_2\triangle E(t,x) - \mu_2(x)E(t,x) + \alpha(x)\frac{S(t,x)I(t,x)}{S(t,x)+I(t,x)+E(t,x)+R(t,x)} \\ \qquad -\sigma(x)E(t,x)]dt + E(t,x)dW_2(t,x), \quad \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathcal{L}, \\ dI(t,x) = [k_3\triangle I(t,x) - \mu_3(x)I(t,x) + \sigma(x)E(t,x) - \gamma(x)I(t,x)]dt \\ \qquad +I(t,x)dW_3(t,x), \quad \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathcal{L}, \\ dR(t,x) = [k_4\triangle R(t,x) - \mu_4(x)R(t,x) + \gamma(x)I(t,x) - \beta(x)R(t,x)]dt \\ \qquad +R(t,x)dW_4(t,x), \quad \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathcal{L}, \\ \partial_\nu S(t,x) = \partial_\nu E(t,x) = \partial_\nu I(t,x) = \partial_\nu R(t,x) = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^+\times\partial\mathcal{L} \\ S(0,x) = S_0(x), E(0,x) = E_0(x), I(0,x) = I_0(x), R(0,x) = R_0(x) \quad \text{in } \mathcal{L}, \end{cases}$$

其中， $\triangle$ 是关于空间变量的拉普拉斯算子； $\partial_\nu S$、 $\partial_\nu E$、 $\partial_\nu I$、 $\partial_\nu R$表示方向导数， ν 为 $\partial\mathcal{L}$、k_1、 k_2、 k_3 上的外法向方向； k_4 是表示易感者、暴露者、感染者和康复人群密度扩散率的正常数； $\mu_1(x)$ $\mu_2(x)$ $\mu_3(x)$和 $\mu_4(x)$分别表示上述人群密度的死亡率。$\Lambda(x)$是人口补充率， $\alpha(x)$是感染率， $\gamma(x)$是康复率， $\beta(x)$是失去免疫力的康复者所占比例， $\sigma(x)$是转为感染者的暴露者所占比例。此外， $\Lambda(x)$ $\mu_1(x)$ $\mu_2(x)$ $\mu_3(x)$ $\mu_4(x)$ $\alpha(x)$ $\gamma(x)$ $\beta(x)$ $\sigma(x)$是非负函数。 $W_1(t,x)$ $W_2(t,x)$、 $W_3(t,x)$和 $W_4(t,x)$是 $L^2(\mathcal{L};\mathbb{R})$值维纳过程，也称为布朗片；在某些意义下，它们的导数是时空白噪声。

定义 $Au := (A_1u_1, A_2u_2, A_3u_3, A_4u_4)$，其中 $u=(u_1,u_2,u_3,u_4) \in L^2(\mathcal{L};\mathbb{R}^4)$，则 A 是解析半群 e^{tA} 的无穷小生成元，并且 $e^{tA}u = (e^{tA_1}u_1, e^{tA_2}u_2, e^{tA_3}u_3, e^{tA_4}u_4)$。我们可以将方程（2.1）改写为无限

本手稿仅供审阅。

维数空间

(2.2)
$$\begin{cases} dS(t) = [A_1S(t) + \Lambda - \mu_1 S(t) - \frac{\alpha S(t)I(t)}{S(t)+I(t)+E(t)+R(t)} + \beta R(t)]dt + S(t)dW_1(t), \\ dE(t) = [A_2E(t) - \mu_2 E(t) + \frac{\alpha S(t)I(t)}{S(t)+I(t)+E(t)+R(t)} - \sigma E(t)]dt + E(t)dW_2(t), \\ dI(t) = [A_3I(t) - \mu_3 I(t) + \sigma E(t) - \gamma I(t))]dt + I(t)W_3(t), \\ dR(t) = [A_4E(t) - \mu_4 R(t) + \gamma I(t) - \beta R(t))]dt + R(t)W_4(t), \\ S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0. \end{cases}$$

注2.1. 这并不意味着方程（2.2）与 x无关，只是将其写成了一个无限维动力系统的形式。

Definition 2.2. $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ *is a* ***mild solution*** *to (2.2), if*

(2.3)
$$\begin{cases} S(t) = e^{tA_1}S_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_1}(\Lambda - \mu_1 S(s) - \frac{\alpha S(s)I(s)}{S(s)+I(s)+E(s)+R(s)} + \beta R(s))ds + W_S(t), \\ E(t) = e^{tA_2}E_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_2}(-\mu_2 E(s) + \frac{\alpha S(s)I(s)}{S(s)+I(s)+E(s)+R(s)} - \sigma E(s))ds + W_E(t), \\ I(t) = e^{tA_3}I_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_3}(-\mu_3 I(s) + \sigma E(s) - \gamma I(s))ds + W_I(t), \\ R(t) = e^{tA_4}R_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_4}(-\mu_4 R(s) + \gamma I(s) - \beta R(s))ds + W_R(t), \end{cases}$$

其中

$$W_S(t) = \int_0^t e^{(t-s)A_1}S(s)dW_1(t), \quad W_E(t) = \int_0^t e^{(t-s)A_2}E(s)dW_2(t),$$

$$W_I(t) = \int_0^t e^{(t-s)A_3}I(s)dW_3(t), \quad W_R(t) = \int_0^t e^{(t-s)A_4}R(s)dW_4(t).$$

将 *(2.2)* 的正温和解定义为满足以下条件的温和解 $S(t)$ $E(t)$ $I(t)$ $R(t)$: $S(t)$ $E(t)$, $I(t)$ $R(t)$ $\geqslant 0$, 几乎处处 $x \in \mathcal{L}$, 对所有 $t \geqslant 0$ 均成立。本文仅考虑正温和解。此外，为使项 $\frac{si}{s+i+e+r}$ 定义良好，假设当 $s = 0$ 或 $i = 0$ 时， $\frac{si}{s+i+e+r} = 0$ 。

为使分析更加清晰、方便，我们将温和解（2.3）改写为以下向量形式：

$$V(t) = e^{tA}V_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}G(V(s))ds + \int_0^t e^{(t-s)A}(V(s))dW(s), \tag{2.4}$$

其中

$$V = (S, E, I, R), \quad V_0 = (S_0, E_0, I_0, R_0),$$

$$\begin{aligned} &G(V) = (G_1(V), G_2(V), G_3(V), G_4(V)) \\ :=&\Big(\Lambda - \mu_1 S - \frac{\alpha SI}{S+I+E+R} + \beta R, -\mu_2 E + \frac{\alpha SI}{S+I+E+R} - \sigma E, -\mu_3 I + \sigma E - \gamma I, -\mu_4 R + \gamma I - \beta R\Big), \\ &e^{(t-s)A}(V(s))dW(s) \\ :=&\Big(e^{(t-s)A_1}(S(s))dW_1(s), e^{(t-s)A_2}(E(s))dW_2(s), e^{(t-s)A_3}(I(s))dW_3(s), e^{(t-s)A_4}(R(s))dW_4(s)\Big). \end{aligned}$$

本手稿仅供审阅。

DEFINITION 2.3. 如果存在一个与初始值无关的正数 R，使得感染类别持续存在，则称感染类别持续存在。

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Big(\mathbb{E}\int_{\mathcal{O}}\big((I(s,x)+E(s,x))^2\wedge 1\big)dx\Big)^{\frac{1}{2}}ds\geqslant R,$$

如果灭绝，则称其为

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{O}}(I(s,x)+E(s,x))dxds=0.$$

3. 主要结果。本节给出主要结果：在温和解的意义下，我们构造一个压缩映射，并利用不动点论证和因子分解方法证明该随机偏微分方程的适定性。我们还找到了持久性和灭绝的充分条件，以确定解的长期行为。

3.1. 适定性。

THEOREM 3.1. 对于任意 $T>0, p\geqslant 1$ 以及任意初始值 $0\leqslant S_0, E_0, I_0, R_0\in C(\mathcal{L};\mathbb{R})$，方程 (2.2) 存在唯一的正温和解 $(S(t)\ E(t)\ I(t)\ R(t))$，且该解属于 $L^p\big(\Omega; C\big([0,T];C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)\big)\big)$。此外，该解连续依赖于初始值。

定理3.1的证明概要：
▶ 步骤1：构造一个压缩映射▶ 步骤2：证明温和解的正性▶ 步骤3：证明解对初始值的连续依赖性。

定理**3.1**的证明：
步骤1. 构造 $\tilde{\gamma}$ 并证明它是一个压缩映射。
定义

$$g(x,s,e,i,r)=\Big(\Lambda(x)-\mu_1(x)s-\frac{\alpha(x)si}{s+e+i+r}+\beta(x)r,\ -\mu_2(x)e+\frac{\alpha(x)si}{s+e+i+r}-\sigma(x)e,$$
$$-\mu_3(x)i+\sigma(x)e-\gamma(x)i,\ -\mu_4(x)r+\gamma(x)i-\beta(x)r\Big),$$

$$g^*(x,s,e,i,r)=f(x,s\vee 0,e\vee 0,i\vee 0,r\vee 0),\quad v=(s,e,i,r).$$

根据前述假设，显然可以得到 $g^*(x,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot):\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 关于 $x\in\mathcal{O}$一致地利普希茨连续。因此，$G^*(v)(x)=\big(G_1^*(v)(x)\ G_2^*(v)(x)\ G_3^*(v)(x)\ G_4^*(v)(x)\big):=g^*(x,v(x))$ $x\in\mathcal{L}$ 关于 $L^2(\mathcal{L};\mathbb{R}^4)$和 $C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)$均为利普希茨连续。

现在，我们考虑以下问题
(3.1)
$$dV^*(t)=[AV^*(t)+G^*(V^*(t))]dt+(V^*(t)\vee 0)dW(t),\ V^*(0)=V_0=(S_0,E_0,I_0,R_0),$$

其中

$$V^*(t)=\big(S^*(t),E^*(t),I^*(t),R^*(t)\big),$$

$$(V^*(t)\vee 0)(x)=\big(S^*(t,x)\vee 0,E^*(t,x)\vee 0,I^*(t,x)\vee 0,R^*(t,x)\vee 0\big).$$

本手稿仅供审阅。

对于任意 $u(t,\ x) = \Big(u_1(t,\ x)\ u_2(t,\ x)\ u_3(t,\ x)\ u_4(t,\ x)\Big) \in L^p\Big(\Omega;\ C\big([0,T];\ C(\bar{\mathcal{L}};\ \mathbb{R}^4)\big)\Big)$，我们考虑映射

$$\tilde{\gamma}(u)(t) := e^{tA}V_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}G^*(u(s))ds + \tilde{\varphi}(u)(t),$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(u)(t) :&= \int_0^t e^{(t-s)A}(u(s)\vee 0)dW(s)\\ &= \Big(\int_0^t e^{(t-s)A_1}(u_1(s)\vee 0)dW_1(s), \int_0^t e^{(t-s)A_2}(u_2(s)\vee 0)dW_2(s),\\ &\int_0^t e^{(t-s)A_3}(u_3(s)\vee 0)dW_3(s), \int_0^t e^{(t-s)A_4}(u_4(s)\vee 0)dW_4(s)\Big).\end{aligned}$$

如果我们能够证明，对于某个 $T_0 > 0$，且任意 $p \geqslant p_0$ 满足某个 p_0，$\tilde{\gamma}$ 在 $L^p\big(\Omega;\ C\big([0,T_0];C(\bar{\mathcal{L}};\ \mathbb{R}^4)\big)\big)$ 中是一个压缩映射，那么根据不动点论证，我们可以得到方程 (3.1) 存在唯一的温和解。因此，对于任意 $T > 0$，$p \geqslant p_0$，在每个有限时间区间 $[kT_0,(k+1)T_0]$ 上重复上述论证可知，方程 (3.1) 存在唯一解 $V^*(t) = \big(S^*(t)\ E^*(t)\ I^*(t)\ R^*(t)\big)$，且该解属于 $L^p\big(\Omega;\ C\big([0,T];\ C(\bar{\mathcal{L}};\ \mathbb{R}^4)\big)\big)$。关键在于估计 $\tilde{\varphi}(u)(t)$。为完成压缩映射的证明，我们需要以下引理。

LEMMA 3.2. 存在 p_0，使得对任意 $p \geqslant p_0$，映射 $\tilde{\varphi}$ 将$L^p\big(\Omega;\ C\big([0,t];C(\bar{\mathcal{L}};\ \mathbb{R}^4)\big)\big)$ 映射到其自身，且对任意 $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in L^p\big(\Omega;\ C\big([0,t];C(\bar{\mathcal{L}};\ \mathbb{R}^4)\big)\big)$，

$$|\tilde{\varphi}(u) - \tilde{\varphi}(v)|_{L_{t,p}} \leqslant c_p(t)\,|u-v|_{L_{t,p}},$$

其中 $c_p(t)$ 是某个常数，满足 $c_p(t) \downarrow 0$ 当 $t \downarrow 0$时。

★引理 3.1 的证明要点

由于 $\tilde{\varphi}(u)(t)$ 不是随机积分，因此鞅方法不适用，所以我们需要采用因子分解方法来证明结果。该方法最初由 Da Prato 和 Zabczyk 提出Prato 和 Zabczyk（1992）；Prato 和 Tubaro（1985）来证明我们的结果。基于等式

$$\int_\sigma^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{-\alpha}ds = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha},$$

根据随机 Fubini 定理，我们有

$$\tilde{\varphi}(u)(t) - \tilde{\varphi}(v)(t) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{(t-s)A}M_\alpha(u,v)(s)ds,$$

其中

$$M_\alpha(u,v)(s) = \int_0^s (s-r)^{-\alpha}e^{(s-r)A}\big(u(r)\vee 0 - v(r)\vee 0\big)dW(r).$$

接下来，利用 BDG 不等式和半群的性质 Arendt；Cerrai (2001) ，

本手稿仅供审阅。

很容易证明

$$\int_0^t |M_\alpha(u,v)(s)|^p_{L^p(\mathcal{L};\mathbb{R}^4)}\, ds < \infty \quad \text{a.s..}$$

因此，我们可以应用 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理，得到

$$|\tilde{\varphi}(u)(t) - \tilde{\varphi}(v)(t)|_{L_{t,p}} \leqslant c_p(t)\, |u-v|_{L_{t,p}}.$$

引理 3.1 得证。

利用解析半群的性质Davies (1989年)；Ouhabaz (2004年)以及 d G^* 的利普希茨连续性，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^t \left| e^{(s-t)A}(G^*(u(s)) - G^*(v(s)))\right|^p_{L(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)} ds &\leqslant c\int_0^t |u(s)-v(s)|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)} \\ &\leqslant c\int_0^t \sup_{r\in[0,s]} |u(s)-v(s)|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)} \\ &\leqslant ct\cdot \sup_{s\in[0,t]} |u(s)-v(s)|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

结合（3.2）和引理 3.1,

$$|\tilde{\gamma}(u) - \tilde{\gamma}(v)|_{L_{t,p}} \leqslant c_p(t)\, |u-v|_{L_{t,p}},$$

其中 $c_p(t) \downarrow 0 (t \downarrow 0)$。

我们已证明 $\tilde{\gamma}$ 是 $L^p(\Omega; C([0,T_0]; C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)))$ 上的压缩映射，其中 $T_0 > 0$。因此，步骤 1 已完成。

► **步骤 2。 证明 $S^*(t)$ $E^*(t)$ $I^*(t)$ $R^*(t)$ 的正性。**

• 对于 $i = 1$、2、3、4，设 $\lambda_i \in \rho(A_i)$ 为 A_i 的预解集，且 $R_i(\lambda_i) := \lambda_i R_i(\lambda_i, A_i)$，其中 $R_i(\lambda_i, A_i)$ 是 A_i 的预解算子。对于每个较小的 $\varepsilon > 0$，方程存在唯一的强解？$S_{\lambda,\varepsilon}(t,x)$ $E_{\lambda,\varepsilon}(t,x)$ $I_{\lambda,\varepsilon}(t,x)$, $R_{\lambda,\varepsilon}(t,x)$

$$\begin{cases} dS_{\lambda,\varepsilon}(t) = [A_1 S_{\lambda,\varepsilon}(t) + R_1(\lambda_1)F_1\left(\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}S_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}E_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}I_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}R_{\lambda,\varepsilon}(t))\right)]dt \\ \qquad\qquad +R_1(\lambda_1)\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}S_{\lambda,\varepsilon}(t))dW_1(t), \\ dE_{\lambda,\varepsilon}(t) = [A_2 E_{\lambda,\varepsilon}(t) + R_2(\lambda_2)F_2\left(\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}S_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}E_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}I_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}R_{\lambda,\varepsilon}(t))\right)]dt \\ \qquad\qquad +R_2(\lambda_2)\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}E_{\lambda,\varepsilon}(t))dW_2(t), \\ dI_{\lambda,\varepsilon}(t) = [A_3 I_{\lambda,\varepsilon}(t) + R_3(\lambda_3)F_3\left(\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}S_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}E_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}I_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}R_{\lambda,\varepsilon}(t))\right)]dt \\ \qquad\qquad +R_3(\lambda_3)\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}I_{\lambda,\varepsilon}(t))dW_3(t), \\ dR_{\lambda,\varepsilon}(t) = [A_4 R_{\lambda,\varepsilon}(t) + R_4(\lambda_4)F_4\left(\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}S_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}E_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}I_{\lambda,\varepsilon}(t)), \varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}R_{\lambda,\varepsilon}(t))\right)]dt \\ \qquad\qquad +R_4(\lambda_4)\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}R_{\lambda,\varepsilon}(t))dW_4(t), \\ S_{\lambda,\varepsilon}(0) = R_1(\lambda_1)S_0, E_{\lambda,\varepsilon}(0) = R_2(\lambda_2)E_0, I_{\lambda,\varepsilon}(0) = R_3(\lambda_3)I_0, R_{\lambda,\varepsilon}(0) = R_4(\lambda_4)R_0. \end{cases}$$

其中

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant 0, \\ 3\xi^5 - 8\xi^4 + 6\xi^3, & 0 < \xi < 1, \\ \xi, & \xi \geqslant 1, \end{cases}$$

本手稿仅供审阅。

Φ 的构造是唯一的，并满足 $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ $\varepsilon\Phi(\varepsilon^{-1}\xi) \to \xi \vee 0$ $(\varepsilon \to 0)$。对于某个序列 $\{\lambda(k)\}_{k=1}^{\infty}$，我们得到

$$\big(S_{\lambda(k),\varepsilon}(t,x), E_{\lambda(k),\varepsilon}(t,x), I_{\lambda(k),\varepsilon}(t,x), R_{\lambda(k),\varepsilon}(t,x)\big) \to \big(S^*(t), E^*(t), I^*(t), R^*(t)\big) \quad (k \to \infty, \varepsilon \to 0).$$

Let

$$g(\xi) = \begin{cases} 2\xi^2 + \frac{11}{3}, & \xi \leqslant -1 \\ -\xi^4 - \frac{8}{3}\xi^3, & -1 < \xi < 0 \\ 0, & \xi \geqslant 0 \end{cases}$$

满足 $g'(\xi) \leqslant 0$ 和 $g''(\xi) \geqslant 0$ 的情况下， $g(\xi)$ 的构造并不唯一。

对于 $\forall \xi$，我们有 $g'(\xi)\Phi(\xi) = g''(\xi)\Phi(\xi) = 0$，则根据 Curtain 和 Falez (1970年) 中的伊藤公式，可得

$$\int_{\mathcal{O}} g(S_{\lambda,\varepsilon}(t,x))dx \leqslant 0, \int_{\mathcal{O}} g(E_{\lambda,\varepsilon}(t,x))dx \leqslant 0, \int_{\mathcal{O}} g(I_{\lambda,\varepsilon}(t,x))dx \leqslant 0, \int_{\mathcal{O}} g(R_{\lambda,\varepsilon}(t,x))dx \leqslant 0.$$

因此，我们有 $S^*(t)$ $E^*(t)$ $I^*(t)$ $R^*(t)$ 的正性。

▶第3步. 证明解对初始值的连续依赖性

我们用下标表示解对初始值的依赖关系。令$V_{v_0}(t)$ $V_{v_0'}(t)$ 为方程 (2.4) 在初始条件 $V(0) = v_0$和 $V(0) = v_0'$下的正温和解，则可得到一些估计

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \left| \int_0^s e^{(s-r)A}(V_{v_0}(r) - V_{v_0'}(r))dW(r) \right|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)} \\ &\leqslant c_p(t) \int_0^t \mathbb{E} \sup_{r\in[0,s]} \left| V_{v_0}(r) - V_{v_0'}(r) \right|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)} ds \\ &\leqslant c_p(t) \int_0^t \left| V_{v_0} - V_{v_0'} \right|^p_{L_{s,p}} ds, \end{aligned}$$

$$\left| V_{v_0} - V_{v_0'} \right|^p_{L_{t,p}} \leqslant c_p \left| V_{v_0} - V_{v_0'} \right|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)} + c_p(t) \int_0^t \left| V_{v_0} - V_{v_0'} \right|^p_{L_{s,p}} ds.$$

根据格朗沃尔不等式,

$$\left| V_{v_0} - V_{v_0'} \right|^p_{L_{T,p}} \leqslant c_p(T) \left| v_0 - v_0' \right|^p_{C(\bar{\mathcal{L}};\mathbb{R}^4)}.$$

□

3.2. 长期行为。定义 $\Lambda_* = \inf_{x\in\bar{\mathcal{L}}} \Lambda(x)$, ˆ $R = \int_{\mathcal{L}} {}^{\alpha_{(2}}{}^{x} - \underline{(\mu_2)}(x) + \mu_3(x) + \gamma(x))dx - \frac{\tilde{a}}{2}$，其中 $\tilde{a} = \max\{a_2, a_3\}$。

ˆThEOREM 3.3. 如果 $\Lambda_* > 0$、 $R > 0$，且对所有 $t \leqslant 0$,

$$\alpha(x) - \gamma(x) \geqslant 0, \quad \frac{S(t,x) + R(t,x)}{I(t,x) + E(t,x)} \leqslant \frac{S(t,x) + R(t,x) + I(t,x) + E(t,x)}{2},$$
$$\frac{S(t,x)}{S(t,x) + R(t,x) + I(t,x) + E(t,x)} > \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)},$$

本手稿仅供审阅。

几乎处处 $x \in \mathcal{L}$。那么，对于满足以下条件的任意初始值 $0 \leqslant S_0$、E_0、I_0、$R_0 \in C(\mathcal{L};\mathbb{R})$，感染类别 将持续存在

$$\int_{\mathcal{L}} -ln(I_0(x)+E_0(x))dx < \infty,$$

我们还得到了

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} \big((I(s,x)+E(s,x))^2 \wedge 1\big)dx\Big)^{\frac{1}{2}} ds \geqslant R > 0,$$

其中 R 与初始值无关。

定理 ***3.2*** 的证明：

步骤1。 利用强解逼近温和解。

对于每个固定的 $n \in \mathbb{N}$，令 $(S_n(t,\ x)\ E_n(t,\ x)\ I_n(t,\ x)\ R_n(t,\ x))$ 为下列方程的强解**??**

(3.3)

$$\begin{cases} dS_n(t,x) = [A_1 S_n(t,x) + \Lambda(x) - \mu_1(x)S_n(t,x) - \alpha(x)\frac{S_n(t,x)I_n(t,x)}{S_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x)+R_n(t,x)} \\ \qquad +\beta(x)R_n(t,x)]dt + \sum_{k=1}^n \sqrt{a_{k,1}} e_k(x) S_n(t,x) dB_{k,1}(t), \\ dE_n(t,x) = [A_2 E_n(t,x) - \mu_2(x)E_n(t,x) + \alpha(x)\frac{S_n(t,x)I_n(t,x)}{S_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x)+R_n(t,x)} \\ \qquad -\sigma(x)E_n(t,x)]dt + \sum_{k=1}^n \sqrt{a_{k,2}} e_k(x) E_n(t,x) dB_{k,2}(t), \\ dI_n(t,x) = [A_3 I_n(t,x) - \mu_3(x)I_n(t,x) + \sigma(x)E_n(t,x) - \gamma(x)I_n(t,x)]dt \\ \qquad + \sum_{k=1}^n \sqrt{a_{k,3}} e_k(x) I_n(t,x) dB_{k,3}(t), \\ dR_n(t,x) = [A_4 R_n(t,x) - \mu_4(x)R_n(t,x) + \gamma(x)I_n(t,x) - \beta(x)R_n(t,x)]dt \\ \qquad + \sum_{k=1}^n \sqrt{a_{k,4}} e_k(x) R_n(t,x) dB_{k,4}(t), \\ S_n(0,x) = S_0(x), E_n(0,x) = E_0(x), I_n(0,x) = I_0(x), R_n(0,x) = R_0(x). \end{cases}$$

根据 **??** 中关于随机偏微分方程的结论，(3.3) 的强解是唯一的，且对所有固定的 t,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|S(t) - S_n(t)|_H^2 = 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|E(t) - E_n(t)|_H^2 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|I(t) - I_n(t)|_H^2 = 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|R(t) - R_n(t)|_H^2 = 0.$$

步骤 2。 证明以下引理。

LEMMA 3.4. *Let* $\mu_* = \inf_{x\in\bar{\mathcal{L}}} min\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \mu_4(x)$, *if* $\mu_* > 0$, *then*

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} (S(t,x)+I(t,x)+E(t,x)+R(t,x))dx \leqslant \int_{\mathcal{L}} (S_0(x)+I_0(x)+E_0(x)+R_0(x))dx + \frac{|\Lambda|_H}{\mu_*} e^{\mu_* t}.$$

引理 3.2 的证明与**?**类似，此处略去。

LEMMA 3.5. 若 $\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{\frac{S_0\ x}{((()+R_0(x))^p}} dx < \infty$，$\forall p > 0$，则存在 $\tilde{M}_p > 0$，使得

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_n(t,x)+R_n(t,x))^p} dx \leqslant e^{-t}\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_0(x)+R_0(x))^p} dx + \tilde{M}_p,$$

其中 M_p 与 n 及初始条件相互独立。

本手稿仅供审阅。

证明。 对于 $e^t \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{S_n\ t\ x\ +R_n((,\ )(t,\ x)+\epsilon)^p} dx$，根据? 中的伊藤公式，我们有

$$
\begin{aligned}
&d\Big(e^t \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^p} dx\Big) = e^t \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^p} dx \\
&+e^t \int_{\mathcal{L}} \frac{-p}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{p+1}} \Big[k_1 \triangle S_n(t,x) + \Lambda(x) - \mu_1(x) S_n(t,x) \\
&-\alpha(x) \frac{S_n(t,x) I_n(t,x)}{S_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x)+R_n(t,x)} + \beta(x) R_n(t,x) + k_4 \triangle R_n(t,x) \\
&-\mu_4(x) R_n(t,x) + \gamma(x) I_n(t,x) - \beta(x) R_n(t,x)\Big] dxdt \\
&+e^t \int_{\mathcal{L}} \frac{-p}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{k,1}} e_k(x) S_n(t,x) dx dB_{k,1}(t) \\
&+e^t \int_{\mathcal{L}} \frac{-p}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{k,4}} e_k(x) R_n(t,x) dx dB_{k,4}(t) \\
&+\frac{e^t}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{p(p+1)\sum_{k=1}^{n} a_{k,1}}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{p+2}} e_k^2(x) S_n^2(t,x) dxdt \\
&+\frac{e^t}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{p(p+1)\sum_{k=1}^{n} a_{k,4}}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{p+2}} e_k^2(x) R_n^2(t,x) dxdt.
\end{aligned}
$$

Let

$$
m = \max\left\{|\mu_1|_{\mathrm{H}}, |\mu_4|_{\mathrm{H}}, |\alpha-\gamma|_{\mathrm{H}}\right\}, \quad \mathrm{M_p} = \frac{1}{\mathrm{p}} + 2\mathrm{m} + \frac{\mathrm{p}+1}{2}\mathrm{aC_0^2}.
$$

根据这些假设，消去后可得

$$
\begin{aligned}
&e^t \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^p} dx \\
\leqslant &\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_0(x)+R_0(x)+\epsilon)^p} dx \\
&+\sum_{k=1}^{n} \int_0^t e^s \left[\sqrt{a_{k,1}} \int_{\mathcal{L}} \frac{-p e_k S_n(t,x)}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{p+1}} dx\right] dB_{k,1}(s) \\
&+\sum_{k=1}^{n} \int_0^t e^s \left[\sqrt{a_{k,4}} \int_{\mathcal{L}} \frac{-p e_k R_n(t,x)}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{p+1}} dx\right] dB_{k,4}(s) \\
&+\int_0^t \frac{p \cdot M_p^{p+1} \cdot 2^p}{\Lambda_*^p} e^s ds.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

因此，(3.4) 意味着

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^p} dx \\
\leqslant &e^{-t} \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_0(x)+R_0(x)+\epsilon)^p} dx \\
&+e^{-t} \int_0^t \frac{p \cdot M_p^{p+1} \cdot 2^p}{\Lambda_*^p} e^s ds.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

定义 $\tilde{M}_p = e^{-t} \int_0^t \frac{p \cdot M_p^{p+1} \cdot 2^p}{\Lambda_*^p} e^s ds$，令 $\epsilon \to 0$，即可完成证明。□ □

本手稿仅供审阅。

LEMMA 3.6.

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{1}{(S_n(4,x)+R_n(4,x))^2}dx\leqslant k_0,\quad n\in\mathbb{N},$$

其中， k_0 与 n相互独立，且仅取决于初始条件。

证明。 类似于引理 3.3 的证明，我们有以下事实

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(S_n(t,x)+R_n(t,x))dx\leqslant\int_{\mathcal{L}}(S_0(x)+R_0(x))dx+|\Lambda|_H\cdot t.$$

于是，存在 $k_1>0$ （k_1 与 n相互独立），使得

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(S_n(t,x)+R_n(t,x))^q dx\leqslant k_1,\quad t\in[0,1],q\in[0,1]. \tag{3.6}$$

令 $N_1=\frac{1}{2}\text{-}(m+|\alpha|_H+\frac{1}{4}aC_0^2)$ ，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{\frac{1}{2}}dx\\ \geqslant&\frac{1}{2}\int_0^1\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\Lambda(x)}{(S_n(1,x)+R_n(1,x)+\epsilon)^{\frac{1}{2}}}dxds\\ &-N_1\int_0^1\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(S_n(t,x)+R_n(t,x))^{\frac{1}{2}}dxds.\end{aligned} \tag{3.7}$$

由（3.6）和（3.7），

$$\int_0^1\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\Lambda(x)}{(S_n(s,x)+R_n(s,x))^{\frac{1}{2}}}dxds\leqslant 2(1+N_1)k_1,$$

等价地，存在 $t_1=t_1(n)\in[0,1]$ 使得

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\Lambda(x)}{(S_n(t_1,x)+R_n(t_1,x))^{\frac{1}{2}}}dx\leqslant 2(1+N_1)k_1.$$

应用引理 3.3 和 $(S_n(t,x)\ E_n(t,x)\ I_n(t,x)\ R_n(t,x))$ 的马尔可夫性质，我们得到 ∎

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\Lambda(x)}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{\frac{1}{2}}}dx\leqslant k_2,\quad\forall t\in[1,2],$$

其中 k_2 与 n相互独立。对 ?应用伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(S_n(2,x)+R_n(2,x)+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}dx\\ \leqslant&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(S_n(1,x)+R_n(1,x)+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}dx\\ &-\frac{1}{2}\int_1^2\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\Lambda(x)}{(S_n(s,x)+R_n(s,x)+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}dxds\\ &+\frac{1}{2}(m+|\alpha|_H+\frac{3}{4}aC_0^2)\int_1^2\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(S_n(s,x)+R_n(s,x))^{-\frac{1}{2}}dxds.\end{aligned}$$

本手稿仅供审阅。

重复上述方法，可得以下结论。
(1) 存在 $t_2 = t_2(n) \in [1,2]$ 使得

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Lambda(x)}{(S_n(t_2,x)+R_n(t_3,x))^{\frac{3}{2}}}dx \leqslant k_3,$$

于是,

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Lambda(x)}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}dx \leqslant k_4, \quad \forall t \in [2,3].$$

(2) 存在 $t_3 = t_3(n) \in [3,4]$ 使得

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Lambda(x)}{(S_n(t_2,x)+R_n(t_3,x))^{\frac{5}{2}}}dx \leqslant k_5.$$

因此，存在 $t_4 = t_4(n) \in [0,4]$ 使得

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Lambda(x)}{(S_n(t_4,x)+R_n(t_4,x))^{2}}dx \leqslant k_6.$$

最后，应用引理 3.3，引理 3.4 得证。 □ ∎

步骤 3. **完成定理 3.2 的证明.** 根据引理 3.3 和引理 3.4，可得

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{(S_n(t,x)+R_n(t,x))^{2}}dx \leqslant e^{-t}k_0 + \tilde{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \geqslant 4, \tag{3.8}$$

˜其中 k_0 和 M 均与 n无关，但 k_0 取决于初始值。
定义 $\tilde{m} = \max\{|\mu_2|_{\mathrm{H}}, |\mu_3|_{\mathrm{H}}, |\gamma|_{\mathrm{H}}\}$。去除膨胀项后，我们可以得到以下估计。

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I_n(t,x)+E_n(t,x))dx \geqslant \mathbb{E}\int_{\mathcal{L}} ln(I_n(t,x)+E_n(t,x))dx \geqslant \int_{\mathcal{L}}(I_0(x)+E_0(x))dx-(\tilde{m}+\tilde{a}) > -\infty, \quad \forall t > 0,$$

i.e.

$$P\{(I_n(t,x)+E_n(t,x)) > 0 \quad a.e.\ \text{in}\ \mathcal{L}\} = 1, \quad \forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

(3.10)

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\Big(\frac{\alpha(x)(I_n(t,x)+E_n(t,x))}{(S_n(t,x)+R_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x))}dxds \\
&+\int_0^t \mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\Big(\frac{\alpha(x)(S_n(t,x)+R_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x))}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x)+1)}\Big)dxds \\
&\geqslant \int_{\mathcal{L}} ln\frac{I_0(x)+E_0(x)+\epsilon}{1+I_0(x)+E_0(x)}dx + \hat{R}t - |\alpha|_H \int_0^t\int_{\mathcal{L}} \frac{\epsilon}{I_n(s,x)+E_n(s,x)+\epsilon}dxds, \quad \forall t \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \epsilon < 1,
\end{aligned}$$

本手稿仅供评审使用。

（3.10）可推出

(3.11)
$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\Big(\frac{\alpha(x)(I_n(t,x)+E_n(t,x))}{(S_n(t,x)+R_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x))}dxds\\
&+\int_0^t \mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\Big(\frac{\alpha(x)(S_n(t,x)+R_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x))}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x)+1)}\Big)dxds\\
\geqslant&\int_{\mathcal{L}} ln\frac{I_0(x)+E_0(x)}{1+I_0(x)+E_0(x)}dx+\hat{R}t,\quad \forall t\ \geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N},
\end{aligned}$$

由于以下事实

$$\frac{S_n(t,x)+R_n(t,x)}{S_n(t,x)+R_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x)}\leqslant 1,$$

$$\frac{1+E_n(t,x)+I_n(t,x)}{S_n(t,x)+R_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x)}\leqslant\frac{1}{S_n(t,x)+R_n(t,x)}+1,$$

我们有

(3.12)
$$\begin{aligned}
&|\alpha|_H\Big(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{(I_n(t,x)+E_n(t,x))^2}{(1+I_n(t,x)+E_n(t,x))^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\
\geqslant&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\alpha(x)(I_n(t,x)+E_n(t,x))}{I_n(t,x)+E_n(t,x)+1}dx\\
\geqslant&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\alpha(x)(S_n(t,x)+R_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x))}{(S_n(t,x)+R_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x))(I_n(t,x)+E_n(t,x)+1)}dx,
\end{aligned}$$

(3.13)
$$\begin{aligned}
&|\alpha|_H\Big(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{(I_n(t,x)+E_n(t,x))^2}{(1+I_n(t,x)+E_n(t,x))^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\big(\frac{1}{S_n(t,x)+R_n(t,x)}+1\big)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\
\geqslant&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{\alpha(x)(I_n(t,x)+E_n(t,x))}{S_n(t,x)+R_n(t,x)+I_n(t,x)+E_n(t,x)}dx
\end{aligned}$$

结合上述估计，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_4^t|\alpha|_H\Big(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{(I_n(s,x)+E_n(s,x))^2}{(1+I_n(s,x)+E_n(s,x))^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(2\sqrt{e^{-s}k_0}+2\tilde{M}^{\frac{1}{2}}+3\Big)ds\\
\geqslant&\int_{\mathcal{L}} ln\frac{I_0(x)+E_0(x)}{1+I_0(x)+E_0(x)}dx+\hat{R}t-8|\alpha|_H,
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，则

(3.14)
$$\begin{aligned}
&\int_4^t|\alpha|_H\Big(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{(I(s,x)+E(s,x))^2}{(1+I(s,x)+E(s,x))^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(2\sqrt{e^{-s}k_0}+2\tilde{M}^{\frac{1}{2}}+3\Big)ds\\
\geqslant&\int_{\mathcal{L}} ln\frac{I_0(x)+E_0(x)}{1+I_0(x)+E_0(x)}dx+\hat{R}t-8|\alpha|_H,
\end{aligned}$$

本手稿仅供审阅。

等价地,

$$\begin{aligned}&\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}((I(s,x)+E(s,x))^2\wedge 1)dx\right)^{\frac{1}{2}}ds\\ \geqslant&\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\frac{(I_n(s,x)+E_n(s,x))^2}{(1+I_n(s,x)+E_n(s,x))^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}ds\\ \geqslant&\frac{\hat{R}}{|\alpha|_H(2\tilde{M}^{\frac{1}{2}}+3)}>0.\end{aligned}$$

因此，我们完成了定理 3.2 的证明。 □

THEOREM 3.7. 若

$$(\mu_3+\gamma-\alpha)_*=\inf_{x\in\bar{\mathcal{O}}}(\mu_3(x)+\gamma(x)-\alpha(x))>0,\quad(\mu_2)_*=\inf_{x\in\bar{\mathcal{O}}}\mu_2(x)>0,$$

且 $0\leqslant S_0,E_0,I_0,R_0\in C(\mathcal{L};\mathbb{R})$，则感染类别 将以指数速率 灭绝。

证明。 定义如下算子 $J:\ L^2(\mathcal{L};\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,

$$Ju:=\int_{\mathcal{L}}u(x)dx,\quad\forall u\in L^2(\mathcal{L};\mathbb{R}).$$

因此，我们可以得到

(3.15)
$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{L}}(I(t,x)+E(t,x))dx=\int_{\mathcal{L}}(I_0(x)+E_0(x))dx\\ &+\int_0^t\int_{\mathcal{L}}\Big(-\mu_2(x)E(s,x)+\alpha(x)\frac{S(s,x)I(s,x)}{S(s,x)+I(s,x)+E(s,x)+R(s,x)}-\mu_3(x)I(s,x)-\gamma(x)I(s,x)\Big)dxds\\ &+\int_0^t J(e^{(t-s)A_2}E(s))dW_2(s)+\int_0^t J(e^{(t-s)A_3}I(s))dW_3(s).\end{aligned}$$

(3.15) 推出

(3.16)
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I(t,x)+E(t,x))dx=\int_{\mathcal{L}}(I_0(x)+E_0(x))dx\\ &+\int_0^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\Big(-\mu_2(x)E(s,x)+\alpha(x)\frac{S(s,x)I(s,x)}{S(s,x)+I(s,x)+E(s,x)+R(s,x)}-\mu_3(x)I(s,x)-\gamma(x)I(s,x)\Big)dxds.\end{aligned}$$

令 $m=\min\{(\mu_3+\gamma-\alpha)_*,\ (\mu_2)_*\}$，则有

(3.17)
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I(t,x)+E(t,x))dx-\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I(s,x)+E(s,x))dx\\ =&\int_s^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\Big(-\mu_2(x)E(r,x)+\alpha(x)\frac{S(r,x)I(s,x)}{S(r,x)+I(r,x)+E(r,x)+R(r,x)}-\mu_3(x)I(r,x)-\gamma(x)I(r,x)\Big)dxdr\\ \leqslant&\int_s^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}\Big(-\mu_2(x)E(r,x)-\big(\mu_3(x)+\gamma(x)-\alpha(x)\big)I(r,x)\Big)dxdr\\ \leqslant&-m\int_s^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I(r,x)+E(r,x))dxdr.\end{aligned}$$

本手稿仅供审阅。

（3.17）蕴含

$$\frac{d}{dt^+}\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I(t,x)+E(t,x))dx \leqslant -m\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I(t,x)+E(t,x))dx,$$

这意味着对于某个 $C>0$,

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{L}}(I(t,x)+E(t,x))dx \leqslant Ce^{-mt},$$

那么感染类别将以指数速率灭绝。 □ □

4. 总结。 本文考察了空间变量和时空白噪声对 SEIRS 流行病模型的影响。通过温和解，我们证明了该随机偏微分方程的适定性。此外，我们还发现了持久性和灭绝的充分条件，从而确定了解的长期行为。

在未来的工作中，我们希望考察该 SEIRS 流行病模型中解的随机正则性，并且值得进一步研究长期行为的更优条件。此外，还可以对包含空间变量的流行病模型进行数值分析。

参考文献。

W. Arendt. 半群与演化方程：泛函演算、正则性与核估计，载于微分方程手册：演化微分方程. C.M. Dafermos、E. Feireisl 编，爱思唯尔／北荷兰出版社。T. Britton 和 M. Lindholm. 学期时间强迫下随机 SIR 流行病的早期阶段行为。《应用概率杂志》, 46:975–992, 2009. S. Cerrai. 有限维与无限维空间中的二阶偏微分方程：一种概率方法，《数学讲义》丛书第*1762*卷. 施普林格出版社, 2001. R. Curtain 和 P. Falez. 无限维空间中的伊藤引理。《数学分析及其应用杂志》, 31:434–448, 1970. E. Davies. 热核与谱理论. 剑桥数学丛书第92卷，剑桥大学出版社, 1989. N. N. D.H. Nguyen 和 G. Yin. 空间非均匀随机偏微分方程流行病模型的分析。应用概率信托, 57(2):613–636, 2020. N. Du 和 N. Nhu. 受复杂类型噪声扰动的若干随机 SIR 模型的持久性与灭绝。*Appl. Math. Lett.*, 64:223–230, 2017. N. H. Du 和 N. N. Nhu. 随机 SIR 流行病模型的持久性与灭绝。2018. W. Kermack 和 A. McKendrick. 对流行病数学理论的贡献（第二部分）。*Proc. Royal Soc. Ser. A*, 138:55–83, 1932. W. Kermack 和 A. G. McKendrick. 对流行病数学理论的贡献（第一部分）。*Proc. Royal Soc. London Ser. A*, 115:700–721, 1972. Z. W. L. Zhang 和 X. Zhao. 具有潜伏期的时周期反应扩散流行病模型的阈值动力学。*J. Differential Equations*, 258:3011–3036, 2015. Y. L. e. a. L.J.S. Allen, B.M. Bolker. SIS 流行病斑块模型稳态的渐近剖面。N. H. D. N. T. Hieu 和 P. A. 等。随机 SIRS 流行病模型的动力学行为。《数学建模与自然现象》, 10(2):56–73, 2015. N. D. N.T. Dieu 和 N. Nhu. 若干 SIR 流行病模型的持久性与遍历性条件。*SIAM J. Appl. Dynamic Sys.*, 160:81–99, 2019.

本手稿仅供审阅。

N. D. N.T. Dieu、D.H. Nguyen 和 G. Yin. 随机 SIR 模型渐近行为的分类。*SIAM J. Appl. Dynamic Sys.*, 15:1062–1084, 2016. E. Ouhabaz. 区域上的热方程分析, 第31卷。普林斯顿大学出版社, 2004. R. Peng. SIS 流行病反应扩散模型正稳态的渐近剖面 I。*J. Differential Eqs.*, 247:1096–1119, 2009. R. Peng 和 S. Liu. SIS 流行病反应扩散模型稳态的全局稳定性。*Nonlinear Anal.*, 71:239–247, 2009. G. D. Prato 和 L. Tubaro. 希尔伯特空间中半线性随机微分方程的一些结果。*Stochastics.*, 15:271–281, 1985. G. D. Prato 和 J. Zabczyk. 无限维随机方程. 剑桥大学出版社，剑桥, 1992. W. Wang 和 X. Zhao. 反应扩散流行病模型的基本再生数。*SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11:1652–1673, 2012.

此手稿仅供审阅。