arXiv:2303.04913v1 [math.DG] 8 Mar 2023

# 高秩 Hitchin 方程大尺度解的渐近行为

Takuro Mochizuki* Szil´ard Szab´o†‡

摘要

设 $X$ 为一紧黎曼曲面。设 $(E,\theta)$ 是 $X$上的一个次数为 0 的稳定 Higgs 丛。令 $h_{\det(E)}$表示行列式丛 $\det(E)$ 的一个平坦度量。对于任意 $t>0$，存在唯一的调和度量$h_t$ ，使得 $(E,\theta)$ 满足 $\det(h_t) = h_{\det(E)}$。我们证明，若该 Higgs 丛由谱曲线正规化上的一个线丛诱导，则序列 $h_t$ 以指数阶速度收敛到自然定义的解耦调和度量。我们还得到了这类 Higgs 丛族的一致收敛性。

数学主题分类：53C07, 58E15, 14D21, 81T13。

关键词：调和丛、Higgs 丛、对称积、大尺度解。

## 1 引言

### 1.1 背景

设 $X$为一黎曼曲面。设 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 是 $X$ 上秩为 $r$ 的 Higgs 丛。设 $h$为 $E$ 的厄米度量。我们得到 $(E,\overline{\partial}_E,h)$ 的陈联络 $\nabla_h$，以及相对于 $h$ 的 $\theta$ 的伴随 $\theta^\dagger_h$。令 $R(h)$ 表示 $\nabla_h$ 的曲率。如果度量 $h$ 满足

$$R(h)+[\theta,\theta^\dagger_h]=0.$$

如果度量 $h$ 满足

$$R(h)=[\theta,\theta^\dagger_h]=0.$$

假设 $X$ 是紧的，且 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 稳定且度数为 0。令 $\Sigma_{E,\,\theta}$表示 $(E,\theta)$ 的谱曲线。我们假设 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 一般正则半单，即 $D(E,\theta)=\bigl\{P\in X\,\big|\,|T^*_PX\cap\Sigma_{E,\theta}|<r\bigr\}$ 是 $X$ 的一个有限子集。

设 $h_{\det(E)}$为 $\det(E)$ 的平坦度量。根据 Hitchin [8] 和 Simpson [18]，$(E,\overline{\partial}_E,\theta)$，存在唯一的调和度量 $h$，使得 $\det(h) = h_{\det(E)}$。由于对任意 $t>0$，$(E,\overline{\partial}_E,t\theta)$ 都是度数 0 的稳定对象，因此对任意 $t>0$，$(E,\overline{\partial}_E,t\theta)$ 都存在唯一的调和度量 $h_t$，使得 $\det(h_t) = h_{\det(E)}$。我们关注 $h_t$ 在 $t\to\infty$时的行为。研究的动机见 [6], [9], 和 [14] 。这与几何 P=W 猜想 [22, 23]有关。另请参阅有帮助的综述论文 [11, 21]。

对于 $X\setminus D(E,\theta)$ 中任意单连通相对紧开子集 $K$，存在 Higgs 丛的一个分解

$$(E,\overline{\partial}_E,\theta)_{|K}=\bigoplus_{i=1}^{r}(E_{K,i},\overline{\partial}_{E_{K,i}},\theta_{K,i}) \tag{1}$$

使得秩$E_{K,\,i}=1$。根据 [16],，存在 $C(K)>0$、$\epsilon(K)>0$，使得

$$\bigl|h_t(u,v)\bigr|\leq C(K)\exp(-\epsilon(K)t)|u|_{h_t}|v|_{h_t}$$

*京都大学数学科学研究所，日本京都 606-8512，takuro@kurims.kyoto-u.ac.jp

†布达佩斯科技经济大学几何学系，M˝uegyetem rakpart 3，1111，匈牙利布达佩斯，szabosz@math.bme.hu

‡阿尔弗雷德·雷尼数学研究所，Re´altanoda utca 13-15，1053，匈牙利布达佩斯，szabo.szilard@renyi.hu

对于分解（1）中的任意局部截面 $u$ 和 $v$，$E_{K,\,i}$ 和$E_{K,\,j}$ $(i \neq j)$。这意味着存在$C'(K) > 0$ 和 $\epsilon'(K) > 0$，使得

$$\left|R(h_t)_{|K}\right|_{h_t} = \left|[\theta, \theta^{\dagger}_{h_t}]\right|_{h_t} \leq C'(K)\exp(-\epsilon'(K)t).$$

因此，对于任意序列 $t(i) \to \infty$，都存在一个子序列 $t'(j) \to \infty$ 以及规范变换 $g_{t'(j)}$，使得序列 $g^*_{t'(j)}h_{t'(j)}$ 在 $X \setminus D$ $(E, \theta)$ 上局部地以 $C^\infty$ 意义收敛到 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ 的解耦调和度量。

在适当的假设下，我们可以提出以下问题。

Q1 是否存在一列规范变换 $g_t$，使得 $g^*_t h_t$ 在 $X \setminus D(E, \theta)$ 上局部地随 $t \to \infty$ 收敛? 换言之，极限是否与子序列的选择无关?

Q2 设 $K \subset X \setminus D(E, \theta)$ 是任意一个相对紧开子集。那么， $K$ 上的收敛阶是否被某个 $\delta(K) > 0$ 的 $e^{-\delta(K)t}$ 所控制?

在秩二情形下，假设 $\Sigma_{E,\,\theta}$ 光滑，Mazzeo-Swoboda-Weiss-Witt [14] 完全解决了这两个问题。在 [16], 中，Q1 在不假设谱曲线光滑的情况下得到了解决。在高秩情形下，Collier-Li [3] 解决了循环 Higgs 丛的这两个问题。Fredrickson [5] 研究了谱曲线光滑时的这两个问题，并对谱曲线在 $X$ 上的分歧作出了一个温和的假设（见注 1.2 和 [5, 命题 2.2, (2.9)]）。

注 1.1 从时间顺序上看，这项研究 [16] 是在此前研究 [3], [9]和 [14]的启发下完成的。 ∎

注 1.2 设$Q \in \Sigma_{E、\,\theta}$是 $\pi$的临界点：$\Sigma_{E、\,\theta} \to X$。令 $P = \pi(Q)$。设$(X_P、\ z)$是 $P$周围的一个坐标邻域。利用全纯 1-形式 $dz$，我们得到平凡化 $T^*X_P \simeq \mathbb{C} \times X_P$。令$\Sigma_{E、\,\theta、\,Q}$表示包含 $Q$的$T^*X_P \cap \Sigma_{E、\,\theta}$的连通分支。我们可以假设$\Sigma_{E、\,\theta、\,Q} \cap T^*_P X_P = \{Q\}$，且$\Sigma_{E、\,\theta、\,Q}$ 全纯同构于一个圆盘。令 $r(Q)$表示$\Sigma_{E、\,\theta、\,Q} \to X_P$的次数。在 $X_P$ 上存在全纯函数 $a_j\,(j = 0, \ldots, r(Q) - 1)$，使得

$$\Sigma_{E,\theta,Q} = \left\{ (y, z) \in \mathbb{C} \times X_P \;\middle|\; y^{r(Q)} + \sum_{j=0}^{r(Q)-1} a_j(z) y^j = 0 \right\}.$$

由于 $T^*X_P \cap \Sigma_{E,\,\theta,\,Q} = \{Q\}$，存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得

$$y^{r(Q)} + \sum_{j=0}^{r(Q)-1} a_j(0) y^j = (y - \alpha)^{r(Q)}. \tag{2}$$

$\Sigma_{E、\,\theta、\,Q}$ 的光滑性等价于条件： $a_0(z) - (-\alpha)^{r(Q)}$ 在 $z = 0$处有一个简单零点。为了研究 $\Sigma_{E、\,\theta、\,Q}$ 在 $Q$ 附近以及 $\theta$ 在 $P$附近的局部性质，我们可以通过考虑 $\theta_{|X_P} - \alpha dz \cdot \mathrm{id}^{E_{|X_P}}$，假设 $\alpha = 0$。此外，通过考虑 $\theta_{|X_P} - r\,(Q)^{-1} a_{r(Q)-1}\, dz \cdot \mathrm{id}^{E_{|X_P}}$，我们可以假设 $a_{r(Q)-1}$ 恒为 0。将坐标 $z$ 变为满足 $w(0) = 0$且 $w(\partial_z w)^{r(Q)} = -a_0(z)$ 的 $w(z)$ 后，我们可以假设 $a_0(z) = -z$。一般而言，$a_j\,(1 \leq j \leq r(Q) - 2)$ 并非恒为 0。 ∎

## 1.2 主要结果

### 1.2.1 对称情形

作为第一个主要结果，我们先指出，如果 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ 具有非退化对称配对 $C$，那么问题 Q1 和 Q2 都极其容易解决。如 [13], 中所解释的，存在唯一的解耦调和度量 $h^C$，使其与 $E、\ \theta^{X \setminus D(E,\theta)}$ 相容于 $C$。通过采用 Simpson 主估计的一种变体，并结合第 3.1 节中的初等线性代数论证，我们可以解决问题 Q1 和 Q2；在此情形下，极限为 $h^C$。下面的定理是推论 3.5 的一个特例。

定理 1.3 令 $K$ 为 $X \setminus D(E, \theta)$ 的任意相对紧开子集。令 $s(h^C, h_t)$ 表示由 $h_t = h^C \cdot s(h^C, h_t)$ 确定的 $E_{|X \setminus D(E,\theta)}$ 的自同构。对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在正实常数 $C(\ell, K)$ 和 $\epsilon(\ell, K)$，使得 $s(h^C, h_t)$ 的 $L^2_\ell$-范数与 $-\mathrm{id}$ 在 $K$ 上的范数均由 $C(\ell, K)\exp(-\epsilon(\ell, K)t)$ 控制，当 $t \to \infty$ 时。

例如，我们可以将此定理应用于包含在 Hitchin 截面中的 Higgs 丛，因为它具有典范的非退化对称配对。

事实上，在定理 1.3 中，我们不需要假设 $X$ 是紧的。精确表述见定理 3.4 和推论 3.5。这些结果在技术上也很有用，将应用于第三个主要结果（见 §1.2.3–1.2.4）。

### 1.2.2 不可约情形

本文的第二个主要结果，对谱曲线局部且整体不可约的情形下的 Q1 给出了肯定的回答。

定理 1.4（推论 7.7）设 $\Sigma_{E,\,\theta}$ 局部不可约（见 [7, 第 8]页）。那么，序列 $h_t$ 在 $X \setminus D$（$E$, $\theta$）上局部按 $C^\infty$ 意义收敛到解耦调和度量 $h_\infty$。

更一般的表述见定理 7.5。注意，由于（$E$, $\theta$）的稳定性条件，$\Sigma_{E,\,\theta}$ 是连通的。

更确切地说，我们以代数方式从 $(E,\theta)$ 出发，典范地构造出 $\mathcal{V} = E(*D(E,\theta))$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V})$，使得：(i) ($\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V})$ $\theta$) 是定义 5.10 意义下的可分解滤过 Higgs 丛；(ii) ($\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V})$ $\theta$) 是稳定的，且度数为 0；(iii) $\det(\mathcal{P}_*^\star\mathcal{V})$ 等于由 $\det(E)$ 自然诱导的滤过丛。存在唯一的解耦调和度量 $h_\infty$，作用于 $(E,\theta)_{|X\setminus D(E,\theta)}$，且与 $\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V})$ 相适配，并满足 $\det(h_\infty) = h_{\det(E)}$。我们将证明，当 $t\to\infty$ 时，序列 $h_t$ 在 $X \setminus D(E,\theta)$ 上收敛到 $h_\infty$。

证明思路如下。设 $P \in D(E,\theta)$。设 $X_P$ 是 $X$ 中 $P$ 的一个小邻域。根据 Donaldson 的定理 [4],，存在 $(E,\overline{\partial}, t\theta)_{|X_P}$ 的调和度量 $h_{P,t}$，使得 $h_{P,t|\partial X_P} = h_{\infty|\partial X_P}$。根据命题 6.6，当 $\sim t\to\infty$ 时，序列 $h_{P,t}$ 在 $X_P\setminus\{P\}$ 上局部按 $C^\infty$ 意义收敛到 $h_{\infty|X_P\setminus\{P\}}$。如 [14], 中那样，通过拼接 $h_{P,t}$ 和 $h_\infty$，我们构造出一族 $E$ 的厄米度量 $h_t$ $(t>0)$，使得：(i) $\det(\widetilde{h}_t) = h_{\det(E)}$；(ii) $\lim_{t\to\infty}\widetilde{h}_t = h_\infty$ 在 $X \setminus D(E,\theta)$ 上；(iii) $\int_X \big|R(\widetilde{h}_t) + \big[t\theta,(t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_t}\big]\big| \to 0$。令 $s(\widetilde{h}_t, h_t)$ 表示由 $h_t = h_t\cdot s(h_t,h_t)$ 确定的 $E$ 的自同构~ ~ ~。接下来，我们将沿用与 [16] 中基本相同的论证，证明 $\sup_X(s(h_t,h_t) - \mathrm{id}_E) \to 0$。

由于假设 $\Sigma_{E,\theta}$具有局部不可约性，因此很容易找到“极限构型” $h_\infty$的候选。在秩二情形，Higgs 丛 $(E,\theta)_{|X_P}$很容易理解。在 $(\mathbb{P}^1,\infty)$ 上存在一个齐次野调和丛 $(E'_P,\theta'_P,h'_P)$，使得 $(E'_P,\theta'_P)$ 在 0 的某个邻域上的限制与 $(E,\theta)_{|X_P}$ 同构；这里我们考虑由 $(a,z)\mapsto a^m z$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上诱导的一个 $S^1$-作用，其中 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$。（关于调和丛相对于 $S^1$-作用的齐次性，参见 [17, §8]。）一个特殊情形是 [14]中的基准解~。在 [16], 中，$h'_P$ 的限制有助于构造近似解 $h_t$。在高秩情形，即使假设具有局部不可约性，Higgs 丛 $(E,\theta)_{|X_P}$ 也更加复杂。似乎无法通过齐次野调和丛获得良好的近似。因此，我们提出一种方法，利用边值问题的解来构造近似解。

注 1.5 由于我们也在关于谱曲线的类似假设下研究野调和丛的 Q1 问题，因此我们也研究野调和丛的狄利克雷问题（定理 2.8）。 ∎

### 1.2.3 光滑情形下的收敛阶

我们在以下附加条件下研究问题 Q2。

~条件 1.6 设 $\rho:\Sigma_{E,\,\theta}\to\Sigma_{E,\,\theta}$ 为正规化。存在一个全纯线丛 $L$，并带有一个同构 $E\simeq(\pi\circ\rho)_*L$，使得 $\theta$ 由 $\rho_*L$上的 $\mathcal{O}_{T^*X}$-作用诱导。 ∎

例如，根据 [1, 8], 如果 $\Sigma_{E,\,\theta}$ 是光滑的，则满足此条件。我们将证明以下定理。

定理 1.7（定理 7.14）假设条件 1.6 得到满足。令 $s(h_\infty,h_t)$ 为由 $h_t = h_\infty\cdot s(h_\infty,h_t)_{|X\setminus D(E,\theta)}$ 确定的 $(E,\theta)$ 的自同构。令 $K\subset X\setminus D(E,\theta)$ 为任意相对紧开子集。对于任意 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在 $C(\ell,K)>0$ 以及 $\epsilon(\ell,K)>0$，使得当 $t\to\infty$ 时满足以下结论：

$$\big\|(s(h_\infty,h_t)-\mathrm{id})_{|K}\big\|_{L^2_\ell} \leq C(\ell,K)\exp\big(-\epsilon(\ell,K)t\big).$$

~为证明定理 1.7，我们细化 §1.2.2 中的 $h_t$ 构造。对于每个 $P \in D(E,\theta)$，存在 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)|_{X_P}$ 的非退化对称配对 $C_P$，使得 $C_{P|X_P\setminus\{P\}}$ 与 $h_{\infty|X_P\setminus\{P\}}$ 相容。容易看出，满足 $h_{P,t|\partial X_P} = h_{\infty|\partial X_P}$ 的 $(E,\theta)|_{X_P}$ 的调和度量 $h_{P,t}$ 与 $C_P$ 相容。令 $s(h_\infty, h_{P,t})$ 为由 $h_{P,t} = h_{\infty|X_P\setminus\{P\}} \cdot s(h_\infty, h_{P,t})$ 确定的 $E_{|X_P\setminus\{P\}}$ 的自同构。根据 §1.2.1 中提到的对称情形下的结果，在 $X_P \setminus \{P\}$, $s(h_\infty, h_{P,t})$ 的任意相对紧开子集 $K$ 上，$-\mathrm{id}$ 以 $e^{-\delta(K)t}$ 阶的速度收敛于 0。于是，满足以下更强条件：

$$\int_X \left| R(\widetilde{h}_t) + \left[t\theta, (t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_t}\right] \right|_{\widetilde{h}_t} \leq Ce^{-\delta t}.$$

~于是，我们可以在 $X \setminus D(E,\theta)$ 中任意相对紧开子集上得到 $\sup |s(h_t, h_t) - \mathrm{id}|$ 的估计。根据 §4.2 中的~一般论证，我们可以得到 $X$ 上 $s(h_t, h_t) - \mathrm{id}$ 的范数及其高阶导数的所需估计，甚至在 $D(E,\theta)$ 附近也成立。

### 1.2.4 一个族情形

~§1.2.3 中的结果和方法可以推广到以下族情形。设 $p_1 \colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ 是复流形之间的光滑真态射，且每个纤维均为连通的一维流形。我们还假设 $\mathcal{S}$ 是连通的。令 $\pi \colon \mathcal{S} \times T^*X \to \mathcal{S} \times X$ 和 $p_2 \colon \mathcal{S} \times X \to \mathcal{S}$ 表示投影。设 $\Phi_0 \colon \mathcal{X} \to \mathcal{S} \times T^*X$ 是复流形之间的~一个态射，使得 $p_2 \circ \pi \circ \Phi_0 = p_1$。我们令 $\Phi_1 := \pi \circ \Phi_0 \colon \mathcal{X} \to \mathcal{S} \times X$。作如下假设。

- $\Phi_1$ 是适当且有限的。
- 存在一个闭复解析超曲面 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \times X$，使得 (i) $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{S}$ 上是有限的，(ii) 诱导映射 $\widetilde{\mathcal{X}} \setminus \Phi_1^{-1}(\mathcal{D}) \longrightarrow (\mathcal{S} \times X) \setminus \mathcal{D}$ 是一个覆盖映射，(iii) $\Phi_0$ 诱导一个单射 $\widetilde{\mathcal{X}} \setminus \Phi_1^{-1}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{S} \times T^*X$。

对于任意 $P \in (\mathcal{S} \times X) \setminus \mathcal{D}$，我们定义 $r := |\Phi_1^{-1}(P)|$。令 $g(X)$ 和 $\widetilde{g}$ 分别表示 $X$ 和 $p_1^{-1}(x)$ $(x \in \mathcal{S})$ 的亏格。我们定义 $X_x = \{x\} \times X$ 和 $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \cap X_x$。存在一个自然同构 $X_x \simeq X$。注意，$\mathcal{D} \to \mathcal{S}$ 不被假设为覆盖映射，因此 $|\mathcal{D}_x|$ 在 $\mathcal{S}$ 上不一定为常数。

~令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个全纯线丛，使得 $\deg(\mathcal{L}_{|p_1^{-1}(x)}) = \widetilde{g} - rg(X) + r - 1$。我们得到一个局部自由的 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}\times X}$-模 $\mathcal{E} = \Phi_{1*}(\mathcal{L})$。它带有一个态射 $\theta \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{\mathcal{S}\times X/\mathcal{S}}$，该态射由 $\Phi_{0*}\mathcal{L}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}\times T^*X}$-作用诱导。对于每个 $x \in \mathcal{S}$，我们得到 Higgs 丛 $(\mathcal{E}_x, \theta_x) = (\mathcal{E}, \theta)|_{X_x}$，其度数为 0 且稳定。

存在一个厄米度量 $h_{\det\mathcal{E}}$，使得对于任意 $x \in \mathcal{S}$，$h_{\det\mathcal{E}|X_x}$ 都是平坦的。存在 $(\mathcal{E}_x, t\theta_x)$ $(x \in \mathcal{S})$ 的调和度量 $h_{t,\,x}$，使得 $\det(h_{t,\,x}) = h_{\det\mathcal{E}|X_x}$。此外，还存在 $(\mathcal{E}_x, \theta_x)|_{X_x\setminus\mathcal{D}_x}$ $(x \in \mathcal{S})$ 的解耦调和度量 $h_{\infty,\,x}$，使得 $\det(h_{\infty,\,x}) = h_{\det(\mathcal{E})|X_x\setminus\mathcal{D}_x}$。

定理 1.8（定理 7.22）设 $x_0 \in \mathcal{S}$。设 $K$ 是 $X_{x_0} \setminus \mathcal{D}_{x_0}$ 的相对紧开子集。设 $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{S}$ 中 $x_0$ 的一个邻域，且 $\mathcal{S}_0 \times K$ 在 $(\mathcal{S} \times X) \setminus \mathcal{D}$ 中相对紧。对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在 $C(\ell)$ $\epsilon(\ell) > 0$，使得 $L^2_\ell$-范数下的 $s(h_{\infty,\,x}, h_{t,\,x}) - \mathrm{id}$ $(x \in \mathcal{S}_0, t \geq 1)$ 在 $K$ 上由 $C(\ell)\exp(-\epsilon(\ell)t)$ 控制。

注 1.9 注意，对于另一个满足 $h'_{\det\mathcal{E}|X_x}$ 对任意 $x \in \mathcal{S}$ 均为平坦的 $\det(\mathcal{E})$ 的厄米度量 $h'_{\det\mathcal{E}}$，我们得到一个由 $h'_{\det(\mathcal{E})} = \beta h_{\det(\mathcal{E})}$ 确定的、定义在 $\mathcal{S}$ 上的 $\mathbb{R}_{>0}$ 值 $C^\infty$ 函数 $\beta$，并且 $\beta^{1/r}h_{t,\,x}$（分别为 $\beta^{1/r}h_{\infty,\,x}$）是（分别为 $(\mathcal{E}_x,\ t\theta_x)$ 和 $(\mathcal{E}_x,\ \theta_x)|_{X_x\setminus\mathcal{D}_x}$ 的）调和度量（分别为解耦调和度量），满足 $\det(\beta^{1/r}h_{t,\,x}) = h'_{\det\mathcal{E}|X_x}$（分别为 $\det(\beta^{1/r}h_{\infty,\,x}) = h'_{\det(\mathcal{E})|X_x\setminus\mathcal{D}_x}$）。因此，定理 1.8 的结论与 $h_{\det\mathcal{E}}$ 的选择无关。 ∎

注 1.10 我们可以应用定理 1.8，为一族谱曲线光滑的次数 0 稳定 Higgs 丛的 Hitchin 方程的大尺度解得到局部一致估计。 ∎

致谢 两位作者感谢 Laura Fredrickson 对我们关于注 1.2 的问题作出解答。

T. M. 感谢 Qiongling Li 的讨论与合作。特别是，第 3 节中的想法是对 [12, 13] 中想法的变体。T. M. 感谢 Rafe Mazzeo 和 Siqi He 的一些讨论。T. M. 的部分研究经费来自日本学术振兴会的科学研究补助金（A）（编号：21H04429）、科学研究补助金（A）（编号：22H00094）和科学研究补助金（C）（编号：20K03609）。本研究的部分经费由数学科学研究所提供，该研究所是位于京都大学的国际联合使用／研究中心。

Sz. Sz. 获得了匈牙利科学院的 Lend ¨ulet 低维拓扑资助项目以及 NKFIH 的 K120697 和 KKP126683 项目资助。Sz. Sz. 曾部分受邀访问马克斯·普朗克数学研究所（波恩），并获其接待。Sz. Sz. 谨此感谢 Olivia Dumitrescu 和 Richard Wentworth 富有启发性的讨论。

# 2 预备知识

## 2.1 一些定义

### 2.1.1 解耦调和丛

设 $Y$ 是一个黎曼曲面。设 $(V,\theta)$ 是 $Y$ 上的一个 Higgs 丛。

定义 2.1 若厄米度量 $h$ 满足以下条件，则称其为 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量。

(A1) $h$ 是 Higgs 丛 $(V,\overline{\partial}_V,\theta)$ 的调和度量。

(A2) $h$ 是平坦的，即 $(V,\overline{\partial}_V,h)$ 的陈联络 $\nabla_h$ 是平坦的。

这样的 $(V,\theta,h)$ 称为解耦调和丛。

注意，条件 (A1) 和 (A2) 意味着 $\theta$ 和 $\theta_h^\dagger$ 交换。

### 2.1.2 对称希格斯丛

设 $C$ 是 $V$的一个非退化对称积。若 $\theta$关于 $C$自伴，则称其为 Higgs 丛 $(V,\theta)$ 的一个非退化对称积。这样的元组 $(V,\theta,C)$ 称为对称希格斯丛。令 $V^\vee$ 表示 $V$ 的对偶丛。令 $\Psi_C\colon V\to V^\vee$ 为由 $C$ 诱导的同构。令 $\theta^\vee$ 为 $V^\vee$ 诱导的 Higgs 场。该条件等价于 $\Psi_C$ 诱导 Higgs 丛 $(V,\theta)$ 与 $(V^\vee,\theta^\vee)$ 之间的同构 $\simeq$。

若相对于 $h$ 及其对偶厄米度量 $h^\vee$， $h$ of $V$ 是等距的，则称厄米度量 $h$ of $V$ 与 $C$ 相容。

### 2.1.3 一般正则半单 Higgs 丛

令 $\Sigma_{V,\theta}\subset T^*Y$ 表示 $(V,\theta)$ 的谱曲线。若投影 $\Sigma_{V,\theta}\to Y$ 是覆盖映射，则称 $(V,\theta)$ 为正则半单。若存在离散子集 $D\subset Y$，使得 $(V,\theta)_{|Y\setminus D}$ 为正则半单，则称 $(V,\theta)$ 为一般正则半单。

令 $\pi:\Sigma_{V,\theta}\to Y$ 表示投影。若 $(V,\theta)$ 为正则半单，则存在 $\Sigma_{V,\theta}$ 上的线丛 $L_V$，以及一个同构 $\pi_*L_V\simeq V$，使得 $\theta$ 由 $\mathcal{O}_{T^*Y}$ 对 $L_V$ 的作用诱导。

## 2.2 正则半单情形

### 2.2.1 解耦调和度量

假设 $(V,\theta)$ 是正则半单的。我们考虑 $V$ 的厄米度量 $h$ 所满足的以下条件。

(A3）对于任意 $P\in Y$， $P$ 处 $\theta$ 的特征分解关于 $h$.

注意，( A3）成立当且仅当 $\theta$ 与 $\theta_h^\dagger$ 交换。下面的引理显然成立。

引理 2.2 若厄米度量 $h$ of $V$满足条件 (A1)、(A2)、(A3) 中的任意两个，则 $h$ is $(V,\theta)$ 的解耦调和度量。

平坦度量 $h_{L_V}$of $L_V$会诱导出 $V$的厄米度量 $\pi_*(h_{L_V})$。容易验证， $\pi_*(h_{L_V})$ 是 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量。

命题 2.3 该过程在 $L_V$ 的平坦度量与 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量之间建立了等价关系。

注 2.4 设 $(V,\theta,h)$ 是一个解耦调和丛。令 $\Sigma_{V,\theta}=\coprod_{i\in\Lambda}\Sigma_{V,\theta,i}$ 为按连通分支进行的分解。Higgs 丛 $(V,\theta)$ 存在相应的分解 $=\bigoplus_{i\in\Lambda}(V_i,\theta_i)$，使得 $\Sigma_{V_i,\theta_i}=\Sigma_{V,\theta,i}$。由于 $h$ 是一个解耦调和度量，该分解关于 $h$是正交的。因此，我们得到解耦调和丛 $(V,\theta,h)$ 的分解 $=\bigoplus(V_i,\theta_i,h_i)$。

2.2.2 对称积

$\mathcal{O}_{\Sigma_{V,\theta}}$ 的乘法诱导出一个乘法

$$\pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_{V,\theta}} \otimes \pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_{V,\theta}} \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_{V,\theta}}.$$

$f$ 的任意局部截面$\pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_{V,\theta}}$ 都会诱导一个自同态 $F_f$，它作用于局部自由的 $\mathcal{O}_Y$-模$\pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_{V,\theta}}$。我们得到局部截面 $\mathrm{tr}(f) := \mathrm{tr}(F_f)$，它属于 $\mathcal{O}_Y$。

令 $C_{L_V}$ 为非退化对　称配 $L_V$的一个对称配对。我们得到 $V = \pi_* L_V$的非退化配对 $C$　　:

$$V \otimes_{\mathcal{O}_Y} V \xrightarrow{\pi_* C_{L_V}} \pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_{V,\theta}} \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathcal{O}_Y. \tag{3}$$

命题 2.5 这一过程在 $L_V$ 的非退化对称配对与$(V,\theta)$的非退化对称配对之间诱导出一个等价。

∎

我们回顾以下命题。

命题 2.6（[**13,** 命题 **2.30**]）对于（$V$，$\theta$）的任意非退化对称配对 $C$，存在唯一一个与 $C$ 相容的（$V$，$\theta$）上的解耦调和度量 $h^C$。∎

事实上，令 $C_{L_V}$ 为与 $C$ 对应的 $L_V$ 的非退化对称配对。令 $h_{L_V}$ 为 $L_V$ 上唯一满足 $h_{L_V}(s,s) = |C_{L_V}(s,s)|$ 的厄米度量。我们得到与$h_{L_V}$对应的厄米度量 $h^C$。那么，它就是与 $C$ 相容的解耦调和度量。

至于逆命题，成立如下结论。

引理 2.7 令 $h$ 为（$V$，$\theta$）上的解耦调和度量。当且仅当满足以下条件时，存在（$V$，$\theta$）的非退化对称配对与 $h$ 相容。

- 令 $h_{L_V}$ 为与 $L_V$ 对应的厄米度量，其陈联络是平坦的。令 $\Sigma_{V,\theta,i}$ 为 $\Sigma_{V,\theta}$ 的任意一个连通分支。令 $\rho_i : \pi_1(\Sigma_{V,\theta,i}) \to S^1$ 为由（$L_V$，$h_{L_V}$）$|_{\Sigma_{V,\theta,i}}$ 的单值化得到的同态。那么，$\rho_i$ 的像包含于 $\{\pm 1\}$。

证明 存在一个与 $h$ 相容的$(V,\theta)$的非退化对称配对，当且仅当存在一个与 $h_{L_V}$相容的 $L_V$ 的非退化对称配对 $C_{L_V}$。若存在这样的 $C_{L_V}$，则每个 $\rho_i$ 都来自一个 $\mathbb{R}$-表示。（见 [13, §2]。）因此，其像包含于 $\{\pm 1\}$。反之，若每个 $\rho_i$ 的像都包含于 $\{\pm 1\}$，则很容易构造出这样的配对 $C_{L_V}$。∎

## 2.3 曲线上野调和丛的狄利克雷问题

设 $Y$ 是配备 K¨ahler 度量 $g_Y$的黎曼曲面。设 $X \subset Y$ 是一个连通的相对紧连通开子集，其边界 $\partial X$ 光滑且非空。设 $D \subset X$ 是一个有限子集。

设$(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$是$(Y,D)$上的秩为 $r$的良好滤过 Higgs 丛。我们得到$(\det(\mathcal{P}_*\mathcal{V}), \mathrm{tr}(\theta))$。令$(V,\theta) = (\mathcal{V},\theta)|_{Y\setminus D}$。设 $h_{\partial X}$ 是 $V_{|\partial X}$的厄米度量。

定理 2.8 存在唯一的调和度量 $h$ of $(V, \overline{\partial}_V, \theta)|_X$，使得 (i) $h_{|\partial X} = h_{\partial X}$，(ii) $\mathcal{P}^h_*(V) = \mathcal{P}_*\mathcal{V}$。

证明 先考察 $r = 1$ 的情形。存在 $V$ 的厄米度量 $h_0$，使得 (i) $h_{0|\partial X} = h_{\partial X}$，(ii) $h_0$在 $D$ 的任意一点附近都是平坦的，(iii) $\mathcal{P}^{h_0}_*(V) = \mathcal{P}_*V$。存在一个 $C^\infty$ 函数 $\alpha : X \to \mathbb{R}$，使得 $\alpha_{|\partial X} = 0$，且 $\overline{\partial}\partial\alpha = R(h_0)$。于是，$h = e^{-\alpha}h_0$ 是 $V$ 的平坦度量，满足所需条件。设 $h'$ 是另一个满足相同条件的平坦度量。由此得到由 $h' = e^s h$ 确定的 $X$ 上的 $C^\infty$ 函数 $s$。由于$\Delta_{g_Y} s = 0$ 和 $s_{|\partial X} = 0$，可得 $s = 0$ 在 $X$ 上成立，因而 $h' = h$。

我们来研究 $r \geq 2$ 的情形。在每个点 $P \in D$ 处，取 $P$ 周围的全纯坐标邻域 $(X_P, z_P)$，使得 (i) $X_P$ 在 $X \setminus (D \setminus \{P\})$ 中相对紧，(ii) 对任意 $P, P' \in D$，都有 $\overline{X}_P \cap \overline{X}_{P'} = \emptyset$，(iii) 坐标 $z_P$ 诱导出 $(X_P, P) \simeq (\{|z| < 1\}, 0)$。令 $h_{\det(V)}$ 为一个行列式为 $\det(V)$、且与 $\det(\mathcal{P}_*V)$ 相适配的平坦度量，使得 $h_{\det(V)|\partial X} = \det(h_{\partial X})$。令 $h_0$ 为一个 $V$ 的厄米度量，使得 (i) $h_{0|\partial X} = h_{\partial X}$，(ii) $\det(h_0) = h_{\det(V)}$，(iii) $\mathcal{P}^{h_0}_*(V) = \mathcal{P}_*\mathcal{V}$，(iv) 在 $P \in D$ 附近，对于某个 $\epsilon > 0$，有 $\left|R(h_0) + [\theta, \theta^\dagger_{h_0}]\right|_{h, g_Y} = O(|z_P|^{-2+\epsilon})$。（例如，构造见 [17]。）我们定义 $F(h_0) = R(h_0) + [\theta, \theta^\dagger_{h_0}]$。存在 $p > 1$，使得 $F(h_0)$ 在 $X$ 上是 $L^p$。

存在一个 $L_2^p$-函数 $\alpha$，定义在 $X$ 上，使得 (i) $\Delta_{g_Y}(\alpha) = |F(h_0)|_X|_{h_0,\, g_Y}$，(ii) $\alpha_{|\partial X} = 0$。存在 $C_0 > 0$，使得 $|\alpha| < C_0$ 在 $X$ 上。

对于 $0 < \delta < 1$，我们设 $X_P(\delta) = \{|z_P| < \delta\}$和 $Z(\delta) := X \setminus \bigcup_{P\in D} X_P(\delta)$。我们有 $\partial Z(\delta) = \partial X \cup \bigcup_{P\in D} \partial X_P(\delta)$。根据调和度量的狄利克雷问题 [4, 12], , 存在一个调和度量 $h_{Z(\delta)}$，使得 $(V, \overline{\partial}_V, \theta)|^{Z(\delta)}$ 满足 (i) $\det(h_{Z(\delta)}) = h_{\det(V)|Z(\delta)}$, (ii) $h_{Z(\delta)|\partial Z(\delta)} = h_{0|\partial Z(\delta)}$。令 $s_{Z(\delta)}$ 为由 $h_{Z(\delta)} = h_{0|Z(\delta)} \cdot s_{Z(\delta)}$确定的 $V_{|Z(\delta)}$ 的自同构。根据 [18, 引理 3.1], , 以下结论在 $Z(\delta)$上成立:

$$\Delta_{g_Y} \log \mathrm{Tr}(s_{Z(\delta)}) \le |F(h_0)_{|Z(\delta)}|_{h_0,g_Y}.$$

因为 $\Delta_{g_Y}\big(\log \mathrm{Tr}(s_{Z(\delta)}) - \alpha\big) \le 0$，我们得到

$$\log \mathrm{Tr}(s_{Z(\delta)}) \le 2C_0 + \log r.$$

因为 $\det(s_{Z(\delta)}) = 1$，存在仅依赖于 $C_0$ 和 $r$的 $C_1 > 0$，使得

$$|s_{Z(\delta)}|_{h_0} + |s^{-1}_{Z(\delta)}|_{h_0} \le C_1.$$

于是，存在一个序列 $\delta(i) \to 0\,(i = 1, 2, \dots,)$，使得下述结论成立（见 [12, 命题 2.6]）：

- 序列 $h_{Z(\delta(i))}$ 在任意 $X \setminus D$的相对紧开子集上按 $C^\infty$意义收敛。令 $h_\infty$表示其极限，它是一个调和度量。
- $h_\infty$ 与 $h_0$相互有界。因此，$\mathcal{P}_*^{h_\infty}(V) = \mathcal{P}_*\mathcal{V}_{|X}$。
- 行列式$(h_\infty) = h_{\text{行列式}(V)}$.

设 $Z := Z(1/2)$。存在一个调和度量 $h_{1,Z}$，使得 $(V, \overline{\partial}_V, \theta)|^Z$ 满足 (i) $\det(h_{1,Z}) = h_{\det(V)|Z}$，(ii)$h_{1,Z|\partial X_P(1/2)} = h_{\infty|\partial X_P(1/2)}$ 对任意 $P \in D$ 均成立，(iii) $h_{1,Z|\partial X} = h_{0|\partial X}$。设 $i_0$ 满足 $\delta(i_0) < 1/2$。设 $s_{1,\delta(i)}$ 为由 $h_{Z(\delta(i))|Z} = h_{1,Z} \cdot s_{1,\delta(i)}$ 确定的 $V_{|Z}$ 的自同构。我们得到 $\Delta_{g_Y} \log \mathrm{Tr}(s_{1,\delta(i)}) \le 0$ 在 $Z$ 上。因此，我们得到

$$\log\big(\mathrm{Tr}(s_{1,\delta(i)})/r\big) \le \max_{P\in D} \max_{Q\in\partial X_P(1/2)} \big\{\log\big(\mathrm{Tr}(s_{1,\delta(i)|Q})/r\big)\big\}.$$

由于 $\log \mathrm{Tr}(s_{1,\ \delta(i)}/r) \to 0$ 在 $\bigcup_{P\in D} \partial X_P(1/2)$ 上，我们得到 $s_{1,\ \delta(i)} \to \mathrm{id}_V$ 在 $Z$ 上。因此，我们得到 $h_{\infty|Z} = h_{1,Z}$，这意味着 $h_\infty$ 满足条件 $h_{\infty|\partial X} = h_{0|\partial X}$。

设 $h'$ 是另一个满足条件 (i) 和 (ii) 的调和度量。注意到 $\det(h') = h_{\det(V)}$。令 $s$ 为由 $h' = h \cdot s$ 确定的 $V$ 的自同构。由 [18, 引理 3.1], , 我们在 $X \setminus D$ 上得到如下等式:

$$\Delta_{g_Y} \mathrm{Tr}(s) = -\big|\overline{\partial}_V(s) \cdot s^{-1/2}\big|^2_{h,g_Y} - \big|[\theta, s]s^{-1/2}\big|^2_{h,g_Y}.$$

这表明 $\mathrm{Tr}(s)$ 在 $X \setminus D$ 上是次调和的。由于 $\mathrm{Tr}(s)$ 有界，我们得到 $\mathrm{Tr}(s)$ 是 $X$ 上的次调和函数（见 [19, 引理 2.2]）。我们得到 $\max_X \mathrm{Tr}(s) \le \max_{\partial X} \mathrm{Tr}(s) = r$。由于 $\det(s) = 1$，我们有 $\mathrm{Tr}(s) \ge r$。因此，我们在 $X$ 上得到 $\mathrm{Tr}(s) = r$，这意味着 $s = \mathrm{id}_V$。 ∎

推论 2.9 假设 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ 配备了完美对称配对 $C$。若 $h_{\partial X}$ 与 $C_{|\partial X}$ 相容，则 $h$ 也与 $C$ 相容。

证明 令 $h^\vee_{\partial X}$ 为由 $h_{\partial X}$诱导的 $V^\vee_{|\partial X}$ 厄米度量。令 $h^\vee$ 为由 $h$诱导的 $V^\vee$ 厄米度量。则，$h^\vee$ 是满足 $h^\vee_{|\partial X} = h^\vee_{\partial X}$ 的 $(V^\vee, \theta^\vee)$ 的唯一调和度量。

令 $\Psi_C : (V, \theta) \simeq (V^\vee, \theta^\vee)$ 表示由 $C$诱导的同构。由于 $h_{\partial X}$ 与 $C$相容，$h_{\partial X} = \Psi_C^* h^\vee_{\partial X}$ 在 $\partial X$上成立。由唯一性可得 $h = \Psi_C^*(h^\vee)$，即 $h$ 与 $C$相容。 ∎

# 3 对称情形下的大尺度解

## 3.1 线性代数预备知识

### 3.1.1 与非退化对称配对相容的厄米度量

设 $V$ 为一个 $r$ 维的 $\mathbb{C}$ 向量空间。其对偶空间记为 $V^\vee$。$V$ 的一个 $\mathbb{R}$ 结构是一个 $r$ 维的 $\mathbb{R}$ 子空间 $V_\mathbb{R}$，使得自然态射 $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V_\mathbb{R} \longrightarrow V$是一个同构。一个正定

对称双线性形式 $C_{\mathbb{R}}$ 在 $V_{\mathbb{R}}$ 上诱导出一个厄米度量 $h$，以及 $V$上的一个非退化对称双线性形式 $C$，其定义为：对任意 $\alpha$、$\beta \in \mathbb{C}$以及 $u$、$v \in V_{\mathbb{R}}$，$h(\alpha\otimes u, \beta\otimes v) = \alpha\overline{\beta}h(u,v)$，且 $C(\alpha\otimes u, \beta\otimes v) = \alpha\beta C(u,v)$。关于 $C_{\mathbb{R}}$的正交分解 $V_{\mathbb{R}} = \bigoplus V_{\mathbb{R},\,i}$诱导出一个分解 $V = \bigoplus V_{\mathbb{R},\,i}\otimes\mathbb{C}$，显然，该分解关于 $h$ 和 $C$均为正交分解。

设 $C$是 $V$上的非退化对称配对。它诱导一个 $\mathbb{C}$-线性态射 $\Psi_C\colon V \to V^\vee$。若 $h$ 是 $V$上的厄米度量，且 $C$与 $\Psi_C$ 相容，则 $\Psi_C$ 是$(V,h)$与$(V^\vee,h^\vee)$之间的等距同构，其中 $h^\vee$ 表示由 $h$诱导的 $V^\vee$ 上的厄米度量。若 $h$ 与 $C$相容，则存在唯一的 $V$上的 $\mathbb{R}$结构 $V_{\mathbb{R}}$，使其配备正定对称双线性形式 $C_{\mathbb{R}}$，并满足：(i) $V_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C} = V$；(ii) $h$ 和 $C$由 $C_{\mathbb{R}}$诱导。

### 3.1.2 一个估计

设 $C$是 $V$上的非退化对称形式。设 $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ 是关于 $C$ 的一个正交分解，满足 $\dim V_i = 1$。下面的引理显然成立。

引理 3.1 存在唯一的 $V$ 上的厄米度量 $h_0$，使得：(i) $h_0$ 与 $C$相容；(ii) 分解 $V = \bigoplus V_i$ 关于 $h_0$正交。

∎

对于任意与 $C$相容的 $V$ 的厄米度量 $h$，令 $s(h_0,h)$ 为由条件 $h(u,v) = h_0(s(h_0,h)u,v)$ 所确定的 $V$ 的自同构，其中 $u$, $v \in V$ 任意。注意，$\det(s(h_0,h)) = 1$。令 $\mathcal{H}(C;\epsilon)$ 表示与 $C$ 相容的 $V$的厄米度量 $h$ 所构成的集合，使得对任意 $u \in V_i$, $v \in V_j$ $(i \neq j)$，以下条件成立：

$$|h(u,v)| \leq \epsilon |u|_h \cdot |v|_h. \tag{4}$$

引理 3.2 存在一个仅依赖于 $r$ 的 $C > 0$，使得对任意 $0 \leq \epsilon \leq (2r)^{-1}$ 及任意 $h \in \mathcal{H}(C;\epsilon)$，以下条件成立：

$$\big|s(h_0,h) - \mathrm{id}_V\big|_{h_0} + \big|s(h_0,h)^{-1} - \mathrm{id}_V\big|_{h_0} \leq C\epsilon.$$

证明 取 $V_i$ 的一组基 $e_i$，使得 $C(e_i,e_i) = 1$。注意，元组 $(e_1,\ldots,e_r)$ 是关于 $h_0$ 的一组标准正交基。令 $H$ 为由 $H_{i,j} = h(e_i,e_j)$ 确定的矩阵。于是，线性映射 $s(h_0,h)$ 关于基 $(e_1,\ldots,e_r)$ 可表示为矩阵 ${}^tH$。由于 $h$ 与 $C$ 相容，${}^tH\cdot H$ 是单位矩阵。由此得到

$$H_{i,i}^2 - 1 = \sum_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} H_{i,j}H_{j,i}. \tag{5}$$

由条件 (4)，我们有 $|H_{i,\,j}| \leq \epsilon H_i^{1/2}{}_{,\,i}\, H_j^{1/2}{}_{,\,j}$，对 $i \neq j$。我们得到

$$H_{i,i}^2 - 1 \leq \epsilon \sum_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} H_{i,i}H_{j,j}.$$

我们令 $A = \sum_{j=1}^r H_{j,\,j}$。我们得到

$$H_{i,i}^2 - 1 - \epsilon H_{i,i}A \leq 0. \tag{6}$$

引理 3.3 我们得到 $H_{i,\,i} \leq \epsilon A + 1$。

证明 令 $a > 0$。考虑取值于 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(s) = s^2 - as - 1$ $(s \in \mathbb{R})$。令 $s_\pm = 2^{-1}(a \pm \sqrt{a^2+4})$，于是我们有 $f(s_\pm) = 0$和 $s_- < s_+$。我们得到 $f(s) > 0$对任意 $s > s_+$。因此，若 $f(s) \leq 0$，我们得到

$$s \leq s_+ \leq 2^{-1}(a + a + 2) = a + 1. \tag{7}$$

令 $a = \epsilon A$，由 (6) 和 (7) 可得该引理的结论。 ∎

我们得到 $A \leq \epsilon r A + r$，从而 $A \leq (1-\epsilon r)^{-1} r \leq 2r$。由 (4) 和 (5)，我们得到

$$|H_{i,i}^2 - 1| \leq \sum_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} |H_{i,j}| \cdot |H_{j,i}| \leq \epsilon \sum_{1\leq j\leq r} H_{i,i}\cdot H_{j,j} \leq \epsilon A^2 \leq 4r^2\epsilon.$$

由于 $H_{i,\,i}$ 是正数，我们得到 $\big|H_{i,\,i} - 1\big| \leq 4r^2\epsilon$。我们还得到 $|H_{i,\,j}| \leq \epsilon(1 + 4r^2\epsilon)$。 ∎

## 3.2 与非退化对称配对相容的调和度量

设 $Y$ 为任意黎曼曲面。设 $(V,\overline{\partial}_V,\theta)$ 是 $Y$ 上秩为 $r$ 的 Higgs 丛，且为正则半单。设 $C$ 是 $(V,\theta)$ 上的非退化对称配对。

对于任意 $t>0$，令 $\mathrm{Harm}(V,\overline{\partial}_V,t\theta,C)$ 表示与 $C$ 相容的 $(V,\overline{\partial}_V,t\theta)$ 的调和度量集合。令 $g_Y$ 为 $Y$ 上的 K¨ahler 度量。对于任意非负整数 $\ell$ 和 $p>1$，以及 $Y$ 的任意相对紧开子集 $K$，我们利用 $g_Y$、$h^C$ 以及 $h^C$ 的陈联络，定义截面 $f$ 在 $K$ 上的 $\mathrm{End}(V)$ 的 $L^p_\ell$-范数 $\|f\|_{L^p_\ell,K}$。

定理 3.4 令 $K$ 为 $Y$ 的任意相对紧开子集。存在 $t(K)>0$，使得以下结论成立

- 对于任意 $(\ell,p)\in\mathbb{Z}_{>0}\times\mathbb{R}_{>1}$，存在 $A(\ell,p,K)>0$ 和 $\epsilon(\ell,p,K)>0$，使得对任意 $h\in\mathrm{Harm}(V,\overline{\partial}_V,t\theta,C)$ $(t\geq t(K))$，以下结论成立：

$$\big\|s(h^C,h)-\mathrm{id}_E\big\|_{L^p_\ell,K}+\big\|s(h^C,h)^{-1}-\mathrm{id}_E\big\|_{L^p_\ell,K}\leq A(\ell,p,K)\exp(-\epsilon(\ell,p,K)t). \tag{8}$$

证明 为简化描述，在本证明中我们设 $s(h):=s(h^C,h)$。由 [16, 推论 2.6] 和引理 3.2，存在 $A(K)>0$、$\epsilon(K)>0$ 以及 $t(K)>0$，使得对任意 $h\in$ 调和$(E,\overline{\partial}_E,t\theta,C)$ $(t\geq t(K))$，以下结论成立：

$$\sup_K\big|s(h)-\mathrm{id}_E\big|_{h^C}+\sup_K\big|s(h)^{-1}-\mathrm{id}_E\big|_{h^C}\leq A(K)\exp(-\epsilon(K)t). \tag{9}$$

令 $R(h)$ 表示 $(V,\overline{\partial}_V,h)$ 的陈联络的曲率。由 [16, 定理 2.9],，存在 $A^{(1)}(K)>0$ 和 $\epsilon^{(1)}(K)>0$，使得对任意 $h\in$ 调和$(E,\overline{\partial}_E,t\theta,C)$ $(t\geq t(K))$，以下结论成立：

$$\sup_K\big|R(h)\big|_{h^C,g_Y}\leq A^{(1)}(K)\exp(-\epsilon^{(1)}(K)t). \tag{10}$$

注意，$R(h)=\overline{\partial}_V\big(s(h)^{-1}\partial_{h^C}s(h)\big)$。

由于 $s(h)$ 关于 $h^C$ 自伴，且满足 $\det s(h)=1$，我们有 $\mathrm{Tr}(s(h)-\mathrm{id})\geq 0$；并且 $\mathrm{Tr}(s(h)-\mathrm{id}_E)=0$ 成立当且仅当 $s(h)=\mathrm{id}_E$。以下结论在 $Y$ 上成立（见 [18, 引理 3.1]）：

$$\Delta_{g_Y}\mathrm{Tr}\big(s(h)-\mathrm{id}_E\big)=\Delta_{g_Y}\big(\mathrm{Tr}(s(h))-r\big)=-\big|s(h)^{-1/2}\partial_{h^C}s(h)\big|^2_{g_Y,h^C}-\big|[\theta,s(h)]s(h)^{-1/2}\big|^2_{g_Y,h^C}.$$

设 $K_1$ 是 $Y$中 $\overline{K}$ 的一个相对紧开邻域。设 $\chi:Y\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个函数，使得 $\chi=1$在 $\overline{K}$ 上成立，且 $\chi=0$ 在 $Y\setminus K_1$ 上成立。我们得到如下结论：

$$\int_K\big|s(h)^{-1/2}\partial_{h^C}s(h)\big|^2_{g_Y,h^C}\leq\int_Y\mathrm{Tr}(s(h)-\mathrm{id}_E)\cdot\big|\Delta_{g_Y}\chi\big|.$$

存在 $A^{(2)}(K)>0$ 和 $\epsilon^{(2)}(K)>0$，使得对任意 $h\in$ 调和$(V,\overline{\partial}_V,t\theta,C)$ $(t\geq t(K))$，以下结论成立：

$$\int_K\big|s(h)^{-1}\partial_{h^C}s(h)\big|^2_{g_Y,h^C}\leq A^{(2)}(K)\exp(-\epsilon^{(2)}(K)t). \tag{11}$$

由 (10) 和 (11)，存在 $A^{(3)}(p,K)>0$ 和 $\epsilon^{(3)}(p,K)>0$，使得对任意 $h\in$调和$(V,\overline{\partial}_V,t\theta,C)$ $(t\geq t(K))$，以下结论成立：

$$\big\|s(h)^{-1}\partial_{h^C}s(h)\big\|_{L^p_1,K}\leq A^{(3)}(K)\exp(-\epsilon^{(3)}(p,K)t). \tag{12}$$

由 (9) 和 (12)，存在 $A^{(4)}(p,K)>0$ 以及 $\epsilon^{(4)}(p,K)>0$，使得对于任意 $h\in\mathrm{Harm}(V,\overline{\partial}_V,t\theta,C)$ $(t\geq t(K))$，以下结论成立：

$$\big\|s(h)-\mathrm{id}\big\|_{L^p_1,K}\leq A^{(4)}(K)\exp(-\epsilon^{(4)}(p,K)t). \tag{13}$$

由 (12) 和 (13)，存在 $A^{(5)}(p,K)>0$ 以及 $\epsilon^{(5)}(p,K)>0$，使得对于任意 $h\in\mathrm{Harm}(V,\overline{\partial}_V,t\theta,C)$ $(t\geq t(K))$，以下结论成立：

$$\big\|s(h)-\mathrm{id}\big\|_{L^p_2,K}\leq A^{(5)}(K)\exp(-\epsilon^{(5)}(p,K)t). \tag{14}$$

Then，通过使用标准的自举论证，我们得到命题的结论 n. ∎

推论 3.5 令 $t(i)>0$ 为任意一个满足 $\lim_{i\to\infty}t(i)=\infty$ 的序列。令 $h_{t(i)}\in\mathrm{Harm}(V,\overline{\partial}_V,t(i)\theta,C)$。那么，在 $Y$ 的任意相对紧开子集上，$h_{t(i)}$ 以 $C^\infty$ 意义收敛到 $h^C$。收敛阶的估计如 (8) 所示。 ∎

# 4 圆盘上调和丛的一些估计

本节为定理 7.17 做准备。

## 4.1 Higgs 场高阶导数的普适有界性

对于任意 $R>0$，我们设 $B(R)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<R\}$。设 $R_0>0$。令 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 为 $B(R_0)$ 上秩为$r$的 Higgs 丛。令 $f$ 为由 $\theta=f\,dz$确定的 $E$ 的自同态。令 $C_0$ 为满足以下条件的常数

$$|\operatorname{tr}(f^j)|<C_0\quad(j=1,\dots,r).$$

令 $h$ 为 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 的调和度量。令 $\nabla_h$ 表示 $h$的陈联络。令 $R(h)$ 表示 $\nabla_h$的曲率。我们得到由 $R(h)=\mathfrak{R}\,dz\,d\overline{z}$确定的自同态 $\mathfrak{R}$。令 $f_h^\dagger$表示相对于 $h$的 $f$的伴随。由于 $R(h)+[\theta,\theta_h^\dagger]=0$，我们有 $\mathfrak{R}+[f,f_h^\dagger]=0$。

令 $g_0=dz\,d\overline{z}$ 表示标准欧氏度量。我们考虑相对于 $g_0$ 和 $h$，$\mathrm{End}(E)$ 的截面的 $L^p_\ell$-范数，以及相对于 $\nabla_h$ 的导数。

命题 4.1 令 $0<R_1<R_0$。对于任意 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $p\geq 1$，存在 $C(\ell,p)$，它仅依赖于 $r$、$R_0$、$R_1$ 和 $C_0$，使得

$$\|f_{|B(R_1)}\|_{L^p_\ell}+\|f^\dagger_{h|B(R_1)}\|_{L^p_\ell}+\|\mathfrak{R}_{|B(R_1)}\|_{L^p_\ell}\leq C(\ell,p).$$

证明 令 $R_2=(R_0+R_1)/2$。由 Simpson 主估计 [19, 20],，存在 $C_1$，它仅依赖于 $r$、$R_0$、$R_1$ 和 $C_0$，使得在 $B(R_2)$ 上有 $|f|_h=|f_h^\dagger|_h\leq C_1$。我们还得到，在 $B(R_2)$ 上有 $|R(h)|_{h,\,g_0}=|\mathfrak{R}|_h\leq 2C_1^2$。

我们回顾一个由 Uhlenbeck 得出的结果。

定理 4.2（[**24,** 定理 **1.3**]）令 $V$ 为定义在 $B(1)$ 上的向量丛，配备厄米度量 $h_V$ 和酉联络 $\nabla_V$。令 $R(\nabla_V)$ 表示 $\nabla_V$ 的曲率。对于 $p\geq 1$，令 $\|R(\nabla_V)\|_{L^p,\,h_V}$ 表示相对于 $g_0$ 和 $h_V$ 的 $L^p$-范数。则存在正实常数 $c$ 和 $\kappa$，它们仅依赖于 $r$ 和 $p$，使得以下结论成立

- 若 $\|R(\nabla_V)\|_{L^p,\,h_V}\leq\kappa$，则存在 $\boldsymbol{v}$ 的标准正交标架，使得 $\nabla_V$ 相对于 $\boldsymbol{v}$ 的联络形式 $A$ 满足 (i) $d^*A=0$、(ii) $\|A\|_{L^p_1}\leq c\|R(\nabla_V)\|_{L^p}$。

我们选取 $T>0$，使得 $100T^{-1}C_1^2<\kappa$ 且 $T(R_0-R_2)>100$。令 $\varphi_T\colon\mathbb{C}_w\to\mathbb{C}_z$ 由$\sim\ _\ \ \sim\varphi_T(w)=T^{-1}z$ 定义。我们考虑 $B(TR_0)$ 上的 $(E,\partial_{\widetilde{E}},\theta,h)=\varphi_T^*(E,\overline{\partial}_E,\theta,h)$。令 $w_0\in B(TR_2-1)$。令 $p>2$。令$\boldsymbol{v}^{(w_0)}$ 为 $\widetilde{E}_{|D(w_0,1)}$ 的标准正交标架，如定理 4.2 中所述，对应度量 $\widetilde{h}$ 和联络 $\nabla_{\widetilde{h}}$。令 $\mathcal{A}^{(w_0)}$ 和 $\mathcal{R}^{(w_0)}$ 分别表示 $\nabla_{\widetilde{h}}$ 相对于 $\boldsymbol{v}^{(w_0)}$ 的联络形式和曲率形式。我们有

$$d^*\mathcal{A}^{(w_0)}=0,\quad d\mathcal{A}^{(w_0)}+\mathcal{A}^{(w_0)}\wedge\mathcal{A}^{(w_0)}=\mathcal{R}^{(w_0)},\tag{15}$$

$$\|\mathcal{A}^{(w_0)}\|_{L^p_1(D(w_0,1))}\leq c\|\mathcal{R}\|_{L^p(D(w_0,1))}.\tag{16}$$

令 $\Theta^{(w_0)}$ 表示由 $\widetilde{\theta}\boldsymbol{v}^{(w_0)}=\boldsymbol{v}^{(w_0)}\Theta^{(w_0)}$确定的矩阵值 (1, 0)-形式。我们有如下分解$\mathcal{A}^{(w_0)}=\mathcal{A}^{(w_0)}{}_w\ \ dw+\mathcal{A}^{(w_0)}{}_{\overline{w}}\ \ d\overline{w}$。我们有 $\mathcal{A}^{(w_0)}{}_w=-{}^t\mathcal{A}^{(w_0)}{}_{\overline{w}}$。由于 $\overline{\partial}\widetilde{\theta}=0$，以下结论成立。

$$\partial_{\overline{w}}\Theta^{(w_0)}+[\mathcal{A}^{(w_0)}_{\overline{w}},\Theta^{(w_0)}]=0.\tag{17}$$

我们还有

$$\mathcal{R}^{(w_0)}+[\Theta^{(w_0)},\overline{{}^t\Theta^{(w_0)}}]=0.\tag{18}$$

然后，通过标准的自举论证，我们可以证明，对于任意 $\ell$，存在 $C_2(\ell)$，它仅依赖于 $\ell$和 $r$，使得

$$\big\|\Theta^{(w_0)}\big\|_{L^p_\ell(D(w_0,1/2))}+\big\|\mathcal{A}^{(w_0)}\big\|_{L^p_{\ell+1}(D(w_0,1/2))}\leq C_2(\ell).$$

于是，我们得到了关于$\|f_{|B(R_1)}\|_{L^p_\ell}$ 的所需估计，这意味着关于$\|f^\dagger_{h|B(R_1)}\|_{L^p_\ell}$ 的所需估计。由于$\mathfrak{R}+[f,f_h^\dagger]=0$，我们也得到了关于$\|\mathfrak{R}_{|B(R_1)}\|_{L^p_\ell}$ 的所需估计。

## 4.2 圆盘上两族大尺度解之差

设 $R_0>0$。设 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 是 $B(R_0)$ 上秩为 $r$ 的 Higgs 丛。设 $f$ 是由$\theta=f\,dz$确定的 $E$ 的自同态。设 $C_0$ 为一个常数，使得

$$|\operatorname{tr}(f^j)|<C_0\quad(j=1,\dots,\operatorname{rank}(E)).$$

设 $h_{\det(E)}$ 是 $E$ 的平坦度量。设 $h_{0,t}\,(t>0)$ 是 $(E,\overline{\partial}_E,t\theta)$ 的调和度量，使得 $\det(h_{0,t})=h_{\det(E)}$。令 $\nabla^{0,t}$ 表示 $(E,\overline{\partial}_E,h_{0,t})$ 的陈联络。对于 $\mathrm{End}(E)$ 的任意截面 $u$，以及任意元素 $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_\ell)\in\{z,\overline{z}\}^\ell$，我们定义

$$\nabla^{0,t}_{\boldsymbol{\kappa}}u=\nabla^{0,t}_{\kappa_1}\circ\nabla^{0,t}_{\kappa_2}\circ\cdots\circ\nabla^{0,t}_{\kappa_\ell}(u).$$

定理 4.3 设 $0<R_1<R_0$。设 $C_1,\epsilon_1>0$。对于任意 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在正实常数 $C(\ell)$ $\epsilon(\ell)>0$，它们仅依赖于 $r$, $C_0$, $C_1$, $\epsilon_1$ 和 $\ell$，使得下述结论成立。

- 设 $t(i)>0$ 是一个递增序列，使得当 $i\to\infty$ 时，$t(i)\to\infty$。我们还假设 $t(1)(R_0-R_1)>100$。设 $h_{t(i)}$ 是 $(E,\overline{\partial}_E,t(i)\theta)$ 的调和度量，使得 $\det(h_{t(i)})=h_{\det(E)}$。对$B(R_0)\setminus B(R_1)$ 作如下假设：

$$\big|s(h_{0,t(i)},h_{t(i)})-\mathrm{id}\big|_{h_{0,t(i)}}\leq C_1\exp(-\epsilon_1 t(i)).\tag{19}$$

那么，对于任意 $\boldsymbol{\kappa}\in\{z,\overline{z}\}^\ell$，以下结论在 $B(R_1)$ 上成立：

$$\Big|\nabla^{0,t(i)}_{\boldsymbol{\kappa}}\big(s(h_{0,t(i)},h_{t(i)})-\mathrm{id}\big)\Big|_{h_{0,t(i)}}\leq C(\ell)\exp\big(-\epsilon(\ell)t(i)\big).$$

### 4.2.1 $\ell=0$ 的情形

为简化记号，我们令 $s_i=s(h_{0,\,t(i)},h_{t(i)})$。由 (19)，存在仅依赖于 $r$、$C_1$ 和 $\epsilon_1$ 的 $C'(0)$ $\epsilon'(0)>0$，使得以下结论在 $B(R_0)\setminus B(R_1)$ 上成立：

$$\operatorname{Tr}(s_i-\mathrm{id}_E)\leq C'(0)\exp(-\epsilon'(0)t(i))\tag{20}$$

由 [18, 引理 3.1]，我们有

$$-\partial_z\partial_{\overline{z}}\operatorname{Tr}(s_i-\mathrm{id}_E)=-\big|\overline{\partial}(s_i)s_i^{-1/2}\big|^2_{h_{0,t(i)}}-\big|[t\theta,s_i]s_i^{-1/2}\big|^2_{h_{0,t(i)}}.\tag{21}$$

特别地，$\operatorname{Tr}\big(s_i-\mathrm{id}_E\big)$ 是定义在 $B(R_0)$ 上的次调和函数。由次调和函数的最大值原理，(20) 在 $B(R_0)$ 上成立。由于 $\det(s_i)=1$，我们得到 $\ell=0$ 情形下的结论。

### 4.2.2 $L^2$-范数的估计

设定 $R_2=(R_0+R_1)/2$ 和 $R_3=(R_0+R_2)/2$。令 $\chi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个 $C^\infty$-函数，使得 $\chi(z)=1\,(|z|\leq R_2)$ 且 $\chi(z)=0\,(|z|\geq R_3)$。令 $g_z=dz\,d\overline{z}$ 为标准欧氏度量。利用引理 3.1]，，我们得到

$$\int_{B(R_2)}\Big(\big|\overline{\partial}(s_i)s_i^{-1/2}\big|^2_{h_{0,t(i)},g_z}+\big|[t\theta,s_i]s_i^{-1/2}\big|^2_{h_{0,t(i)},g_z}\Big)\operatorname{dvol}_{g_z}\leq\int_{B(R_3)\setminus B(R_2)}\big|\partial_z\partial_{\overline{z}}(\chi)\big|\cdot\big(\operatorname{Tr}(s_i-\mathrm{id}_E)\big)\operatorname{dvol}_{g_z}.$$

因此，存在 $C_5>0,\epsilon_5>0$ 使得

$$\int_{B(R_2)}\Big(\big|\overline{\partial}(s_i)s_i^{-1}\big|^2_{h_{0,t(i)},g_z}+\big|s_i^{-1}[t\theta,s_i]\big|^2_{h_{0,t(i)},g_z}\Big)\operatorname{dvol}_{g_z}\leq C_5\exp(-\epsilon_5 t(i)).\tag{22}$$

### 4.2.3 重标度

为了研究导数，对任意 $t>t(1)$，我们定义映射 $\rho_t:\mathbb{C}_w\to\mathbb{C}_z$，其定义为 $\rho_t(w)=t^{-1}w$。我们有$\rho_t^{-1}(B(R))=B(tR)$。我们在 $\mathbb{C}_w$ 上使用标准欧氏度量 $g_w=dw\,d\overline{w}$。

我们在 $B(tR_0)$ 上定义 $E_t=\rho_t^*(E)$。它配备了 Higgs 场 $\theta_t=\rho_t^*(t\theta)$。我们有 $\theta_t=\rho_t^*(f)\,dw$。我们有 Higgs 丛 $(E_t,\partial_{\widetilde{E}_t},\theta_t)$ 的调和度量 $h_{0,t}=\varphi_t^*(h_{0,t})$。令 $\nabla^{0,t}$ 表示 $(E_t,\partial_{\widetilde{E}_t},h_{0,t})$ 的陈联络。

根据 Simpson 主估计，存在 $C_{10}>0$，它仅依赖于 $r$ 和 $C_0$，使得以下结论在 $B(tR_0-1)$ 上成立：

$$\big|\widetilde{\theta}_t\big|_{\widetilde{h}_{0,t},g_w}\leq C_{10}. \tag{23}$$

令 $R(h_{0,t})$ 表示 $(E_t,\partial_{\widetilde{E}_t},h_{0,t})$ 的陈联络的曲率。我们有以下等式：

$$R(\widetilde{h}_{0,t})+\big[\widetilde{\theta}_t,(\widetilde{\theta}_t)^\dagger_{\widetilde{h}_{0,t}}\big]=0. \tag{24}$$

由 (23) 和 (24)，我们有以下关于 $B(tR_0-1)$ 的结论：

$$\big|R(\widetilde{h}_{0,t})\big|_{\widetilde{h}_{0,t},g_w}\leq 2C_{10}^2. \tag{25}$$

我们还有如命题 4.1 中所述的关于 $\theta$ 和 $R(h_{0,t})$ 的高阶导数的统一估计。

4.2.4 高阶导数的估计

我们还有 $(E_{t(i)},\partial_{\widetilde{E}_{t(i)}},\theta_{t(i)})$ 的调和度量 (22)，$h_{t(i)}$。令 $\widetilde{s}_i=\varphi^*_{t(i)}(s_i)$。我们有 $h_{t(i)}=h_{0,t(i)}\widetilde{s}_i$。由此可得

$$\int_{B(tR_2)}\Big(\big|\overline{\partial}(\widetilde{s}_i)\widetilde{s}_i^{-1}\big|^2_{\widetilde{h}_{0,t(i)},g_w}+\big|\widetilde{s}_i^{-1}[\widetilde{\theta}_t,\widetilde{s}_i]\big|^2_{\widetilde{h}_{0,t(i)},g_w}\Big)\,\mathrm{dvol}_{g_w}\leq C_5\exp(-\epsilon_5 t(i)). \tag{26}$$

这意味着

$$\int_{B(tR_2)}\big|\widetilde{s}_i^{-1}\partial_{\widetilde{h}_{0,t(i)}}(\widetilde{s}_i)\big|^2_{\widetilde{h}_{0,t(i)},g_w}\,\mathrm{dvol}_{g_w}\leq C_5\exp(-\epsilon_5 t(i)). \tag{27}$$

令 $R(h_{t(i)})$ 表示 $(E_{t(i)},\partial_{\widetilde{E}_{t(i)}},h_{t(i)})$ 的陈联络的曲率。

我们有

$$R(\widetilde{h}_{t(i)})+\big[\widetilde{\theta}_{t(i)},(\widetilde{\theta}_{t(i)})^\dagger_{\widetilde{h}_{t(i)}}\big]=0.$$

注意到

$$(\widetilde{\theta}_{t(i)})^\dagger_{\widetilde{h}_{t(i)}}=\widetilde{s}^{-1}_{t(i)}(\widetilde{\theta}_{t(i)})^\dagger_{\widetilde{h}_{0,t(i)}}\widetilde{s}_{t(i)}.$$

我们得到

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\big(\widetilde{s}_i^{-1}\partial_{\widetilde{h}_{0,t(i)}}\widetilde{s}_i\big)=R(\widetilde{h}_{t(i)})-R(\widetilde{h}_{0,t(i)})&=-\Big[\widetilde{\theta}_{t(i)},\widetilde{s}_i^{-1}(\widetilde{\theta}_{t(i)})^\dagger_{\widetilde{h}_{0,t(i)}}\widetilde{s}_i-(\widetilde{\theta}_{t(i)})^\dagger_{\widetilde{h}_{0,t(i)}}\Big]\\&=-\Big[\widetilde{\theta}_{t(i)},\widetilde{s}_i^{-1}\big[(\widetilde{\theta}_{t(i)})^\dagger_{\widetilde{h}_{0,t(i)}},\widetilde{s}_i-\mathrm{id}\big]\Big].\end{aligned} \tag{28}$$

因此，存在 $C_{11}>0$ 和 $\epsilon_{11}>0$，使得下式在 $B(tR_0-1)$ 上成立：

$$\big|\overline{\partial}\big(\widetilde{s}_i^{-1}\partial_{\widetilde{h}_{0,t(i)}}\widetilde{s}_i\big)\big|_{\widetilde{h}_{0,t(i)},g_w}\leq C_{11}\exp(-\epsilon_{11}t(i)). \tag{29}$$

对于任意 $w_0\in\mathbb{C}_w$，我们令 $D(w_0,T)=\{|w-w_0|<T\}$。由 (25)、(27) 和 (29)，对于任意 $p\geq 2$，存在$C_{12}(p)>0,\epsilon_{12}(p)>0$，使得下式对任意 $w_0\in B(tR_2-1)$ 成立：

$$\big|\widetilde{s}_i^{-1}\partial_{\widetilde{h}_{0,t(i)}}\widetilde{s}_i\big|_{L^p_1(D(w_0,2/3)),\widetilde{h}_{0,t(i)},g_w}\leq C_{12}(p)\exp\big(-\epsilon_{12}(p)t(i)\big). \tag{30}$$

由 (30) 以及 $\ell=0$ 情形下的估计，对于任意 $p>1$，存在 $C_{13}(p)>0,\epsilon_{13}(p)>0$，使得下式对任意 $w_0\in B(tR_2-1)$ 成立：

$$\big|\widetilde{s}_i-\mathrm{id}\big|_{L^p_2(D(w_0,2/3)),\widetilde{h}_{0,t(i)},g_w}\leq C_{13}(p)\exp\big(-\epsilon_{13}(p)t(i)\big). \tag{31}$$

通过标准的自举论证，对于任意 $p>1$和 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，存在 $C_{14}(\ell,p)>0$、$\epsilon_{14}(\ell,p)>0$，使得以下结论对任意 $w_0\in B(tR_2-1)$ 均成立：

$$\big|\widetilde{s}_i-\mathrm{id}\big|_{L^p_\ell(D(w_0,1/2)),\widetilde{h}_{0,t(i)},g_w}\leq C_{14}(\ell,p)\exp\big(-\epsilon_{14}(\ell,p)t(i)\big). \tag{32}$$

于是，我们得到了定理 4.3 的结论。 ∎

# 5 可分解滤过延拓

## 5.1 亚纯延拓与滤过延拓

### 5.1.1 向量丛

设 $U \subset \mathbb{C}$ 是 0 的单连通开邻域。令 $U^* = U \setminus \{0\}$。令 $\iota\colon U^* \to U$ 表示包含映射。设 $V$ 是一个秩为 $r$ 的局部自由 $\mathcal{O}_{U^*}$-模。我们得到一个局部自由 $\iota_*\mathcal{O}_{U^*}$-模 $\iota_*(V)$。$V$ 的亚纯（分别为光滑）延拓定义为一个局部自由 $\mathcal{O}_U(*0)$-子模（分别为 $\mathcal{O}_U$-子模）$\mathcal{V} \subset \iota_*(V)$，满足 $\mathcal{V}_{|U^*} = V$。$V$ 的滤过延拓定义为配备了 $\mathcal{V}$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V})$ 的亚纯延拓 $\mathcal{V}$，其中底空间为 $\mathcal{V}$。

例 5.1 $\mathcal{O}_U(*0)$-子模 $\mathcal{O}_U(*0)\exp(z^{-1}) \subset \iota_*(\mathcal{O}_{U^*})$ 是 $\mathcal{O}_{U^*}$ 的一个亚纯延拓，它不同于 $\mathcal{O}_U(*0) \subset \iota_*(\mathcal{O}_{U^*})$。 ∎

给定一个正整数 $\ell$，令 $\varphi_\ell\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 由 $\varphi_\ell(\zeta) = \zeta^\ell$ 定义。设 $U^{(\ell)} = \varphi_\ell^{-1}(U)$ 和 $U(\ell)^* = U(\ell) \setminus \{0\}$。诱导态射 $U(\ell) \to U$ 和 $U(\ell)^* \to U^*$ 也记作 $\varphi_\ell$。令 $\mathrm{Gal}(\ell)$ 表示分歧覆盖 $\varphi_\ell$ 的伽罗瓦群。具体而言，设 $\mathrm{Gal}(\ell) = \{a \in \mathbb{C}^* \mid a^\ell = 1\}$，并考虑 $\mathrm{Gal}(\ell)$ 在 $U(\ell)$ 上通过坐标 $\zeta$ 上的乘法所给出的作用。令 $\iota^{(\ell)}\colon U^{(\ell)*} \to U^{(\ell)}$ 表示包含映射。设 $V(\ell) := \varphi_\ell^*(V)$，它自然是 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变的。$(\iota^{(\ell)})_*\mathcal{O}_{U^{(\ell)*}}$-模 $(\iota^{(\ell)})_*(V(\ell))$ 也具有 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变性。$V(\ell)$ 的 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变亚纯延拓定义为一个局部自由的 $\mathcal{O}_{U^{(\ell)}}(*0)$-子模 $\mathcal{V}^{(\ell)} \subset \iota_*^{(\ell)}(V(\ell))$，它在 $\mathrm{Gal}(\ell)$-作用下保持不变。$V^{(\ell)}$ 的 $\mathrm{Gal}(\ell)$- 等变滤过延拓定义为 $\mathrm{Gal}(\ell)$- 等变亚纯延拓 $\mathcal{V}^{(\ell)}$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}^{(\ell)})$，其中 $\mathcal{V}^{(\ell)}$ 是 $V^{(\ell)}$ 的延拓，并且每个 $\mathcal{P}_a\mathcal{V}^{(\ell)}$ 在 $\mathrm{Gal}(\ell)$-作用下保持不变。

亚纯延拓 $\mathcal{V}$ of $V$ 诱导出一个 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变亚纯延拓 $\varphi_\ell^*(\mathcal{V})$ of $V_{(\ell)}$。反过来，对于任意 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变亚纯延拓 $\mathcal{V}^{(\ell)}$ of $V_{(\ell)}$，我们得到带有 $\mathrm{Gal}(\ell)$-作用的 $\mathcal{O}_U(*0)$-模 $\varphi_{\ell*}(\mathcal{V}^{(\ell)})$。其 $\mathrm{Gal}(\ell)$-不变部分 $\varphi_{\ell*}(\mathcal{V}^{(\ell)})^{\mathrm{Gal}(\ell)}$ 称为 $\mathcal{V}^{(\ell)}$ 的下降，它是 $V$ 的亚纯延拓。

引理 5.2 对于亚纯延拓 $\mathcal{V}$ of $V$，$\varphi_\ell^*(\mathcal{V})$ 的下降等于 $\mathcal{V}$。对于 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变亚纯延拓 $\mathcal{V}^{(\ell)}$ of $V_{(\ell)}$，$\varphi_\ell^*\big(\varphi_{\ell*}(\mathcal{V}^{(\ell)})^{\mathrm{Gal}(\ell)}\big)$ 等于 $\mathcal{V}^{(\ell)}$。这些过程在 $V$ 的亚纯延拓与 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变的 $V^{(\ell)}$ 的亚纯延拓之间诱导出一个等价。 ∎

对于 $V$ 的滤过延拓 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$，我们如下得到一个定义在 $\mathcal{V}^{(\ell)}$ 上的 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变滤过延拓 $\mathcal{P}_*(\varphi_\ell^*(\mathcal{V}))$：

$$\mathcal{P}_a(\varphi_\ell^*\mathcal{V}) = \sum_{\substack{b\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}\\ \ell b+k\le a}} \zeta^{-k}\varphi_\ell^*(\mathcal{P}_b\mathcal{V}) \subset \varphi_\ell^*(\mathcal{V}).$$

滤过丛 $\mathcal{P}_*(\varphi_\ell^*(\mathcal{V}))$ 记作 $\varphi_\ell^*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$。

对于 $V^{(\ell)}$ 的 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变滤过延拓 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}^{(\ell)})$，我们如下得到一个滤过延拓 $\mathcal{P}_*(\varphi_{\ell*}(\mathcal{V}^{(\ell)})^{\mathrm{Gal}(\ell)})$：

$$\mathcal{P}_a(\varphi_{\ell*}(\mathcal{V}^{(\ell)})^{\mathrm{Gal}(\ell)}) = \varphi_{\ell*}(\mathcal{P}_{\ell a}\mathcal{V}^{(\ell)})^{\mathrm{Gal}(\ell)}.$$

这称为 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}^{(\ell)})$ 的下降。

引理 5.3 这些过程在 $V$ 的滤过延拓与 $V^{(\ell)}$ 的 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变滤过延拓之间诱导出一个等价。 ∎

### 5.1.2 非退化对称配对

对于任意 $b \in \mathbb{R}$，令 $\mathcal{P}_*^{(b)}(\mathcal{O}_U(*0))$ 表示定义在 $\mathcal{O}_U(*0)$ 上的滤过丛，其定义如下：

$$\mathcal{P}_a^{(b)}(\mathcal{O}_U(*0)) = z^{-[a-b]}\mathcal{O}_U.$$

设 $C\colon V \otimes V \to \mathcal{O}_{U^*}$ 是一个全纯非退化对称配对。若亚纯延拓 $\mathcal{V}$ 与 $C$ 相容，即 $C$ 延拓为配对 $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V} \to \mathcal{O}_U(*0)$，则称之为相容。若滤过延拓 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 与 $C$ 相容，即 $C$ 诱导 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}\otimes\mathcal{P}_*\mathcal{V} \to \mathcal{P}_*^{(0)}(\mathcal{O}_U(*0))$，则称之为相容。若 $C$ 关于 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 是完美的，即 $C$ 诱导同构 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}) \simeq \mathcal{P}_*(\mathcal{V}^\vee)$，则称之为完美。

我们有 $\det(V)$ 的诱导对称配对 $\det(C)$。若 $\mathcal{V}$（分别地，$\mathcal{P}_*\mathcal{V}$）与 $C$ 相容，则 $\det(\mathcal{V})$（分别地，$\det(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$）与 $\det(C)$ 相容。

引理 5.4（[13]）假设 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 与 $C$ 相容。那么， $C$ 关于 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V})$ 是完美的，当且仅当 $\det(C)$ 关于 $\det(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$ 是完美的。 ∎

引理 5.5 存在唯一的亚纯延拓 $\mathcal{L}$ of $\det(V)$，且与 $\det(C)$ 相容。存在唯一的滤过丛 $\mathcal{P}_*^C\mathcal{L}$ over $\mathcal{L}$，使得 $\det(C)$ 关于 $\mathcal{P}_*^C\mathcal{L}$ 是完美的。

证明 我们不妨设 $U$ 是一个圆盘。设 $v_0$ 是 $\det(V)$ 在 $U^*$ 上的一个标架。我们得到一个全纯函数 $(\det C)(v_0,v_0)$，定义在 $U^*$ 上。存在一个整数 $k$ 和一个全纯函数 $g_1$，使得 $(\det C)(v_0,v_0) = z^{-k}\exp(g_1)$。我们得到 $\det(V)$ 在 $U^*$ 上的一个标架 $v_1 = \exp(-g_1/2)v_0$。令 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_U(*0)v_1 \subset \iota_*(V)$。于是， $\mathcal{L}$ 与 $\det(C)$ 相容。

我们有 $\det(C)(v_1,v_1) = z^{-k}$。我们定义

$$\mathcal{P}_a^C(\mathcal{L}) = z^{-[a-k/2]}\mathcal{O}_U \cdot v_1.$$

那么， $\mathcal{P}_*^C\mathcal{L}$ 满足所需条件。唯一性显而易见。 ∎

我们定义 $C^{(\ell)} := \varphi_\ell^* C$，这是 $V_{(\ell)}$ 上的非退化对称配对。

引理 5.6 $\mathcal{V}$（分别地， $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$）与 $C$ 相容，当且仅当 $\varphi_\ell^*(\mathcal{V})$（分别地， $\varphi_\ell^*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$）与 $C^{(\ell)}$ 相容。当 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 与 $C$ 相容时，关于 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$， $C$ 是完美的，当且仅当关于 $\varphi_\ell^*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$， $C^{(\ell)}$ 是完美的。 ∎

### 5.1.3 Higgs 丛

设 $\theta$ 是 $V$ 的 Higgs 场，即 $\theta\colon V \to V\otimes\Omega^1_{U^*}$。我们得到 $\iota_*(\theta)\colon \iota_*(V) \to \iota_*(V)\otimes\Omega^1_U$。$(V,\theta)$ 的亚纯（分别地，光滑）延拓定义为 $V$ 的亚纯（分别地，光滑）延拓 $\mathcal{V}$，使得 $\iota_*(\theta)(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}\otimes\Omega^1_U$。$\mathcal{V}$ 所诱导的 Higgs 场记作 $\theta$。$(V,\theta)$ 的滤过延拓定义为在 $(V,\theta)$ 的亚纯延拓 $\mathcal{V}$ 上的滤过延拓 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V})$。若 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 是正则（分别地，良好、非分歧良好）滤过 Higgs 丛，则称滤过延拓 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 为正则（分别地，良好、非分歧良好）。（关于良好滤过 Higgs 丛和非分歧良好滤过 Higgs 丛的概念，见[17, §2.4]。）

引理 5.7 令 $f$ 为由 $\theta = f\,dz/z$定义的 $V$ 的自同态。令 $a_j(z)$ 为$U^*$上的全纯函数，它们由特征多项式 $\det(t\,\mathrm{id}_V - f) = \sum_{j=0}^r a_j(z)t^j$的系数得到。

- $(V,\theta)$ 存在亚纯延拓，当且仅当 Higgs 丛 $(V,\theta)$ 是野性的，也就是说， $a_j(z)$ 在 $z=0$ 处是亚纯的。在这种情况下，存在良好滤过延拓。
- 存在正则滤过延拓，当且仅当 $(V,\theta)$ 是温和的，也就是说， $a_j(z)$ 在 $z=0$ 处是全纯的。 ∎

我们得到 $V^{(\ell)}$ 的 Higgs 场 $\theta^{(\ell)}$。下面的引理显然成立。

引理 5.8 拉回与下降在 $(V,\theta)$ 的亚纯延拓和 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变的 $(V_{(\ell)}\theta^{(\ell)})$ 的亚纯延拓之间诱导出一个等价。 ∎

引理 5.9 拉回与下降在（$V$， $\theta$）的正则（分别为良好）滤过延拓和（$V_{(\ell)}\,\theta^{(\ell)}$）的 $\mathrm{Gal}(\ell)$-等变正则（分别为良好）滤过亚纯延拓之间诱导出一个等价。 ∎

## 5.2 Deco正则半单 Higgs 丛的可分解滤过延拓

### 5.2.1 可分解滤过延拓

我们继续使用 §5.1.1 中的记号。设（$V$， $\theta$）是 $U^*$ 上的正则半单 Higgs 丛。假设 $\theta$ 是野性的。则存在 $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$ 以及如下分解

$$\varphi_\ell^*(V,\theta) = \bigoplus_{i=1}^r (V_i,\theta_i), \tag{33}$$

其中秩为 $V_i = 1$，且 $\theta_i - \theta_j (i\neq j)$ 在 $U^{(\ell)*}$ 上处处不消失。设 $\mathcal{V}$ 是（$V$， $\theta$）的一个亚纯延拓。分解（33）延拓为

$$\varphi_\ell^*(\mathcal{V},\theta) = \bigoplus_{i=1}^r (\mathcal{V}_i,\theta_i), \tag{34}$$

其中每个 $\mathcal{V}_i$ 都是 $V_i$ 的亚纯延拓。

定义 5.10 若滤过丛 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{V}$ 上是 $(V,\theta)$ 的可分解滤过扩张，则称之为可分解滤过扩张；如果滤过丛 $\varphi_\ell^*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$ 与分解 (34) 相容，即对任意 $a\in\mathbb{R}$，以下条件均成立:

$$\mathcal{P}_a(\varphi_\ell^*\mathcal{V})=\bigoplus_{i=1}^{r}\mathcal{P}_a(\varphi_\ell^*\mathcal{V})\cap\mathcal{V}_i.$$

这样的 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 称为可分解滤过 Higgs 丛。

根据定义，下面的引理显然成立。

引理 5.11 假设 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 是可分解的，

- $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 是良好滤过 Higgs 丛。
- 任意分解 $(\mathcal{V},\theta)|_{U^*}=(V_1,\theta_1)\oplus(V_2,\theta_2)$ 都可扩展为分解 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)=(\mathcal{P}_*\mathcal{V}_1,\theta_1)\oplus(\mathcal{P}_*\mathcal{V}_2,\theta_2)$，使得 $\mathcal{V}_{i|U^*}=V_i$。

### 5.2.2 滤子线丛与可分解滤过 Higgs 丛

存在如下分解

$$(V,\theta)=\bigoplus_{k\in S}(V^{[k]},\theta^{[k]}) \tag{35}$$

使得 $\Sigma_{V^{[k]},\ \theta^{[k]}}$ 相连 接。令 $r_k=$秩$V^{[k]}$。对于每个 $k$，都存在 Higgs 丛

$$\varphi_{r_k}^*(V^{[k]},\theta^{[k]})=\bigoplus_{i=1}^{r_k}(V_i^{[k]},\theta_i^{[k]}), \tag{36}$$

其中秩为 $V_i^{[k]}=1$，且 $\theta_i^{[k]}$ 是 1-形式，使得 $\theta_i^{[k]}-\theta_j^{[k]}(i\neq j)$ 在 $U^{(r_k)_*}$ 上处处不为零。$(V,\theta)$ 的一个可分解滤过扩张 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 诱导出 $(V_i^{[k]},\theta_i^{[k]})$ 的一个可分解滤过扩张 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}_i^{[k]})$。注意，对于满足 $\sigma^*\theta_1^{[k]}=\theta_i^{[k]}$ 的 $\sigma\in\mathrm{Gal}(r_k)$，$\mathcal{P}_*(\mathcal{V}_i^{[k]})=\sigma^*\mathcal{P}_*(\mathcal{V}_1^{[k]})$。反过来，$V_1^{[k]}$ 的一个滤过延拓 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}_1^{[k]}$ 诱导出 $\mathrm{Gal}(r_k)$-等变的 $\mathrm{Gal}(r_k)$ $\sigma^*\mathcal{P}_*\mathcal{V}_1^{[k]}$ 上的滤过延拓 $\bigoplus_{\sigma\in}$，其作用于 $\varphi_{r_k}^*(V^{[k]})=\bigoplus_{i=1}^{r_k}V_i^{[k]}$，从而得到 $(V^{[k]},\theta^{[k]})$ 的一个可分解滤过扩张 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}^{[k]}$。因此，我们得到 $(V,\theta)$ 的一个可分解滤过扩张 $\bigoplus_{k\in S}\mathcal{P}_*\mathcal{V}^{[k]}$。注意，通过自然同一化 $(\varphi_{r_k})_*(V_1^{[k]})=V^{[k]}$，也可将 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}^{[k]}$ 表示为 $(\varphi_{r_k})_*(\mathcal{P}_*\mathcal{V}_1^{[k]})$。以下命题显然成立。

命题 5.12 此过程在 $(V,\theta)$ 的可分解滤过延拓与 $V_1^{[k]}$ $(k\in S)$ 的一组滤过延拓之间诱导出一个等价。

### 5.2.3 由行列式丛确定的可分解滤过延拓

设 $\mathcal{V}$ 是 $(V,\theta)$ 的一个亚纯延拓。分解 (35) 可延拓为一个分解

$$(\mathcal{V},\theta)=\bigoplus_{k\in S}(\mathcal{V}^{[k]},\theta^{[k]}). \tag{37}$$

分解 (34) 可延拓为一个分解

$$\varphi_{r_k}^*(\mathcal{V}^{[k]},\theta^{[k]})=\bigoplus_{i=1}^{r_k}(\mathcal{V}_i^{[k]},\theta_i^{[k]}). \tag{38}$$

命题 5.13 对于定义在 $\det(\mathcal{V}^{[k]})$ 上的一组滤过丛 $\mathcal{P}_*\det(\mathcal{V}^{[k]})$，存在唯一的定义在 $\mathcal{V}$ 上的可分解滤过丛 $\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V})=\bigoplus_{k\in S}\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V}^{[k]})$，使得对于任意 $k\in S$，$\det(\mathcal{P}_*^\star\mathcal{V}^{[k]})=\mathcal{P}_*\det(\mathcal{V}^{[k]})$。此外，对于任意 $k\in S$，以下结论成立。

- $\dim\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^\star}(\mathcal{V}^{[k]})\leq 1$ 对于任意 $a\in\mathbb{R}$。
- 令 $d_k$为一个实数，使得 $\mathrm{Gr}_{d_k}^{\mathcal{P}}(\det(\mathcal{V}^{[k]}))\neq 0$。那么，$\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^\star}(\mathcal{V}^{[k]})\neq 0$ 当且仅当 $r_ka-d_k\in\mathbb{Z}$($r_k$为奇数)，或 $r_ka-d_k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}$($r_k$为偶数)。

- $\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^\star}(\mathcal{V}_i^{[k]}) \neq 0$ *if and only if* $a - d_k \in \mathbb{Z}$ *(*$r_k$ *is odd), or* $a - d_k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ *(*$r_k$ *is even).*

证明 只需考虑 $\Sigma_{V,\theta}$ 连通的情形，即 $|S| = 1$。我们省略上标 $[k]$ 和下标 $k$。令 $(V_{(r)}\,\theta^{(r)}) = \varphi_r^*(V,\theta)$ 和 $\mathcal{V}^{(r)} = \varphi_r^*(\mathcal{V})$。在 $U^{(r)*}$ 上，Higgs 丛存在如下分解：

$$(V^{(r)},\theta^{(r)}) = \bigoplus_{i=1}^{r}(V_{\beta(i)},\beta(i)\,d\zeta). \tag{39}$$

这里，$\beta(i)$ 是 $(U^{(r)},0)$ 上的亚纯函数，使得 $\beta(i) - \beta(j)$ $(i \neq j)$ 在 $U_{(r)*}$ 上处处不为零。它延拓为 $U^{(r)}$ 上的一个分解：

$$(\mathcal{V}^{(r)},\theta^{(r)}) = \bigoplus_{i=1}^{r}(\mathcal{V}_{\beta(i)},\beta(i)\,d\zeta). \tag{40}$$

对于任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(r)$，我们有 $\sigma^*\mathcal{V}_{\beta(i)} = \mathcal{V}_{\sigma^*(\beta(i))}$。

设 $v_{\beta(1)}$ 是 $\mathcal{V}_{\beta(1)}$ 的一个标架。我们得到 $v_{\sigma^*(\beta(1))} = \sigma^* v_{\beta(1)}$ 的标架，其中 $\mathcal{V}_{\sigma^*\beta(1)}$，而元组 $v_{\beta(1)},\dots,v_{\beta(r)}$ 是 $\mathcal{V}^{(r)}$ 的一个标架。令

$$b := \min\Big\{c \in \mathbb{R} \,\Big|\, v_{\beta(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\beta(r)} \in \mathcal{P}_c(\varphi_r^* \det \mathcal{V})\Big\}.$$

我们如下定义滤过丛 $\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V}_{\beta(i)})$：

$$\mathcal{P}_a^\star(\mathcal{V}_{\beta(i)}) = \zeta^{-[a-b/r]}\mathcal{O}_{U^{(r)}}v_{\beta(i)}.$$

它们与 $v_{\beta(1)}$ 的选择无关。令 $\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V}^{(r)}) = \bigoplus \mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V}_{\beta(i)})$，它是 $\mathrm{Gal}(r)$-等变的。通过下降，我们得到 $\mathcal{V}$ 上的一个滤过丛 $\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V})$，它满足所需条件。唯一性显然。根据构造，$(\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V})\ \theta)$ 显然是一个良好滤过 Higgs 丛。

设 $\tau$ 是 $\mathcal{P}_d(\det\mathcal{V})$ 的标架。存在一个整数 $m$ 和一个在 $U^{(r)}$ 上处处不为零的全纯函数 $g$，使得

$$v_{\beta(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\beta(r)} = \zeta^m g(\zeta)\varphi_r^*\tau.$$

由于 $\mathrm{Gal}(r)$ 的一个生成元 $\sigma_0$ 以循环方式作用于集合 $\{\sigma(i)\}$，我们有 $\sigma_0^*(v_{\beta(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\beta(r)}) = (-1)^{(r-1)}v_{\beta(1)}\wedge\cdots\wedge v_{\beta(r)}$。因此，我们得到 $\sigma_0^*(\zeta^m) = (-1)^{r-1}\zeta^m$ 和 $\sigma_0^* g = g$。这意味着，若 $r$ 为奇数，则 $m/r \in \mathbb{Z}$；若 $r$ 为偶数，则 $m/r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$。根据我们对 $b$ 的选择，有 $b = -m + rd$。容易看出，$\mathrm{Gr}_c^{\mathcal{P}^\star}(\mathcal{V}_{\beta(i)}) \neq 0$ 当且仅当 $c - b/r \in \mathbb{Z}$。对于每个 $p \in \mathbb{Z}$，我们有 $\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(r)}\sigma^*(\zeta^p v_{\beta(1)})$，它们是 $\mathcal{V}^{(r)}$ 的 $\mathrm{Gal}(r)$-不变截面，并诱导出 $\mathcal{P}^\star_{b/r^2-p/r}(\mathcal{V})$ 的一个截面。此外，它还诱导出 $\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^\star}_{b/r^2-p/r}(\mathcal{V})$ 的一个标架。因此，容易看出，$\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^\star}(\mathcal{V}) \neq 0$ 当且仅当 $ra - b/r \in \mathbb{Z}$，并且 $\dim \mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^\star}(\mathcal{V}) \leq 1$。于是，我们得到最后两个断言。∎

## 5.3 非退化配对与可分解滤过扩张 s

### 5.3.1 正则半单 Higgs 丛的非退化对称配对 s

我们继续使用 §5.2 中的记号。设 $C$ 是 $(V,\theta)$ 的一个非退化对称配对。对于任意 $z_0 \in U^*$，$\theta$ 在 $z_0$ 处的特征分解关于 $C$ 是正交的。分解 (33) 关于 $\varphi_\ell^* C$ 是正交的。

分解 (35) 关于 $C$ 是正交的。令 $C^{[k]}$ 表示 $C$ 在 $V^{[k]}$ 上的限制。分解 (36) 关于 $\varphi_{r_k}^* C^{[k]}$ 是正交的。令 $C_i^{[k]}$ 表示 $V_i^{[k]}$ 的诱导对称配对。对于满足 $\sigma^*\theta_1^{[k]} = \theta_i^{[k]}$ 的 $\sigma \in$，其中 $\sigma \in \in\mathrm{Gal}(r_k)$，我们有 $C_i^{[k]} = \sigma^* C_1^{[k]}$。反过来，对于任意 $(k \in S)$ 的非退化对称配对 $C_1^{[k]}$，我们得到一个 $\mathrm{Gal}(r_k)$-等变的非退化对称配对 $\bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Gal}(r_k)}\sigma^* C_1^{[k]}$，其定义在 $\varphi_{r_k}^* V^{[k]}$ 上。它诱导出 $(V^{[k]},\theta^{[k]})$ 的一个非退化对称配对 $C^{[k]}$，以及 $(V,\theta)$ 的一个非退化配对 $\bigoplus C^{[k]}$。下面的引理是命题 2.5 的一个特例。

引理 5.14 这些过程在（$V$，$\theta$）的非退化对称配对 $C$ 与 $V_1^{[k]}$ 的非退化对称配对的元组（$C_1^{[k]}$）$_{k\in S}$ 之间诱导出一个等价。∎

### 5.3.2 对称情形下的典范可分解滤过扩张

我们回顾以下内容 [13, §4.1]。

命题 5.15 对于 $(V,\theta)$ 上的非退化对称配对 $C$，存在唯一一个与 $C$ 相容的 $(V,\theta)$ 的亚纯扩张 $\mathcal{V}^C$。此外，存在唯一一个满足以下条件的 $\mathcal{V}^C$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C)$。

- $C$ 关于 $\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C)$ 是完美的。
- $\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C)$ 是 $(V,\theta)$ 的可分解滤过扩张。

我们有 $V_1^{[k]}$ 上与引理 5.14 中的 $C$ 对应的非退化对称配对 $C_1^{[k]}$ $(k\in S)$。存在唯一的与 $C_1^{[k]}$ 相容的 $V_1^{[k]}$ 的滤过延拓 $\mathcal{P}_*^C\big((\mathcal{V}_1^{[k]})^C\big)$，如引理 5.5 所述。$(V,\theta)$ 的可分解滤过扩张 $\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C)$ 对应于元组 $\mathcal{P}_*^C\big((\mathcal{V}_1^{[k]})^C\big)\,(k\in S)$（命题 5.12）。

### 5.3.3 两种典范延拓的比较

设 $C$ 是 $(V,\theta)$ 的一个非退化对称配对。存在唯一的滤过延拓 $\mathcal{P}_*^C\mathcal{V}^C$，它是 $(V,\theta)$ 的滤过延拓，且与 $C$ 相容。我们有如下分解

$$(\mathcal{V}^C,\theta)=\bigoplus_{k\in S}((\mathcal{V}^C)^{[k]},\theta^{[k]}).$$

令 $\det(C^{[k]})$ 表示 $(\det(V^{[k]}),\mathrm{tr}(\theta^{[k]}))$ 的诱导对称配对。注意，$\det((\mathcal{V}^C)^{[k]})$ 是 $(\det(V^{[k]}),\mathrm{tr}(\theta^{[k]}))$ 的一个亚纯延拓，且与 $\det(C^{[k]})$ 相容。存在唯一的滤过延拓 $\mathcal{P}_*^C\det((\mathcal{V}^C)^{[k]})$，它是 $(\det(V^{[k]}),\mathrm{tr}(\theta^{[k]}))$ 的滤过延拓，且与 $\det(C^{[k]})$ 相容。由命题 5.13，我们得到由元组 $\mathcal{P}_*^C\det((\mathcal{V}^C)^{[k]})$ 确定的可分解滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V}^C),\theta)$。

命题 5.16 $\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C)=\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V}^C)$.

证明 滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C),\theta)$ 是可分解的。我们有 $\det(\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C)^{[k]})=\mathcal{P}_*^C\det((\mathcal{V}^C)^{[k]})=\det\mathcal{P}_*^\star((\mathcal{V}^C)^{[k]})$。因此，根据唯一性，我们得到 $\mathcal{P}_*^C(\mathcal{V}^C)=\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{V}^C)$。

推论 5.17 设 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}^C)$ 是 $(V,\theta)$ 的一个滤过延拓，并满足以下条件。

- $C$ 关于 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}^C)$ 是完美的。
- $\mathcal{P}_*\mathcal{V}^C=\bigoplus_{k\in S}\mathcal{P}_*((\mathcal{V}^C)^{[k]})$。

设 $\mathcal{P}_*^\star\ \mathcal{V}$ $V\ \theta$ $(\mathcal{P}_*\ \ \mathcal{V}^{C\ [k]})\ \ k\in$ ( ) 是由滤过丛 $S$ det (( ) ) ( ) 确定的 ( , ) 的可分解滤过扩张。则 $\mathcal{P}_*^C\ \mathcal{V}^C=\mathcal{P}_*^\star\ \mathcal{V}^C$ ( ) ( )。
证明 由 $\det\big(\mathcal{P}_*((\mathcal{V}^C)^{[k]})\big)=\mathcal{P}_*^C\det\big((\mathcal{V}^C)^{[k]}\big)$ 可得。

设 $C$ 和 $C'$ 是 $(V,\theta)$ 的非退化对称配对。设 $C^{[k]}$ 和 $C'^{[k]}$ $(k\in S)$ 是 $(V^{[k]},\theta^{[k]})$ 所诱导的非退化对称配对。我们得到 $V_1^{[k]}$ 的相应对称配对 $C_1^{[k]}$ 和 $C_1'^{[k]}$。

推论 5.18 假设对于任意 $k\in S$，$\det(C^{[k]})=\det(C'^{[k]})$。那么，当且仅当 $\mathcal{P}_*^C\mathcal{V}^C=\mathcal{P}_*^{C'}\mathcal{V}^{C'}$ 成立时，$\mathcal{V}^C=\mathcal{V}^{C'}$ 成立。这等价于如下条件：存在定义在 $U^{(r_k)}$ 上的全纯函数 $\gamma_1^{[k]}$ $(k\in S)$，满足$C_1'^{[k]}=\exp(\gamma_1^{[k]})C_1^{[k]}$ 以及 $\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(r_k)}\sigma^*\gamma_1^{[k]}=0$。

证明 “如果 ”部分结论显而易见。结论的“仅当”部分由推论 5.1 得出 7.

## 5.4 解耦调和丛的延拓

设 $(V,\theta)$ 是 $U^*$ 上的一个 Higgs 丛，它是正则半单且具有野性。设 $h$ 是 $(V,\theta)$ 的一个解耦调和度量。我们在 $(U,0)$ 上得到良好滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}^h_*V,\theta)$。

引理 5.19（$\mathcal{P}^h_*V,\theta$）是可分解的。

证明 由于分解（33）关于 $\varphi_\ell^{-1}(h)$ 正交，结论显然。 ∎

注 5.20 若 $h$ 是（$V,\theta$）的解耦调和度量，则无需假设 $\theta$ 是野性的，我们即可得到 $\mathcal{P}^h_*V$ 是一个滤过丛。

我们有分解 $\mathcal{P}^h_*(V) = \bigoplus_{k\in S}\mathcal{P}^h_*(V^{[k]})$。我们得到 $\det(V^{[k]})$ 的 $\det(\mathcal{P}^h_*V^{[k]}) = \mathcal{P}_*^{\det(h)}\det(V^{[k]})$ 滤过延拓。我们有由 $\det(\mathcal{P}^h_*V^{[k]})$ 确定的、在 $\mathcal{V}=\mathcal{P}^hV$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$，如命题 5.13 所述。

引理 5.21 我们有 $\mathcal{P}^h_*(V) = \mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$。

证明 这是由满足命题 5.13 中条件的（$V,\theta$）的可分解滤过扩张 $\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$ 的唯一性得出的。 ∎

分解 (35) 关于 $h$ 正交。令 $h^{[k]}$ 表示（$V^{[k]},\theta^{[k]}$）$(k\in S)$ 所诱导的解耦调和度量。分解 (36) 关于 $\varphi^*_{r_k}(h^{[k]})$ 正交。令 $h_1^{[k]}$ 表示 $V_1^{[k]}$ 所诱导的平坦度量。

设 $h'$ 是（$V,\theta$）的另一个解耦调和度量。类似地，我们得到（$V^{[k]},\theta^{[k]}$）所诱导的可分解调和度量 $h'^{[k]}$，以及 $V_1^{[k]}$ 所诱导的平坦度量 $h_1'^{[k]}$。

推论 5.22 假设对于任意 $k\in S$，$\det(h^{[k]}) = \det(h'^{[k]})$。那么，$\mathcal{P}^hV = \mathcal{P}^{h'}V$ 成立当且仅当 $\mathcal{P}^h_*(V) = \mathcal{P}^{h'}_*(V)$ 成立。这等价于以下条件：在 $U^{(r_k)}$ 上存在唯一的全纯函数 $\gamma_1^{[k]}$ $(k\in S)$，使得 (i) $h_1'^{[k]} = \exp(2\,\mathrm{Re}(\gamma_1^{[k]}))h_1^{[k]}$，(ii) $\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(r_k)}\sigma^*\gamma_1^{[k]} = 0$。

证明 “如果”部分的结论显然。结论的“仅当”部分由引理 5.21 得出。第二个结论显然。 ∎

## 5.5 解耦调和度量与对称积

### 5.5.1 扩张的比较

设 $(V,\theta)$ 是 $U^*$ 上的一个正则半单且野性的 Higgs 丛。设 $C$ 是 $(V,\theta)$ 的一个非退化对称配对。则存在唯一一个与 $C$ 相容的 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量 $h^C$。

引理 5.23 我们有 $\mathcal{P}^{h^C}_*(V) = \mathcal{P}^C_*(\mathcal{V}^C)$。

证明 由 通过 $\varphi_\ell$ 拉回后，只需考虑秩为 $V=1$ 的情形，这很容易验证。 ∎

### 5.5.2 与解耦调和度量相容的对称积

下面的引理是引理 2.7 的一个特例。

引理 5.24 设秩为 $V=1$。令 $h$ 为 $V$ 的一个平坦度量。存在一个 $V$ 的全纯非退化对称积 $C$，且它与 $h$ 相容，当且仅当 $h$ 的陈联络的单值化为 1 或 $-1$。这等价于以下条件

$$\left\{d\in\mathbb{R}\,\middle|\,\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^h}_d(V)\neq 0\right\}\subset\frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

若 $C'$ 是 $V$ 的另一个与 $h$ 相容的非退化对称配对，则存在一个非零常数 $\alpha$，使得 (i) $C'=\alpha C$，(ii) $|\alpha|=1$。 ∎

命题 5.25 设 $h$ 是 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量。假设存在非退化对称积 $C_{\det(V^{[k]})}$ $(k\in S)$，其定义在 $\det(V^{[k]})$ 上，并且与 $\det(h^{[k]})$ 相容。

- 存在 $(V,\theta)$ 的非退化对称配对 $C$，使得 (i) $C$ 与 $h$ 相容，(ii) $\det(C^{[k]}) = C_{\det(V^{[k]})}$。
- 若 $C'$ 是 $(V,\theta)$ 的另一个满足上述条件 (i) 和 (ii) 的非退化对称配对，则存在 $r_k$ 个 1 的根 $\mu_k$，使得 $C'^{[k]} = \mu_k C^k$。

证明 令 $h_1^{[k]}$ ($k \in S$) 为 $V_1^{[k]}$ 诱导的平坦度量。由引理 2.7 和引理 5.24 可知，对任意 $k \in S$，存在与 $h_1^{[k]}$ 相容的 $V_1^{[k]}$ 的非退化对称积 $C_1^{[k]}$。它们诱导出 $(V^{[k]},\theta^{[k]})$ 的非退化对称积 $C^{[k]}$。由于 $\det(C^{[k]})$ 与 $\det h^{[k]}$ 相容，存在常数 $\alpha_k$，使得 $\det(C^{[k]}) = \alpha_k \cdot C_{\det(V^{[k]})}$ 且 $|\alpha_k| = 1$。将 $C^{[k]}$ 替换为 $\alpha_k^{1/r_k} C^{[k]}$，即可得到第一个结论。第二个结论也显然成立。 ∎

### 5.5.3 存在性

令 $\mathcal{V}$ 为 $(V,\theta)$ 的亚纯延拓。

引理 5.26 设 $C_{\det(V^{[k]})}$ 是 $\det(V^{[k]})$ 的非退化对称配对，且 $\det(\mathcal{V}^{[k]})$ 与 $C_{\det(V^{[k]})}$ 相容。那么，存在 $(V,\theta)$ 的一个非退化对称配对 $C$，使得 (i) $\det(C^{[k]}) = C_{\det(\mathcal{V}^{[k]})}$，(ii) $\mathcal{V}^C = \mathcal{V}$。

证明 只需考虑 $|S| = 1$ 的情形。我们省略上标 $[k]$ 和下标 $k$。我们采用命题 5.13 的证明中的记号。设 $C'_{1,\beta(1)}$ 是 $\mathcal{V}_{\beta(1)}$ 的一个非退化对称配对。我们得到 $\mathcal{V}^{(r)}$ 的一个 $\mathrm{Gal}(r)$-不变非退化对称配对 $\bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Gal}(r)} \sigma^* C'_{1,\beta(1)}$。它诱导出 $\mathcal{V}$ 的一个非退化对称配对 $C'$。由 $C''_{1,\beta(1)} = \zeta C'_{1,\beta(1)}$，我们得到另一个非退化对称配对 $C''$，且有 $\det(C'') = z\det(C')$。

令 $\alpha$ 为由 $\det(C') = \alpha \cdot C_{\det(V)}$ 确定的 $U^*$ 上的全纯函数。根据上述讨论，我们可以假设 $\alpha$ 在 $U$ 上诱导一个处处不为零的全纯函数。选取 $\alpha$ 的一个 $r$ 次根 $\alpha^{1/r}$，并令 $C = \alpha^{-1/r} C$，即可得到所需的非退化配对 $C$。 ∎

我们可以类似地证明以下引理。

引理 5.27 设 $h_{\det(V^{[k]})}$ 为 $\det(V^{[k]})$ 的平坦度量，满足 $\det(\mathcal{V}^{[k]}) = \mathcal{P}^{h_{\det(V^{[k]})}}(\det(V^{[k]}))$。则存在 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量 $h$，使得 (i) $\det(h^{[k]}) = h_{\det(V^{[k]})}$，(ii) $\mathcal{P}^h(V) = \mathcal{V}$。 ∎

## 5.6 全局情形

### 5.6.1 亚纯延拓和滤过延拓

设 $Y$ 为黎曼曲面，$D$ 为其一个离散子集。令 $\iota_{Y\setminus D}\colon Y\setminus D \to Y$ 表示包含映射。对于 $Y\setminus D$ 上的全纯向量丛 $V$，将 $V$ 到 $(Y,D)$ 的亚纯延拓定义为 $(\iota_{Y\setminus D})_* V$ 的一个局部自由 $\mathcal{O}_Y(*D)$-子模 $\mathcal{V}$，满足 $\mathcal{V}_{|Y\setminus D} = V$。将 $V$ 到 $(Y,D)$ 的滤过延拓定义为一个滤过丛 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$，它位于 $V$ 的亚纯延拓 $\mathcal{V}$ 之上。在这种情形下，我们对非退化对称配对和 Higgs 丛也采用类似的术语。

### 5.6.2 可分解滤过扩张

设 $(V,\theta)$ 是 $Y\setminus D$ 上沿 $D$ 具有野性奇点的正则半单 Higgs 丛。设 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 是从 $(V,\theta)$ 到 $(Y,D)$ 的滤过延拓。

定义 5.28 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 称为 $(V,\theta)$ 的可分解滤过扩张，如果其在任意 $P \in D$ 的某个邻域上的限制都是可分解的。 ∎

下面的引理显然。

引理 5.29 可分解滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 是良好滤过 Higgs 丛。任意分解 $(\mathcal{V},\theta)_{|Y\setminus D} = (V_1,\theta_1) \oplus (V_2,\theta_2)$ 都延拓为分解 $(\mathcal{P}\mathcal{V},\theta) = (\mathcal{P}_*\mathcal{V}_1,\theta_1) \oplus (\mathcal{P}_*\mathcal{V}_2,\theta_2)$。 ∎

我们有线丛 $L_V$，它定义在 $\Sigma_{V,\theta}$ 上，对应于 $(V,\theta)$。令 $\mathbb{P}(T^*Y)$ 为 $T^*Y$ 的射影完备化。令 $Z$ 为 $\Sigma_{V,\theta}\subset T^*(Y\setminus D)$ 在 $\mathbb{P}(T^*Y)$ 中的闭包。令 $\Sigma_{V,\theta}\to Z$ 表示其正规化。我们可以自然地将 $\Sigma_{V,\theta}$ 视为 $\Sigma_{V,\theta}$ 的部分紧化。设 $D=\Sigma_{V,\theta}\setminus\Sigma_{V,\theta}$。态射 $\pi:\Sigma_{V,\theta}\to Y\setminus D$ 唯一地延拓为态射 $\widetilde{\pi}:(\Sigma_{V,\theta},D)\to(Y,D)$。由 $L_V$ 到 $(\Sigma_{V,\theta},D)$ 的亚纯延拓 $\mathcal{L}_V$，我们得到 $(V,\theta)$ 到 $(Y,D)$ 的亚纯延拓 $\widetilde{\pi}_*(\mathcal{L}_V)$。由 $L_V$ 到 $(\Sigma_{V,\theta},D)$ 的滤过延拓 $\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V$，我们得到 $(V,\theta)$ 到 $(Y,D)$ 的可分解滤过延拓 $\widetilde{\pi}_*(\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V)$。下面的命题是命题 5.12 的重新表述。

命题 5.30 上述过程在 $L_V$ 到 $(\Sigma_{V,\theta},D)$ 的滤过延拓（分别为亚纯延拓）与 $(V,\theta)$ 到 $(Y,D)$ 的可分解滤过延拓（分别为亚纯延拓）之间诱导出一个等价。

### 5.6.3 对称积

设 $C$ 是 $(V,\theta)$ 的一个非退化对称配对。我们在整体情形下重述命题 5.15。

命题 5.31 对于 $(V,\theta)$ 上的非退化对称配对 $C$，存在唯一一个与 $C$ 相容的、将 $(V,\theta)$ 亚纯延拓到 $(Y,D)$ 的延拓 $\mathcal{V}^C$。此外，存在唯一一个定义在 $\mathcal{V}^C$ 上、满足以下条件的滤过丛 $\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V}^C)$。

相对于 $\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V}^C)$，

- $C$ 是完美的。
- $\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V}^C)$ 是 $(V,\theta)$ 的一个可分解滤过延拓。

可分解滤过延拓 $\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V}^C)$ 描述如下。设 $C_0$ 是与 $C$ 对应的 $L_V$ 非退化对称配对。存在唯一的 $L_V$ 到 $(\widetilde{\Sigma}_{V,\theta},\widetilde{D})$ 的滤过延拓 $\mathcal{P}^{C_0}_*(\mathcal{L}^{C_0}_V)$。于是，$\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V}^C)=\widetilde{\pi}_*(\mathcal{P}^{C_0}_*(\mathcal{L}^{C_0}_V))$。

### 5.6.4 解耦调和丛

设 $h$ 是 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量。我们在 $(Y,D)$ 上得到良好滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}^h_*V,\theta)$。由引理 5.19 可得以下引理。

引理 5.32 $(\mathcal{P}^h_*V,\theta)$ 是可分解的。

由引理 5.23 可得以下引理。

引理 5.33 对于 $(V,\theta)$ 的非退化对称配对 $C$，有 $\mathcal{P}^{h^C}_*(V)=\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V}^C)$。

## 5.7 解耦调和丛的小林-希钦对应

设 $X$ 为一条紧黎曼曲面。设 $D\subset X$ 为一个有限子集。设 $(V,\theta)$ 是 $X\setminus D$ 上沿 $D$ 野性的正则半单 Higgs 丛。对于 $(V,\theta)$ 的任意解耦调和度量 $h$，我们得到 $(X,D)$ 上的良好滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}^h_*\mathcal{V},\theta)$，它是次数 0 的多重稳定丛。根据引理 5.32，它是可分解的。

反过来，设 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 是 $(X,D)$ 上次数 0 的多重稳定可分解滤过 Higgs 丛，并且 $(V,\theta)=(\mathcal{V},\theta)|_{X\setminus D}$ 是正则半单的。存在一个与 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 相适配的 $(V,\theta)$ 的调和度量 $h$，由 [2, 17, 19] 给出。

命题 5.34 $h$ 是一个解耦调和度量。

证明 只需考虑 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 稳定的情形。根据引理 5.29，$\Sigma_{V,\theta}$ 是连通的。令 $\mathbb{P}(T^*X)^\sim$ 表示 $T^*X$ 的射影完备化。令 $Z$ 表示 $\Sigma_{V,\theta}$ 在 $\mathbb{P}(T^*X)$ 中的闭包。令 $\Sigma_{V,\theta}\to Z$ 表示正规化。令 $\rho:\widetilde{\Sigma}_{V,\theta}\to X$ 表示诱导态射。设 $\widetilde{D}=\rho^{-1}(D)$。令 $L_V$ 为 $\Sigma_{V,\theta}$ 上对应于 $(V,\theta)$ 的线丛。由于 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 是 $(V,\theta)$ 的可分解滤过扩张，存在对应的滤过延拓 $\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V$，它是 $(\Sigma_{V,\theta},D)$ 上 $L_V$ 的滤过延拓。我们有 $\rho_*(\mathcal{P}_*\mathcal{L})=\mathcal{P}_*\mathcal{V}$。根据下文的命题 5.35，我们有 $\deg(\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V)=\deg(\mathcal{P}_*\mathcal{V})=0$。存在一个与 $\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V$ 相适配的 $L_V$ 的平坦度量 $h_{L_V}$。由此得到与 $h_{L_V}$ 对应的 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量 $h_1$，它与 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 相适配。根据稳定性，存在一个正常数 $h=ah_1$，因此 $h$ 也是一个解耦调和度量。

### 5.7.1 次数

设 $\rho\colon X_1 \to X_2$ 是紧黎曼曲面之间的一个非常数态射。令 $D_2 \subset X_2$ 为一个有限子集。设 $D_1 = \rho^{-1}(D_2)$。令 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 为 $(X_1, D_1)$ 上的一个滤过丛。由此得到 $(X_2, D_2)$ 上的一个滤过丛 $\rho_*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$。令 $m(P)$ 表示 $\rho$ 在 $P \in X_1$ 处的分歧指数。

命题 5.35 以下结论成立。

$$\deg(\rho_*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})) = \deg(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) - \frac{\operatorname{rank}\mathcal{V}}{2}\sum_{P\in X_1\setminus D_1}(m(P)-1).$$

证明 我们有 $\mathcal{P}_0(\rho_*\mathcal{V}) = \rho_*(\mathcal{P}_0\mathcal{V})$。根据格罗滕迪克-黎曼-罗赫定理和黎曼-赫尔维茨公式，我们有

$$\deg(\rho_*\mathcal{P}_0\mathcal{V}) = \deg(\mathcal{P}_0\mathcal{V}) - \frac{\operatorname{rank}\mathcal{V}}{2}\sum_{P\in X_1}(m(P)-1).$$

根据 $\rho_*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$ 的构造，我们得到

$$\begin{aligned}\deg(\rho_*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})) &= \deg(\rho_*(\mathcal{P}_0\mathcal{V})) - \sum_{a\in D_1}\sum_{-1<a\leq 0}\sum_{j=0}^{m(P)-1}\left(\frac{a-j}{m(P)}\right)\dim \mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}}(\mathcal{V}_P)\\ &= \deg(\mathcal{P}_0\mathcal{V}) - \frac{\operatorname{rank}\mathcal{V}}{2}\sum_{P\in X_1}(m(P)-1) - \sum_{P\in D_1}\sum_{-1<a\leq 0}\left(a-\frac{1}{2}(m(P)-1)\right)\dim \mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}}(\mathcal{V}_P)\\ &= \deg(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) - \frac{\operatorname{rank}\mathcal{V}}{2}\sum_{P\in X_1\setminus D_1}(m(P)-1). \quad (41)\end{aligned}$$

因此，证毕。∎

注 5.36 若 $X_1 \setminus D_1$ 中没有分歧点，则有 $\deg(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) = \deg(\rho_*\mathcal{P}_*\mathcal{V})$。我们也可以如下证明。设 $h_0$ 是 $\mathcal{V}_{|X_1\setminus D_1}$ 的一个厄米度量，使得 (i) $h_0$ 在 $D_1$ 的任意点附近平坦，(ii) $h_0$ 适配于 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$。令 $R(h_0)$ 为 $h$ 的陈联络的曲率。于是，我们有

$$\deg(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{X_1\setminus D_1}\operatorname{tr} R(h_0).$$

我们有 $\rho_*(\mathcal{V})_{|X_2\setminus D_2}$ 的诱导度量 $\rho_*(h_0)$。它在 $D_2$ 的任意一点附近都是平坦的，并且适配于 $\rho_*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$。因此，我们有

$$\deg(\rho_*(\mathcal{P}_*\mathcal{V})) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{X_2\setminus D_2}\operatorname{tr} R(\rho_*h_0).$$

于是，我们得到 $\deg(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) = \deg(\rho_*\mathcal{P}_*\mathcal{V})$。∎

## 5.8 野解耦调和丛的狄利克雷问题

设 $Y$、$X$、$D$ 和 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ 如 §2.3 所述。

命题 5.37 假设 $(V,\theta)$ 是正则半单的，并且 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V})$ 是可分解滤过扩张。那么，定理 2.8 中的调和度量 $h$ 是解耦的。

证明 只需考虑 $\Sigma_{V,\theta}$ 连通的情形。令 $\Sigma_{V,\theta}$ 为 §5.6.2 中所述的 $\Sigma_{V,\theta}$ 的部分紧化。令 $X$ 和 $D$ 分别表示自然态射 $\Sigma_{V,\theta} \to Y$ 下 $X$ 和 $D$ 的原像。存在线丛 $L_V$，它定义在 $\Sigma_{V,\theta}$ 上，并对应于 $(V,\theta)$。令 $\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V$ 为 $(\Sigma_{V,\theta}, D)$ 上对应于 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ 的滤过线丛。存在 $L_V$ 上的厄米度量 $h_0$，使得 (i) $h_0$ 在 $D$ 的任意点附近平坦，(ii) $h_0$ 适配于 $\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V$，(iii) $h_{0|\partial\widetilde{X}}$ 诱导 $h_{\partial X}$。令 $R(h_0)$ 表示 $(L_V, h_0)$ 的陈联络的曲率。它在 $D$ 附近消失。存在一个定义在 $X$ 上的 $\mathbb{R}$-值 $C^\infty$ 函数 $\alpha$，使得 (i) $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\alpha = R(h_0)_{|\widetilde{X}}$，(ii) $\alpha_{|\partial\widetilde{X}} = 0$。于是，$h_1 = e^{-\alpha}h_0$ 是 $L_{V|\widetilde{X}}$ 的平坦度量，适配于 $\mathcal{P}_*\mathcal{L}_V$，且满足 $h_{1|\partial\widetilde{X}} = h_{0|\partial\widetilde{X}}$。令 $h_2$ 为 $(V,\theta)_{|X\setminus D}$ 对应于 $h_1$ 的解耦调和度量。它适配于 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$，并满足 $h_{2|\partial X} = h_{\partial X}$。由定理 2.8 的唯一性可知，$h = h_2$。

∎

# 6 具有给定边界值的大尺度解

## 6.1 穿孔圆盘上正则半单 Higgs 丛的调和度量

### 6.1.1 一般情形

令 $U$ 为 $\mathbb{C}$ 中 0 的一个邻域。令 $U_0$ 为 $U$ 中 0 的一个相对紧开邻域，其边界 $\partial U_0$ 光滑。设 $U^* = U \setminus \{0\}$ 和 $U_0^* = U_0 \setminus \{0\}$。

设 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ 是 $(U, 0)$ 上秩为 $r$ 的良好滤过 Higgs 丛，且 $(V, \theta) := (\mathcal{V}, \theta)|_{U^*}$ 是正则半单的。设 $h_{\partial U_0}$ 是 $V_{|\partial U_0}$ 的厄米度量。根据定理 2.8，对于任意 $t > 0$，存在唯一的调和度量 $h_t$，对应于 $(V, t\theta)|_{U_0^*}$，使得 $h_{t|\partial U_0} = h_{\partial U_0}$，且 $\mathcal{P}_*^{h_t}(V) = \mathcal{P}_*\mathcal{V}$。注意，对于任意 $t > 0$，$\det(h_t) = \det(h_1)$。

命题 6.1 设 $t(i)$ 是任意一个正数序列，满足 $t(i) \to \infty$。那么，存在一个子序列 $t'(j)$，使得以下结论成立。

- $t'(j) \to \infty$。
- 序列 $h_{t'(j)}$ 在 $U_0^*$ 的 $C^\infty$-意义下，于任意相对紧开子集上收敛到一个调和度量。

极限 $h_\infty$ 是一个 $(V, \theta)$ 的解耦调和度量，使得 $\mathcal{P}^{h_\infty}(V) = \mathcal{V}$ 且 $\det(h_\infty) = \det(h_1)$。

证明 通过如 §5.1.1 中所述沿分歧覆盖映射 $\varphi_\ell$ 作拉回，只需考虑存在亚纯函数 $\gamma(1) \ldots, \gamma(r)$ 定义在 $(U, 0)$ 上，且存在一个分解的情形

$$(\mathcal{V}, \theta) = \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathcal{V}_i, \gamma(i)\, dz).$$

设 $v_i$ 是 $\mathcal{V}_i$ 在 $U$ 上的一个标架，使得 $v_i$ 是 $\mathcal{P}_{<0}\mathcal{V}$的一个截面。

引理 6.2 存在一个常数 $C > 0$，使得对任意 $t > 0$，都有 $h_t(v_i, v_i) \leq C$。

证明 只需考虑 $\gamma(i) = 0$ 的情形。我们有 $\theta(v_i) = 0$。于是，在 $U_0^*$ 上有 $-\partial_z \partial_{\overline{z}} |v_i|_{h_t}^2 \leq 0$（参见引理 4.1] 的证明中的预备 Weitzenb¨ock 公式）。由于 $v_i$ 是 $\mathcal{P}_{<0}\mathcal{V}$ 的截面，对于每个 $t$，$|v_i|_{h_t}^2$ 都有界。因此，$|v_i|_{h_t}^2$ 在 $U_0$ 上是次调和的。由最大值原理可得 $|v_i|_{h_t}^2 \leq \max_{\partial U_0} |v_i|_{h_t}^2 = \max_{\partial U_0} |v_i|_{h_1}^2$。 ∎

令 $\mathcal{V}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_U(*0))$ 表示 $\mathcal{V}$ 的对偶。我们在 $\mathcal{V}^\vee$ 上有诱导的滤过丛 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}^\vee)$。设 $(V^\vee, \theta^\vee) = (\mathcal{V}^\vee, \theta^\vee)|_{U^*}$。$(V^\vee, t\theta^\vee)$ 的诱导调和度量 $h_t^\vee$ 与 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}^\vee)$ 相适配。

存在诱导的分解 $\mathcal{V}^\vee = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{V}_i^\vee$。令 $v_i^\vee$表示 $\mathcal{V}_i^\vee$的截面，使得 $v_i^\vee(v_i) = 1$。存在 $m(i) \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $z^{m(i)} v_i^\vee$是 $\mathcal{P}_{<0}(\mathcal{V}^\vee)$的截面。由引理 6.2，我们得到以下引理。

引理 6.3 存在 $C > 0$，使得对于任意 $t > 0$，$|z|^{2m(i)} h_t^\vee(v_i^\vee, v_i^\vee) \leq C$。 ∎

令 $s_t$ 为由 $h_t = h_1 \cdot s_t$确定的 $V_{|U_0^*}$ 的自同构。设 $K$ 为 $U_0^*$的任意相对紧开子集。由引理 6.2 和引理 6.3，存在 $C_{K,1} > 0$，使得对于任意 $t > 0$，以下结论成立：

$$|s_t|_{h_1} + |s_t^{-1}|_{h_1} \leq C_{K,1}. \tag{42}$$

根据 Simpson 主估计的一种变体（见 [16, 命题 2.3]），存在 $t_{K,1}$,$C_{K,2}$,$C_{K,3} > 0$，使得对于任意 $t > t_{K,1}$ 以及 $V_{\beta(i)}$ 和 $V_{\beta(j)}$ 在 $K$ $(i \neq j)$上的任意局部截面 $u_{\beta(i)}$ 和 $u_{\beta(j)}$，以下结论成立：

$$\left|h_t(u_{\beta(i)}, u_{\beta(j)})\right| \leq C_{K,2} \exp(-C_{K,3} t) |u_{\beta(i)}|_{h_t} \cdot |u_{\beta(j)}|_{h_t}. \tag{43}$$

还存在 $t_{K,\,2}$，$C_{K,\,4}$，$C_{K,\,5} > 0$ 使得对任意 $t > t_{K,\,2}$，在 $K$ 上以下结论成立（见 [16, 定理 2.9]）：

$$\left|R(h_t)\right|_{h_1} \leq C_{K,4} \exp\Big(-C_{K,5} t\Big). \tag{44}$$

由 (42) 和 (44)，可按标准方法得到一个收敛子列 $h_{t'(j)}$ 的存在。由 (43) 和 (44)，其极限是一个解耦调和度量。由引理 6.2，我们得到 $h_\infty(v_i, v_i) \leq C$。因此，$v_i$ 是$\mathcal{P}^{h_\infty}(V)$的截面。这意味着 $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}^{h_\infty}(V)$。由于 $\mathcal{V}$和 $\mathcal{P}^{h_\infty}(V)$ 都是局部自由的 $\mathcal{O}_U(*0)$- 模，我们得到 $\mathcal{V} = \mathcal{P}^{h_\infty}(V)$。 ∎

命题 6.4 设 $h_\infty$ 表示命题 6.1 中某个收敛子列的极限。假设满足以下条件。

- 对于 对于每个 $z_0 \in \partial U_0$， $\theta$ 在 $z_0$ 处的特征分解关于 $h_{\partial U_0}$是正交的。

于是， $h_{\infty|\partial U_0} = h_{\partial U_0}$。

证明 令 $U_1$ 为 $U_0$ 中包含 0 且边界 $\partial U_1$光滑的相对紧开邻域。由于 $h_\infty$ 是解耦调和度量，满足以下条件。

- 对于每个 $z_1 \in \partial U_1$， $\theta$ 在 $z_1$ 处的特征分解关于 $h_\infty$是正交的 .

我们设 $A = U_0 \setminus \overline{U_1}$。由命题 5.37，存在一个解耦调和度量 $h^{(1)}$，使得 $(V, \overline{\partial}_V, \theta)|_A$ 满足$h^{(1)}_{|\partial U_0} = h_{\partial U_0}$且 $h^{(1)}_{|\partial U_1} = h_{\infty|\partial U_1}$。我们注意到，对于任意 $t > 0$， $h^{(1)}$ 都是 $(V, \overline{\partial}_V, t\theta)|_A$ 的调和度量。我们还注意到，$\det(h^{(1)}) = \det(h_1)|_A$，因为 $\det(h^{(1)})|_{\partial A} = \det(h_1)|_{\partial A}$。

设 $s_t$ 由 $h_t = h^{(1)} s_t$ 在 $A$上确定。我们有$-\partial_z \partial_{\overline{z}} \mathrm{Tr}(s_t) \leq 0$。我们有 $s_{t'(j)} \to$ 在 $\partial U_1$ 上的恒等映射，以及 $s_{t'(j)} =$ 在 $\partial U_0$上的恒等映射。因此，我们得到 $\left|\mathrm{Tr}(s_{t'(j)} - \mathrm{id})\right| \to 0$ 当 $t'(j) \to \infty$ 时成立。这就推出了该命题的结论。∎

### 6.1.2 不可约情形

假设谱曲线不可约，即 $\Sigma_{V,\theta}$ 是连通的。按照命题 5.13，由 $\det(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$ 确定可分解滤过丛$\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$，它不一定等于 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V})$。

引理 6.5 设 $h_\infty$ 表示命题 6.1 中一个收敛子列的极限。则有 $\mathcal{P}^{h_\infty}_*(V) = \mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$。

证明 我们有 $\mathcal{P}^{h_\infty} V = \mathcal{V}$。由于 $h_\infty$ 是解耦调和度量， $\mathcal{P}^{h_\infty}_*(\mathcal{V})$ 是可分解的。由于 $\det(h_\infty) = \det(h_1)$，我们得到 $\det(\mathcal{P}^{h_\infty}_* V) = \det(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$。于是，结论由 $\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$ 的唯一性得出。∎

设 $h_0$是 $(V, \overline{\partial}_V, \theta)$ 的任意解耦调和度量，满足 $\mathcal{P}^{h_0}(V) = \mathcal{V}$，且 $\det(h_0)$ 与 $\det(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$ 相适配。根据引理 6.5 证明中的论证，我们可以证明 $\mathcal{P}^{h_0}_*(V) = \mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$。设 $h_t\,(t > 0)$ 是与 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 相适配的 $(V, \overline{\partial}_V, t\theta)$ 的调和度量，并满足 $h_{t|\partial U_0} = h_{0|\partial U_0}$。

命题 6.6 序列 $h_t$ 在 $C^\infty$ 意义下于 $U_0^*$ 的任意相对紧开子集上收敛至 $h_0$，当 $t \to \infty$ 时。

证明 令 $t_i$ 为任意一个满足 $t_i \to \infty$ 且 $h_{t_i}$ 收敛的子序列。令 $h_\infty$ 表示其极限。由命题 6.4，得 $h_{\infty|\partial U_0} = h_{0|\partial U_0}$。我们还有 $\mathcal{P}^{h_\infty}_*(V) = \mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V}) = \mathcal{P}^{h_0}_*(V)$。因此，得到 $h_\infty = h_0$。这意味着当 $t \to \infty$时， $h_t$ 收敛到 $h_0$。∎

### 6.1.3 对称情形

我们不假设谱曲线是不可约的。相反，假设存在一个关于 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ 的完美配对 $C$。存在唯一的解耦调和度量 $h^C$，定义在 $(V, \theta)$ 上，且与 $C$ 相容。与引理 5.23 一样，我们有 $\mathcal{P}^{h^C}_*(V) = \mathcal{P}^C_*\mathcal{V}$。

假设 $h_{\partial U_0}$ 与 $C_{|\partial U_0}$ 相容。那么，由推论 2.9， $h_t (t > 0)$ 与 $C$ 相容。令 $s_t$由 $h_t = h^C s_t$确定。注意，由于与 $C$ 相容，有 $\det(h_t) = \det(h_1) = \det(h^C)$。下面的命题是推论 3.5 的一个特例。

命题 6.7 若 $h_{\partial U_0}$ 与 $C_{|\partial U_0}$相容，则序列 $h_t$ 在任意相对紧子集 $K$ 上按 $C^\infty$ 意义收敛到 $h^C$，其中 $K$ 属于 $U_0^*$。此外，存在 $t(K) > 0$，使得对任意 $\ell \geq 0$，以下结论成立：

- 存在 $C(K, \ell)$ 和 $\epsilon(K, \ell)$，使得 $s_t - \mathrm{id}\ (t \geq t(K))$ 及其直至 $\ell$ 阶的导数的范数均被 $C(K, \ell)\exp(-\epsilon(K, \ell)t)$ 控制。

我们还考虑这样的情形： $h_{\partial U_0}$ 不一定与 $C_{|\partial U_0}$ 相容，但 $\det(h_{\partial U_0})$ 与 $\det(C)|_{\partial U_0}$ 相容。由于 $\det(h_t)$ 在 $U_0$ 上与 $\det(C)$ 相容，我们得到 $\det(h_t) = \det(h_1) = \det(h^C)$。

命题 6.8 设 $h_{t(i)}$ 为一个收敛子列，并设 $h_\infty$ 表示命题 6.1 中的极限。则，$\mathcal{P}^{h_\infty}_*(V) = \mathcal{P}^C_*(\mathcal{V})$。

证明 设 $h'_t$ $(t>0)$ 是 $(V,t\theta)$ 的调和度量，其与 $C$ 相容，并满足 $\det(h'_t)=\det(h_1)$。我们已经证明，序列 $h'_t$ 收敛于 $h^C$。我们有 $\det(h'_t)=\det(h_t)$。设 $s_t$ 是由 $h_t=h'_t s_t$ 确定的自同构。设 $s_\infty$ 由 $h_\infty=h^C s_\infty$ 确定。序列 $s_t$ 收敛于 $s_\infty$。由于 $\det(s_t)=1$，我们有 $\det(s_\infty)=1$。由于 $\mathrm{Tr}(s_t)$ 在 $U_0$ 上是次调和的，我们得到 $\max_{U_0}\mathrm{Tr}(s_t)=\max_{\partial U_0}\mathrm{Tr}(s_t)=\max_{\partial U_0}\mathrm{Tr}(s_1)$。我们得到 $\mathrm{Tr}(s_\infty)$ 有界。因此，$s_\infty$ 和 $s_\infty^{-1}$ 有界，并且我们得到 $\mathcal{P}^{h_\infty}(V)=\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V})$。 ∎

假设对于每个 $z_0\in\partial U_0$，$\theta$ 的特征分解相对于 $h_{\partial U_0}$ 都是正交的。存在 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量 $\widetilde{h}$，使得 $\widetilde{h}_{|\partial U_0}=h_{\partial U_0}$ 和 $\mathcal{P}^{\widetilde{h}}_*(V)=\mathcal{P}^C_*(\mathcal{V})$。

~推论 6.9 序列 $h_t$ 收敛到 $h$。 ∎

## 6.2 Higgs 丛的局部可对称化性

设 $U$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个单连通开子集。设 $D$ 是 $U$ 的一个有限子集。设 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 是 $U^\sim$ 上的一个 Higgs 丛，且 $(V,\theta)=(E,\theta)_{|U\setminus D}$ 是正则半单的。令 $\pi:\Sigma_{E,\theta}\to U$ 表示投影。令 $\rho:\Sigma_{E,\theta}\to\Sigma_{E,\theta}$ 表示 $\Sigma_{E,\theta}$ 的正规化。我们设 $\widetilde{D}=(\pi\circ\rho)^{-1}(D)$。我们假设以下条件成立。

- 存在一个线丛 $L$，其定义在 $\Sigma_{E,\theta}\sim$上，并带有一个同构 $(\pi\circ\rho)_*L\simeq E$。此外，$E$的 Higgs 场 $\theta$ 由 $\rho_*L$上的 $\mathcal{O}_{T^*U}$-作用诱导。

对于任意 $P\in D$，令 $U_P$ 为 $U$ 中 $P$的一个单连通邻域，使得 $U_P\cap D=\{P\}$。我们令$U_P^*=U_P\setminus\{P\}$。存在如下分解

$$(V,\theta)_{|U_P^*}=\bigoplus_{k\in S(P)}(V_P^{[k]},\theta_P^{[k]}) \tag{45}$$

使得 ({v1},{v2}) 的谱曲线线是连通的。由于 $E\simeq(\pi\circ\rho)_*L$，(45) 可延拓至分解 n

$$(E,\theta)_{|U_P^*}=\bigoplus_{i\in S(P)}(E_P^{[k]},\theta_P^{[k]}).$$

令 $h$ 为 $(V,\theta)$ 的一个解耦调和度量。分解 (45) 关于 $h$ 是正交的。令$h_P^{[k]}$ 表示 $h$ 在 $V_P^{[k]}$ 上的限制。我们考虑以下条件。

条件 6.10 $h_P^{[k]}$ 的行列式在 $\det(E_P^{[k]})$ 上诱导一个平坦度量，并且 $\mathcal{P}^hV=E(*D)$ 成立。

命题 6.11 假设在每个 $P\in D$ 处都满足条件 6.10。此外，我们假设 $\Sigma_{E,\theta}$ 的每个 ~ 连通分支都是单连通的。则以下结论成立。

- 存在一个非退化对称配对 $C$，定义在 $(E,\theta)$ 上，使得 $C_{|U\setminus D}$ 与 $h$ 相容。
- 设 $C'$ 是 $(V,\theta)$ 上的一个非退化对称配对，且与 $h$ 相容。则 $C'$ 在 $E$ 上诱导出一个非退化对称配对。

注 6.12 若 $\Sigma_{E,\theta}$ 是 $T^*U$ 的一个单连通复子流形，我们可以将命题 6.11 应用于 $(E,\theta)$。 ∎

### 6.2.1 特殊情形

我们来研究 $D=\{0\}$ 且 $\Sigma_{V,\theta}$ 连通的情形。我们令 $\mathcal{V}=E(*0)$。我们采用 §5.1.1 中的记号。通过在 $\widetilde{\Sigma}_{E,\theta}$ 上选取 $(\pi\circ\rho)^*(z)$ 的一个 $r$ 次方根，我们得到一个全纯同构 $\psi:\widetilde{\Sigma}_{E,\theta}\to U_{(r)}$，使得 $\varphi_r\circ\psi=\pi\circ\rho$。在 $U^{(r)}$ 上存在分解 (40)。存在自然同构$\psi_*(L)(*0)\simeq\mathcal{V}_{\beta(1)}$。令 $E_{\beta(1)}\subset\mathcal{V}_{\beta(1)}$ 表示 $L$ 的像。我们有 $\varphi_{r*}(E_{\beta(1)})=E$。

设 $C_{\beta(1)}:\mathcal{V}_{\beta(1)}\otimes\mathcal{V}_{\beta(1)}\longrightarrow\mathcal{O}_{U^{(r)}}(*0)$ 是一个非退化对称配对。存在态射 $\mathrm{tr}:\varphi_{r*}\mathcal{O}_{U^{(r)}}(*0)\to\mathcal{O}_U(*0)$，如 §2.2.2 所述。我们得到 $\Psi(C_{\beta(1)})=\mathrm{tr}\circ\varphi_{r*}(C_{\beta(1)})$ 在 $\mathcal{V}=\varphi_{r*}(\mathcal{V}_{\beta(1)})$ 上的诱导对称配对。存在一个整数 $k$，使得 $C_{\beta(1)}(E_{\beta(1)}\otimes E_{\beta(1)})=\mathcal{O}_{U^{(r)}}(k\{0\})$。

引理 6.13 $\Psi(C_{\beta(1)})$ 在且仅在 $k\leq r-1$ 时诱导出 $E$ 上的对称配对。该诱导配对在且仅在 $k=r-1$ 时非退化。

证明 存在 $E_{\beta(1)}$的一个生成元 $v$，使得 $C_{\beta(1)}(v,v)=\zeta^{-k}$。元组 $v,\zeta v,\dots,\zeta^{r-1}v$ 诱导出 $E$的一个标架。注意，除非 $j\in r\mathbb{Z}$，否则 $\mathrm{tr}(\zeta^j)=0$。容易看出，$\mathrm{tr}\big(C_{\beta(1)}(\zeta^i v,\zeta^j v)\big)=\mathrm{tr}(\zeta^{i+j-k})$ $(0\le i,j\le r-1)$ 在 0 处全纯，当且仅当 $k\le r-1$；且该诱导配对在 0 处非退化，当且仅当$k=r-1$。∎

设 $C_{0,\beta(1)}$ 是 $\mathcal{V}_{\beta(1)}$ 的非退化对称配对，使得 $C_{0,\beta(1)}(E_{\beta(1)}\otimes E_{\beta(1)})=\mathcal{O}_{U^{(r)}}((r-1)\{0\})$。令 $C_0=\Psi(C_{0,\beta(1)})$，这是 $(E,\theta)$ 上的非退化对称配对。设 $h_0$ 是 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量，且与 $C_0$ 相容。注意，$\det(h_0)$ 与 $\det(C_0)$ 相容，因此它在 $\det(E)$ 上诱导出一个厄米度量。

设 $h_1$ 是 $(V,\theta)$ 的任意解耦调和度量，使得 $\mathcal{P}^{h_1}(V)=\mathcal{V}$，且 $\det(h_1)=\det(h_0)$。根据推论 5.22，存在定义在 $U^{(r)}$ 上的全纯函数 $\gamma_1$，满足 (i) $\varphi_r^*(h_1)|_{V_{\beta(1)}}=\exp(2\,\mathrm{Re}\,\gamma_1)\varphi_r^*(h_0)|_{V_{\beta(1)}}$，(ii) $\sum_{\sigma\in\text{伽罗瓦群}(r)}\sigma^*\gamma_1=0$。令

$$C_{1,\beta(1)}=\exp(2\gamma_1)C_{0,\beta(1)}.$$

这是一个满足 $C_{1,\ \beta(1)}(E_{\beta(1)}\otimes E_{\beta(1)})=\mathcal{O}_{U^{(r)}}((r-1)\{0\})$ 的 $\mathcal{V}_{\beta(1)}$ 非退化对称配对。我们得到 $(E,\theta)$ 的一个非退化对称配对 $C_1=\Psi(C_{1,\ \beta(1)})$，使得 $C_{1|U^*}$ 与 $h_1$ 相容。

设 $h$ 是 $(V,\theta)$ 的任意一个解耦调和度量，满足 $\mathcal{P}^h(V)=\mathcal{V}$，并且 $\det(h)$ 在 $\det(E)$ 上诱导一个平坦度量。存在一个定义在 $U$ 上的全纯函数 $\gamma_2$，使得 $\det(h)=\exp(2\,\mathrm{Re}(\gamma_2))\det(h_1)$。于是，$C=\exp(2\gamma_2)C_1$ 与 $h$ 相容，并在 $E$ 上诱导一个非退化对称配对。

引理 6.14 设 $C'$ 是 $(V,\theta)$ 的一个与 $h$ 相容的非退化对称配对。于是，$C'$ 在 $E$ 上诱导一个非退化对称配对。

证明 存在 $\mathcal{V}_{\beta(1)}$ 的非退化对称配对 $C_{\beta(1)}$ 和 $C'_{\beta(1)}$，使得 $\Psi(C_{\beta(1)})=C$ 且$\Psi(C'_{\beta(1)})=C'$。由于 $C_{\beta(1)}$ 和 $C'_{\beta(1)}$ 都与 $\varphi_r^*(h)|_{V_{\beta(1)}}$相容，存在常数$\alpha$，使得 $|\alpha|=1$，从而$C'_{\beta(1)}=\alpha C_{\beta(1)}$。因此，$C'_{\beta(1)}(E_{\beta(1)}\otimes E_{\beta(1)})=\mathcal{O}_{U^{(r)}}((r-1)\{0\})$，进而 $C'$诱导出 $E$的一个非退化对称配对。∎

### 6.2.2 命题 6.11 的证明

~只需考虑$\Sigma_{V,\ \theta}$ 连通的情形，这意味着$\Sigma_{E,\ \theta}$ 连通。令 $h_L$ 表示与解耦调和度量 $h$相对应的$L_{|\Sigma_{V,\ \theta}}$ 的平坦度量。取 $D$中的任意一点 $P$。根据命题 5.25，存在$V_{|U_P^*}$ 的一个与$h_{|U_P^*}$相容的非退化对称配对。存在 $L$ 在$(\pi\circ\rho)^{-1}(U_P^*)$上的一个与 $h_L$相容的非退化对称配对。因此，~ ~ $h_L$ 的陈联络沿 $D$ 中任意一点的单值化为 1 或 $-1$。由于$\Sigma_{E,\ \theta}$ 单连通，引理 2.7 蕴含存在$L_{|\Sigma_{V,\ \theta}}$ 的非退化对称配对 $C_L$，且与 $h_L$相容。它诱导出$(V,\theta)$上的非退化对称配对 $C$，且与 $h$相容。根据引理 6.14，$C$ 诱导出 $E$的一个非退化对称配对。由此得到命题 6.11 的第一个结论。第二个结论也由引理 6.14 得出。∎

## 6.3 对称情形下的一致估计

### 6.3.1 设定

对于 $R>0$，我们令 $B(R)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<R\}$。设 $\mathcal{S}\subset\mathbb{C}^n$ 是一个连通开子集，且带有基点 $x_0$。设 $\mathcal{Z}_i$ ($i=1,2$) 是 $\mathcal{S}\times\mathbb{C}_{z_i}$的一个开子集。为简单起见，我们假设 $\mathcal{Z}_2=\mathcal{S}\times B(2)$。令 $p_i\colon\mathcal{Z}_i\to\mathcal{S}$ 表示这些投影。我们令 $T^*(\mathcal{Z}_2/\mathcal{S})=\mathcal{S}\times T^*B(2)$。令 $\pi_2\colon T^*(\mathcal{Z}_2/\mathcal{S})\to\mathcal{Z}_2$ 表示该投影。设$\Phi_0\colon\mathcal{Z}_1\to T^*(\mathcal{Z}_2/\mathcal{S})$ 是一个全纯映射，使得 $p_1=p_2\circ\pi_2\circ\Phi_0$。我们令 $\Phi_1:=\pi_2\circ\Phi_0\colon\mathcal{Z}_1\to\mathcal{Z}_2$。我们假设满足以下条件。

- $\Phi_1$ 是适当且有限的。
- 存在一个复解析闭超曲面 $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}\times B(R_1)\subset\mathcal{Z}_2$，对某个 $0<R_1<1$，使得 (i) 诱导映射 $\mathcal{Z}_1\setminus\Phi_1^{-1}(\mathcal{D})\longrightarrow\mathcal{Z}_2\setminus\mathcal{D}$是一个覆盖映射，(ii) $\Phi_0$诱导一个单射 $\mathcal{Z}_1\setminus\Phi_1^{-1}(\mathcal{D})\to T^*(\mathcal{Z}_2\setminus\mathcal{D})$，(iii) $\mathcal{D}\cap(\{x_0\}\times\mathbb{C})=\{(x_0,0)\}$。

对任意 $P\in\mathcal{Z}_2\setminus\mathcal{D}$，我们定义 $r:=|\Phi_1^{-1}(P)|$。我们还定义 $\widetilde{\mathcal{D}}=\Phi_1^{-1}(\mathcal{D})$。

引理 6.15 $\mathcal{E}=\Phi_{1*}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1})$ 是一个秩为 $r$ 的局部自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_2}$-模。

证明 通过对 $\mathcal{Z}_1$ 作局部全纯坐标系变换，只需考虑 $\Phi_1^*(z_2)$ 表示为魏尔斯特拉斯多项式的情形。于是问题归结为 [7, 第二章 §4.2 定理]。∎

注意到 $\mathcal{E} = \pi_{2*}(\Phi_{0*}\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1})$ 自然地是一个 $\pi_{2*}(\mathcal{O}_{T^*(\mathcal{Z}_2/\mathcal{S})})$-模。因此，我们得到相对 Higgs 场 $\theta$： $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^{1}_{\mathcal{Z}_2/\mathcal{S}^\circ}$ 下面的引理由该构造显然可得。

引理 6.16 对 于任意 $P \in \mathcal{Z}_2 \setminus \mathcal{D}$，存在 $P$ 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得在 $\mathcal{Z}_2 \setminus \mathcal{D}$ 中存在一个分解 $on$

$$(\mathcal{E}, \theta)_{|\mathcal{U}} = \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathcal{E}_{P,i}, \theta_{P,i}), \tag{46}$$

其中秩 $\mathcal{E}_{P,i} = 1$，且 $\theta_{P,i} - \theta_{P,j}$ $(i \neq j)$ 处处不消失。∎

~ ~对于任意 $x \in \mathcal{S}$，我们令 $\mathcal{Z}_{i,x} = \mathcal{Z}_i \cap (\{x\} \times \mathbb{C})$、 $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \cap (\{x\} \times \mathbb{C})$ 和 $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \cap (\{x\} \times \mathbb{C})$。注意，对于任意 $x \in \mathcal{S}$，有 $\mathcal{Z}_{2,x} = B(2)$。令 $\iota_x : \mathcal{Z}_{2,x} \to \mathcal{Z}_2$ 表示包含映射。我们在 $\mathcal{Z}_{2,x}$ 上得到 Higgs 丛 $(\mathcal{E}_x, \theta_x) := \iota_x^*(\mathcal{E}, \theta)$，其在 $\mathcal{D}_x$ 之外是正则半单的。

### 6.3.2 对称情形下的一致估计

设 $h_x^\circ$ $(x \in \mathcal{S})$ 是 $(\mathcal{E}_x, \theta_x)_{|B(1)\setminus\mathcal{D}_x}$ 的解耦调和度量，且它们诱导出 $\mathcal{E}_{|\mathcal{Z}_2\setminus\mathcal{D}}$ 的 $C^\infty$-度量。假设如下。

条件 6.17 对每个 $(x, P) \in \mathcal{D}$，条件 6.10 在 $P$ 处对 $(\mathcal{E}_x, \theta_x, h_x^\circ)$ 成立。∎

设 $h_{x,\,t}$ 是 $(\mathcal{E}_x, t\theta_x)_{|B(1)}$ 的调和度量，满足 $h_{x,\,t|\partial B(1)} = h^\circ_{x|\partial B(1)}$。设 $s_{x,\,t}$ 是由 $h_{x,\,t} = h_x^\circ \cdot s_{x,\,t}$ 确定的 $\mathcal{E}_{x|B(1)}$ 的自同构。

命题 6.18 设 $R_1 < R_2 < 1$。设 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的相对紧开子集。则存在 $t_0 > 0$，使得以下结论成立。

- 对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在正实常数 $C(\ell)$ 和 $\epsilon(\ell)$，使得

$$\left|(s_{x,t} - \mathrm{id})_{|B(R_2)\setminus B(R_1)}\right|_{L^2_\ell} \leq C(\ell)\exp(-\epsilon(\ell)t)$$

对于任意 $x \in \mathcal{S}'$ 和任意 $t \geq t_0$。这里，我们考虑相对于 $h_x^\circ$ 和标准欧氏度量 $dz_2\, d\bar{z}_2$ 的 $L^2_\ell$-范数。

证明 对于 $0 < R \leq 2$，我们设 $\mathcal{Z}_{1,\,x}(R) := \Phi_1^{-1}(\{x\} \times B(R)) \subset \mathcal{Z}_{1,\,x}$。

引理 6.19 若 $R_1 < R \leq 2$，$\mathcal{Z}_{1,\,x}(R)$ 的每个连通分支都微分同胚于一个二维圆盘。

证明 考虑情形 $R_1 < R < 2$。我们设 $\mathcal{Z}_1(R) := \Phi_1^{-1}(\mathcal{S} \times B(R)) \subset \mathcal{Z}$。它是一个具有光滑边界的紧致 $C^\infty$-维流形。投影 $\mathcal{Z}_1(R) \to \mathcal{S}$ 是满秩的。$\mathcal{Z}_{1,\,x_0}(R)$ 的每个连通分支都微分同胚于一个圆盘。由于 $\mathcal{S}$ 连通，我们得到 $\mathcal{Z}_{1,\,x}(R)$ 的每个连通分支都微分同胚于一个圆盘。对于 $R_1 < R < 2$，存在一个微分同胚 $\rho_R : B(R) \simeq B(2)$，其在 $B(R_1)$ 上的限制为恒等映射。通过提升 $\rho_R$，我们可以构造一个微分同胚 $\mathcal{Z}_{1,\,x}(R) \simeq \mathcal{Z}_{1,\,x}(2)$。∎

引理 6.20 存在全纯非退化对称配对 $C_x$ $(x \in \mathcal{S})$，其定义在 $(\mathcal{E}_x, \theta_x)$ 上，使得限制 $C_{x|B(1)\setminus\mathcal{D}_x}$ 与 $h_x^\circ$ 相容，并且关于 $x$ 连续。

证明 令 $h^\circ_{0,\,x}$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{1,\,x}\setminus\widetilde{\mathcal{D}}_x}$ 的平坦度量，它们对应于 $h_x^\circ$，并且关于 $x$ 连续。令 $\nabla^\circ_{0,\,x}$ 表示陈联络。它们是平坦联络，并且关于 $x$ 连续。

根据命题 6.11 和引理 6.19，对每个 $x \in \mathcal{S}$，存在定义在 $(\mathcal{E}_x, \theta_x)$ 上的全纯非退化对称配对 $C'_x$，使得限制 $(C'_x)_{|B(1)\setminus\mathcal{D}_x}$ 与 $h_x^\circ$ 相容。令 $C'_{0,\,x}$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{1,\,x}\setminus\widetilde{\mathcal{D}}_x}$ 的全纯非退化对称双线性形式，它对应于 $C'_x$，并与 $h^\circ_{0,\,x}$ 相容。

设 $z_1 \in B(1) \setminus B(R_1)$。存在向量空间 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1|(x,z_1)}$ 的一族连续的非退化对称配对 $C^\circ_{0,(x,z_1)}$，它们与 $(h^\circ_{0,x})_{|z_1}$ 相容。我们得到由 $C^\circ_{0,(x,z_1)} = \alpha_x (C'_{0,x})_{|z_1}$ 确定的 $\alpha_x \in \mathbb{C}^*$。令 $C_{0,x} = \alpha_x C'_{0,x}$。由于 $C_{0,x}$ 是 $\nabla^\circ_{0,x}$-平坦的，它们关于 $x$ 连续。令 $C_x$ 表示与 $C_{0,x}$ 对应的 $(\mathcal{E}_x, \theta_x)$ 的非退化对称配对。（见命题 6.11。）于是，它们满足所需条件。∎

由于 $h_{t,\ x|\partial B(1)} = h^{\circ}_{x|\partial B(1)}$ 与 $C_{x|\partial B(1)}$ 相容，我们得到 $h_{t,\ x}$ 与 $C_x$ 相容。因此，命题 6.18 的结论由定理 3.4 得出。

我们还 如命题 6.18 的证明中所示，由定理 3.4 得到以下命题 .

命题 6.21 设 $R_1 < R_2 < 2$。设 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的相对紧开子集。存在 $t_0 > 0$，使得以下结论成立。

- 设 $h'_{x,\ t}$ 是 $(\mathcal{E}_x, t\theta_x)$ $(x \in \mathcal{S}')$ 的任意调和度量，且与 $C^{\circ}_x$ 相容。设 $s'_{x,\ t}$ 由 $h'_{x,\ t} = h^{\circ}_x \cdot s'_{x,\ t}$ 确定。那么，对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在正实常数 $C(\ell)$ 和 $\epsilon(\ell)$，使得

$$\left|(s'_{x,t} - \mathrm{id})_{|B(R_2)\setminus B(R_1)}\right|_{L^2_\ell} \leq C(\ell)\exp(-\epsilon(\ell)t)$$

对任意 $t \geq t_0$。

### 6.3.3 非退化对称配对与解耦调和度量的例子

我们得到一个全纯函数 $G = \partial_{z_1}(\Phi_1^*(z_2))$。我们有 $G^{-1}(0) \subset \widetilde{\mathcal{D}}$。我们定义对称积 $C_0$： $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1} \longrightarrow G^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1}$ 如下:

$$C_0(a \otimes b) = G^{-1}ab.$$

利用引理 6.13，我们得到以下引理。

引理 6.22 $C_0$ 在 $\mathcal{E}$ 上诱导一个非退化对称配对 $C_1$，由此对任意 $x \in \mathcal{S}$，在 $(\mathcal{E}_x, \theta_x)$ 上诱导一个非退化对称配对。

令 $h_0$ 为 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1\setminus\widetilde{\mathcal{D}}}$ 的平坦度量，定义如下:

$$h_0(a,b) = |G|^{-1}a\overline{b}.$$

引理 6.23 $h_0$ 在 $\mathcal{E}_{|\mathcal{Z}_2\setminus\mathcal{D}}$ 上诱导一个平坦度量 $h_1$。对于每个 $x \in \mathcal{S}$，$(\mathcal{E}_x, \theta_x)|_{\mathcal{Z}_2}$上的诱导度量 $h_{1,\ x\ ,\ x\setminus\mathcal{D}_x}$ 是一个解耦调和度量，并且对于每个 $x \in \mathcal{S}$，$\det(h_{1,\ x})$ 诱导 $\det(\mathcal{E}_x)$ 的一个平坦度量。

注 6.24 我们将在 §7.3 中使用 $h_0$。

# 7 紧黎曼曲面上的大尺度解

## 7.1 局部不可约情形下的收敛

### 7.1.1 陈述

设 $X$ 是一条紧黎曼曲面。令 $\pi\colon T^*X \to X$ 表示投影。对于任意 $A \subset T^*X$，诱导映射 $A \to X$ 也记作 $\pi$。设 $D \subset X$ 是一个有限子集。

设 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ 是 $(X, D)$ 上次数为 0 的良好滤过 Higgs 丛。我们得到 Higgs 丛 $(V, \theta) = (\mathcal{V}, \theta)|_{X\setminus D}$。我们作如下假设。

条件 7.1 $(V, \theta)$ 在 $X \setminus D$ 上是正则半单 Higgs 丛。

注 7.2 若 $(V, \theta)$ 一般正则半单，则存在一个有限子集 $D' \subset X$，使得 $(V', \theta')|_{X\setminus D'}$ 是正则半单的，并且 $D \subset D'$。我们令 $\mathcal{V}' = \mathcal{V}(*D')$。对于每个 $P \in D' \setminus D$，我们考虑由 $\mathcal{P}_a\mathcal{V}'_P = \mathcal{V}_P([a]P)$ 定义在 $\mathcal{V}'_P$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}'_P)$，其中 $[a] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq a\}$。对于适配于 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ 的 $(V, t\theta)$ 的调和度量，只需研究适配于 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}'$ 的 $(V', t\theta')$ 的调和度量。

对于任意 $P \in D$，存在 $P$ 在 $X$ 中的一个邻域 $X_P$，以及亚纯希格斯丛的一个分解

$$(\mathcal{V}, \theta)_{|X_P} = \bigoplus_{i\in S(P)} (\mathcal{V}_{P,i}, \theta_{P,i}), \tag{47}$$

使得 $(\mathcal{V}_{P,\ i},\ \theta_{P,\ i})\ |_{X_P\setminus\{P\}}$ 的谱曲线是连通的。

条件 7.3 我们假设满足以下条件。

- $\Sigma_{V,\ \theta}$ 是连通的。
- 对于任意 $P \in D$，分解 (47) 与 $\mathcal{V}_P$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}_P)$ 相容，即 $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}_P) = \bigoplus_{i\in S(P)} \mathcal{P}_*\big((\mathcal{V}_{P,\ i})_P\big)$。

对于每个 $P \in D$，我们得到由命题 5.13 中的方式通过滤过丛 $\det(\mathcal{P}_*\mathcal{V}_{P,\ i})$ 确定的、$\mathcal{V}_P$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V}_P) = \bigoplus_{i\in S(P)} \mathcal{P}^\star_*\big((\mathcal{V}_{P,\ i})_P\big)$。将 $\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V}_P)$ $(P \in D)$ 与 $\mathcal{V}$ 粘合，便得到一个可分解滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})\ \theta)$。

引理 7.4 $(\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})\ \theta)$ 是稳定的，且次数为 0。因此，存在一个适配于 $\mathcal{P}^\star_*(\mathcal{V})$ 的 $(V,\theta)$ 的解耦调和度量 $h_\infty$。

证明 由于 $\Sigma_{V,\theta}$ 是连通的，$(V,\theta)$ 不存在非平凡的 Higgs 子丛。因此，$(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 是稳定的。由于 $\det(\mathcal{P}^\star_*\mathcal{V}) = \det(\mathcal{P}_*\mathcal{V})$，我们得到 $\deg(\mathcal{P}^\star_*\mathcal{V}) = 0$。第二个结论由命题 5.34 得出。

注意，$\det(h_\infty)$ 是 $\det(V)$ 的平坦度量，且适配于 $\det(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) = \det(\mathcal{P}^\star_*\mathcal{V})$。由于 $\Sigma_{V,\theta}$ 是连通的，$(\mathcal{P}_*\mathcal{V},\theta)$ 如引理 7.4 所述是度数 0 的稳定对象。因此，对于任意 $t > 0$，存在一个调和度量 $h_t$，使得它适配于 $(V,t\theta)$ 和 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$，且 $\det(h_t) = \det(h_\infty)$。

定理 7.5 对任意相对紧开子集 $K \subset X \setminus D$，序列 $h_t$ 在$C^\infty$-意义下收敛到 $h_\infty$。

### 7.1.2 局部与整体不可约 Higgs 丛的情形

为作说明，我们在一个特殊情形下陈述定理 7.5（另见注 7.2）。设 $(E,\overline{\partial}_E,\theta)$ 是 $X$ 上次数为 0 的一般正则半单 Higgs 丛。令 $\Sigma_{E,\ \theta}$ 表示谱曲线。存在有限子集 $D(E,\theta) \subset X$，使得以下结论成立。

- $P \in D(E,\theta)$ 当且仅当 $|T^*_P X \cap \Sigma_{E,\ \theta}| < r$。

我们施加以下条件。

条件 7.6

- $\Sigma_{E,\ \theta}$ 是不可约的，即 $\Sigma_{E,\ \theta} \setminus \pi^{-1}(D(E,\theta))$ 是连通的。
- 对于任意 $P \in D(E,\theta)$，存在 $X$ 中 $P$ 的一个邻域 $X_P$ 以及一个分解 $on$

$$(E,\theta)_{|X_P} = \bigoplus_{i\in S(P)} (E_{P,i},\theta_{P,i}) \tag{48}$$

使得谱曲线 $\Sigma_{E_{P,\ i},\ \theta_{P,\ i}}$ 均不可约。

我们令 $D = D(E,\theta)$。设 $\mathcal{P}^{(0)}_*(E(*D)_P)$ 是 $E(*D)_P$ 上由 $\mathcal{P}^{(0)}_a(E(*D)_P) = E_P([a]P)$ 定义的滤过丛，其中 $[a] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le a\}$。由于存在分解

$$\mathcal{P}^{(0)}_*(E(*D)_P) = \bigoplus_{i\in S(P)} \mathcal{P}^{(0)}_*(E_{P,i}(*D)_P)$$

由 (48) 诱导，我们得到由 $\det(\mathcal{P}^{(0)}_*E_{P,\ i}(*D)_P)$ 确定的滤过丛 $\mathcal{P}^\star_*(E(*D)_P)$，如命题 5.13 所述。将它们与 $(E(*D)\ \theta)$ 拼接后，我们得到 $\mathcal{V} = E(*D)$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}^\star_*\mathcal{V}$。滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}^\star_*(E(*D))\ \theta)$ 是可分解的。

与引理 7.4 中一样，存在一个解耦调和度量 $h_\infty$，它属于 $(E,\theta)_{|X\setminus D}$，且 $h_\infty$ 与 $\mathcal{P}^\star_*\mathcal{V}$相适配。对于任意 $t > 0$，存在唯一的调和度量 $h_t$，它属于 $(E,t\theta)$，并且 $\det(h_t) = \det(h_\infty)$。作为定理 7.5 的一个特例，我们得到如下结果。

推论 7.7 在任意相对紧开子集 $K \subset X \setminus D$ 上，序列 $h_t$ 在$C^\infty$意义下收敛到 $h_\infty$。

注 7.8 如果 $\Sigma_{E,\ \theta}$ 局部不可约，则条件 7.6 中的第二个条件成立。

### 7.1.3 定理 7.5 的证明

设 $P \in D$。记 $X_P^* = X_P \setminus \{P\}$。记 $V_{P,i} = \mathcal{V}_{P,i|X_P^*}$ 和 $r(P,i) =$秩 $V_{P,i}$。设 $z_P$ 是 $X_P$ 的全纯坐标，使得 $X_P \simeq \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 2\}$。记 $(h_\infty)_{P,i} := h_{\infty|V_{P,i}}$。设 $h_{t,P,i}$ 是 $(V_{P,i}, t\theta_{P,i})$ 的调和度量，满足：(i) $|z_P| = 1$ 处的边界值等于 $(h_\infty)_{P,i}$ 的边界值；(ii) $h_{t,P,i}$ 适配于 $\mathcal{P}_* \mathcal{V}_{P,i}$。我们有 $\det(h_{t,P,i}) = \det((h_\infty)_{P,i})$。由命题 6.6 可得以下引理。

引理 7.9 序列 $h_{t,P,i}$ 在任意相对紧开子集 $X_P^*$ 上以 $t \to \infty$ 意义收敛到 $(h_\infty)_{P,i}$。

∎

我们通过 $z_P$ 将 $X_P$ 视为 $\mathbb{C}$ 的一个开子集。令 $\varphi_{P,r(P,i)} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 由 $\varphi_{P,r(P,i)}(\zeta_{P,i}) = \zeta_{P\,i}^{r(P,i)}$, 定义。我们设 $X_P^{(r(P,i))} = \varphi_{P\,r,(P,i)}^{-1}(X_P)$ 和 $X_P^{(r(P,i))*} = \varphi_{P\,r,(P,i)}^{-1}(X_P^*)$。诱导映射 $X_P^{(r(P,i))} \to X_P$ 和 $X_P^{(r(P,i))*} \to X_P^*$ 也记作 $\varphi_{P,r(P,i)}$。

我们如下定义 $\varphi_{P,r(P,i)}^*(V_{P,i})_{|X_P^{(r(P,i))*}}$ 上的厄米内积 $h_{t\,P\,i}^{(r(P,i))}{}_{,,}$。我们有如下分解

$$\varphi_{P,r(P,i)}^*(V_{P,i}, \theta_{P,i})_{|X_P^{(r(P,i))*}} = \bigoplus_{p=1}^{r(P,i)} (V_{P,i,\beta(p)}, \beta(p)\, d\zeta_{P,i}),$$

其中 $\beta(p)$ 是 $X_P^{(r(P,i))}$ 上的亚纯函数。令 $v_{\beta(1)}$ 为 $V_{P,i,\beta(1)}$ 的全纯标架。我们得到 $V_{P,i,\sigma^*\beta(1)}$ 的标架 $v_{\sigma^*\beta(1)} = \sigma^*(v_{\beta(1)})$。令 $\chi(\zeta_{P,i})$ 为一个 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-值函数，使得 (i) $\chi(\zeta_{P,i})$ 仅依赖于 $|\zeta_{P,i}|$，(ii) $\chi(\zeta_{P,i}) = 1$ ($|\zeta_{P,i}| \leq 1/2$)，$\chi(\zeta_{P,i}) = 0$ ($|\zeta_{P,i}| \geq 2/3$)。对于 $p \neq q$，我们定义

$$h_{t,P,i}^{(r(P,i))}(v_{\beta(p)}, v_{\beta(q)}) = \chi(\zeta_{P,i}) \varphi_{P,r(P,i)}^*(h_{t,P,i})(v_{\beta(p)}, v_{\beta(q)}).$$

我们将 $h_{t\,P\,i}^{(r(P,i))}{}_{,,}(v_{\beta(p)}, v_{\beta(p)})$ 定义为

$$\log h_{t,P,i}^{(r(P,i))}(v_{\beta(p)}, v_{\beta(p)}) = \chi(\zeta_{P,i}) \log \varphi_{P,r(P)}^*(h_{t,P,i})(v_{\beta(p)}, v_{\beta(p)}) + (1 - \chi(\zeta(P,i))) \log \varphi_{P,r(P)}^*\big((h_\infty)_{P,i}^{(r(P,i))}\big)(v_{\beta(p)}, v_{\beta(p)}). \quad (49)$$

那么，$h_{t\,P\,i}^{(r(P,i))}{}_{,,}$ 在 $\mathrm{Gal}(r(P,i))$ 作用下不变，并且在 $\{0 < |\zeta_{P,i}| < 1/4\}$ 上有 $h_{t\,P}^{(r(P,i))}{}_{,,i} = \varphi_{P\,r}^{-1}{}_{(P,i)}(h_{t,P,i})$，在 $\{4/5 < |\zeta_{P,i}|\}$ 上有 $h_{t\,P}^{(r(P,i))}{}_{,,i} = \varphi_{P\,r}^{-1}{}_{(P,i)}\big((h_\infty)_{P,i}\big)$。存在 $V_{P,i}$ 的厄米度量 $\widetilde{h}_{t,P,i}$，使得在 $X_P^{(r(P,i))*}$ 上有 $\varphi_{P\,r}^{-1}{}_{(P,i)}(\widetilde{h}_{t,P,i}) = h_{t\,P\,i}^{(r(P,i))}{}_{,,}$。我们得到一个厄米度量

$$\widetilde{h}_{t,P} = \bigoplus_{i \in S(P)} \widetilde{h}_{t,P,i}$$

$\widetilde{V}_{|X_P^*}$的。通过拼接$h_{t,\ P}$和 $h_\infty$，我们得到 $V$的厄米度量 $h'_t$。我们得到由 $\det(\widetilde{h}'_t) = e^{\alpha_t}\det(h_\infty)$ 确定的 $X \setminus D$上的 $C^\infty$函数 $\alpha_t$。我们设 $\widetilde{h}_t = e^{-\alpha_t/r}\widetilde{h}'_t$。由构造可知，下面的引理显然成立。

引理 7.10 存在 $\widetilde{}$存在 $t_0$，使得对任意 $t \geq t_0$，$h_t$ 都是正定的。此外，以下结论成立 .

- 序列 $h_t$ 在 $X \setminus \widetilde{D}$的任意相对紧开子集上以 $C^\infty$意义收敛到 $h_\infty$。$R(\widetilde{h}_t) + [t\theta, (t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_t}]$的支撑包含于 $P \in D$时的 $\{(\frac{1}{4})^{秩(E)} \leq |z_P| \leq \frac{4}{5}\}$中。特别地，

$$\int_X \Big| R(\widetilde{h}_t) + [t\theta, (t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_t}] \Big|_{\widetilde{h}_t, g_X} \to 0 \quad (50)$$

当 $t \to \infty$时。

∎

令 $\widetilde{}$ $g_X$ 为 $X$的一个 K¨ahler 度量。令 $s_t$ 表示由 $h_t = h_t s_t$确定的 $V$ 的自同构。我们有 $\det(s_t) = 1$。根据 [18, 引理 3.1], , 我们在 $X \setminus D$上得到如下结果:

$$\Delta_{g_X} \mathrm{Tr}(s_t) = \mathrm{Tr}\Big( \big( R(\widetilde{h}_t) + [t\theta, (t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_t}] \big) s_t \Big) - \big| \overline{\partial}(s_t) s_t^{-1/2} \big|^2_{\widetilde{h}_t, g_X} - \big| [t\theta, s_t] s^{-1/2} \big|^2_{\widetilde{h}_t, g_X}. \quad (51)$$

注意，对于任意 $P \in D$，$\bigoplus_{i\in S(P)} h_{t,P,i}$ 和 $h_{t|X_P^*}$ 相互有界。因此，$\mathrm{Tr}(s_t)$有界。我们还注意到以下消失结果（参见引理 [17, 引理 4.7]）：

$$\int_X \Delta_X \operatorname{Tr}(s_t)\,\mathrm{dvol}_{g_X} = 0. \tag{52}$$

我们令 $b_t = \sup^{X\setminus D}\mathrm{Tr}(s_t)$。注意到 $b_t \geq \mathrm{rank}(E)$，且当且仅当 $s_t = \mathrm{id}_E$ 时，$b_t = \mathrm{rank}(E)$。我们令 $u_t = b_t^{-1}\cdot s_t$。存在与 $t$ 无关的 $C>0$，使得 $|u_t|_{\widetilde{h}_t} \leq C$。由 (50)、(51) 和 (52) 可得

$$\int_X \Big( |\overline{\partial} u_t|^2_{\widetilde{h}_t} + |[t\theta, u_t]|^2_{\widetilde{h}_t} \Big) \to 0$$

当 $t\to\infty$ 时。

设 $t(i) > 0$ 是一个序列，使得 $t(i) \to \infty$ 当 $i\to\infty$ 时成立。取一个子序列后，$u_{t(i)}$ 在 $X\setminus D$ 上局部弱收敛于 $L^2_1$。特别地，对于任意 $q\geq 1$，它在 $X\setminus D$ 上局部收敛于 $L^q$。令 $u_\infty$ 表示满足 $\overline{\partial} u_\infty = [\theta, u_\infty] = 0$ 的极限。

引理 7.11 $u_\infty \neq 0$。

证明 注意到对于任意 $i$，$\sup_X \mathrm{Tr}(u_{t(i)}) = 1$。令 $0<\epsilon<1$。令 $P_i \in X$ 为满足 $\mathrm{Tr}(u_t)(P_i) \geq \epsilon$ 的点。取一个子序列后，我们可以假设该序列收敛到一点 $P_\infty$。考虑以下情形

$$P_\infty \notin \bigcup_{P\in D} \{|z_P| \leq 4/5\} =: W.$$

设 $(X_{P_\infty}, z)$ 是 $P_\infty$ 附近的一个全纯坐标邻域，且不与 $W$ 相交。由于 $\sim F(h_t) = 0$ 在 $X_{P_\infty}$ 上成立，我们得到 $\Delta_{g_X} \mathrm{Tr}(u_t) \leq 0$。根据次调和函数的平均值性质，存在 $C>0$ 使得

$$C\epsilon \leq \int_{X_{P_\infty}} \operatorname{Tr}(u_{t(i)}).$$

由于对于 $X_{P_\infty}$ 上任意的 $p\geq 1$，$u_{t(i)}$ 在 $L^p$ 中收敛到 $u_\infty$，我们得到 $u_\infty \neq 0$。

考虑对某个 $P\in D$ 有 $P_\infty \in \{|z_P| < 4/5\}$ 的情形。设 $(X_P, z_P)$ 是上所述的 $P$ 附近的一个全纯坐标邻域。根据引理 3.1], ，我们有

$$\Delta_{g_X} \log \operatorname{Tr}(u_{t(i)}) \leq \Big| R(\widetilde{h}_{t(i)}) + [t\theta, (t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_{t(i)}}] \Big|_{\widetilde{h}_{t(i)}, g_X}.$$

存在 $C^\infty$-函数 $\alpha_i$，定义在 $X_P$ 上，使得 (i) $\Delta_{g_X}\alpha_i = \Big| R(\widetilde{h}_{t(i)}) + [t\theta, (t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_{t(i)}}] \Big|_{\widetilde{h}_{t(i)},\, g_X}$，(ii) $\alpha_{i|\partial X_P} = 0$，存在 $C>0$ 使得 (iii) 对于任意 $i$，$|\alpha_i| \leq C$。由于 $\log \mathrm{Tr}(u_{t(i)}) - \alpha_i$ 是定义在 $X_P$ 上的次调和函数，最大值原理使我们可以得到

$$\log\epsilon - C \leq \max_{P\in\partial X_P} \big\{ \log \operatorname{Tr}(u_{t(i)}) - \alpha_i \big\} = \max_{P\in\partial X_P} \big\{ \log \operatorname{Tr}(u_{t(i)}) \big\}.$$

因此，存在一个序列 $P_i' \in \partial X_P$，使得 $\mathrm{Tr}(u_{t(i)})(P_i') \geq \epsilon e^{-C}$。取一个子序列后，不妨设序列 $P_i'$ 收敛于 $P_\infty' \in X\setminus W$。于是，我们可以应用本证明第一部分中的结果。 ∎

回忆一下，$u_\infty \neq 0$ 是$(V,\theta)$的一个自同态，满足 $\overline{\partial} u_\infty = [\theta, u_\infty] = 0$。在 $X\setminus D$的每一点，$\theta$ 的一个$\widetilde{}$特征子空间也是 $u_\infty$的一个特征子空间。由于每个$u_{t(i)}$ 都关于 $h_t$自伴，因此 $u_\infty$ 也关于 $h_\infty\widetilde{}$自伴。我们得到 $\partial_{h_\infty} u_\infty = 0$。因此，$u_\infty$的特征值是常数。由于对于 $V$的任意局部截面 $v$，都有 $h_t(u_{t(i)}v, v) \geq 0$，我们得到 $h_\infty(u_\infty v, v) \geq 0$，这意味着 $u_\infty$ 的特征值非负。我们还注意到$\Sigma_{V,\,\theta}$ 是连通的。因此，$u_\infty$ 是正的常数乘法。这意味着序列 $b_t$ 有界，并且子序列$s_{t(i)}$ 收敛到一个正的常数乘法。由于$\det(s_t) = 1$，其极限是恒等映射。由于这一结论与子序列的选择无关，我们得到所需的收敛。 ∎

## 7.2 光滑情形下的收敛阶

### 7.2.1 粗略陈述

让我们研究收敛阶 在§7.1.2的情形下，假设满足以下更强条件时的收敛 .

条件 7.12 设 $\rho:\Sigma_{E,\theta}\to\Sigma_{E,\theta}$ 为正规化。存在一个线丛 $L$ 于 $\Sigma_{E,\theta}$，并带有一个同构 $(\pi\circ\rho)_*L\simeq E$，使得 $\theta$ 由 $\rho_*L$ 上的 $\mathcal{O}_{T^*X}$-作用诱导。

分别以 $g(\Sigma_{E,\theta})$ 和 $g(X)$ 表示 $\Sigma_{E,\theta}$ 和 $X$ 的亏格。那么，$\deg(L)=g(\Sigma_{E,\theta})-rg(X)+r-1$。

注 7.13 若满足条件 7.12，则也满足条件 7.6。若 $\Sigma_{E,\theta}$ 光滑且连通，则满足条件 7.12。 ∎

我们定义 $(V,\theta)=(E,\theta)|_{X\setminus D}$。令 $s(h_\infty,h_t)$ 为由 $h_t=h_\infty\cdot s(h_\infty,h_t)$ 确定的 $V$ 的自同构。令 $g_X$ 为 $X$ 上的 Kähler 度量。

定理 7.14 对于 $X\setminus D$ 的任意相对紧开子集 $K$ 以及任意非负整数 $\ell$，存在正实常数 $C(K,\ell)$ 和 $\epsilon(k,\ell)$，使得 $s(h_\infty,h_t)-\mathrm{id}_E$ 在 $K$ 上关于 $h_\infty$ 和 $g_X$ 的 $L^2_\ell$-范数由 $C(K,\ell)e^{-\epsilon(k,\ell)t}$ 控制。

### 7.2.2 精化陈述

我们将证明一个精化陈述。为此，我们对定理 7.5 的证明中的 $h_t$ 构造进行精化。令 $P\in D$ 和 $i\in S(P)$。

引理 7.15 $\det((h_\infty)_{P,i})$ 诱导出 $\det(E_{P,i})$ 的平坦度量。

证明 由条件可知，$\det((h_\infty)_{P,i})$ 与 $\det\mathcal{P}^\star_*(E_{P,i}(*D)_P)=\det\mathcal{P}^{(0)}_*(E_{P,i}(*D)_P)$ 相适配。 ∎

根据命题 6.11，存在一个非退化对称配对 $C_{P,i}$，定义在 $(E_{P,i},\theta_{P,i})$ 上，使得 $C_{P,i|X^*_P}$ 与 $(h_\infty)_{P,i}$ 相容。对于 $t>0$，存在一个调和度量 $h_{t,P,i}$，定义在 $(E_{P,i},\theta_{P,i})$ 上，它与 $C_{P,i}$ 相容，且其在 $\partial X_P$ 处的边界值等于 $h_{\infty|E_{P,i}}$ 的边界值。我们按照定理 7.5 的证明（见 §7.1.3），利用 $h_{t,P,i}$ 构造度量 $h_t$。由命题 6.7，以下结论成立。

引理 7.16 设 $s(h_\infty,h_t)$ 是由 $h_t=h_\infty\cdot s(h_\infty,h_t)$ 确定的 $E_{|X\setminus D}$ 的自同构。对于 $X^*_P$ 的任意相对紧开子集 $K$ 以及任意 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在 $C(K,\ell)$ $\epsilon(K,\ell)$ $t(K)>0$，使得相对于 $h_\infty$ 和 $g_X$，$s(h_\infty,h_t)-\mathrm{id}$ 在 $K$ 上的 $L^2_\ell$-范数被 $C(K,\ell)\exp(-\epsilon(K,\ell)t)$ 控制，其中任意 $t>t(K)$ 均成立。∎

由引理 7.16，我们得到

$$\left|R(\widetilde{h}_t)+[t\theta,(t\theta)^\dagger_{\widetilde{h}_t}]\right|_{\widetilde{h}_t,g_X}\leq Ce^{-\epsilon t}. \tag{53}$$

对于某些 $\epsilon$、$C>0$。此外，由构造可知，(53) 的支撑包含于 $\bigcup_{P\in D}\{(1/4)^{\mathrm{rank}(E)}\leq|z_P|\leq 4/5\}$。

令 $s_t$ 为由引理 7.16 和以下定理可得定理 7.14。

定理 7.17 对任意 $\ell>0$，存在 $C(\ell)$ $\epsilon(\ell)>0$，使得 $L^2_\ell$-范数在 $X$ 上相对于 $g_X$ 和 $h_t$ 的 $s_t-\mathrm{id}$ 由 $C(\ell)\exp(-\epsilon(\ell)t)$ 控制。

证明 由 [18, 引理 3.1] 和 (53)，存在 $C_1$、$\epsilon_1>0$，使得

$$\int_X\left(\left|s_t^{-1/2}\partial_{E,\widetilde{h}_t}(s_t)\right|^2_{\widetilde{h}_t}+\left|[\theta,s_t]s_t^{-1/2}\right|^2_{\widetilde{h}_t}\right)\leq C_1\exp(-\epsilon_1 t).$$

根据推论 7.7，$|s_t|_{\widetilde{h}_t}$ 和 $|s_t^{-1}|_{\widetilde{h}_t}$ 一致有界。存在 $C_2$、$\epsilon_2>0$，使得

$$\int_X\left(\left|\partial_{E,\widetilde{h}_t}(s_t)\right|^2_{\widetilde{h}_t}+\left|[\theta,s_t]\right|^2_{\widetilde{h}_t}\right)\leq C_2\exp(-\epsilon_2 t). \tag{54}$$

令 $K$ 为 $X \setminus D$的一个相对紧开子集。根据 Simpson 主估计的变体（[16, 定理 2.9]）和引理 7.16，存在 $C_3$（$K$） $\epsilon_3$（$K$） $>0$，使得以下结论在 $K$上成立：

$$\left|\overline{\partial}_E\left(s_t^{-1}\partial_{E,\widetilde{h}_t}(s_t)\right)\right|^2_{\widetilde{h}_t} \leq C_3(K)\exp(-\epsilon_3(K)t).$$

结合 (54)，我们得到存在 $C_4(K)$ $\epsilon_4(K)$ $>0$，使得以下结论在 $K$ 上成立：

$$\left|\partial_{E,\widetilde{h}_t}(s_t)\right|_{\widetilde{h}_t} \leq C_4(K)\exp(-\epsilon_4(K)t). \tag{55}$$

由于 $s_t$ 关于 $h_t$ 是自伴的，我们得到以下结论在 $K$ 上成立：

$$\left|\overline{\partial}(s_t)\right|_{\widetilde{h}_t} \leq C_4(K)\exp(-\epsilon_4(K)t). \tag{56}$$

引理 7.18 存在 $C(K)$ $\epsilon(K)$ $>0$，使得以下结论在 $K$ 上成立：

$$\left|s_t - \mathrm{id}\right|_{\widetilde{h}_t} \leq C(K)\exp(-\epsilon(K)t).$$

证明 设 $P$ 是 $X \setminus D$ 中任意一点。设 $X_P$ 是 $X \setminus D$ 中 $P$ 的一个单连通邻域。存在一个由秩 1 Higgs 丛构成的分解：

$$(E,\theta)_{|X_P} = \bigoplus_{i=1}^{\mathrm{rank}(E)} (E_{P,i},\theta_{P,i}).$$

我们得到分解 $s_t = \sum(s_t)_{j,i}$，其中 $(s_t)_{j,i} : E_{P,i} \to E_{P,j}$。根据 [16, 命题 2.3], ，存在$C_5(P)$ $\epsilon_5(P)$ $>0$，使得以下结论对于 $i \neq j$ 在 $X_P$ 上成立：

$$\left|(s_t)_{j,i}\right|_{\widetilde{h}_t} \leq C_5(P)\exp(-\epsilon_5(P)t). \tag{57}$$

由 (55) 和 (56)，存在 $C_6(P)$ $\epsilon_6(P)$ $>0$，使得

$$\left|d(s_t)_{i,i}\right| \leq C_6(P)\exp(-\epsilon_6(P)t).$$

因此，存在 $C_7(P)$ $\epsilon_7(P)$ $>0$，使得对任意 $P_1, P_2 \in X_P$，以下结论成立：

$$\left|(s_t)_{i,i}(P_1) - (s_t)_{i,i}(P_2)\right| \leq C_7(P)\exp(-\epsilon_7(P)t).$$

设 $i \neq j$。存在一个环路 $\gamma$，位于 $X \setminus D$ 中，使得 $\Sigma_{E,\,\theta}$ 沿着 $\gamma$ 的单值化交换 $E_i$ 和 $E_j$。通过用相对紧开子集有限覆盖 $\gamma$，并应用上述考虑，我们得到存在 $C_8(P)$ $\epsilon_8(P)$ $>0$，使得对任意 $P_1 \in X_P$，以下结论成立：

$$\left|(s_t)_{i,i}(P_1) - (s_t)_{j,j}(P_1)\right| \leq C_8(P)\exp(-\epsilon_8(P)t). \tag{58}$$

由 (57)，存在 $C_9(P)$ $\epsilon_9(P)$ $>0$，使得以下结论在 $X_P$ 上成立：

$$\left|\prod_{i=1}^{\mathrm{rank}(E)} (s_t)_{i,i} - 1\right| \leq C_9(P)\exp(-\epsilon_9(P)t). \tag{59}$$

由 (58) 和 (59)，存在 $C_{10}(P)$ $\epsilon_{10}(P)$ $>0$，使得

$$\left|(s_t)_{i,i} - 1\right| \leq C_{10}(P)\exp(-\epsilon_{10}(P)t).$$

于是，我们得到了引理 7.18 的结论。 ∎

利用定理 4.3，我们得到 $|s_t - \mathrm{id}|_{\widetilde{h}_t}$ 在 $D$ 附近的估计。利用定理 4.3，我们还可以得到高阶导数的估计。

∎

## 7.3 族情形

### 7.3.1 设定

设 $\mathcal{S}$ 是一个连通复流形。设 $\mathcal{Y}$ 是一个复流形，且有一个适当光滑态射 $p_1\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{S}$。令 $p_2\colon \mathcal{S}\times X\to\mathcal{S}$和 $\pi_2\colon \mathcal{S}\times T^*X\to\mathcal{S}\times X$表示投影。设 $\Phi_0\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{S}\times T^*X$是一个全纯映射，使得 $p_1=p_2\circ\pi_2\circ\Phi_0$。令 $\Phi_1=\pi_2\circ\Phi_0$。我们假设以下条件。

- 的每个纤维 $p_1$ 均为连通的且为 1 维。
- $\Phi_1$ 是适当且有限的。
- 存在一个闭复解析超曲面 $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}\times X$，使得：(i) $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{S}$上有限；(ii) 所诱导的映射 $\mathcal{Y}\setminus\Phi_1^{-1}(\mathcal{D})\to(\mathcal{S}\times X)\setminus\mathcal{D}$ 是一个覆盖映射；(iii) $\Phi_0$ 诱导一个单射 $\mathcal{Y}\setminus\Phi_1^{-1}(\mathcal{D})\longrightarrow\mathcal{S}\times T^*X$。

对于任意的 $P\in(\mathcal{S}\times X)\setminus\mathcal{D}$，我们设 $r:=|\Phi_1^{-1}(P)|$。我们设 $\widetilde{\mathcal{D}}:=\Phi_1^{-1}(\mathcal{D})$。对于任意 $x\in\mathcal{S}$，我们设 $\mathcal{Y}_x:=p_1^{-1}(x)$，$\widetilde{\mathcal{D}}_x:=\mathcal{Y}_x\cap\widetilde{\mathcal{D}}$ 以及 $\mathcal{D}_x:=p_2^{-1}(x)\cap\mathcal{D}$。令 $g(X)$ 表示 $X$的亏格。令 $\widetilde{g}$ 表示 $\mathcal{Y}_x$的亏格，它与 $x\in\mathcal{S}$无关。

设 $\mathcal{Y}$ 上的线丛 $\mathcal{L}$ 满足

$$\deg(\mathcal{L}_{|\mathcal{Y}_x})=\widetilde{g}-rg(X)+r-1.$$

我们得 到局部自由的 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}\times X}$-模 $\mathcal{E}=\Phi_{1*}\mathcal{L}$。它配备了相对 Higgs 场

$$\theta:\mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes\Omega^1_{\mathcal{S}\times X/\mathcal{S}}$$

该场由 $\Phi_{0*}\mathcal{L}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}\times T^*X}$-作用诱导。对于任意 $x\in\mathcal{S}$，令 $(\mathcal{E}_x,\theta_x)$ 表示 $X\simeq\{x\}\times X$ 上诱导的 Higgs 丛。由此构造可得以下引理。

引理 7.19 每个 $(\mathcal{E}_x,\theta_x)$ 都是稳定的，且次数为 0。 ∎

### 7.3.2 陈述

我们在 $\mathcal{S}\times X$ 上得到全纯线丛 $\det(\mathcal{E})$。$\det(\mathcal{E})$ 存在一个 $C^\infty$-厄米度量 $h_{\det(\mathcal{E}),\,x}$，使得 $h_{\det(\mathcal{E}),\,x}:=h_{\det(\mathcal{E})|\{x\}\times X}$ 对任意 $x\in\mathcal{S}$ 都是平坦的。

我们在 $(X,\mathcal{D}_x)$ 上有可分解滤过 Higgs 丛 $(\mathcal{P}_*^\star\mathcal{E}_x,\theta_x)$。令 $h_{\infty,\,x}$ 为 $(\mathcal{E}_x,\theta_x)_{|X\setminus\mathcal{D}_x}$ 的解耦调和度量，使得 $\det(h_{\infty,\,x})=h_{\det(\mathcal{E}),\,x}$。

引理 7.20 $h_{\infty,\,x}$ $(x\in\mathcal{S})$ 诱导出 $\mathcal{E}_{|(\mathcal{S}\times X)\setminus\mathcal{D}}$ 的 $C^\infty$-度量。

证明 只需在任意点 $x_0\in\mathcal{S}$ 的邻域内进行局部研究。利用 §6.3.3 中的例子，我们可以构造 $\widetilde{}$一个 $\mathcal{L}_{|\mathcal{Y}\setminus\widetilde{\mathcal{D}}}$ 的 $C^\infty$-厄米度量 $h_0$，使得 (i) $h_0$ 在 $\mathcal{D}$ 附近平坦，(ii) $h_{0|\mathcal{Y}_x\setminus\widetilde{\mathcal{D}}_x}$ 适配于 $\mathcal{P}_*^\star(\mathcal{L}_{|\mathcal{Y}_x})$。利用下面的引理 7.23，我们可以在 $\mathcal{Y}$ 上构造一个 $C^\infty$- 函数 $f$，使得 $h_{1,x}=e^fh_{0,x}$ $(x\in\mathcal{S})$ 是一族平坦度量 $\mathcal{L}_{|\mathcal{Y}_x\setminus\widetilde{\mathcal{D}}_x}$。它诱导出 $(\mathcal{E}_x,\theta_x)_{|X\setminus\mathcal{D}_x}$ 的一族解耦调和度量 $h_{2,x}$，使它们给出 $\mathcal{E}_{|(\mathcal{S}\times X)\setminus\mathcal{D}}$ 的一个 $C^\infty$-厄米度量 $h_2$。注意，$\det(h_{2,x})$ 诱导出 $\det(\mathcal{E}_x,\theta_x)$ 的一个平坦度量。对于每个 $x\in\mathcal{S}$，由于 $\det(h_{2,x})$ 和 $\det(\mathcal{E}_x)$ 的 $h_{\det(\mathcal{E}),x}$ 两者，得到由 $\det(h_{2,x})=\alpha_xh_{\det(\mathcal{E}),x}$ 确定的 $\alpha_x>0$。由于 $\det(h_{2,x})$ $(x\in\mathcal{S})$ 给出 $\det(\mathcal{E})_{|(\mathcal{S}\times X)\setminus\mathcal{D}}$ 的一个 $C^\infty$-度量，我们得到 $\alpha_x$ $(x\in\mathcal{S})$ 在$\mathcal{S}$上给出一个 $C^\infty$-函数。由于 $h_{\infty,x}=e^{-\alpha_x/r}h_{2,x}$，我们得到 $h_{\infty,x}$ 诱导出 $\mathcal{E}_{(\mathcal{S}\times X)\setminus\mathcal{D}}$ 的一个 $C^\infty$-度量。 ∎

设 $h_{t,\,x}$ 是 $(\mathcal{E}_x,t\theta_x)$ 的调和度量，满足 $\det(h_{t,\,x})=h_{\det(\mathcal{E}),\,x_0}$。设 $(V_x,\theta_x):=(\mathcal{E}_x,\theta_x)_{|X\setminus\mathcal{D}_{x_0}}$。我们得到由 $h_{t,\,x}=h_{\infty,\,x}\cdot s(h_{\infty,\,x},h_{t,\,x})$ 确定的 $V_x$ 的自同构 $s(h_{\infty,\,x},h_{t,\,x})$。

定理 7.21 令 $x_0\in\mathcal{S}$。设 $K$ 是 $X\setminus\mathcal{D}_{x_0}$中的任意相对紧开子集。设 $\mathcal{S}_0$ 是 $x_0$ 的一个邻域，使得 $\mathcal{S}_0\times K$ 在 $(\mathcal{S}\times X)\setminus\mathcal{D}$中相对紧。对于任意 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在正实常数 $C(\ell,K)$ 和 $\epsilon(\ell,K)$，使得 $L^2_\ell$范数的 $s(h_{\infty,\,x},h_{t,\,x})-\mathrm{id}$ $(x\in\mathcal{S}_0,t\geq 1)$ 在 $K$上相对于 $h_{\infty,\,x}$和 $g_X$均由 $C(\ell,K)\exp(-\epsilon(\ell,K)t)$ 控制。

### 7.3.3 精化陈述

令 $x_0 \in \mathcal{S}$。对于任意 $P \in \mathcal{D}_{x_0}$，设 $(U_P, z_P)$ 是 $P$在 $X$中的一个单连通全纯坐标邻域，使得 $U_P \cap \mathcal{D}_{x_0} = \{P\}$，且 $z_P$诱导 $(U_P, P) \simeq (B(2), 0)$。此外，我们假设 $z_P$在 $U_P$ 和 $B(2)$ 的闭包的邻域之间诱导一个全纯同构。设 $\mathcal{S}_{1,P}$ 是 $x_0$ 在 $\mathcal{S}$ 中的一个相对紧开邻域，使得

$$\mathcal{D} \cap (\mathcal{S}_{1,P} \times U_P) \subset \mathcal{S}_{1,P} \times \{|z_P| \le (1/4)^{\operatorname{rank} E}\}.$$

令 $\mathcal{S}_1$ 为 $\bigcap_{P \in \mathcal{D}_{x_0}} \mathcal{S}_{1,P}$ 中 $x_0$ 的一个连通开邻域。

对于 $P \in \mathcal{D}_{x_0}$ 和 $x \in \mathcal{S}_1$，令 $h_{t,P,x}$ 为 $(\mathcal{E}_x, \theta_x)|_{\{|z_P|<1\}}$ 的调和度量，使得 $h_{t,P,x}|_{\{|z_P|=1\}} = h_{\infty,x}|_{\{|z_P|=1\}}$。注意，根据引理 7.15，$h_{\infty,x|U_P}$ 满足条件 6.17，因此我们可以将命题 6.18 应用于 $h_{t,P,x}$。按照 §7.1.3 中的方法，由 $h_{\infty,x}$ 和 $h_{t,P,x}$ $(P \in \mathcal{D}_{x_0})$ 构造 $\mathcal{E}_x$ $(x \in \mathcal{S}_1)$ 的厄米度量 $h_{t,x}$。令 $s(h_{t,x}, h_{t,x})$ 为由 $h_{t,x} = h_{t,x} \cdot s(h_{t,x}, h_{t,x})$ 确定的 $\mathcal{E}_x$ 的自同构。通过使用命题 6.18，我们以与定理 7.14 相同的方式得到以下定理，它蕴含定理 7.21。

定理 7.22　　对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，存在正实常数 $C(\ell)$ 和 $\epsilon(\ell)$，使得以下对象的 $L^2_\ell$-范数

$$s(\widetilde{h}_{t,x}, h_{t,x}) - \mathrm{id} \quad (x \in \mathcal{S}_1, t \ge 1)$$

~关于 $h_{t,x}$ 和 $g_X$ 均由 $C(\ell)\exp(-\epsilon(\ell)t)$ 控制。 ∎

### 7.3.4 附录

设 $M$ 是一个紧致定向 $C^\infty$-流形。设 $S$ 是一个 $C^\infty$-流形。设 $g_{S\times M}$ 是 $S \times M$ 的黎曼度量。对每个 $x \in S$，定义 $M_x := \{x\} \times M$。令 $g_x$ 和 $\Delta_x$ 分别表示 $M_x$ 的诱导黎曼度量和相应的拉普拉斯算子。

引理 7.23 设 $f_1$ 是 $S \times M$ 上满足 $\int_{M_x} f_1 \mathrm{dvol}_{g_x} = 0$ 的一个 $C^\infty$-函数。设 $f_2$ 是由条件 $\Delta_x(f_{2|M_x}) = f_{1|M_x}$ 和 $\int_{M_x} f_{2|M_x}\,\mathrm{dvol}_{g_x} = 0$ 确定的 $S \times M$ 上的函数。那么，$f_2$ 是 $C^\infty$。

证明 我们这里只给出证明的简要概述。对于任意 $x \in S$，令 $f_{i,x} := f_{i|M_x}$。令 $S_0$ 为 $S$ 中的一个相对紧开子集。算子 $\Delta_x$ $(x \in S_0)$的首个非零特征值存在一个一致下界（见 [10, 定理 5.7]）。存在 $C_0 > 0$ 使得 $\|f_{1,x}\|_{L^2} \le C_0$ $(x \in S_0)$。由 $\Delta_x(f_{1,x}) = f_{2,x}$，对于任意$\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，存在 $C_1(\ell) > 0$，使得对于任意 $x \in S_0$，$\|f_{1,x}\|_{L^2_\ell} \le C_1(\ell)$。令 $x(i) \in S_0$ 为一个收敛到 $x(\infty) \in S_0$的序列。存在一个子序列 $x'(j)$ 收敛到 $x(\infty)$，使得对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，序列 $f_{1,x'(j)}$ 在 $L^2_\ell$ 中弱收敛。极限 $f_\infty$ 满足 $\Delta(f_\infty) = f_{2,x(\infty)}$ 和 $\int_{M_{x(\infty)}} f_\infty \mathrm{dvol}_{g_{x(\infty)}} = 0$。我们得到$f_\infty = f_{1,x(\infty)}$。因此，$f_{1,x}$ 及其在 $M$方向上的导数关于 $x \in S$连续。

设 $S_1$ 是 $S$ 的相对紧开子集，并配备坐标系（$x_1, \ldots, x_n$）。设 $[\partial_j, \Delta_x]$ 是定义在 $S_1 \times M$ 上的微分算子，其定义为 $[\partial_j, \Delta_x](f) = \partial_j(\Delta_x(f)) - \Delta_x(\partial_j f)$。它不包含关于 $S_1$ 方向的导数。注意，$[\partial_j, \Delta_x](f_{1,x})$ 及其关于 $M$ 方向的导数关于 $x \in S_1$ 是连续的。设 $f_{1\,x}^{(j)}$ 是条件 $\Delta_x(f_{(j)\,1,x}) = \partial_j f_{2,x} - [\partial_j, \Delta_x] f_{2,x}$ 和 $\int_{M_x} f_{(j)\,1,x}\,\mathrm{dvol}_{g_x} = 0$ 的解。选取 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S_1$。我们在 $M_x$ 上定义函数 $F_x^{(j)}$：当 $x_j \ne y_j$ 时，$F(j)_x = (x_j - y_j)^{-1}(f_{1,x} - f_{1,y})$；当 $x_j = y_j$ 时，$F(j)_x = f_{1\,x}^{(j)}$。它满足：当 $x_j \ne y_j$ 时，$\Delta_x(F(j)_x) = (x_j - y_j)^{-1}(f_{2,x} - f_{2,y} - (\Delta_x - \Delta_y)f_{1,y})$；当 $x_j = y_j$ 时，$\Delta_x(F^{(j)}_x) = \partial_j f_{2,x} - [\partial_j, \Delta_x] f_{2,x}$。于是，利用上一段中的论证，我们可以证明 $F(j)_x$ 及其关于 $M$ 方向的导数关于 $x$ 是连续的。这意味着 $f_{1,x}$ 关于 $x$ 是 $C^1$ 的，并且 $\partial_j f_{1,x} = f_{1\,x}^{(j)}$。通过类似的论证，我们可以证明 $f_{1,x}$ 及其关于 $M$ 方向的导数关于 $x$ 是 $C^\infty$ 的。

∎

# 参考文献

[1] A. Beauville, M. S. Narasimhan, S. Ramanan，谱曲线与广义 theta 除子，《纯粹与应用数学杂志》398（1989），169–179。[2] O. Biquard, P. Boalch，曲线上的野非阿贝尔霍奇理论，《组合数学》140（2004），179–204。[3] B. Collier, Q. Li，Hitchin 分支中 Higgs 丛的渐近行为。《数学进展》307（2017），488–558。

[4] S. K. Donaldson，杨-米尔斯场的边界值问题，《几何与物理杂志》8（1992），89–122。[5] L. Fredrickson，SL($n,\mathbb{C}$)-Higgs 丛模空间的一般端，arXiv:1810.01556（版本 1）。[6] D. Gaiotto, G.W. Moore, A. Neitzke，通过三维场论实现四维墙穿越。《数学物理通讯》299（2010），163–224。[7] H. Grauert, R. Remmert，相干解析层，施普林格出版社，柏林，1984。[8] N. J. Hitchin，黎曼曲面上的自对偶方程，Proc. London Math. Soc. (3) 55（1987），59–126。[9] L. Katzarkov, A. Noll, P. Pandit, C. Simpson，到建筑的调和映射与奇异摄动理论。《数学物理通讯》336（2015），853–903。[10] P. Li，几何分析，剑桥大学出版社，剑桥，2012。[11] Q. Li，通过调和映射介绍 Higgs 丛，SIGMA Symmetry, Integrability Geom. Methods and Appl. 15（2019），论文编号 035，30 页[12] Q. Li, T. Mochizuki，Toda 方程的孤立奇点与循环 Higgs 丛，arXiv:2010.06129。[13] Q. Li, T. Mochizuki，非紧黎曼曲面上一般位置正则半单 Higgs 丛的调和度量，arXiv:2210.08215[14] R. Mazzeo, J. Swoboda, H. Weiss, F. Witt，Higgs 丛模空间的端，Duke Math. J. 165（2016），2227–2271。[15] T. Mochizuki，野调和丛与野纯 twistor $D$-模，Ast´erisque 340，（2011）[16] T. Mochizuki，黎曼曲面上某些调和丛族的渐近行为，J. Topol. 9（2016），1021–1073。[17] T. Mochizuki，良野调和丛与良好滤过 Higgs 丛，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 17（2021），论文编号 068，66 页[18] C. Simpson，利用杨-米尔斯理论构造霍奇结构变分及其在一致化中的应用，J. Amer. Math. Soc. 1（1988），867–918。[19] C. Simpson，非紧曲线上的调和丛，J. Amer. Math. Soc. 3（1990），713–770。[20] C. Simpson，Higgs 丛与局部系统，Publ. I.H.E.S., 75（1992），5–95。[21] J. Swoboda，Higgs 丛模空间：旧与新，Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 123（2021），65–130。[22] Sz. Szab´o，Painlev´e 空间中的反常度等于权。《数学进展》383（2021），论文编号 107667，45 页。[23] Sz. Szab´o，Hitchin WKB 问题与 $P = W$ 五穿孔球面上秩 2 情形的最低次数猜想，Quart. J. Math.（2022）haac037[24] K. Uhlenbeck，曲率有 $L^p$ 界的联络，《数学物理通讯》83，（1982）31–42。