仿生鳞片梁阻尼中的材料-几何相互作用

H. Ebrahimi，[1] M. Krsmanovic，[1] H. Ali，[2] 和 R. Ghosh[1]1)中佛罗里达大学机械与航空航天工程系，佛罗里达州奥兰多市 *Central Florida Blvd 4000*号，邮编*32816*2)*StressEngineering Services, Inc.*，俄亥俄州梅森市 *Stress Engineering Way 7030*号，邮编*45040*

（*电子邮箱：ranajay.ghosh@ucf.edu）

（日期：2023年3月10日）

仿生鳞片覆盖基底是一种架构化超结构，通过鳞片集体接触的几何构型呈现出引人入胜的涌现非线性。尽管人们对其弹性非线性的理解已取得长足进展，但动态状态下由鳞片滑动引起的耗散行为仍鲜有研究。近期发现了一种黏性涌现现象：鳞片间的干燥库仑摩擦可使整体多材料基底表现出表观黏性阻尼行为。与这种结构耗散相反，许多聚合物中常见的材料耗散从未得到考察，尤其是尚未与几何因素协同研究。本文首次对此进行探讨，为简洁明了起见，通过简单的开尔文-沃伊特模型引入材料黏弹性。结果对比了这些结构化系统中的两种阻尼来源：材料黏弹性和几何摩擦鳞片接触。研究发现，尽管黏弹性阻尼与干摩擦在有效阻尼方面表面上相似，但其阻尼包络却有所不同，在阻尼对称性和比阻尼容量方面的影响更是截然不同。

arXiv:2303.04920v1 [cond-mat.soft] 8 Mar 2023

仿生鳞片覆盖基底作为一种结构平台，因其独特的性能组合而持续受到关注；它利用鳞片滑动的几何形态与运动学，展现出类似超材料的特性 Fig. 1[1–5]。从物理构成上看，这类多材料系统由柔软、可变形的基底和从基底凸出的刚性板组成，后者充当鳞片，见 Fig. 1 (a)[6,7]。当基底变形时，刚性鳞片最终会彼此接触并形成整体，由此呈现出引人入胜的一系列力学和光学特性[8–10]。其中许多特性源于鳞片在基底上的集体滑动运动。这种非线性行为的运动学起源意味着，其非线性的根本来源在于刚性鳞片的分布与取向[11–13]。由此形成的非线性弹性与断裂特性图景由几何形态所决定。

尽管人们已深入研究这类基底的弹性与断裂特性，但对其耗散行为的关注则是近来才开始的[14–17]。在静态状态下，研究者假设鳞片之间存在干摩擦，并发现摩擦具有双重作用：既能增加基底的刚度，也会通过引入额外的锁定阶段来限制运动范围[14,16,18]。摩擦的这种矛盾作用促使研究进一步拓展到动态状态。在此，人们发现了一种新型耗散行为——涌现黏性。换言之，即使假设鳞片之间存在干摩擦，基底整体的阻尼振荡仍表现出类似黏性的指数阻尼[15]。

在这些研究中，基底聚合物的黏弹性作用尚未得到探究[15]。因此，阻尼的唯一来源是鳞片滑动。然而，许多聚合物都表现出黏弹性行为[19,20]，，而这种行为与鳞片滑动耗散之间的相互作用仍不为人知。具体而言，基底的黏弹性与干燥界面鳞片摩擦协同作用所产生的阻尼效应尚未揭示。在本文中，我们首次将基底的黏弹性纳入考量，以了解其在欧拉—伯努利基底振荡过程中的阻尼作用。本研究选用简单的 Kelvin-Voigt 模型来表征黏弹性[21,22]，，并假设鳞片之间存在库仑摩擦。我们研究了自由振动和受迫振动。

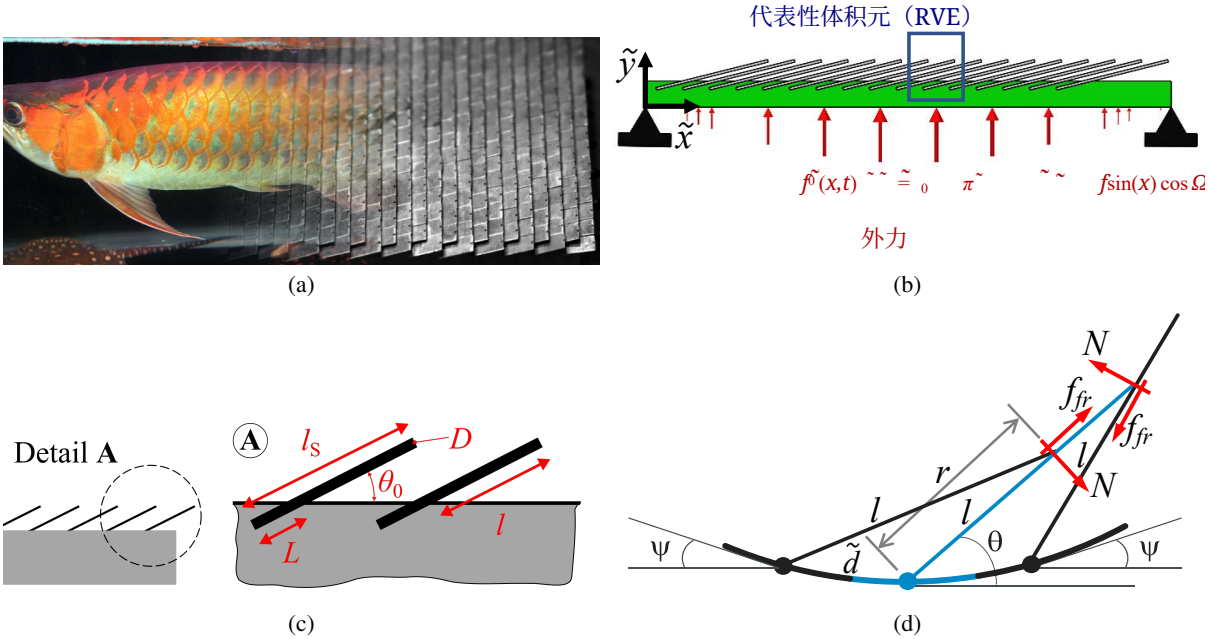
真实聚合物的黏弹性是一种极其复杂的现象，涵盖线性和非线性变形以及多个固有时间尺度。本文为简洁起见，并为了从根本上理解复杂的几何-材料相互作用，选用简单的开尔文-沃伊特模型进行研究，以便在后续发表的研究中开展更详细的数值研究。我们还指出，这些细长基底中的非线性主要源于几何因素和接触因素，而非材料本身，这是由于几何锁定现象[8]。黏弹性行为的开尔文-沃伊特模型可表示为一个纯黏性阻尼元件（阻尼器）与一个纯弹性元件（弹簧）并联连接。应力 σ、应变 ε 和应变率 $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ 之间的关系由[21,22]决定：

$$\sigma = E_B\varepsilon + \xi\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

其中，E_B 和 ξ 分别为基底的杨氏模量和黏度。为隔离鳞片的纯几何效应，假定鳞片为刚性。

基底的长度设为L_B，高度为h_B。我们采用典型硅橡胶的材料属性，该材料可用于制备软基底。这些材料属性如下：杨氏模量$E_B = 1.5$ MPa，泊松比为 $\nu = 0.42$[10]，[23]，密度为$\rho_B = 854$ kg/m^3[15]。硅橡胶的黏度范围为1至 10^8 mPa.s[24,25]，，其中较低的范围对应液态硅聚合物，较高的范围对应固态硅聚合物。需要指出的是，这些材料属性仅是软黏弹性硅聚合物的一个示例，其确切数值对于本研究的核心发现并不重要。

厚度为D 的矩形鳞片部分嵌入



(a) (b) (c) (d)

图 1. (a) 天然鱼鳞的交叠排列及其人工仿生复制。图片根据 CC BY 2.0[7] 许可改编。(b) 简支仿生鳞片梁示意图，以及从梁中部选取并用蓝色矩形标出的代表性体积单元（RVE）。(c) 鳞片特征尺寸和角度示意图。(d) 代表性体积单元（RVE）的示意几何图及其详细几何参数。

基底的顶面，初始角度为θ_0，如图 1 (c) 所示。鳞片总长度 l_s 包括外露长度 l 和嵌入长度 L，（$l_s = l + L$）。鳞片的外露长度 l 以相邻鳞片之间的间距 $\tilde{d}$ 进行无量纲化，如图 1 (c) 所示，$\eta = l/\tilde{d}$ 称为重叠率[8,15]。假设鳞片厚度 D 相对于鳞片长度 l 可忽略不计（$D \ll l_s$），且鳞片的嵌入长度相对于基底高度可忽略不计（$L \ll h_B$）[8–10,14–16]。这些假设使我们能够将每片鳞片视为线性扭转弹簧，其刚度为 K_s，这是由于基底会阻碍鳞片嵌入部分的转动[8,10,26]。对于此类系统，该刚度可表示为标度关系式 $\tilde{K}_s = E_B D^2 C_B (L/D)^n$，其中 C_B 和 n 为常数，其值分别为 0.66 和 1.75[8,15]。

黏弹性光梁（不含任何鳞片）的动力运动方程通过哈密顿原理推导得出，$\delta \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} (\hat{T} - \hat{V} + W) d\tilde{t} = 0$ 适用于黏弹性梁。在这一关系式中，$\hat{T}$、$\hat{V}$ 和 W 分别表示单位长度的动能、单位长度的应变能，以及外加牵引力所做的功，[15,27]——由此得到以下黏弹性光梁的微分方程[21,28]：

$$\rho_B A_B \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{t}^2} + E_B I_B \frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^4} + \tilde{\xi} I_B \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^4} \right) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad (2)$$

这里，A_B 和 I_B 分别为基底横截面的面积和截面二次矩。量：$\tilde{t}$、$\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 分别表示图1(b)所示的时间和两个空间坐标。对于覆有鳞片的梁，$\tilde{f}(\tilde{x}\ \tilde{t})$ 为外力函数，其示意图见图1(b)。对于自由振动情形，函数 $\tilde{f}(\tilde{x}\ \tilde{t})$ 等于零，运动方程为齐次方程；而对于受迫振动情形，外力可表示为一阶模态 $\tilde{f}(\tilde{x}\ \tilde{t}) = \tilde{f}_0 \phi(\tilde{x}) \cos \tilde{\Omega} \tilde{t}$[15,29]，其中 $\tilde{f}0$、$\phi(\tilde{x})$ 和 $\tilde{\Omega}$ 分别为载荷幅值、简支梁的一阶振型函数和载荷频率[15,30]。长度为 L_B 的简支梁，其一阶振型函数为 $\phi(\tilde{x}) = \sin\left(\pi \tilde{x} L B\right)$。

在纯弯曲条件下，鳞片倾斜角 θ 与基底弯曲角 ψ 之间的关系表示为 $\theta = \sin^{-1}(\eta \psi \cos \psi/2) - \psi/2$[8, 14, 26]。需要注意的是，尽管除纯弯曲外该关系并不在全局范围内成立，但可以假设局部周期性（密集鳞片假设）[10,15]。

基于这些考虑，覆鳞梁的整体变形可视为两种变形模式的组合：基底弯曲，以及所有代表性体积单元中的局部鳞片旋转[8,10]。这种运动学描述使得能够将鳞片滑动时鳞片间摩擦所做的功纳入考虑。现在可将摩擦功计入哈密顿原理。摩擦采用库仑干摩擦模型，并考虑不同的摩擦系数 μ；同时，忽略鳞片质量对系统动能的影响[15]。这些考虑导出了覆鳞黏弹性梁的以下偏微分方程[15]（见补充材料）：

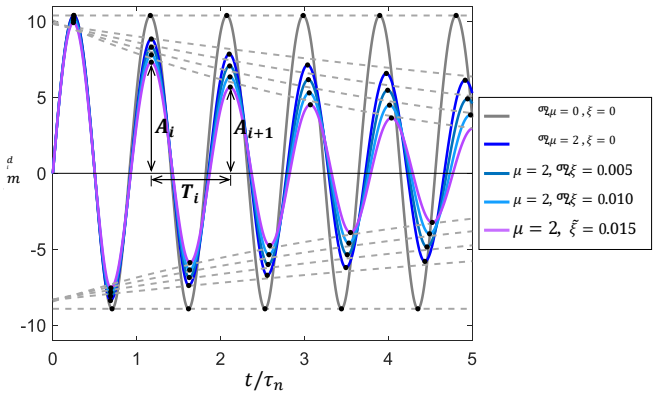


图 2. 在速度初始条件下，具有 $\eta = 5$ 的鳞片状黏弹性梁中点响应随不同黏度系数 $\tilde{\xi}$ 的变化（不同的 $\tilde{\xi}$ 以 MPa.s 为单位表示）。灰色曲线对应 $\mu = 0$，其他曲线对应 $\mu = 2$。

$$\rho_B A_B \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{t}^2} + E_B I_B \frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^4} + \tilde{\xi} I_B \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(\frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^4}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}\frac{1}{N}\sum\left[\tilde{K}_s(\theta - \theta_0)\right.$$
$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \frac{\sin(\beta)\tilde{K}_s(\theta - \theta_0)\mathrm{sgn}(\dot{\tilde{y}})}{\cos(\psi + \beta) - \bar{r}\cos(\beta)}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi}\right] H(\tilde{\kappa} - \tilde{\kappa}_e) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}). \quad (3)$$

这里，$\beta = \tan^{-1}\mu$，且 $\bar{r}$ 是r的无量纲形式；r表示鳞片根部到与左侧相邻鳞片接触点之间的距离，并以鳞片外露长度l为基准，即 $\bar{r} = r/l$。对于特定的代表性体积单元，见图1(d)。根据图1(d)所示各代表性体积单元中的几何排列，$\bar{r}$ 可推导为 $\bar{r} = \sin\left(\theta - \psi/2\right)\sin\left(\theta + \psi/2\right)$。在式（3）中，Heaviside阶跃函数确保与鳞片旋转所致应变能以及鳞片间摩擦所致耗散能相关的各项，只有在每个代表性体积单元层级发生鳞片啮合后才会起作用。也就是说，只有在梁向下挠曲，且 $\theta > \theta_0$ 时才会起作用；换言之，即 $\tilde{\kappa} > \tilde{\kappa}_e$。系统求解中采用的代表性体积单元数量记为$N$。

我们首先将梁自由振动期间的中点挠度与等效系统的有限元模拟结果进行比较，以验证模型，如图 2 所示。该图为梁中点的位移-时间图，其中固定 $\eta = 5$、$\theta_0 = 5°$，并改变摩擦系数。黑点表示有限元模拟结果，与我们的模型结果高度吻合。总体而言，将该图与纯库仑摩擦情况 [15]，相比，材料黏度的影响似乎与干摩擦的影响非常相似。二者都会导致黏性阻尼，并且阻尼随时间增加。因此，干摩擦与材料黏度的影响似乎相辅相成，共同增强梁的黏性阻尼。

然而，它们的相似之处也仅限于此。材料黏度本质上是一种对称的耗散来源——它作用于弯曲的两侧，而摩擦则是不对称的，只作用于鳞片一侧。此外，鳞片本身也会使整体振动产生不对称性，因为它们只位于一侧。

鳞片带来的不对称性具有显著的几何分量。一方面，如果鳞片排列密集，鳞片一侧的附加刚度会更高。同样，摩擦效应也会更强。因此，鳞片越密集，似乎越会加剧介质的不对称性。另一方面，如果鳞片的初始倾角更大，它们便会在更大的曲率下接触，因此对对称性的影响会较小。材料黏弹性的影响似乎具有对称性，因为它作用于两侧。然而，一侧的鳞片也会抑制另一侧的位移，因此材料黏度的对称效应也可能被打破。不对称性的一个合适度量是对数衰减因子（$\delta = \frac{1}{\Delta}\log^{AA_{n+1}}{}_{AA_n}$），它衡量连续周期中振幅的相对衰减。该参数与总体阻尼系数和振动的品质因数有关。我们可以预期，这些振动不对称性会导致凹侧与凸侧的 δ 值出现差异。我们将两个 δ的比值定义为不对称比 $\alpha = \delta_{convex}/\delta_{concave}$，并将其作为衡量双向不对称性的指标。

从机理上看，增加鳞片间的摩擦似乎会导致更强的不对称性，因为摩擦只会选择性地作用于一个方向，而材料耗散则会在两个方向上对称地引起耗散。因此，增加库仑摩擦应当会加剧不对称性，而黏弹性则不会影响不对称性。为探究这些影响，我们绘制了不同 η 和 θ_0 取值下，由 μ 和 ξ 映射的 α 相图，见图 3。图 3 中不对称性相图的第一行（图 3 (a-b)）展示了在保持 η 不变时，增加 θ_0 的影响。图 3 (a) 表明，增加库仑摩擦并不会导致对数阻尼的各向异性增强，尽管其对位移不对称性的影响十分显著。这一结果相当令人意外，也有悖直觉。似乎只有在初始倾角发生变化时，对称性才会被打破。一旦如此，增加倾角会使不对称区域变平，并向较低的库仑摩擦值扩展。我们还研究了鳞片密度 η 对不对称性的影响，见图 3 (c-d)。正如预期，提高密度也会进一步增强各向异性。对于相同的 μ 和 ξ 组合，较高的 η 会使各向异性显著增强，见图 3 (c-d)。

为了更好地理解系统的物理机制，我们使用一侧阻尼更强的非对称弹簧-质量-阻尼器系统（SMD）探究其基本原理，如图 4 所示。对该系统进行积分后，可得到对数阻尼比的解析闭式表达式（见补充材料）。

该系统的对称性破缺可能源于两个不同因素：一侧的鳞片滑动，以及仅因初始鳞片角度而导致另一侧鳞片延迟啮合。阻尼相图显示，尽管引入不对称性（沿一个方向）足以造成系统整体

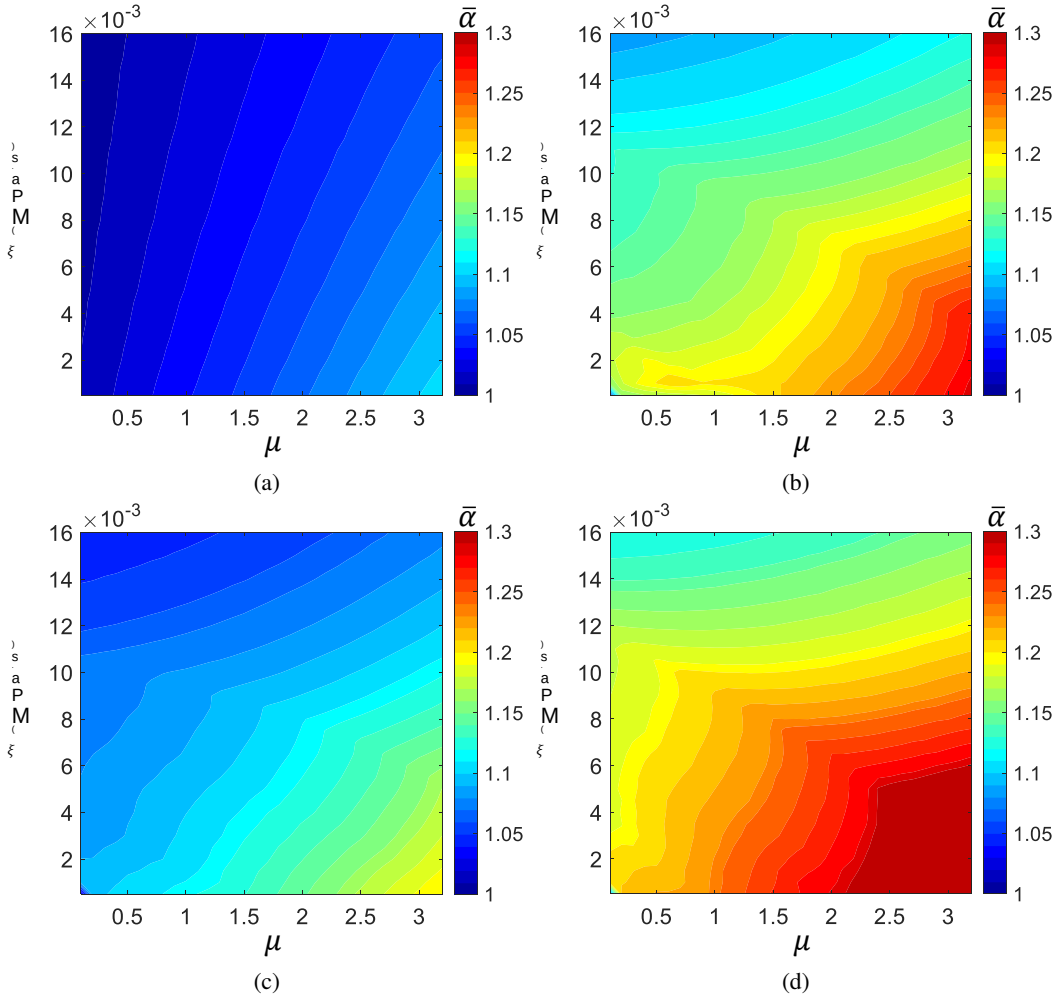


图3. 凸侧阻尼系数与凹侧阻尼系数之比（$\bar{\alpha}$）的相图，该比值称为不对称系数，由 ξ 和μ所涵盖，适用于不同情况：(a) $\eta = 5$和 $\theta_0 = 0°$；(b) $\eta = 5$和 $\theta_0 = 5°$；(c) $\theta_0 = 5°$和 $\eta = 3$；(d) $\theta_0 = 5°$和 $\eta = 7$。

不对称，但阻尼振荡两侧的对数衰减率仍然相同。因此，仅在一侧施加阻尼不足以显著改变对数阻尼比的对称性。如果引入啮合不对称性来模拟初始角度 θ_0，SMD 系统的对称性还会进一步破缺。我们的 SMD 模型通过令阻尼在区域 $y = 0$ 内从$y < 0$处开始，而在区域 $y_e > 0$ 内从任意$y > 0$处开始，来体现刚度的不对称性，见图 4 (a)。我们改变固有频率 $\omega|_{y>y_e}$ 和 $\omega|_{y<0}$，同时保持阻尼系数$c|_{y>0}$ 和$c|_{y<0}$ 不变，使阻尼比 $\zeta|_{y>0}$ 和 $\zeta|_{y<0}$ 随相应的固有频率一同变化。这些参数的设定旨在近似我们的结构化系统——较高的固有频率表示较高的刚度，较高的阻尼系数则用于模拟较高的刚度，而y_e——即偏移量——用于模拟初始角度。在图 4 (b) 中，我们绘出了无偏移时鳞片的影响。显然，没有偏移时，鳞片侧与平滑侧之间的阻尼差异微乎其微。然而，一旦加入偏移，阻尼便出现明显的不对称性。阻尼的不对称性系数随着两侧差异的增大而增大。在图 4(c) 中，我们绘制了给定偏移量下不同阻尼系数的影响；在图 4(d) 中，我们增大刚度比，同时保持阻尼系数不变。这可以比较具有不同重叠率的系统。我们发现，在其他条件相同的情况下，较高的重叠率会明显加剧对数阻尼的不对称性。这证实了相图 3(c)、(d) 中的趋势。在此，我们比较了两个不对称的 SMD 系统：一个没有偏移，另一个存在偏移。我们发现，加入偏移会加剧不对称性，这证实了图 3(a)–(b) 中的发现。除了自由振动外，我们还考察了受迫振荡中的耗散效应。我们使用“比阻尼容量（*SDC*）”来量化耗散，该指标衡量材料通过机械振动运动耗散弹性应变能的能力[30,31]。*SDC* 可定义如下：

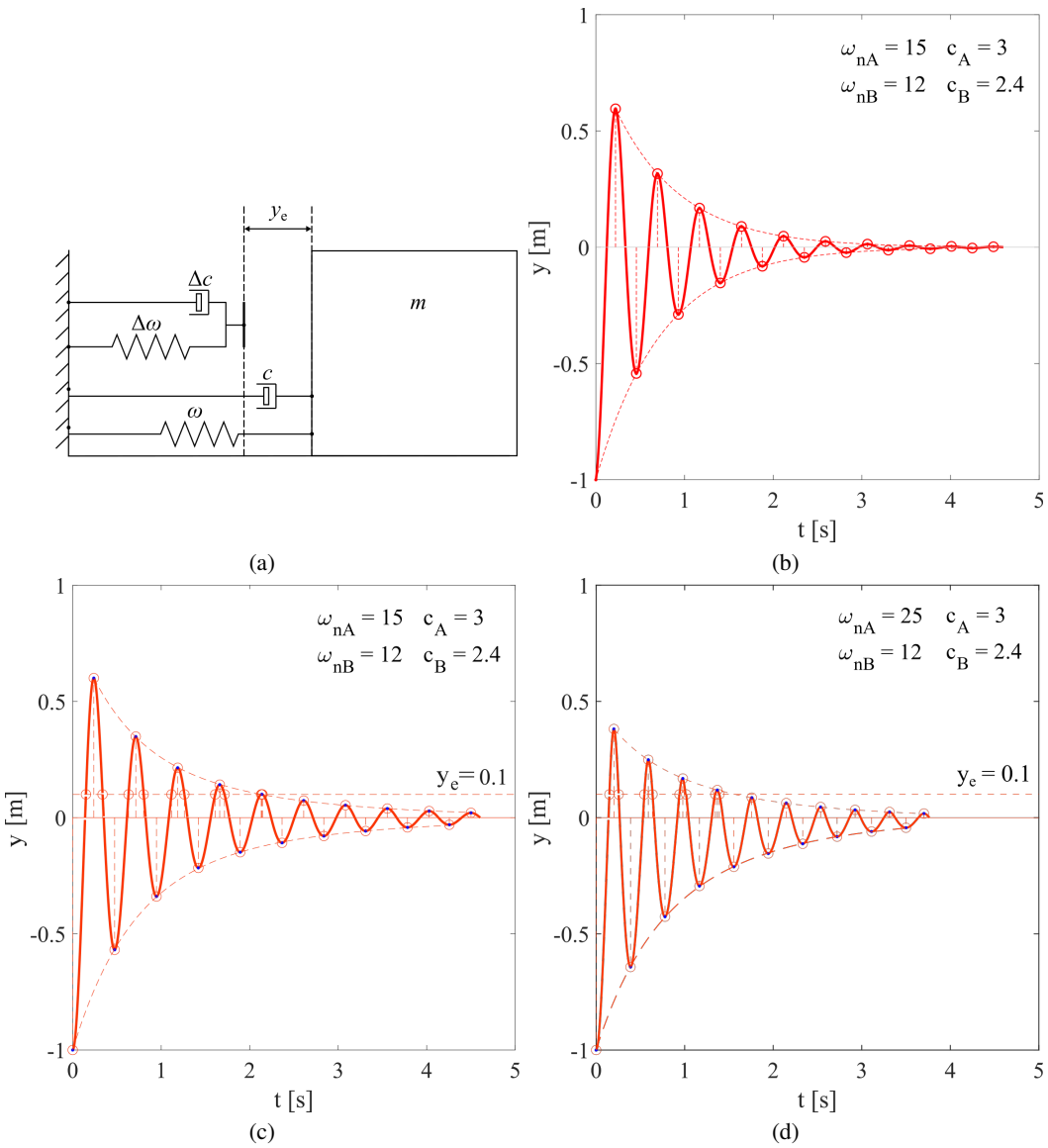


图 4. 在两个耦合阻尼振子的简化系统中，当存在$y_e > 0$ 处的部分啮合时，呈现出的对数减量不对称性。(a) 模拟仿生超材料结构的非对称弹簧-质量-阻尼系统示意图。偏移量模拟初始鳞片角度，之后发生啮合。啮合会增加刚度 $\Delta\omega$ 和阻尼 Δc (b) 无偏移时的阻尼振荡；(c) 有偏移时的阻尼振荡；(d) 鳞片侧刚度高于 (c) 时，有偏移情况下的阻尼振荡。

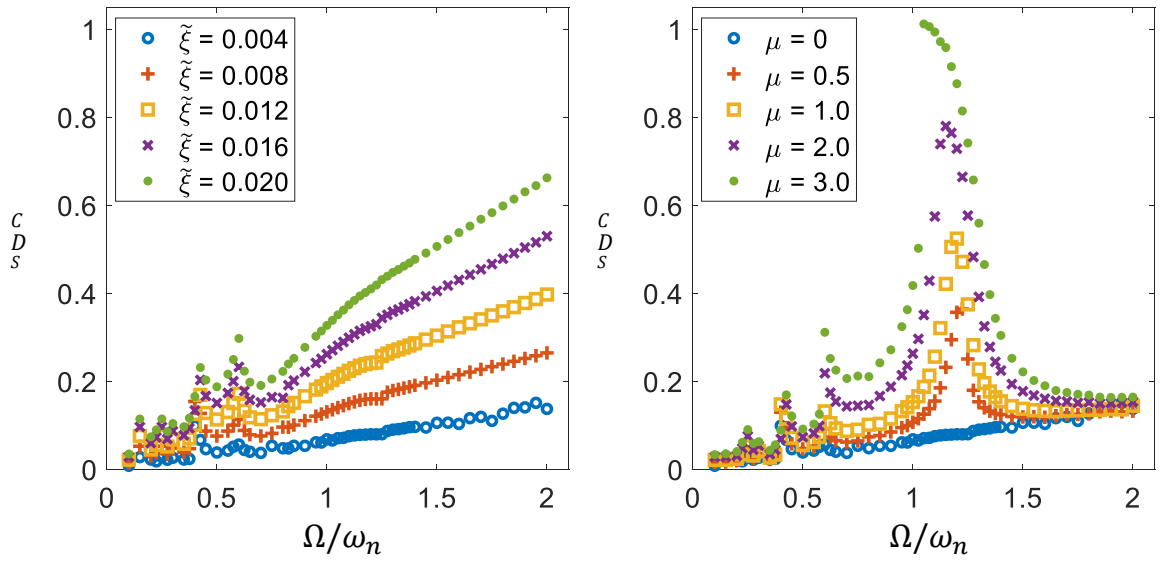
$$SDC = \frac{\text{Dissipated Energy per Steady State Cycle } (\Delta U)}{\text{Maximum Stored Energy (U)}}. \tag{4}$$

这些耗散能和储存能可以通过计算模型进行数值计算。

此处，图 5 (a) 绘出了¯来自材料来源 ξ 的比阻尼容量。我们发现，随着频率增加，比阻尼容量也随之增加（由于振荡的复杂性，在次谐波频率处有少数峰值例外）。这是典型的黏性阻尼响应。相比之下，鳞片间摩擦的影响截然不同。图 5 (b) 所示的比阻尼容量在共振附近呈现出显著而急剧的上升

共振时，摩擦越大，对应的峰值也越高。共振之后，阻尼开始急剧下降。这种行为总体上是由于摩擦力中的摩擦分量不随速率变化。共振后，随着振动振幅减小，摩擦所做的功也随之减少。

总之，我们发现，尽管在仿生鳞片结构基底中，黏弹性和摩擦耗散源是两种表面上相似的阻尼来源，但仔细考察后会发现二者存在显著差异。它们对位移、阻尼不对称性和比阻尼的影响大相径庭。几何-材料相互作用首次得到研究。现实中的聚合物在材料行为方面表现出复杂得多的特性。在线性区间内，它们



(a) (b)

图 5. (a) 不同材料黏度参数下，受迫振动的比阻尼系数（SDC）随频率的变化，摩擦不存在。(b) 不同摩擦系数下，受迫振动的比阻尼系数（SDC）随频率的变化。材料黏度可忽略不计（<0.005）

通常由开尔文-沃伊特元件的组合来表示。我们计划在本研究的后续迭代中探讨这些复杂性。尽管存在这一局限性，目前的研究结果对于设计鱼鳞状智能皮肤和软体机器人附属装置，以及定制化假肢应用，都具有广泛意义。

致谢

本研究得到了美国国家科学基金会土木、机械与制造创新项目的资助，资助编号为 2028338。

[1]G. N. S and B. R. R. J, “受自然启发的仿生鱼鳞阵列提升未来飞机性能——一种设计方法”, 仿生智能与机器人 **2**, 100045 (2022). [2]M. Muthuramalingam, D. K. Puckert, U. Rist, and C. Bruecker, “利用仿生鱼鳞阵列延迟转捩”, 《科学报告》 **10**, 1–13 (2020). [3]H. Jiakun, H. Zhe, T. Fangbao, and C. Gang, “仿生飞行系统与仿生空气动力学综述”, 《航空学报》 **34**, 170–186 (2021). [4]J. B. R. Rose, S. G. Natarajan, and V. Gopinathan, “航空航天应用中的仿生流动控制技术：全面综述”, 环境科学与生物/技术评论, 1–33 (2021). [5]B. Jenett, S. Calisch, D. Cellucci, N. Cramer, N. Gershenfeld, S. Swei, and K. C. Cheung, “数字变形机翼：采用复合晶格蜂窝结构的主动机翼成形概念”, 《软体机器人》**4**, 33–48 (2017). [6]J. Long, M. Hale, M. Mchenry, and M. Westneat, “鱼皮的功能：长鼻雀鳝（Lepisosteus osseus）的弯曲刚度与稳定游动”, 《实验生物学杂志》**199**, 2139–2151 (1996). [7]A. Aini, “Sting & aro”, (2008), (访问于 2022 年 6 月 23 日)。[8]R. Ghosh, H. Ebrahimi, and A. Vaziri, “仿生鳞片的接触运动学”, 《应用物理学快报》**105**, 233701 (2014). [9]H. Ebrahimi, H. Ali, R. A. Horton, J. Galvez, A. P. Gordon, and R. Ghosh, “仿生鳞片覆盖基底的可调扭转”, EPL（《欧洲物理快报》）**127**, 24002 (2019). [10]H. Ali、H. Ebrahimi 和 R. Ghosh, “离散非周期接合下仿生鳞片覆盖梁的弯曲”, 《固体与结构国际期刊》**166**, 22–31 (2019). [11]B. Wang、W. Yang、V. R. Sherman 和 M. A. Meyers, “穿山甲盔甲：角蛋白鳞片的重叠、结构与力学性质”, 《生物材料学报》**41**, 60–74 (2016). [12]W. Yang、I. H. Chen、B. Gludovatz、E. A. Zimmermann、R. O. Ritchie 和 M. A. Meyers, “天然柔性真皮盔甲”, 《先进材料》**25**, 31 48 2013– ( ). [13]H. Ehrlich, “鱼鳞与盔甲的材料设计原则”, 载于海洋来源的生物材料（施普林格, 2015）第 237–262 页。 [14]R. Ghosh、H. Ebrahimi 和 A. Vaziri, “仿生鳞片啮合中的摩擦效应”, EPL（《欧洲物理快报》）**113**, 34003 (2016). [15]H. Ali、H. Ebrahimi 和 R. Ghosh, “仿生鳞片产生的摩擦阻尼”, 《科学报告》**9**, 1–7 (2019). [16]H. Ebrahimi、H. Ali 和 R. Ghosh, “仿生鳞片覆盖基底扭转中的库仑摩擦”, 《生物启发与仿生学》**15**, 056013 2020( ). [17] S. Dharmavaram、H. Ebrahimi 和 R. Ghosh, “仿生鳞片基底的弯扭耦合力学”, 《固体力学与物理学杂志》**159**, 104711 (2022). [18]H. Ali、H. Ebrahimi、J. Stephen、P. Warren 和 R. Ghosh, “具有结构化外骨骼的可调刚度轻质软体机器人材料”, 载于*AIAA Scitech 2020* 论坛（2020）第 1551 页。 [19]J. D. Ferry, 聚合物的黏弹性（约翰·威立父子出版公司, 1980）。 [20]G. Polacco、J. Stastna、D. Biondi 和 L. Zanzotto, “聚合物结构与改性沥青非线性黏弹性行为之间的关系”, 《胶体与界面科学最新观点》**11**, 230–245 (2006). [21]A. Craifaleanu、N. OR˘a.SANU 和 C. Dragomirescu, “黏弹性欧拉—伯努利梁的弯曲振动——两种方法及比较”, 载于《应用力学与材料》, 第 762 卷（Trans Tech Publications, 2015）第 47–54 页。[22]J. Freundlich, “受基座激励且带有端部质量的分数阶开尔文–沃伊特黏弹性悬臂梁的瞬态振动”, 《声学与振动杂志》**438**, 99–115 (2019). [23]H. Ali、H. Ebrahimi 和 R. Ghosh, “利用时空角向功能梯度仿生鳞片调节悬臂梁的弹性”, 《软材料》

《软材料》**1**, 1–12 (2019).[24]MatWeb，“硅橡胶材料概述”，(2022)，（访问于 2022 年 2 月 3 日）。[25]R. Suriano、O. Boumezgane、C. Tonelli 和 S. Turri，“一类由硅功能低聚物构成的超分子离子共混物的黏弹性性质与自修复行为”，《先进技术中的聚合物》**31**, 3247–3257 (2020). [26]F. J. Vernerey 和 F. Barthelat，“鱼鳞结构力学”，《固体与结构国际期刊》**47**, 2268–2275 (2010). [27]M. Javadi 和 M. Rahmanian，“分数阶开尔文–非线性弹性地基上的 Voigt 黏弹性梁，”《非线性科学与数值模拟通讯》**98**, 105784 (2021). [28]J. Diani, “线性黏弹性聚合物悬臂梁的自由振动，”《法国科学院院报：力学》**348**, 797–807 (2020). [29]N. Abhyankar, E. Hall, and S. Hanagud, “梁的混沌振动：偏微分方程的数值求解，”《应用力学杂志》**60**, 167–174 (1993). [30]S. S. Rao, 连续系统振动 (Wiley, 2019). [31]J. Zhang, R. Perez, and E. Lavernia, “金属、陶瓷和金属基复合材料阻尼能力的记录，”《材料科学杂志》**28**, 2395–2404 (1993).