arXiv:2303.04936v1 [math.NT] 8 Mar 2023

阿贝尔簇的万有族中的退化轨迹

高子阳与 Philipp Habegger

Abstract. 近年来，关于变动阿贝尔簇中曲线和子簇上有理点数量一致性的研究进展，依赖于退化轨迹这一几何概念。第一作者研究了某些混合 Shimura 簇中的退化轨迹。在这篇综述性短文中，我们重新探讨其中一些结果，并在研究主极化阿贝尔簇族时尽量减少对混合 Shimura 簇的使用。我们还阐释了这些结果在丢番图几何应用中的意义。

Contents

1. 引言 1 致谢 3 2. 阿贝尔概形预备知识 3 3. 双代数子簇与阿贝尔簇的通用族 6 3.1. Mumford–Tate 群 6 3.2. 双代数子簇 8 4. 非退化判据 12 5. 纤维幂中的零阶退化轨迹 15 6. 第一退化轨迹与相对 Manin–Mumford 猜想 18 参考文献 20

1. Introduction

本说明旨在以尽可能少地使用混合 Shimura 簇的语言，重新证明 [Gao17a,Gao20a], 中的一些论证，尤其是关于退化轨迹的论证。

为便于应用，我们采用以下设定。设 $\mathfrak{A}_g \to \mathbb{A}_g$ 是具有某个 $\ell \geq 3$ 级结构的 g 维主极化阿贝尔簇的万有族。那么 $\mathfrak{A}_g$ 具有定义在某个数域上的几何不可约准射影簇结构。

设 X 是 $\mathfrak{A}_g$ 的一个不可约闭子簇。在 [Gao20a], 中，第一作者为每个 $t \in \mathbb{Z}$ 定义了第 t 个退化轨迹 $X^{\mathrm{deg}}(t)$；我们的设定中的定义见 §4 。根据定义， $X^{\mathrm{deg}}(t)$ 是 X 中至多可数个扎里斯基闭子集的并。然而， $X^{\mathrm{deg}}(t)$ 在 X 中是扎里斯基闭的，见 [Gao20a，定理 1.8]。

$X^{\mathrm{deg}}(t)$ 的定义涉及 $\mathfrak{A}_g$ 和 $\mathbb{A}_g$ 中的双代数子簇；双代数子簇的解释见 §3 开篇。2. Ullmo 和 Yafaev 将 [UY11] 中的双代数子簇刻画为 $\mathbb{A}_g$ 的弱特殊子簇，其中我们将 $\mathbb{A}_g$ 视为

$\mathbb{A}_g$ Shimura 簇。第一作者 [Gao17b，推论 8.3] 证明，当将 $\mathfrak{A}_g$ 视为混合 Shimura 簇时， $\mathfrak{A}_g$ 中的双代数子簇恰好是弱特殊子簇，参见 [Pin05，定义 4.1(b)]。随后，通过涉及混合 Shimura 簇的一些计算， $\mathfrak{A}_g$ 中双代数子簇的几何刻画由 [Gao17b，命题 1.1] 给出。

本文重新探讨了 $\mathfrak{A}_g$ 中一类双代数子簇的几何描述。命题 3.2 给出了相关结果。不同于第一作者的工作中所作的完整刻画，我们证明了一个稍弱的结果，但它足以应用于丢番图几何中的若干问题。

该命题证明中的一个关键工具已见于第一作者的工作 [Gao17b，§8] ，以及 Bertrand 对 Manin核定理的综述 [Ber20]。这一工具是 Andr´e 关于混合霍奇结构变分的正规性定理 [And92]。

我们沿用 [Gao20a], 中的思路，特别是其中的定理8.1，并推导出使 $X^{\mathrm{deg}}(t)$ 在 X 中足够大的一个必要条件。相应结果在此表述为命题 4.3，其依据是命题 3.2 所给出的几何结构结果。

t 的两个取值对数论几何中的近期应用尤为重要。

在 §5 中，我们强调 $t = 0$这一情形。零阶退化轨迹 $X^{\mathrm{deg}}(0)$在近期证明一致莫德尔–朗猜想 [DGH21, K¨uh21,GGK21]的过程中至关重要。针对阿贝尔簇万有族的混合 Ax–Schanuel 定理 [Gao20b] 将 [DGH21，定义 1.5], 意义下的非退化性概念与 X中 $X^{\mathrm{deg}}(0)$的大小联系起来。关于 Ax–Schanuel 定理的微分代数方法，可参见 Bl´ azquez-Sanz–Casale–Freitag–Nagloo [BSCFN23] 的近期工作。更确切地说，我们用其 m重纤维幂 $\mathfrak{A}_g^{[m]}$替换 $\mathfrak{A}_g$ ，该纤维幂取自 $\mathbb{A}_g$ ，其中$m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ 为某个参数，并考虑 $\mathfrak{A}_g^{[m]} \subseteq \mathfrak{A}_{gm}$。对于亏格为 $g \geq 2$的曲线的一致莫德尔–朗猜想 [DGH21] ，子簇 $X \subseteq \mathfrak{A}_g^{[m]}$是某个适当的、由亏格为 g的光滑射影曲线组成的族的（$m + 1$）重纤维幂在 Faltings–Zhang 态射下的像。推论 5.3 给出了足够强的结论，从而确保 [DGH 21] 中出现的相关 X 是非退化的。该推论是 [Gao20a，定理 1.3]的一个特例。但其所依据的定理 5.1 适用于 $\mathfrak{A}_g^{[m]}$的更一般子簇，是一项新的结果。

如注 4.4 所述，关于万有族的混合 Ax–Schanuel 定理意味着，如果 X 不是非退化的，那么 $X^{\mathrm{deg}}(0)$ 就包含 X^{an} 的一个非空开子集；这里 X^{an} 表示 X 的解析化，所考虑的拓扑是欧几里得拓扑。（ [Gao20a, Theorem 1.7] 中包含了这一点及其逆命题。）在 [DGH21,K¨uh21, GGK21] 的语境下，并不一定需要 $X^{\mathrm{deg}}(0)$ 是扎里斯基闭的。

正如 [Gao20a 中所观察到的， §11], $X^{\mathrm{deg}}(1)$ 与相对 Manin–Mumford 猜想有关；该猜想的表述及简要历史见 §6.1。我们的推论 6.3 运用了结构结果命题 3.2，将关于 $\mathfrak{A}_g$ 的相对 Manin–Mumford 猜想归结为猜想 6.1。这与 [Gao20a 的命题 11.2]一脉相承。我们计划在未来的工作中探讨猜想 6.1。在本文中，我们仅研究主极化阿贝尔簇族。同样，我们避免使用混合 Shimura 簇的术语。不过，我们对定理 6.2 的证明，

因而最终推论 6.3 的证明，需要 $X^{\deg}$(1) 在 X 中扎里斯基闭；这一点是借助混合 Shimura 簇理论证明的，见 [Gao20a，定理 1.8]。本文不再重新证明扎里斯基闭性。

下面的第 2 节介绍了特征零下阿贝尔概形的一些预备知识。

致谢。作者感谢 Gabriel Dill 就阿贝尔概形和引理 2.1 所进行的讨论。ZG 获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线 2020 研究与创新计划（资助协议编号 n° 945714）提供的资助。PH 获得了瑞士国家科学基金会项目 n° 200020_184623 的资助。

2. Preliminaries on Abelian Schemes

设 S 是定义在 $\mathbb{C}$ 的一个代数闭子域上的光滑不可约拟射影簇。为方便起见，我们常将这些簇视为定义在 $\mathbb{C}$ 上。设 $\pi\colon \mathcal{A} \to S$ 是相对维数为 $g \geq 1$ 的阿贝尔概形。对于 $s \in S$，我们用 $\mathcal{A}_s$ 表示 $\mathbb{C}$（s）上的阿贝尔簇。更一般地，对于概形之间的态射 $T \to S$，我们用 $\mathcal{A}_T$ 表示纤维幂 $\mathcal{A} \times_S T$。用 $\eta \in S$ 表示泛点。

令 End($\mathcal{A}/S$) 表示阿贝尔概形 $\mathcal{A} \to S$ 的自同态群。这是一个有限生成的自由阿贝尔群。对于所有 $s \in S$，令 φ_s 表示 End($\mathcal{A}/S$) 在 $\mathcal{A}_s$ 上的限制。相应的群同态

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(\mathcal{A}/S) &\to \mathrm{End}(\mathcal{A}_s/\mathbb{C}(s)), \\ \varphi &\mapsto \varphi_s \end{aligned} \tag{2.1}$$

是单射。由于 S 光滑，一般纤维 $\mathcal{A}_\eta$ 的自同态可由 FC90，命题 I.2.7] 延拓为 S 上 $\mathcal{A}$ 的自同态。因此，当 $s = \eta$ 时，(2.1) 是双射。

注意，任意 $\varphi \in$ End($\mathcal{A}/S$) 都是适当态射。因此，像 $\varphi(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}$ 中是扎里斯基闭的。我们将带有约化诱导结构的 $\varphi(\mathcal{A})$ 视为 $\mathcal{A}$ 的闭子概形。由于 $\mathcal{A}$ 是约化的，$\varphi(\mathcal{A})$ 是 φ 的概形像。

下面关于 $\mathcal{A}/S$ 自同态的引理依赖于 Barroero–Dill 的一个结果，而该结果最终依赖于群概形理论。

引理 2.1. 设 $\varphi \in$ End($\mathcal{A}/S$)。则 $\varphi(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的阿贝尔子概形。对所有 $s \in S(\mathbb{C})$，限制映射 $\varphi_s\colon \mathcal{A}_s \to \mathcal{B}_s$ 是满射，其核的维数为 $g - \dim \mathcal{B} + \dim S$。

证明. 设 B 为 $\varphi(\mathcal{A}_\eta)$，这是一个定义在函数域 $\mathbb{C}(\eta)$ 上的 $\mathcal{A}_\eta$ 阿贝尔子簇。根据 [BD22, 引理 2.9]，阿贝尔簇 B 是阿贝尔子概形 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 的一般纤维。

于是 $\mathcal{A}_\eta$ 包含于 $\mathcal{A}$ 的闭子集 $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$ 中。由于 $\mathcal{A}_\eta$ 在 $\mathcal{A}$ 中稠密，我们有 $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$，按集合论意义成立。此外，$\varphi$ 是适当的，且其像包含 $\mathcal{B}$ 中的稠密子集 B。因此，作为集合有 $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$。但 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 均为约化的，所以 $\mathcal{B}$ 是 φ 的概形像。特别地，$\varphi(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的阿贝尔子概形。

对于所有的 $s \in S(\mathbb{C})$，我们都有 $\varphi(\mathcal{A}_s) = \mathcal{B}_s$，且这个像的维数为 $\dim \mathcal{B} - \dim S$，因为 $\mathcal{B} \to S$ 是光滑的。由于 φ_s 的核的维数为 $\dim \mathcal{A}_s - \dim \mathcal{B}_s$，引理得证。□

我们常将 $\varphi(\mathcal{A})$ 视为底域 S 上的阿贝尔概形，并将 φ 视为同态$\mathcal{A} \to \varphi(\mathcal{A})$。

设 V 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的不可约簇。若 $V(\mathbb{C})$ 的一个子集包含于至多可数个扎里斯基闭真子集的并中，则称其在 V 中是稀疏的。

我们假设一般纤维 $\mathcal{A}_\eta$ 的所有几何自同态都定义在 S 的函数域 $\mathbb{C}(\eta)$ 上。例如，若存在一个整数 $\ell \geq 3$，使得 $\mathcal{A}_\eta$ 的所有 ℓ-挠点都是 $\mathbb{C}(S)$-有理的，则满足此条件 [Sil92, 定理 2.4]。

若同态 $s \in S(\mathbb{C})$ 对 $\mathcal{A}/S$ 是自同态一般的，则称点 m

$$\mathrm{End}(\mathcal{A}/S) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}_s/\mathbb{C}) \otimes \mathbb{Q} \tag{2.2}$$

由 (2.1) 诱导。注意，(2.2) 总是单射。我们定义

$$S^{\mathrm{exc}} := \big\{ s \in S(\mathbb{C}) : s \text{ is not endomorphism generic for } \mathcal{A}/S \big\}. \tag{2.3}$$

命题 2.2. 集合 S^{exc} 在 S 中是稀疏的。

证明。这个命题可以利用霍奇理论证明。Masser [Mas96, 命题]给出了一个利用有效零点定理的证明。在该文献中，必须像我们上文所做的那样，假设 $\mathcal{A}_\eta$ 的所有几何自同态都已定义在 $\mathbb{C}(S)$上。因此，对于 s 中除稀疏子集之外的任意 $\mathcal{A}_s$，其自同态都是一般纤维的某个自同态的特化。接着我们利用(2.1)对 s =η是满射这一事实。□

阿贝尔簇中的陪集，是阿贝尔子簇经任意点平移所得的集合。

引理 2.3. 设 Y 是 $\mathcal{A}$ 的不可约闭子簇，且 $\pi(Y) = S$。假设存在扎里斯基开稠密子集 $U \subseteq \pi(Y)$，使得对所有 $s \in U(\mathbb{C})$， Y_s 的某个不可约分支是 $\mathcal{A}_s$中的一个陪集。存在 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{A}/S)$，满足以下性质：

(i) 我们有 $\dim\ \varphi(Y) = \dim \pi(Y)$。(ii) 对所有 $s \in S(\mathbb{C})$，
我们有 $\dim\ker\ \varphi_s = \dim\ Y - \dim\ \pi(Y)$。
此外，若 $\dim\ Y = \dim \pi(Y)$，则 φ 是恒等映射。

证明。若 $\dim\ Y = \dim \pi(Y)$，我们令 φ 为恒等映射，所有结论均成立。否则，由一般平坦性，我们可以且确实将 U 替换为一个扎里斯基开稠密子集，使得对于所有 $s \in U(\mathbb{C})$， Y_s 均为维数 $\dim\ Y - \dim\ \pi(Y)$ 的等维态射。

令 $s \in U(\mathbb{C}) \setminus S^{\mathrm{exc}}$。我们固定 Y_s 的一个不可约分支 Z_s，它是 $\mathcal{A}_s$ 中的一个陪集，其维数必为 $\dim\ Y - \dim\ \pi(Y)$。接着，我们选取一个 $\varphi_s \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_s/\mathbb{C})$，其核包含上述陪集的一个平移作为不可约分支。将 φ_s 乘以一个正整数倍后，它可延拓为 $\mathcal{A}$ 的一个自同态 φ，因为 (2.2) 是双射。

对于每个 $\varphi \in$ 自同态环$(\mathcal{A}/S)$，我们定义 Σ_φ 为点集 $s \in U(\mathbb{C}) \setminus S^{\mathrm{exc}}$ 满足$\varphi_s = \varphi$。我们有 $S(\mathbb{C}) = (S \setminus U)(\mathbb{C}) \cup S^{\mathrm{exc}} \cup \bigcup_{\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{A}/S)} \Sigma_\varphi$

S^{exc} 中的集合依据命题 2.2 是稀疏的，因此 $(S \setminus U)(\mathbb{C}) \cup S^{\mathrm{exc}}$ 也是如此。由于 $\mathrm{End}(\mathcal{A}/S)$ 至多是可数无限集，贝尔纲定理表明，存在 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{A}/S)$，使得 Σ_φ 在 S^{an} 中的闭包具有非空内部。特别地， Σ_φ 在 S中扎里斯基稠密。

对于所有 $s \in \Sigma_\varphi$，我们都有 $\dim Z_s = \dim Y - \dim \pi(Y)$。因此，$Z = \bigcup_{s\in\Sigma_\varphi} Z_s$ 在不可约的 Y 中扎里斯基稠密。

对于所有 $s \in \Sigma_\varphi$，根据我们对 φ_s 的选择，每个 Z_s 都包含在 $\varphi|_Y$ 的某个纤维中。因此，作为 Y_s 的一个不可约分支，Z_s 是 $\varphi|_Y$ 的某个纤维的不可约分支。

一般而言，$\varphi|_Y$ 的纤维是等维的，其维数为 $\dim Y - \dim \varphi(Y)$。因此，存在 $s_0 \in \Sigma_\varphi$，使得 Z_{s_0} 与这样的一个（一般）纤维相交。于是 $\dim Y - \dim \varphi(Y) = \dim Z_{s_0} = \dim \ker \varphi_{s_0}$。回想一下，$Y_{s_0}$ 是等维的，其维数为 $\dim Y - \dim \pi(Y)$，且以 Z_{s_0} 为一个不可约分支。由此可得 $\dim Y - \dim \varphi(Y) = \dim Y - \dim \pi(Y)$，因此 $\dim \varphi(Y) = \dim \pi(Y)$。这就推出了 (i)。根据引理 2.1，所有 $\ker \varphi_s$ 的维数都相同，此处等于 $\dim Y - \dim \pi(Y)$。这就完成了 (ii)。□

不可约闭子簇 Y 在 $\mathcal{A}$ 中的例外集定义为

(2.4) $$Y_{\text{例外集}} := \{P \in Y(\mathbb{C}) : P \text{包含于 } \mathcal{A}_{\pi(P)}\}\text{.的某个真代数子群中}$$

若 $N \in \mathbb{Z}$，则 $[N]$ 表示乘以 N 的态射 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$。

引理 2.4. 设 Y 是 $\mathcal{A}$ 的一个不可约闭子簇，并设 $S' = \pi(Y)^{\text{reg}}$ 表示 $\pi(Y)$的正则轨迹。以下两种情况必有其一。

(i) Y^{exc} 在 Y中是稀疏的；(ii) 或者每个 $P \in \pi|_Y^{-1}(S')(\mathbb{C})$都包含于 $\mathcal{A}_{\pi(P)}$的某个真代数子群中。在这种情况下，$\bigcup_{N\in\mathbb{N}}[N](Y)$在 $\pi^{-1}(\pi(Y))$中不是扎里斯基稠密的；并且若 η 是 $\pi(Y)$的泛点，则 Y_η 包含于 $\mathcal{A}_\eta$的某个真代数子群中。

证明。令 $Y' = Y \cap \mathcal{A}_{S'}$。假设 $P \in Y'(\mathbb{C})$ 属于 $\mathcal{A}_s$ with$s = \pi(P)$ 的某个真代数子群。那么存在 $\varphi_s \in \text{End}(\mathcal{A}_s/\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ with $\varphi_s(P) = 0$。若 $s \notin S'^{\text{exc}}$，则根据定义，φ_s 的某个正整数倍可延拓为 $\text{End}(\mathcal{A}_{S'}/S') \setminus \{0\}$ 的一个元素。因此，

$$Y^{\text{exc}} \subseteq \pi|_Y^{-1}(\pi(Y) \setminus S') \cup \pi^{-1}(S'^{\text{exc}}) \cup \bigcup_{\varphi\in\text{End}(\mathcal{A}_{S'}/S')\setminus\{0\}} \ker \varphi. \tag{2.5}$$

由命题 2.2，集合 $\pi|_Y^{-1}(S'^{\text{exc}})$ 在 Y 中是稀疏的。此外，$\pi|_Y^{-1}(\pi(Y) \setminus S')$ 在 Y 中是扎里斯基闭且适当的，因此其复点构成 Y 中的一个稀疏子集。此外，(2.5) 中最后一个并是 $\mathcal{A}_{S'}$ 中至多可数个真代数子集的并。

因此，若不属于情形 (i)，则存在 $\varphi \in \text{End}(\mathcal{A}_{S'}/S') \setminus \{0\}$ with $Y \subseteq \ker \varphi$，即 $\ker \varphi$ 在 $\mathcal{A}$ 中的扎里斯基闭包。注意，$Y' = Y \cap \mathcal{A}_{S'} \subseteq \ker \varphi \cap \mathcal{A}_{S'} = \ker \varphi$。设 $P \in Y'(\mathbb{C})$，则 $P \in \ker \varphi_{\pi(P)}$。由引理 2.1，$\ker \varphi_{\pi(P)}$ 是 $\mathcal{A}_{\pi(P)}$ 的一个真代数子群。最后，对所有 $N \in \mathbb{N}$，$[N](Y') \subseteq \ker \varphi$。因此，$\bigcup_{N\in\mathbb{N}}[N](Y)$ 属于$\pi|_Y^{-1}(\pi(Y) \setminus S') \cup \ker \varphi$，故在 $\pi^{-1}(\pi(Y))$ 中不是扎里斯基稠密的。最后，$Y \to S$ 的一般纤维包含于 $\ker \varphi \to S$ 的一般纤维中，后者是 $\mathcal{A}_\eta$ 的一个真代数子群。□

以下是前一个引理的一个有用推论。

引理 2.5. 设 $Y \subseteq \mathcal{A}$ 和 $X \subseteq \mathcal{A}$ 是不可约闭子簇，且 $Y \subseteq X$ 和$\pi(Y) \cap \pi(X)^{\text{reg}} \neq \emptyset$。若 Y^{exc} 在 Y中是稀疏的，则 X^{exc} 在 X中是稀疏的。

证明。若 X^{exc} 在 X中不是稀疏集，则根据引理 2.4，每个满足$\pi(P) \in \pi(X)^{\text{reg}}$的点 $P \in X(\mathbb{C})$都属于 $\mathcal{A}_{\pi(P)}$的一个真代数子群。特别是，复

$Y \cap \pi^{-1}(\pi(X)^{\mathrm{reg}})$的点都属于 Y^{exc}。假设意味着 Y包含 Y一个的非空开子集。因此，根据贝尔纲定理， Y^{exc} 在 Y中不是稀疏集。□

3. Bi-algebraic Subvarieties and the University Family of AbelianVarieties

Ullmo 和 Yafaev [UY11] 刻画了（纯）Shimura 簇的双代数子簇：它们恰好是弱特殊子簇，即 Moonen [Moo98]研究的测地子簇。关于双代数子群的定义，参见下文的 §32。第一作者 [Gao17a, §3]基于 [Gao17b, §8]，完整刻画了 $\mathfrak{A}_g$ 的双代数子簇。下面的命题 3.2 沿用这些参考文献中的方法，但尽量避免使用混合 Shimura 簇的术语。我们的主要工具是 Andr´e 关于混合霍奇结构变分的正规性定理 [And92] 。

3.1. Mumford–Tate 群。令 $g \geq 1$ ，并令 $\pi\colon\ \mathfrak{A}_g \to \mathbb{A}_g$ 为带有 level-ℓ-结构的 g 维主极化阿贝尔簇的万有族，其中 $\ell \geq 3$。则 $\mathfrak{A}_g$ 和 $\mathbb{A}_g$ 是定义在某个数域上的几何不可约光滑拟射影簇；我们假设该数域是 $\mathbb{C}$的子域。我们将所有代数簇视为定义在 $\mathbb{C}$的某个子域上，有时会在不特别说明的情况下对 $\mathbb{C}$进行基变换。

令 $\mathfrak{H}_g$ 表示 Siegel上半空间，即 $\mathrm{Mat}_{g\times g}(\mathbb{C})$ 中虚部正定的对称矩阵。滥用记号，我们将

$$\mathrm{unif}\colon \mathfrak{H}_g \to \mathbb{A}_g^{\mathrm{an}} \quad \text{and} \quad \mathrm{unif}\colon \mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}_g \to \mathfrak{A}_g^{\mathrm{an}}$$

用于两个全纯一致化映射。回顾一下，$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ 是辛群的实点所成的群，它作用于 $\mathfrak{H}_g$。

我们通过自然的半代数双射将 $\mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g \times \mathfrak{H}_g$ 与 $\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}_g$ 识别为

$$(\tau, u, v) \leftrightarrow (\tau, z) \quad \text{where } z = \tau u + v. \tag{3.1}$$

在前一种坐标下，相应的一致化映射 $\mathfrak{H}_g \times \mathbb{R}^{2g} \to \mathfrak{A}_g^{\mathrm{an}}$ 是实解析的。

令 $s \in \mathfrak{A}_g(\mathbb{C})$，并在其经一致化映射取原像中固定 $\tau \in \mathfrak{H}_g$ ，即 $s = \mathrm{unif}(\tau)$。令 1_g 表示 $g \times g$单位矩阵，则 $(\tau, 1_g)$ 的列构成 $\mathbb{C}^g$ 的一个 $\mathbb{R}$-基，且 $\mathfrak{A}_{g,\,s}^{\mathrm{an}} \cong \mathbb{C}^g/(\tau\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g)$。周期格基 $(\tau, 1_g)$ 使我们能够将 $H_1(\mathfrak{A}_{g,\,s}^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ 与 $\mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g$ 以及 $H_1(\mathfrak{A}_{g,\,s}^{\mathrm{an}}, \mathbb{R})$ 与 $\mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$ 识别起来。

我们简要回顾 $\pi_1(\mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}, s)$ 在奇异同调 $H_1(\mathfrak{A}_{g,\,s}^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ 上的单值作用；这里 $\pi_1(\mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}, s)$ 是以 s 为基点的 $\mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}$ 的（拓扑）基本群。

假设 $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}, s)$ 由以 s 为基点、位于 $\mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}$ 中的环路 γ 表示。那么，从 τ 出发的 γ 到 $\mathfrak{H}_g$ 的提升 $\tilde{\gamma}$，终点为某个 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ 所对应的 $M\tau \in \mathfrak{H}_g$。于是，$M\tau$ 是阿贝尔簇 $\mathbb{C}^g/(M\tau\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g)$ 的周期矩阵，而该阿贝尔簇同构于 $\mathbb{C}^g/(\tau\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g)$。为描述这个同构，我们需要恒等映射

$$I(M, \tau)^{\top}(M\tau, 1_g) = (\tau, 1_g)M^{\top}, \tag{3.2}$$

其中 $I(M,\tau) = c\tau + d$，注意转置，并参见 [BL04, §8.1 和注记 8.1.4] 中的讨论。我们将这个等式重新排列。映射

$$\tau u + v \mapsto (I(M,\tau)^\top)^{-1}(\tau u + v) = (M\tau, 1_g)(M^\top)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

这里 $u, v \in \mathbb{R}^g$ 是列向量，诱导出同构 $\mathbb{C}^g/(\tau\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g) \to \mathbb{C}^g/(M\tau\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g)$。

By (3.3)，用这些坐标表示的单值表示由下式给出 y

$$\begin{aligned} \rho\colon \pi_1(\mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}, s) &\to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\mapsto (M^\top)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

接下来我们回顾在本文背景下 Mumford–Tate 群的定义。

我们继续假设 $\tau \in \mathfrak{H}_g$。任取满足 $\tau = M(\sqrt{-1}\cdot 1_g)$ 的 $M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$；这样的 M 存在，因为 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ 在 $\mathfrak{H}_g$ 上传递作用。我们令

$$J_\tau = (M^\top)^{-1}\Omega M^\top \quad \text{where} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

我们断言 J_τ 与 M 的选取无关；它只取决于 τ。事实上，若 M' 是 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ 中另一个满足 $\tau = M'(\sqrt{-1}\cdot 1_g)$ 的元素，则 $M = M'N$，其中 $N \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ 稳定 $\sqrt{-1}\cdot 1_g$。因此 N 可写成 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 的形式，其中 $a, b \in \mathrm{Mat}_g(\mathbb{R})$。这意味着 $(N^\top)^{-1}\Omega N^\top = \Omega$，因此代入 $M' = MN^{-1}$ 后，$(M'^\top)^{-1}\Omega M'^\top = J_\tau$。设 $x, y \in \mathbb{R}$，则

$$(x1_{2g} + yJ_\tau)^\top \Omega (x1_{2g} + yJ_\tau) = x^2\Omega + y^2 J_\tau^\top \Omega J_\tau + xy(\Omega J_\tau + J_\tau^\top \Omega).$$

群 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ 包含 Ω，并且在矩阵转置下映射到自身。因此 $J_\tau \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$。此外，$J_\tau^2 = -1_{2g}$。所以 $J_\tau^\top \Omega J_\tau = \Omega$ 且 $J_\tau^\top \Omega = \Omega J_\tau^{-1} = -\Omega J_\tau$。我们得出，对于所有满足 $x, y \in \mathbb{R}$ 的 $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$h_\tau(z) = x1_{2g} + yJ_\tau \in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$。此外，

$$h_\tau\colon \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$$

是一个群同态。

由 (3.5) 可得 $J_\tau^\top \tau = \tau$。下文将用到众所周知的恒等映射 $I(MM', \tau) = I(M, M'\tau)I(M', \tau)$，其中 $M, M' \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ 和 $\tau \in \mathfrak{H}_g$ 均任意。我们将 (3.2) 应用于 $J_\tau^\top \text{where} J_\tau = (M^\top)^{-1}\Omega M^\top$ 和 $\tau = M(\sqrt{-1}\cdot 1_g)$，并计算得

$$\begin{aligned} (\tau, 1_g)J_\tau &= I(J_\tau^\top, \tau)^\top (\tau, 1_g) \\ &= I(-M\Omega M^{-1}, \tau)^\top (\tau, 1_g) \\ &= \big(I(-M\Omega, M^{-1}\tau)I(M^{-1}, \tau)\big)^\top (\tau, 1_g) \\ &= -\big(I(M\Omega, \sqrt{-1}\cdot 1_g)I(M^{-1}, \tau)\big)^\top (\tau, 1_g) \\ &= -\big(I(M, \Omega(\sqrt{-1}\cdot 1_g))I(\Omega, \sqrt{-1}\cdot 1_g)I(M^{-1}, \tau)\big)^\top (\tau, 1_g). \end{aligned}$$

接下来我们使用 $\Omega(\sqrt{-1}\cdot 1_g) = \sqrt{-1}\cdot 1_g$。因此

$$\begin{aligned}(\tau, 1_g)J_\tau &= \sqrt{-1}\left(I(M,\sqrt{-1}\cdot 1_g)I(M^{-1},\tau)\right)^\top(\tau,1_g)\\ &= \sqrt{-1}\left(I(M,M^{-1}\tau)I(M^{-1},\tau)\right)^\top(\tau,1_g)\\ &= \sqrt{-1}I(1_{2g},\tau)^\top(\tau,1_g)\\ &= \sqrt{-1}(\tau,1_g).\end{aligned} \tag{3.6}$$

因此，J_τ 表示在由 $\mathbb{C}^g$ 的 $\mathbb{R}$ 基（τ，1_g）确定的实坐标下乘以 $\sqrt{-1}$。

设 $s \in \mathbb{A}_g(\mathbb{C})$ 位于 $\tau \in \mathfrak{H}_g$ 之下。$\mathfrak{A}_{g,s}$ 的 Mumford–Tate 群 $\mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,s})$ 是 $\mathrm{GSp}_{2g,\mathbb{Q}}$ 的最小代数子群，其 $\mathbb{R}$-点群包含 $h_\tau(\mathbb{C}^\times)$。由于 $J_\tau = h_\tau(\sqrt{-1})$，显然有 $J_\tau \in \mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,s})(\mathbb{R})$。

3.2. 双代数子簇。我们沿用 §3.1 开头引入的约定。若某个（或等价地，任意一个）$\mathrm{unif}^{-1}(Y^{\mathrm{an}})$ 的复解析不可约分支等于代数子集 $Y \subseteq \mathbb{G}^g{}_{\mathrm{a},\mathbb{C}} \times \mathrm{Mat}_{g\times g,\mathbb{C}}$ 对应的 $Y(\mathbb{C}) \cap (\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}_g)$ 的一个不可约分支，则称不可约闭子簇 $Y \subseteq \mathfrak{A}_g$ 为双代数子簇。$\mathfrak{A}_g$ 中两个双代数子簇交集的所有不可约分支都是双代数子簇。因此，$\mathfrak{A}_g$ 的任意不可约闭子簇 Y 都包含于 $\mathfrak{A}_g$ 的一个双代数子簇 Y^{biZar} 中，且该双代数子簇关于包含关系是极小的。

$\mathbb{A}_g$ 的双代数子簇以类似的方式定义。根据 Ullmo–Yafaev 的定理 [UY11, 定理 1.2]，$\mathbb{A}_g$ 的双代数子簇恰好是 $\mathbb{A}_g$ 的弱特殊子簇；这里我们将 $\mathbb{A}_g$ 视为 Shimura 簇。对于 $\mathbb{A}_g$ 的任意不可约闭子簇 Y，我们用 Y^{biZar} 表示包含 Y 的最小双代数子簇。

引理 3.1. 设 $Y \subseteq \mathfrak{A}_g$ 是一个双代数不可约闭子簇，并设 $\eta \in \pi(Y)$ 为其泛点。对于所有 $P \in Y(\mathbb{C})$，$Y_{\pi(P)}$ 的每个不可约分支都是 $\mathfrak{A}_g$ 中的 $\pi(P)$ 陪集，其维数至少为 $\dim Y - \dim \pi(Y)$。

证明。设 $P \in Y^{\mathrm{biZar}}(\mathbb{C})$，并设 C 是 $Y^{\mathrm{biZar}}_{\pi(P)}$ 的一个不可约分支。根据 [GW10, 推论 14.116 及注记 14.117]，我们有 $\dim C \geq \dim Y - \dim \pi(Y)$。

C $Y_{\pi(P)}$ 的不可约分支是阿贝尔簇 $\mathfrak{A}_{g,\,\pi(P)}$ 中的双代数子集。由 [UY11，命题 5.1] 可知，C 是环境阿贝尔簇中的一个陪集。□

现在我们来讨论双代数子集的一个结构性结果。我们引用第一作者在 [Gao17a] 中更全面的结果（[Gao17a，命题 3.3] 的表述有误；正确版本见 [Gao20a，命题 5.3]），该结果使用混合 Shimura 簇的语言。

命题 3.2. 设 $Y \subseteq \mathfrak{A}_g$ 是一个双代数子簇，且 Y^{exc} 在 Y 中稀疏。

(i) 存在一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间 $W \subseteq \mathbb{R}^{2g}$，其维数为 $W = 2(\text{维数 } Y - \text{维数 } \pi(Y))$，且具有以下性质。对于所有 $s = \mathrm{unif}(\tau) \in \pi(Y)(\mathbb{C})$，满足 $\tau \in \mathfrak{H}_g$ 时，纤维 Y_s 是 $\mathrm{unif}(\{\tau\}\times W) \subseteq \mathfrak{A}_g^{\mathrm{an}}{}_{,\,s}$ 的有限个平移之并，其中 s 是一个阿贝尔簇 C_s

(ii) 对于所有 $s \in \pi(Y)(\mathbb{C})$，商阿贝尔簇 $\mathfrak{A}_{g,\ s}/C_s$ 都是两两同构的阿贝尔簇。

每个 $\tau \in \mathfrak{H}_g$ 都赋予 $\mathbb{R}^{2g}$ $\mathbb{C}$-向量空间的结构，乘以$\sqrt{-1}$ 由 (3.5) 中的 J_τ 表示。第 (i) 部分中的子空间 $W \subseteq \mathbb{R}^{2g}$ 对于所有相关的 τ都是 $\mathbb{C}$-向量空间。映射 $\mathrm{unif}(\{\tau\} \times W)$ 的像是$\mathfrak{A}_{g,\ s}$中的一个阿贝尔子簇，其维数为 $\dim\ Y - \dim \pi(Y)$。特别地，$Y \to \pi(Y)$ 是等维的。

证明。若 $\pi(Y)$是一个点，设为 $s \in \mathbb{A}_g(\mathbb{C})$，则根据引理 3.1，$Y_s$ 是$\mathfrak{A}_{g,\ s}$ 中的一个陪集。此时命题成立。

现在假设 $\dim\ \pi(Y)\ \geq 1$。我们将 $\mathbb{R}^{2g} \times \mathfrak{H}_g$ 与$\mathfrak{A}_g(\mathbb{C})$的万有覆盖认同；有时会提及由 (3.1) 诱导的复结构。以某个点 P为基点的 $\mathfrak{A}_g^{\mathrm{an}}$的基本群是 $\mathbb{Z}^{2g} \rtimes \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$的一个子群。元素（$M$，$\omega$）的作用为

$$(M\tau, M * u + \omega)$$

在（τ, u）上；其中 $M * u = (M^\top)^{-1}u$。

回想一下，环境簇 $\mathfrak{A}_g$ 是拟射影的，Y也如此。根据 Bertini 定理，一个一般的、余维为 $\dim Y - 1$ 的线性空间与 Y_{reg} 相交所得的是一条光滑不可约曲线 $\mathbf{x}$，它到 $\pi(\mathbf{x})$ 上的映射是准有限的。根据拓扑基本群的 Lefschetz 定理的一个适当版本，我们还可以假设同态

$$\pi_1(\mathbf{x}^{\mathrm{an}}, P) \to \pi_1(Y^{\mathrm{reg,an}}, P) \tag{3.7}$$

由包含映射 $\mathbf{x} \to Y^{\mathrm{reg,an}}$ 诱导的同态对所有 $P \in \mathbf{x}(\mathbb{C})$ 都是满射；参见 [Del81, Lemme 1.4]。我们可以固定一个处于非常一般位置的 P。例如，对于 $s = \pi(P)$，P不包含在 $\mathfrak{A}_{g,\ s}$ 的任何真代数子群中。若将 $\mathbf{x}$ 替换为一个扎里斯基开稠密子集，则诱导同态的像在 $\pi_1(Y_{\mathrm{reg,an}}\ P)$ 中具有有限指数，参见 [Del71, Lemme 4.4.17]。这对我们来说已经足够。因此，我们可以假设 $\pi|_{\mathbf{x}}\colon \mathbf{x} \to \pi(\mathbf{x})$ 是有限且´etale 的。

令 Γ 表示 $\mathbb{Z}^{2g} \rtimes \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ 中 $\pi_1(\mathbf{x}^{\mathrm{an}}, P)$ 的像。令 $\mathrm{Mon}(\mathbf{x})$ 为 Γ 在 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}} \rtimes \mathrm{Sp}_{2g,\ \mathbb{Q}}$ 中的扎里斯基闭包的中性分支，并令 $\mathrm{Mon}(Y_{\mathrm{reg}})$ 为 $\pi_1(Y_{\mathrm{reg,an}}\ P)$ 的像的扎里斯基闭包的中性分支。我们称 $\mathrm{Mon}(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x}$ 的连通代数单值群。由 (3.7) 的满射性及下文的讨论可得

$$\mathrm{Mon}(\mathbf{x}) = \mathrm{Mon}(Y^{\mathrm{reg}}). \tag{3.8}$$

由引理 3.1 可知 $P \in C(\mathbb{C})$，其中 C 是 Y_s 的一个不可约分支，且是 $\mathfrak{A}_{g,s}$ 中的一个陪集，并且 $\dim\ C \geq \dim Y - \dim \pi(Y)$。现在 $C \cap Y_{\mathrm{reg}}$ 在 C 中扎里斯基稠密且开。因此，由包含映射诱导的 $\pi_1(C^{\mathrm{an}} \cap Y_{\mathrm{reg,an}}\ P)$ 在 $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, P)$ 中的像具有有限指数。然而，$\pi_1(C^{\mathrm{an}}, P)$ 可识别为 $\mathbb{Z}^{2g} \cong H_1(\mathfrak{A}_{g\ ,s}^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ 的一个秩为 $2\ \dim\ C \geq 2(\dim Y - \dim\ \pi(Y))$ 的子群。

投影 $\mathrm{pr}:\ \mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}} \rtimes \mathrm{Sp}_{2g,\mathbb{Q}} \to \mathrm{Sp}_{2g,\mathbb{Q}}$ 在 $\mathrm{Mon}(Y_{\mathrm{reg}})$ 上的核是 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}} \times \{1_{2g}\}$ 的一个代数子群。因此，它是 $\{1_{2g}\} \times W$，其中 W 是 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}}$ 的一个线性子空间。根据上一段以及 (3.8)，我们有

$$\dim W \geq 2(\dim Y - \dim \pi(Y)). \tag{3.9}$$

设 $Z = \pi(Y)^{\mathrm{reg}}$。那么存在一个自然表示 $\pi_1(Z^{\mathrm{an}}, s) \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$。连通代数单值群 $\mathrm{Mon}(Z) \subseteq \mathrm{Sp}_{2g,\mathbb{Q}}$ 是 $\pi_1(Z^{\mathrm{an}}, s)$ 的像的扎里斯基闭包的中性分支。

注意，根据 [Del71, Lemme 4.4.17]，$\mathrm{pr}(\mathrm{Mon}(Y^{\mathrm{reg}})) = \mathrm{Mon}(Z)$。

设 $M \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{C})$。原像 $\mathrm{pr}^{-1}_{\mathrm{Mon}(Y_{\mathrm{reg}})}(M)$ 是 $(M, \psi(M) + W)$，其中 $\psi(M)$ 是 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}}/W$ 的唯一复点。对于所有 $M, M' \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{C})$，我们有

$$(M, \psi(M)+W)(M', \psi(M')+W) = (MM', \psi(M)+M*\psi(M')+W) = (MM', \psi(MM')+W).$$

因此 $\psi\colon \mathrm{Mon}(Z) \to \mathbb{C}^{2g}/W(\mathbb{C})$ 是一个余循环。根据 Deligne 的工作 [Del71, Corollaire 4.2.9(a)]，由于 $\mathrm{Mon}(Z)$ 是半单或平凡的，它必定是一个余边界。因此存在$v_0 \in \mathbb{C}^{2g}$，使得

$$\psi(M) = M * v_0 - v_0 + W \quad \text{for all} \quad M \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{C}).$$

设 Y 是 $\mathbb{G}^{g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{C}} \times \mathrm{Mat}_{g\times g,\mathbb{C}}$ 的一个代数子集，使得 $Y(\mathbb{C})$ 在$\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}_g$中的原像与 $Y(\mathbb{C}) \cap (\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}_g)$ 有一个共同的复解析不可约分支，记作 Y_0。我们有 $\dim Y_0 = \dim Y$。

假设 P_0 位于 $\mathfrak{H}_g$ 之上，位于我们固定的基点 s 上方，且坐标为 u_0。因此 $u_0 \in \mathbb{R}^{2g}$。

元素 $[\gamma] \in \Gamma$ 由 $\mathbf{x}^{\mathrm{an}}$ 中以 P 为基点的环路 γ 表示。我们将 γ 提升为 $\mathbb{R}^{2g} \times \mathfrak{H}_g$ 中一条从 $(\tau_0, u_0) \in \tilde{Y}(\mathbb{C})$ 出发的弧。特别地，该提升的终点位于 Y_0 中，且等于 $(M, u)(\tau_0, u_0)$，其中 $(M, u) = [\gamma] \in \Gamma$。对于 (τ_0, u_0) 在 Γ 下的轨道，我们有

$$\Gamma \cdot (\tau_0, u_0) \subseteq \tilde{Y}_0 \subseteq \tilde{Y}(\mathbb{C}).$$

根据定义，$Y(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{Mat}_{g\times g}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^g$ 的一个代数子集。由于 P 是 Y 的正则点，我们有 (τ_0, u_0) 是 Y_0 的正则点。因此

$$\mathrm{Mon}(Y^{\mathrm{reg}})(\mathbb{R})^+ \cdot (\tau_0, u_0) = \mathrm{Mon}(\mathbf{x})(\mathbb{R})^+ \cdot (\tau_0, u_0) = \{(M, u)(\tau_0, u_0) : (M, u) \in \mathrm{Mon}(\mathbf{x})(\mathbb{R})^+\} \subseteq \tilde{Y}_0; \tag{3.10}$$

上标 $+$ 表示在欧几里得拓扑中取中性分支。

除了连通代数单值群之外，我们还有相应的 Mumford–Tate 群。

首先，回顾一下，$s \in \pi(Y)(\mathbb{C})$确定了一个定义在 $\mathbb{C}$上的主极化阿贝尔簇$\mathfrak{A}_{g,\,s}$。我们考虑由相应的权 -1 纯霍奇结构导出的 Mumford–Tate 群 $\mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$；它是一个约化代数群。此外，$\mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$自然是 $\mathrm{GSp}_{2g,\,\mathbb{Q}}$的一个代数子群。

其次，经过一次有限且 ́etale 基变换（这对我们的研究没有影响）后，$\mathbf{x}$ 成为一个阿贝尔概形的截面。按照 Deligne 的意义，它是一个良好、光滑的一重动机（秩为≤ 1）；参见 [And92, §4 和引理 5]。与 $\mathbf{x}$ 相关联的是一个混合霍奇结构变分。将其限制到 $\mathbf{x}$ 的每个点上，我们得到一个混合霍奇结构。根据 [And92, §4 和引理 5]，这样得到的混合霍奇结构在 $\mathbf{x}$ 中所有充分一般的点处具有相同的 Mumford–Tate 群。我们将此群记为 $\mathrm{MT}(\mathbf{x})$。不妨设 P 是这样一个非常一般的点。于是，$\mathrm{MT}(\mathbf{x})$自然是 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{2g} \rtimes \mathrm{GSp}_{2g,\,\mathbb{Q}}$的一个代数子群。

我们还将投影 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}} \rtimes \mathrm{GSp}_{2g,\,\mathbb{Q}} \to \mathrm{GSp}_{2g,\,\mathbb{Q}}$记作 pr。由 [And92, 引理 2(c)]，我们得到满射性 $\mathrm{pr}(\mathrm{MT}(\mathbf{x})) = \mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$。

Andr´e [And92, 定理 1] 证明，Mon(x) 是 MT(x) 的正规子群，因为 P处于非常一般的位置。我们不需要 Mon(x) 实际上是导出 Mumford–Tate 群的正规子群这一结论。

继续之前，我们先作如下说明。And92 第 11] 页的第二条说明表明，我们可以直接对 Y^{reg} 进行研究，也就是说，无须绕道转到 x。

任取 $M \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{C})$。那么 $(M, M*v_0-v_0+W) \subseteq \mathrm{Mon}(\mathbf{x})(\mathbb{C})$。假设 $(h,v) \in \mathrm{MT}(\mathbf{x})(\mathbb{C})$。根据 Andr´e 定理，我们有

$$(h,v)(M, M*v_0 - v_0 + W)(h,v)^{-1} \subseteq \mathrm{Mon}(\mathbf{x})(\mathbb{C}),$$

so

$$(hMh^{-1}, v + hM*v_0 - h*v_0 - hMh^{-1}*v + h*W) \subseteq \mathrm{Mon}(\mathbf{x})(\mathbb{C}).$$

回顾 (3.8)。第二个坐标等于 $\psi(M) = hMh^{-1}*v_0 - v_0 + W$，因此

$$v + hM*v_0 - h*v_0 - hMh^{-1}*v + h*W = hMh^{-1}*v_0 - v_0 + W.$$

我们得出两个结论。

首先，我们有 $h*W = W$。由于投影 $\mathrm{MT}(\mathbf{x}) \to \mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$ 是满射，因此 $\mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$ 作用于 W。约化群 $\mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$ 也作用于一个线性子空间 $W^{\perp} \subseteq \mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}}$，其中 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}} = W \oplus W^{\perp}$。

其次，代入 $h = 1$，得到

$$M*v - v \in W(\mathbb{C}) \quad \text{for all} \quad M \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{C}) \text{ and all } (1,v) \in \mathrm{MT}(\mathbf{x})(\mathbb{C}). \tag{3.11}$$

现在利用 [And92，命题 1]，来计算 $\mathrm{MT}(\mathbf{x}) \to \mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$ 的核。按该命题的记号，令 $H = G = \mathrm{MT}(\mathbf{x})$，并断言 $E' = \mathfrak{A}_{g,\,s}$。事实上，根据假设，$P$ 不包含在 $\mathfrak{A}_{g,\,s}$ 的任何真代数子群中。因此，它生成的循环子群在 $\mathfrak{A}_{g,\,s}$ 中扎里斯基稠密。于是，该命题推出核等于 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}}$。因此，(3.11) 对所有 $v \in \mathbb{C}^{2g}$ 都成立。

特别地，

$M*v - v \in W(\mathbb{C})$ 对所有 $M \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{C})$ 以及所有 $v \in W^{\perp}(\mathbb{C})$ 都成立。由于 $\mathrm{Mon}(Z)$ 是 $\mathrm{MT}(\mathfrak{A}_{g,\,s})$ 的一个代数子群，它也作用于 $W^{\perp}$。由于 $W(\mathbb{C}) \cap W^{\perp}(\mathbb{C}) = 0$，我们得出 $\mathrm{Mon}(Z)$ 在 $W^{\perp}$ 上作用平凡。因此，$W^{\perp}(\mathbb{Q})$ 包含于 $H_1(\mathfrak{A}_{g,\,s}, \mathbb{Q})$ 上单值作用的不变部分中。

此外，我们写作 $v_0 = v_0' + v_0''$，使得 $v_0' \in W(\mathbb{R})$ 且 $v_0'' \in W^{\perp}(\mathbb{R})$。那么 $M*v_0 = M*v_0' + M*v_0'' \in v_0'' + W = v_0 + W$ 并且

$$\psi(M) = M*v_0' + M*v_0'' - v_0' - v_0'' + W = M*v_0' - v_0' + W = W$$

对于所有 $M \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{C})$。

我们通过陈述连通代数单值群满足以下条件，总结这些最后的论证和 (3.8)：

$$\mathrm{Mon}(Y^{\mathrm{reg}}) = \mathrm{Mon}(\mathbf{x}) = W \rtimes \mathrm{Mon}(Z).$$

由 (3.10) 可得

$$(\mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{R})^{+} \cdot \tau_0) \times (v_0 + W(\mathbb{R})) = \{(M\tau_0, v_0 + w) : M \in \mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{R})^{+}, w \in W(\mathbb{R})\} \subseteq \tilde{Y}_0$$

根据 Moonen 关于弱特殊子簇的研究，轨道 $\mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{R})^{+}\cdot\tau_0$ 在一致化映射 $\mathfrak{H}_g \to \mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}$ 下映射到 $\pi(Y)$，参见 [Moo98 §3 及命题 3.7]。一般而言，$Y \to \pi(Y)$ 的纤维维数为 $\dim Y - \dim \pi(Y)$，根据 (3.9)，这等于 $\leq \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} W(\mathbb{R})\tilde{}$。因此，$\dim_{\mathbb{R}} Y_0 \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Mon}(Z)(\mathbb{R})^{+} \cdot \tau_0) \times (v_0 + W(\mathbb{R}))$。

˜现在我们证明 (Mon(*Z*)(ℝ)$^+ \cdot \tau_0$) $\times$ ($v_0 + W(\mathbb{R})$) $= Y_0$。事实上，注意左边˜是 Y_0 中的闭集。令 T 表示复解析˜ ˜ ˜空间 Y_0 的奇异点。由于 Y_0 不可约， $Y_0 \setminus T$ 是一个连通复流形。此外，˜(Mon(*Z*)(ℝ)$^+ \cdot \tau_0$)$\times$($v_0 + W(\mathbb{R})$)$\setminus T$ 是一个维数为 2 dim Y_0 ˜ ˜的拓扑（实）流形，且包含于 $Y_0 \setminus T$ 中。因此，根据维数不变性，它在 $Y_0 \setminus T$ 中是开集。但它在 $Y_0 \setminus T$ 中也˜ ˜是闭集。因此，(Mon(*Z*)(ℝ)$^+ \cdot \tau_0$) $\times$ ($v_0 + W(\mathbb{R})$) $\setminus T = Y_0 \setminus T$。由于 $Y_0 \setminus T$ 在 Y_0 中稠密，结论得证 ˜ ˜。

特别地，(Mon(*Z*)(ℝ)$^+ \cdot \tau_0$)$\times$($v_0 + W(\mathbb{R})$) 是复解析的。因此，对于所有 $\tau \in \mathfrak{H}_g$with unif(τ) $\in \pi(Y)(\mathbb{C})$， $W(\mathbb{R})$ 是由 τ 赋予 $\mathbb{R}^{2g}$ 的复结构下的复子空间。此外，(3.9) 是一个等式。

由于 W 是 $\mathbb{G}^{2g}{}_{\mathrm{a}\,\mathbb{Q}}$ 的代数子群，这就证明了 (i)。(ii) 由[Del71, Corollaire 4.1.2] 得出，因为 $W^{\perp}(\mathbb{Q})$ 包含于 $H_1(\mathfrak{A}_{g,\ s}, \mathbb{Q})$ 上单值作用的不变部分中。□

本节最后给出一个充分判据，用以判断一个簇的双代数闭包是否具有贫瘠性。

引理 3.3。设 Z 是 $\mathbb{A}_g$ 的不可约闭子簇，则 $Z \cap Z^{\mathrm{biZar},\ \mathrm{reg}} \neq \emptyset$。设 Y 是 $\mathfrak{A}_g$ 的不可约闭子簇。则 $\pi(Y) \cap \pi(Y^{\mathrm{biZar}})^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$。若 Y_{exc} 在 Y 中是稀疏的，则 $Y^{\mathrm{biZar},\ \mathrm{exc}}$ 在 Y_{biZar} 中是稀疏的。

证明。首先我们证明 Z 不包含在 Z^{biZar}的奇异轨迹中。事实上，成为 Z^{biZar} 的奇异点是在 $\mathbb{A}_g$中的一个代数条件。 $Z^{\mathrm{biZar}}(\mathbb{C})$在 $\mathfrak{H}_g \to \mathbb{A}_g^{\mathrm{an}}$下的原像的一个分支是代数的。因此，成为奇异点也是 $\mathfrak{H}_g$中的一个代数条件。所以， $Z \setminus Z^{\mathrm{biZar}_{,\mathrm{reg}}}$的每个不可约分支都是双代数的。由于 Z^{biZar} 是包含 Z 的最小双代数子簇，我们有$_{Z \cap Z^{\mathrm{biZar},\mathrm{reg}}} \neq \emptyset$。由此得到第一部分结论。

第二个断言由第一个断言以及 $\pi(Y_{\mathrm{biZar}}) = \pi(Y)^{\mathrm{biZar}}$ 得出。

第三个断言由第二个断言以及取 $X = Y^{\mathrm{biZar}}$ 的引理 2.5 得出。 □

4. A Criterion for Non-degeneracy

回想一下， $\mathfrak{A}_g$ 是定义在一个数域上的几何不可约准射影簇。我们仍将这个数域视为 $\mathbb{C}$的子域。本节余下部分中，我们将所有子簇都视为定义在 $\mathbb{C}$上的。

设 $X \subseteq \mathfrak{A}_g$ 为一个不可约闭子簇。我们定义

$$\delta(X) = \dim X^{\mathrm{biZar}} - \dim \pi(X^{\mathrm{biZar}}) \geq 0,$$

并且对于 $t \in \mathbb{Z}$，还有

$$X^{\mathrm{deg}}(t) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ \delta(Y) < \dim Y + t \\ \dim Y > 0}} Y \tag{4.1}$$

其中 Y 遍历 X的正维不可约闭子簇。因此

$$X^{\mathrm{deg}}(t) \subseteq X^{\mathrm{deg}}(t+1).$$

根据 [Gao20a 定理 7.1]， $X^{\deg}(t)$ 在 X 中是扎里斯基闭的。此外，如果 X 定义在某个特征为零的代数闭域 $L \subseteq \mathbb{C}$ 上，那么 $X^{\deg}(t)$ 也定义在 L上；参见 [Gao21 命题 4.2.6]。

注 4.1。在继续之前，让我们看看当 $\pi(X)$ 是一个点时的 $X^{\deg}(t)$。此时， X 包含在 π 的一个纤维中： $\mathfrak{A}_g \to \mathbb{A}_g$，它是一个阿贝尔簇。将这个阿贝尔簇记为 A。对于 X 的每个不可约子簇 Y，我们有 $\delta(Y) =$ 维数 $Y_{\text{双代数}} \geq$ 维数 Y。特别地， $X^{\deg}(t) = \emptyset$ 当且仅当 $t \leq 0$。

根据 *[UY11，命题 5.1]*， A 的任意双代数子簇都是 A 中的一个陪集，即 A 中某个阿贝尔子簇的平移。反过来， A 中的任意陪集都是双代数的。因此， $Y_{\text{双代数}}$ 是包含 Y 的 A 的最小陪集。现在，如果 $\delta(Y) <$ 维数 $Y + 1$，那么 $Y_{\text{双代数}} = Y$。因此， $X^{\deg}(1)$ 是 A 中所有包含于 X 的正维陪集之并。这正是上野轨迹或川又轨迹。

对于仍处于 A 中的一般 t 和 X，并集 $X^{\deg}(t)$ 曾由 R´emond *[R´em09, §3]* 以及 Bombieri、Masser 和 Zannier 在乘法情形 *[BMZ07,BMZ08]* 中以（b-）异常的名称进行研究。

我们探讨 $X = X^{\deg}(t)$ 成立时的必要条件。作为一项一般性结果，我们提及 [Gao20a, Theorem 8.1]，本文的论述深受该参考文献的启发。我们的方法基于这样的假设： $X^{\deg}(t)$ 包含 X^{an} 的一个非空开子集。

我们沿用 §3.1 开头所介绍的相同设定。

引理 4.2. 设 $Y \subseteq \mathfrak{A}_g$ 是一个不可约闭子簇，且 Y^{exc} 在 Y 中是稀疏的。令 S 表示 $\pi(Y_{\text{双有理}})$ 的正则轨迹。那么 $\pi(Y) \cap S \neq \emptyset$，并且存在 $\varphi \in$自同态环$(\mathfrak{A}_g,\ s/S)$ 满足以下性质：

(i) 对所有 $s \in S(\mathbb{C})$，我们都有 dim ker $\varphi_s = \delta(Y)$。 (ii) 对所有 $s \in S(\mathbb{C})$，纤维 $Y_{\text{双代数}s}$ 都是 $(\ker \varphi_s)^0$ 的有限个平移之并。(iii) 对所有 $s \in S(\mathbb{C})$，阿贝尔簇 $\varphi(\mathfrak{A}_g)_s$ 两两同构。(iv) 若 $\delta(Y) = 0$，则 Y 是一个点。

证明。回顾一下， $\pi(Y)^{\text{biZar}}$ 是包含 $\pi(Y)$ 的 $\mathbb{A}_g$ 的最小双代数子簇，并且它等于 $\pi(Y^{\text{biZar}})$。

由引理 3.3， $Y_{\text{双代数稀疏}}$ 在 $Y_{\text{双代数}}$ 中是稀疏的，且 $\pi(Y) \cap S \neq \emptyset$。

由命题 3.2 应用于 $Y_{\text{双代数}}$， Y^{biZar} 在 $\pi(Y^{\text{biZar}})$ 的复点上方的每个纤维都是维数为 $\delta(Y)$ 的陪集之有限并。

我们将 $\mathcal{A} = \pi^{-1}(S)$ 记作简写。我们将引理 2.3 应用于阿贝尔概形 $\mathcal{A}/S$ 和子簇 $Y^{\text{biZar}} \cap \mathcal{A}$。令 φ 为上述引理中的自同态。

由引理 2.3(ii) 的结论可得，对于所有 $s \in S(\mathbb{C})$，都有 dim ker $\varphi_s =$ dim $Y_{\text{扎里斯基双有理}} \cap \mathcal{A}$ – dim $\pi(Y_{\text{扎里斯基双有理}} \cap \mathcal{A}) = \delta(Y)$。由此即得 (i)。为便于后文引用，我们指出，若 $\delta(Y) = 0$，则 φ是恒等映射；见引理 2.3。

由引理 2.3(i) 可得 dim $\varphi(Y$扎里斯基双有理$\cap \mathcal{A})$ = dim $\pi(Y$扎里斯基双有理$\cap \mathcal{A})$。由纤维维数定理，$\pi|_{\varphi(Y^{\text{biZar}} \cap \mathcal{A})}$: $\varphi(Y$扎里斯基双有理$\cap \mathcal{A}) \to \pi(Y$扎里斯基双有理$\cap \mathcal{A}) = S$的泛纤维是有限的。对于 S的一个扎里斯基开非空子集中的 s，有 $\varphi(Y$扎里斯基双有理$\cap \mathcal{A})_s$ 是有限的。因此， Y扎里斯基双有理$_s$ 包含于此类 s对应的 $(\ker \varphi_s)^0$ 的有限并中。由维数关系可知，这些 Y扎里斯基双有理$_s$ 是 $(\ker \varphi_s)^0$ 与 $(\ker \varphi_s)^0 + Y$扎里斯基双有理$_s$ $= Y$扎里斯基双有理$_s$ 的有限并。

注意，由于 $(\ker \varphi)^0$ 是阿贝尔概形，因此它在 S 上光滑，且具有几何不可约的一般纤维。此外， $Y_{\text{biZar}} \cap \mathcal{A}$ 在 Y_{biZar} 中是扎里斯基开集，因而不可约。它

由纯粹的拓扑考量可知，$(\ker\ \varphi)^0 \times_S (Y^{\mathrm{biZar}} \cap \mathcal{A})$ 不可约。在加法映射下，非空开子集映至 $Y^{\mathrm{biZar}} \cap \mathcal{A}$。这一结论在 $(\ker\ \varphi)^0 \times_S (Y^{\mathrm{biZar}} \cap \mathcal{A})$ 的整个范围内仍成立。因此，$(\ker\ \varphi_s)^0 + Y^{\mathrm{biZar}}_s = Y^{\mathrm{biZars}}$。由维数考虑，$Y^{\mathrm{biZars}}$ 是所有 $s \in S(\mathbb{C})$ 的 $(\ker \varphi_s)^0$ 的有限并。结论 (ii) 得证。

对于所有 $s \in S(\mathbb{C})$，像 $\varphi(\mathfrak{A}_{g,s}) = \varphi(\mathfrak{A}_g)_s$ 都与 $\mathfrak{A}_{g,s}/(\ker \varphi_s)^0$同源。根据命题 3.2，对于所有 s，后者都是两两同构的阿贝尔簇。通过考虑到某个合适模空间的态射，我们得出 $\varphi(\mathfrak{A}_g)_s$ 确实两两同构。由此得出 (iii)。

为证明 (iv)，我们假设 $\delta(Y) = 0$。如上所述，φ 是恒等映射。因此，$\mathfrak{A}_{g,s}$ 对于 $s \in S(\mathbb{C})$都是两两同构的阿贝尔簇。这意味着 S 是一个点，$\pi(Y)$也如此。但此时 $\pi(Y^{\mathrm{biZar}})$ 是一个点。由于 $0 = \delta(Y)$ =维数 Y^{biZar}–维数 $\pi(Y^{\mathrm{biZar}})$，我们有 Y^{biZar} 是一个点。Y也同样如此，由此完成 (iv) 的证明。□

现在我们可以证明 $X^{\deg}(t)$ 足够大时的一个必要条件。下一个命题依赖于前面的引理和贝尔纲定理；请注意，阿贝尔概形的自同态环至多是可数无限集。

命题 4.3. 设 $t \in \mathbb{Z}$，且 X 是 $\mathfrak{A}_g$的一个不可约闭子簇。令 η表示 $\pi(X)$的泛点，并令 S 表示 $\pi(X)$的正则轨迹。我们假设

(a) $X^{\deg}(t)$包含 X^{an}中的一个非空开子集；(b) X_η 不包含在$\mathfrak{A}_{g,\eta}$的某个适当代数子群中，

存在一个由 X 和$\varphi \in$ 的正维不可约闭子簇构成的集合 $\mathcal{Y}$，以及$\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{A}_{g,S}/S)$，满足以下性质，其中所有 $Y \in \mathcal{Y}$均成立。

(i) 对所有 $s \in S(\mathbb{C})$，我们有 $\dim \ker\ \varphi_s = \delta(Y)$。(ii) 对于 $\pi(Y)$的扎里斯基开稠密子集中的所有复点s，纤维 Y^{biZars}是$(\ker \varphi_s)^0$ 的平移的有限并。(iii) 对于 $\pi(Y)$ 的扎里斯基开稠密子集中的所有复点 s，阿贝尔簇 $\varphi(\mathfrak{A}_g)_s$ 两两同构。(iv) 我们有 $\delta(Y) <$ 维数$Y + t$ 且 $\pi(Y) \cap S \neq \emptyset$。(v) 集合 Y^{exc} 在 Y中是稀疏的。

最后，$\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y(\mathbb{C})$ 在 X^{an} 中的闭包具有非空内部。

证明。根据假设 (b) 以及应用于 $X \subseteq \mathfrak{A}_g$的引理 2.4，我们知道 X^{exc} 在 X中是稀疏的。因此，存在 $X^{\mathrm{exc}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i(\mathbb{C})$，使得所有 $X_i \subsetneq X$ 都是扎里斯基闭的。出于类似原因，并利用命题 2.2，存在扎里斯基闭的 S_1、S_2、$\ldots \subsetneq \pi(X)$，其中包括 $\pi(X) \setminus S$，且满足 $S^{\mathrm{exc}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(\mathbb{C})$。

根据假设，所有维数为 $\dim Y > 0$ 的 $Y \subseteq X$ 的并集以及

$$\delta(Y) = \dim Y^{\mathrm{biZar}} - \dim \pi(Y^{\mathrm{biZar}}) < \dim Y + t \tag{4.2}$$

包含 X^{an}的一个非空开子集。令 $\mathcal{Y}$ 为满足$Y \not\subseteq \pi^{-1}(S_i)$且对所有 i都有 $Y \not\subseteq X_i$ 的那些 Y 的集合。存在一个集合 $N \subseteq X(\mathbb{C})$，它在 X中是稀疏的，使得$N \cup \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y(\mathbb{C})$包含 X^{an}的一个非空开子集。

令 $Y \in \mathcal{Y}$ 任意。特别地，$\pi(Y) \cap S \neq \emptyset$。设 $U_Y = \pi(Y) \cap \pi(Y_{\text{双扎里斯基}})^{\mathrm{reg}} \cap S$；根据引理 3.3，它是 $\pi(Y)$ 的扎里斯基开稠密子集。因此，根据 $\mathcal{Y}$ 的选取，对所有 i，都有 $U_Y \not\subseteq S_i$。贝尔纲定理意味着 $U_Y(\mathbb{C}) \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(\mathbb{C})$，所以$U_Y(\mathbb{C}) \not\subseteq S^{\mathrm{exc}}$。

根据定义，我们有 $Y^{\mathrm{exc}} \subseteq X^{\mathrm{exc}}$，因此 $Y_{\text{例外}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(Y \cap X_i)(\mathbb{C})$。根据 $\mathcal{Y}$ 的选取，我们得出 $Y_{\text{例外}}$ 在 Y 中是稀疏的。

将引理 4.2 应用于 Y，得到 φ_Y，并将 φ_Y 限制为阿贝尔概形 $\pi^{-1}(U_Y)$ 的自同态。取 $s \in U_Y(\mathbb{C}) \setminus S^{\mathrm{exc}}$。于是 $\varphi_Y|_{\pi^{-1}(s)} \in \mathrm{End}(\mathfrak{A}_{g,s})$ 可延拓为 $\mathfrak{A}_{g,S}/S$ 的一个自同态。此延拓唯一，且在 $\pi^{-1}(U_Y)$ 上与 φ_Y 一致。我们用 φ_Y 表示 $\mathfrak{A}_{g,S}/S$ 的这个自同态。注意，对所有 $s \in S(\mathbb{C})$，$\delta(Y) = \dim \ker(\varphi_Y)_s$。

回忆一下，$N \cup \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y^{\mathrm{an}}$ 包含 X^{an} 的一个非空开子集。我们重新整理这个并集，并得出该开子集包含于 $N \cup \bigcup_{\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{A}_{g,S}/S)} \overline{D_\varphi}$，其中 $D_\varphi = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}:\varphi_Y = \varphi} Y(\mathbb{C})$，而 $\overline{D_\varphi}$ 表示 X^{an} 中的拓扑闭包。

由贝尔纲定理，存在 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{A}_{g,S}/S)$，使得 $\overline{D_\varphi}$ 在 X^{an}中具有非空内部。特别地，D_φ 在 X 中扎里斯基稠密。

我们断言，将 $\mathcal{Y}$ 替换为 $\{Y \in \mathcal{Y}$ 后，命题：$\varphi_Y = \varphi\}$仍成立。事实上，性质 (i)、(ii) 和 (iii) 由引理 4.2 的相应性质推出，而性质 (iv) 和 (v) 则由 $\mathcal{Y}$ 的选取推出。 □

注 4.4. 情形 $t = 0$ 与 Betti 映射的大纤维密切相关；Betti 映射的定义见[Gao20a, §3]。Betti 映射是实解析的，并在局部定义于 $X^{\mathrm{reg,an}}$上。假设微分的泛秩严格小于 2 维数 X。若 X 在[DGH21, 定义 1.5]的意义下不是非退化的，则属于这种情形。于是存在 X^{an} 的一个非空开子集，在该子集上，秩处处严格小于 2 维数 X。利用第一作者关于 $\mathfrak{A}_g$ 的 Ax–Schanuel 定理 [Gao20b]，可以推出 $X^{\mathrm{deg}}(0)$ 包含 X^{an}的一个非空开子集。因此，命题 4.3 中关于 $t = 0$ 的假设 (a) 得以满足。等价条件亦见 [Gao20a, 定理 1.7]。

5. The Zeroth Degeneracy Locus in a Fiber Power

我们沿用 §4 中的记号，并认为所有子簇都定义在 $\mathbb{C}$上。我们研究命题 4.3 在 $t = 0$ 情形下的推论，其中涉及 π的 m重纤维幂 $\mathfrak{A}_g^{[m]}$：$\mathfrak{A}_g \to \mathbb{A}_g$，这里 $m \in \mathbb{N}$。存在一个自然态射 $\mathfrak{A}_g^{[m]} \to \mathfrak{A}_{mg}$，它是模映射 $\mathbb{A}_g \to \mathbb{A}_{mg}$ 的基变换；该模映射将阿贝尔簇映到与主极化和层结构相容的其 m次幂。可以证明，$\mathbb{A}_g \to \mathbb{A}_{mg}$ 是一个闭浸入。因此，$\mathfrak{A}_g^{[m]} \to \mathfrak{A}_{mg}$ 是一个闭浸入。我们将 $\mathfrak{A}_g^{[m]}$视为 $\mathfrak{A}_{mg}$的一个闭子簇。

稍微滥用记号，令 $\pi\colon \mathfrak{A}_{mg} \to \mathbb{A}_{mg}$ 表示结构态射。

设 X 是定义在 $\mathbb{C}$上的阿贝尔簇 A 的一个扎里斯基闭子集。X 的稳定子 $\mathrm{Stab}(X)$是由 $\{P \in A(\mathbb{C}) : P + X = X\}$确定的代数群。

定理 5.1. 设 X 是 $\mathfrak{A}_g^{[m]}$的一个不可约闭子簇。考虑 $X \subseteq \mathfrak{A}_{mg}$，并令 η 表示 $\pi(X) \subseteq \mathbb{A}_{mg}$ 的泛点。我们假设

(a) $X^{\mathrm{deg}}(0)$ 包含 X^{an}的一个非空开子集；(b) X_η 不包含于 $\mathfrak{A}_{mg,\,\eta}$的真代数子群中；(c) 并且

$$\dim X \leq 2m. \tag{5.1}$$

那么以下结论成立。

(i) 存在一个扎里斯基开稠密子集 $U \subseteq \pi(X)$，使得对于所有 $s \in U(\mathbb{C})$，稳定子 $\mathrm{Stab}(X_s)$ 的维数至少为 m。(ii) 存在一个扎里斯基稠密子集 $D \subseteq \pi(X)(\mathbb{C})$，使得对于所有 $s \in D$，稳定子 $\mathrm{Stab}(X_s)$ 都包含 E^m，其中 $E \subseteq \mathfrak{A}_{g,\,s}$ 是一条椭圆曲线。

证明。我们在 $t=0$ 的情形下对 $X \subseteq \mathfrak{A}_{mg}$ 应用命题 4.3，得到 $\mathcal{Y}$ 和 φ。记 S 为 $\pi(X) \subseteq \mathbb{A}_{mg}$ 的正则轨迹，记 $\mathcal{B}$ 为 $\varphi(\mathfrak{A}_{g\,S}^{[m]},\,)$ 上的阿贝尔概形，见引理 2.1。

设 $Y \in \mathcal{Y}$。注意到，根据命题 4.3(i)，$\delta = \delta(Y) \geq 0$ 与 Y 无关。

$\mathcal{B}_{\pi^{-1}(Y)} \to \pi(Y)$ 的一般纤维是一个阿贝尔簇 B，定义在 $\pi(Y)$ 的函数域上。根据命题 4.3(iii)，存在 $\pi(Y)$ 的函数域的有限扩张 L，使得基变换 B_L 是 L 上的常阿贝尔簇。我们有 $\dim B_L = mg - \delta$。记 A_L 为 $\mathfrak{A}_g$ 的一般纤维的基变换，$\pi^{-1}(Y) \to \pi(Y)$。那么 B_L 是 A_L^m 的一个商。因此，$A_L^m \to B_L$ 经由 $\mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(A_L^m)_L$ 分解，其中 $\mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(\cdot)$ 表示一个定义在 L 上的阿贝尔簇的 $L/\mathbb{C}$-像；定义和性质见 [Con06]。由于 $A_L^m \to B_L$ 是满射，我们有 $\dim B_L \leq \dim \mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(A_L^m) = m \dim \mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(A_L)$。由 (4.2) 取 $t=0$，可得

$$mg - \dim Y < mg - \delta = \dim B_L \leq m \dim \mathrm{Im}_{L/\mathbb{C}}(A_L), \tag{5.2}$$

由于 $Y \subseteq X$ 我们有 $\dim Y \leq \dim X$。假设 $\dim X \leq 2m$ 结合 (5.2) 得出 $m(g-2) < m \dim \mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(A_L)$。消去 m 后得到

$$\dim \mathrm{Im}_{L/\mathbb{C}}(A_L) \geq g - 1.$$

如果 $\pi(Y)$ 是一个点，那么 $\pi(Y^{\mathrm{biZar}}) = \pi(Y)^{\mathrm{biZar}}$ 也是一个点。再由 (4.2) 和 $t=0$ 可知 $\dim Y_{\text{双有理}} < \dim Y$，这与 $Y \subseteq Y_{\text{双有理}}$ 矛盾。因此

$$\dim \pi(Y) \geq 1.$$

由此我们得出 $\dim \mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(A_L) < g$，否则 $\mathfrak{A}_g$ 在 $\pi(Y)$ 上的一般纤维将是两两同构的阿贝尔簇。因此

$$\dim \mathrm{Im}_{L/\mathbb{C}}(A_L) = g - 1.$$

典范态射 $A_L \to \mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(A_L)_L$ 是满射且核连通 E，因为我们处于特征零的情形。这里 E 是一条椭圆曲线，且 $\mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(E) = 0$。回顾一下，$\varphi$ 诱导了一个同态 φ_L: $A_L^m \to B_L$，且 B_L 是一个常阿贝尔簇。复合态射 $E^m \to A_L^m \xrightarrow{\varphi_L} B_L$ 经由 $E^m \to \mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(E^m)_L = \mathrm{Im}^{L/\mathbb{C}}(E)_L^m = 0$分解。因此，$E^m$ 属于 φ_L的核。特别地，

$$\delta = \dim \ker \varphi_L \geq m. \tag{5.3}$$

我们固定一个不可约簇 W，其函数域为 L，以及一个拟有限主态射 $W \to \pi(Y)$。将 W 替换为一个扎里斯基开子集后，我们可以分别将 A_L和 E扩张为 W上的阿贝尔概形 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{E}$。$\mathcal{E}/W$的 j-不变量是一个态射 $W \to \mathbb{A}^1$。如果 $\dim W > 1$，那么存在一条不可约曲线 $W' \subseteq W$，在其上j 为常数。$W'(\mathbb{C})$ 上方的所有椭圆曲线在 $\mathbb{C}$ 上同构。但这样一来，$\pi(\mathbb{C})$ 中各点上方，$\mathcal{A}_g$ 的无限多个纤维两两同构。这是不可能的，因此 $\dim W \leq 1$。但是 $\dim W = \dim \pi(Y) \geq 1$，因此

$$\dim \pi(Y) = 1. \tag{5.4}$$

回想一下，φ 在曲线 π（Y）上除有限多个点外均有定义。还要回想，ker φ 包含一般纤维上一条椭圆曲线的 m 次幂。因此，对于除有限多个 $s \in \pi$（Y）（$\mathbb{C}$）之外的所有情形，ker φ_s都包含 $\mathfrak{A}_{g,\ s}$ 中的一条椭圆曲线的 m 次幂。

由命题 4.3(i) 和 (ii)，我们对某个扎里斯基开稠密的 $U_Y \subseteq \pi(Y)$ 得出如下结论。若 $s \in U_Y$ ($\mathbb{C}$)，则 Y_s 包含于 (ker φ_s)^0 的有限个平移的并中。后者是一个维数为 δ 的代数群。设 $P \in \pi|_Y^{-1}(U_Y)(\mathbb{C})$，其中 $\pi(P) = s$。包含 P 的 Y_s 的任一不可约分支 C 的维数至少为 dim Y −dim $\pi(Y)$。因此，由 (5.4) 和取 $t = 0$ 的 (4.2)，有 dim $C \geq$ dim $Y - 1 \geq \delta$。但 $C \subseteq Y_s$，故 C 包含于 (ker φ_s)^0 的一个平移中。因此 $C = P + (\ker\ \varphi)_s^0 \subseteq X$。我们得出

$$\dim_P \varphi|^{-1}_{X \cap \mathfrak{A}_{g,S}^{[m]}}(\varphi(P)) \geq \delta \quad \text{for all} \quad P \in \pi|_Y^{-1}(U_Y)(\mathbb{C}) \text{ and all } Y \in \mathcal{Y}. \tag{5.5}$$

通过可能从 U_Y 中去除有限多个点，我们可以安排使得对于所有 $P \in \pi|_Y^{-1}(U_Y)(\mathbb{C})$，(ker $\varphi_{\pi(P)}$)^{0}包含 $\mathfrak{A}_{g,\ \pi(P)}$ 中某条椭圆曲线的 m 次幂。

我们记作 $D = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \pi|_Y^{-1}(U_Y(\mathbb{C}))$。$D$ 在 X^{an} 中的闭包等于$\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y(\mathbb{C})$ 在 X^{an}中的闭包。事实上，这需要一些点集拓扑知识，以及$\pi|_Y^{-1}(U_Y(\mathbb{C}))$ 在 Y中稠密这一事实。特别地，根据命题 4.3，D 在 X 中扎里斯基稠密。

因此，（5.5）在 X 的扎里斯基稠密子集 D 上成立。由纤维维数的半连续性定理，对所有 $P \in (X \cap \mathfrak{A}_{g\ S}^{[m]},\ )(\mathbb{C})$，维数不等式都成立。

φ: $\mathfrak{A}_g^{[m],\ S} \to \varphi(\mathfrak{A}_{g\ S}^{[m],\ })$ 的每个纤维都是某个 (ker $\varphi_{\pi(P)}$)^0, 的平移，其维数为 δ。我们得出，若 $P \in (X \cap \mathfrak{A}_{g\ S}^{[m]},\ )(\mathbb{C})$，则 $\varphi|_X^{-1}(\varphi(P))$ 包含 $P +$(ker $\varphi_{\pi(P)}$)^0 作为一个不可约分支。因此，(ker $\varphi_{\pi(P)}$)^0 位于 $X_{\pi(P)}$ 的稳定子中。

定理的第一个断言由 (5.3) 得出，其中 $U = \pi(X \cap \mathfrak{A}_{g\ S}^{[m]},\ ) = S$.

第二个断言成立，因为对于所有s 属于 $\pi(D)$的情形，ker φ_s 都包含一条椭圆曲线的 m次幂；而 $\pi(D)$在 $\pi(X)$中扎里斯基稠密。□

对于阿贝尔簇 A 和 $m \in \mathbb{N}$，我们定义 D_m: $A^{m+1} \to A^m$ 为由 $D_m(P_0, \ldots, P_m) = (P_1 - P_0, \ldots, P_m - P_0)$ 确定的 Faltings– Zhang 态射。

引理 5.2. 设 A 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的阿贝尔簇，$C \subseteq A$ 是维数为 1 的不可约闭子簇。假设 $m \geq 2$ 且 $X = D_m(C^{m+1}) \subseteq A^m$。若 B 是 A 的阿贝尔子簇，且 $B^m \subseteq \mathrm{Stab}(X)$，则 $B = 0$，或者 C 是 B 的一个平移。

证明。令 φ: $A \to A/B$ 表示商同态，$\varphi^m \to A^m/B^m$ =$(A/B)^m$ 表示其 m 次幂。我们令 $Z = \varphi^m(X)$。于是 dim $Z \leq$ dim $X - m$dim B，因为 B^m 属于 X的稳定子。我们有 dim $X \leq C^{m+1} = m + 1$。因此

$$0 \leq \dim Z \leq \dim X - m \dim B \leq m + 1 - m \dim B. \tag{5.6}$$

这意味着 dim $B \leq 1 + 1/m < 2$，因为 $m \geq 2$。

设 $B \neq 0$，则 dim $B = 1$。因此，由 (5.6) 得 dim $Z \leq 1$。我们有

$$(\varphi(P_1 - P_0), \ldots, \varphi(P_m - P_0)) = \varphi^m(P_1 - P_0, \ldots, P_m - P_0) \in Z(\mathbb{C})$$

对所有 $P_0, \ldots, P_m \in C(\mathbb{C})$ 均成立。我们固定 P_0，令 $P_1, \ldots, P_m$ 变化。由于 dim $Z \leq 1$ 且 $m \geq 2$，可知 φ 在曲线 C上为常数。基于维数的考虑，我们得出 C等于 B的一个平移。□

推论 5.3. 设 $g \geq 2$、$m \geq 2$，并设 X 是 $\mathfrak{A}_g^{[m]}$的不可约闭子簇，且 dim $\pi(X) \leq m - 1$。我们假设，对于 s 的一个扎里斯基开

稠密子集 $\pi(X)$ 中的所有复点，纤维 X_s 具有形式 $D_m(C^{m+1})$，其中 $C \subseteq \mathfrak{A}_{g,\ s}$ 不包含在 $\mathfrak{A}_{g,\ s}$的某个真代数子群的平移中。则 $X^{\deg}(0)$ 不包含 X^{an}的非空开子集。此外， X 上的一般贝蒂秩为 $2\dim X$，并且 X 在 [DGH21，定义 1.5]的意义下是非退化的。

证明。设 $X_s = D_m(C^{m+1})$ 满足假设中的条件 C。特别地， C 不等于 $\mathfrak{A}_{g,s}$ 中某个阿贝尔子簇的平移。由引理 5.2，$\mathrm{Stab}(X_s)$ 不包含 $\mathfrak{A}_{g,s}$ 中某个非零阿贝尔子簇的 m 次幂。因此，定理 5.1 的结论 (ii) 不成立。

此外， X_s 不包含于 $\mathfrak{A}_{g\ ,s}^{m}$ 的任何真代数子群中，而且对于 $\pi(X)$ 的泛点，这一结论仍然成立。此外， $X \leq$ 的维数 $\dim \pi(X)\ + m + 1 \leq (m-1)\ + m + 1 = 2m$。因此，定理 5.1 的假设 (b) 和 (c) 成立。故假设 (a) 不成立。这就是推论的第一个断言。第二个断言由注 4.4 得出。□

6. The First Degeneracy Locus and the Relative Manin–Mumford Conjecture

本节阐述第一作者在 [Gao20a] 中所作的命题 11.2 的证明。我们采用略有不同的方法，将主要精力集中于具有适当层结构的主极化阿贝尔簇万有族的子簇。

我们沿用 §3.1 中的记号，但增加一项重要限制。令 $g \geq 1$ 为一个整数，并为 $\mathbb{A}_g$ 配备适当的层结构。令 $\pi\colon \mathfrak{A}_g \to \mathbb{A}_g$ 表示万有族。本节中，我们将 $\mathfrak{A}_g$ 和 $\mathbb{A}_g$ 视为定义在数域 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的不可约拟射影簇，其中 $\overline{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的代数闭包。

挠点集合 $\mathfrak{A}_{g,\ \mathrm{tors}}$ 是 $\bigcup_{s\in\mathbb{A}_g\ (\mathbb{C})} \{P \in \mathfrak{A}_{g,s}(\mathbb{C})\colon\ P$ 具有有限阶。 $\}$.

这里我们考察相对 Manin–Mumford 猜想的一个变体，该变体受 S. Zhang [Zha98] 的启发，并在 Pink [Pin05] 以及 Bombieri–Masser–Zannier [BMZ07] 的工作中得到表述。关于一种表述，我们还参阅 Zannier 的著作 [Zan12]。与一般情形不同，我们保留 $\mathfrak{A}_g$ 作为环境群概形，并且只处理定义在$\overline{\mathbb{Q}}$上的代数簇。

下面的猜想取决于维数参数 $g \in \mathbb{N}$。

猜想 RelMM(g)。设 X 是定义在$\overline{\mathbb{Q}}$ 上的 $\mathfrak{A}_g$ 的不可约闭子簇，并令 $\eta \in \pi(X)$ 表示泛点。我们假设 $\dim X < g$，且 X_η 不包含于 $\mathfrak{A}_g$的真代数子群中，$_\eta$。则 $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathfrak{A}_{g,\ \mathrm{tors}}$ 在 X 中不是扎里斯基稠密的。

对于曲线而言，这一猜想已得到证明，即使是在 $\mathbb{C}$上也是如此，这得益于 Masser–Zannier 以及 Corvaja–Masser–Zannier [MZ08,MZ12,MZ14,MZ15,CMZ18,MZ20]的工作。Stoll [Sto17]证明了一个明确的情形。对于曲面，部分结果归功于第一作者 [Hab13] 以及 Corvaja–Tsimerman–Zannier [CTZ23]。

本节的目标是在以下猜想的条件下，对所有 g 证明猜想 RelMM(g)。下文中，下标 $\mathbb{C}$表示对 $\mathbb{C}$ 作基变换。

猜想 6.1. 设 $g \in \mathbb{N}$，设 X 是定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的 $\mathfrak{A}_g$ 的不可约闭子簇。若 $\dim\ X > 0$ 且 $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathfrak{A}_{g,\ \mathrm{tors}}$ 在 X 中扎里斯基稠密，则 $X_{\mathbb{C}}^{\deg}(1)$ 在 X 中扎里斯基稠密。

我们将通过对 g 进行归纳来实现这一目标。归纳步骤是有条件的，具体如下定理所述。

定理 6.2。假设猜想 6.1 成立。设 $g \geq 2$ 是一个整数，并假设对所有 $g' \in \{1, \dots, g-1\}$，RelMM(g') 猜想均成立。那么 RelMM(g) 猜想成立。

证明。设 $X \subseteq \mathfrak{A}_g$ 是定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上、满足 RelMM(g) 猜想假设的不可约闭子簇。令 η 表示 $\pi(X)$ 的泛点。我们假设 $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathfrak{A}_{g,\,\mathrm{tors}}$ 在 X 中扎里斯基稠密，并由此导出矛盾。

我们注意到维数 $X > 0$。因此，猜想 6.1 蕴含 $X_{\mathbb{C}}^{\deg}$ (1) 在 X 中扎里斯基稠密。（注意，X 满足维数 $X < g$ 以及关于 X_η 的一个条件，但调用猜想 6.1 并不要求同时满足这两个条件。）根据 Gao20a 定理 7.1]，$X_{\mathbb{C}}^{\deg}$ (1) 在 X 中是扎里斯基闭的。因此 $X_{\mathbb{C}} = X_{\mathbb{C}}^{\deg}$ (1)。

由引理 2.4，且由于 X_η 不包含在 $\mathfrak{A}_{g,\eta}$的真代数子群中，我们得出 X^{exc} 在 X中是稀疏的。

在情形 $t = 1$ 下，我们可以将命题 4.3 应用于 $X_{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{A}_{g,\mathbb{C}}$，此时假设 (a) 和 (b) 均满足，因为 X 如同 RelMM 猜想(g) 中所述。我们得到命题中所述的 $\mathcal{Y}$ 和 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{A}_{g,S}/S)$，其中 S 是 $\pi(X)$ 的正则轨迹。（注意，φ 定义在$\overline{\mathbb{Q}}$上。）令 δ 表示所有 $Y \in \mathcal{Y}$对应的 $\delta(Y)$ 的公共值。

注意，$\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} Y \cap \mathfrak{A}_{g,S,\mathbb{C}}$ 在 $X_{\mathbb{C}}$中扎里斯基稠密。假设所有 $Y \in \mathcal{Y}$的维数 $\dim Y$ 相等并无妨；对于 $\dim \pi(Y)$，也可以作同样的假设。

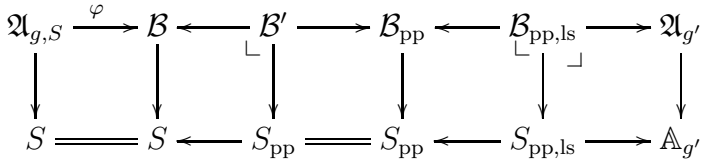
设 $\mathcal{B} = \varphi(\mathfrak{A}_{g,S})$，这是一个定义在 S 上的相对维数为 g'的阿贝尔概形。

对每个 $Y \in \mathcal{Y}$，由命题 4.3(v)，例外轨迹 Y^{exc} 在 Y 中是稀疏的。因此，$Y_{\mathrm{biZar}^{\mathrm{exc}}}$ 由引理 3.3 可知在 Y_{biZar} 中是稀疏的。将命题 3.2(i) 应用于 Y^{biZar}，可知每个 Y_{biZars} 都是有限个 unif($\{\tau\} \times W$) 的并，其中 $s =$ 属于 unif(τ)；这里，$W \subseteq \mathbb{R}^{2g}$ 是一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的线性子空间，其维数为 $\dim W = 2\delta$，且与 s 无关。回顾一下，若 $s \in S(\mathbb{C})$，则根据命题 4.3(ii)，Y_{biZars} 是 $(\ker \varphi_s)^0$, 的有限个平移之并。

对于每个 $s \in S(\mathbb{C})$，自同态 φ_s 可提升为一个线性映射 $\mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{R}^{2g}$，将 $\mathbb{Z}^{2g}$ 映到其自身。该提升与 s 无关，并且必然在 W 上为零。因此，~ ~$\varphi(Y^{\mathrm{an}} \cap \mathfrak{A}_{g,S}^{\mathrm{an}})$ 是 unif($Y \times$ {有限集}) 的像，其中 unif(Y) $= \pi(Y) \cap S(\mathbb{C})$。

阿贝尔概形 $\mathcal{B}/S$ 未必是主极化的。但其几何泛纤维与一个主极化阿贝尔簇同源。我们固定一个 ´étale 态射$S_{\mathrm{pp}} \to S$，其基变换为 $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \times_S S_{\mathrm{pp}}$，如下面的图（6.1）所示。经过铺开，并在必要时用扎里斯基开稠密子集替换 S_{pp}，我们可以使$\mathcal{B}' \to \mathcal{B}_{\mathrm{pp}}$ 成为 S_{pp} 上的逐纤维同源，且 $\mathcal{B}_{\mathrm{pp}}$ 是主极化的。但此时，来自$\mathfrak{A}_{g,S}$ 的层结构可能已在同源映射下丢失。为解决这一问题，我们再固定一个 ´étale 态射 $S_{\mathrm{pp,ls}} \to S_{\mathrm{pp}}$，并进行基变换，以便为 $\mathcal{B}_{\|}$ 添加适当的挠截面，最终获得合适的层结构。这不会影响主极化。因此，我们得到一个具有合适层结构的主极化阿贝尔概形 $\mathcal{B}_{\mathrm{pp,ls}}/S_{\mathrm{pp,ls}}$。其相对维数等于 $\mathcal{B}/S$的相对维数。我们得到一个映入相应精细模空间的笛卡尔图，如右侧所示

在下面的交换图中

(6.1)


我们通过取原像和像，沿着对应关系 $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}' \to \mathcal{B}_{\mathrm{pp}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathrm{pp}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathrm{pp,ls}} \to \mathfrak{A}_{g'}$ 追踪 $\varphi(X \cap \mathfrak{A}_{g,S}) \subseteq \mathcal{B}$，并在 $\mathfrak{A}_{g'}$ 内像的扎里斯基闭包中固定一个不可约分支 X'。考虑 $Y \in \mathcal{Y}$，并按照刚才所述沿图追踪 $\varphi(Y \cap \mathfrak{A}_{g,S,\mathbb{C}}) \subseteq \mathcal{B}$。回想一下，$\varphi(Y(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{A}_{g,S}(\mathbb{C}))$ 是 unif($Y \times$ {有限集}) 的像~。在底空间的欧几里得拓扑下的局部范围内，我们的阿贝尔概形在实解析范畴中是平凡的。此外，$S(\mathbb{C}) \cap \pi(Y(\mathbb{C}))$ 上方的所有阿贝尔簇都同构，这是命题 3.2(ii) 的结论。因此，$\varphi(Y(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{A}_{g,S}(\mathbb{C}))$ 最终成为 $\mathfrak{A}_{g'}$ 中的有限集。由此，应用这两个对应关系后，其纤维的维数至少为 $\dim \varphi(Y \cap \mathfrak{A}_{g,S,\mathbb{C}}) = \dim \pi(Y)$。因此，通过分析这两个对应关系的纤维可得，$\dim X' \leq \dim \varphi(X \cap \mathfrak{A}_{g,S,\mathbb{C}}) - \dim \pi(Y)$。

注意到 $\dim \varphi(X \cap \mathfrak{A}_{g,\ S}) \leq \dim X - (\dim Y - \dim \pi(Y))$，因为 $Y \to \pi(Y)$ 的所有纤维在 φ 下的像都是有限的。我们得到 $\dim X' \leq \dim X - \dim Y < g - \dim Y$，这里用到了 $\dim X < g$。

$\mathcal{B}/S$ 的相对维数为 $g' = g - \delta$。由于 $\mathcal{Y}$ 中所有元素的维数都为正，将引理 4.2(iv) 应用于 $\mathcal{Y}$ 中的一个元素可得 $\delta \geq 1$。因此，$g' \leq g - 1$。此外，由命题 4.3(iv) 及 $t = 1$，我们有 $\delta \leq \dim Y$。由此得出 $\dim X' < g - \dim Y \leq g - \delta = g'$。特别地，$g' \geq 1$。

沿图追踪 $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathfrak{A}_{g,\ \mathrm{tors}}$ 中的扎里斯基稠密挠点集，可知 $X'(\overline{\mathbb{Q}})$ 中的挠点在 X' 中扎里斯基稠密。根据 RelMM(g) 中关于 X 的假设，$\varphi(X \cap \mathfrak{A}_{g,\ S}) \to S$ 的一般纤维不包含在 $\mathcal{B} \to S$ 的一般纤维的任何真代数子群中。这意味着 $X' \to \pi(X')$ 的一般纤维不包含在 $\mathfrak{A}_{g',\ \pi^{-1}(X')} \to \pi(X')$ 的一般纤维的任何真代数子群中。

回想一下，$g' \in \{1, \ldots, g-1\}$，因此根据假设，RelMM($g'$)成立。然而，$X'$ 的性质与 RelMM(g')的结论相矛盾。□

推论 6.3. 猜想 6.1 蕴含对所有 $g \in \mathbb{N}$，RelMM 猜想(g)。

证明。根据定理 6.2，只需证明 RelMM(1)。猜想 RelMM(1) 中关于 $\dim X$ 的条件意味着 X 是一个点。关于 X_η 和 $g = 1$ 的条件意味着 X 不是挠点。因此，猜想 RelMM(1)成立。□

References

[And92] Y. Andr´e. 混合霍奇结构的 Mumford-Tate 群与不变部分定理。Compositio Math., 82(1):1–24, 1992.[BD22] F. Barroero and G. Dill. 关于复阿贝尔簇的 Zilber–Pink 猜想。《比萨高等师范学校科学年刊》，55(1):261–282, 2022.[Ber20] D. Bertrand. 重探 Manin核定理。图卢兹数学科学学院年鉴 (6)，29(5):1301–1318, 2020.[BL04] C. Birkenhake and H. Lange. 复阿贝尔簇。Springer, 2004.

[BMZ07] E. Bombieri, D.W. Masser, and U. Zannier. 异常子簇——结构定理与应用。国际数学研究通知，(19):1–33, 2007.[BMZ08] E. Bombieri, D. Masser, and U. Zannier. 复代数簇与环面的不太可能的交。《算术学报》，133(4):309–323, 2008.[BSCFN23] D. Bl´azquez-Sanz, G. Casale, J Freitag, and J. Nagloo. Ax–Schanuel 的微分方法 I。arXiv:2102.03384, 2023.[CMZ18] P. Corvaja, D. Masser, and U. Zannier. 阿贝尔概形上的挠超曲面与 Betti 坐标。《数学年刊》，371(3):1013–1045, 2018.[Con06] B. Conrad. Chow 的 K/k-像与 K/k-迹，以及 Lang-N´eron 定理。Enseign. Math. (2), 52(1-2):37–108, 2006.[CTZ23] P. Corvaja, J. Tsimerman, and U. Zannier. 双椭圆纤维化曲面上的有限轨道与截面的挠值。预印本 arXiv:2302.00859, 2023.[Del71] P. Deligne. 霍奇理论：II。Publications Math´ematiques de l'IH´ES, 40:5–57, 1971.[Del81] Pierre Deligne. 只有普通双重点的平面曲线之补空间的基本群是阿贝尔群（据 W. Fulton）。载于《布尔巴基讨论班》，1979/80 年卷，数学讲义第 842 卷，第 1–10 页。Springer, Berlin-New York, 1981.[DGH21] V. Dimitrov, Z. Gao, and P. Habegger. 曲线的 Mordell–Lang 一致性。《数学年刊》，194(1):237–298, 2021.[FC90] G. Faltings and C.-L. Chai. 阿贝尔簇的退化，数学及其边界领域成果 (3) 第 22 卷。Springer-Verlag, Berlin, 1990。附录由 David Mumford 撰写。[Gao17a] Z. Gao. 阿贝尔簇万有族中的 Andr´e-Pink-Zannier 特殊点问题。比萨高等师范学校科学年刊 (5)，17(1):231–266, 2017.[Gao17b] Z. Gao. 关于混合 Shimura 簇的 Andr´e-Oort 猜想：Ax-Lindemann-Weierstrass 定理及特殊点伽罗瓦轨道的下界。《克雷尔数学杂志》，732:85–146, 2017.[Gao20a] Z. Gao. Betti 映射的泛秩与不太可能的交。Compos. Math., 156(12):2469–2509, 2020.[Gao20b] Z. Gao. 阿贝尔簇万有族的混合 Ax–Schanuel 定理及其若干应用。Com- pos. Math., 156(11):2263–2297, 2020.[Gao21] Z. Gao. 代数簇上点的分布：各个方面及其相互作用。研究指导资格证书（研究指导资格证书），索邦大学，2021。[GGK21] Z. Gao, T. Ge, and L. K¨uhne. 一致莫德尔–朗猜想。arXiv: 2105.15085, 2021.[GW10] U. G¨ortz and T. Wedhorn. 代数几何 I。高等数学讲座。Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010。附有示例和习题的概形。[Hab13] P. Habegger. 魏尔斯特拉斯形式椭圆曲线上的挠点。比萨高等师范学校科学年刊 (5)，12(3):687–715, 2013.[K¨uh21] L. K¨uhne. 阿贝尔簇族中的等分布与一致性。arXiv: 2101.10272, 2021.[Mas96] D. W. Masser. 阿贝尔簇自同态环的特化。法国数学会通报，124(3):457–476, 1996.[Moo98] B. Moonen. Shimura 簇的线性性质 I。《代数几何杂志》，7(3):539–567, 1998.[MZ08] D.W. Masser and U. Zannier. 挠异常点与椭圆曲线族。《数学报告》，346(9):491–494, 2008.[MZ12] D. Masser and U. Zannier. 椭圆曲线平方族中的挠点。《数学年刊》，352(2):453–484, 2012.[MZ14] D. Masser and U. Zannier. 椭圆曲线乘积族中的挠点。《数学进展》，259:116–133, 2014.

[MZ15] D. Masser 和 U. Zannier。《简单阿贝尔曲面族上的挠点与多项式环上的佩尔方程》（附录由 E. V. Flynn 撰写）。《欧洲数学学会杂志》，17:2379–2416，2015。[MZ20] D. Masser 和 U. Zannier。《挠点、佩尔方程与初等项积分》。《数学学报》，225(2):227–312，2020。[Pin05] R. Pink。《Mordell–Lang 猜想与 Andr´e–Oort 猜想的一种结合》。载于《代数与数论中的几何方法》，数学进展丛书第 235 卷，第 251–282 页。Birk¨auser，2005。[R´em09] G. R´emond。《子群与子簇的交集 III》。《海尔维提数学评论》，84(4):835–863，2009。[Sil92] A. Silverberg。《阿贝尔簇同态的定义域》。《纯粹与应用代数杂志》，77(3):253–262，1992。[Sto17] M. Stoll。《勒让德族中的同时挠点》。《实验数学》，26(4):446–459，2017。[UY11] E. Ullmo 和 A. Yafaev。《特殊子簇的刻画》。《Mathematika》，57(2):263–273，2011。[Zan12] U. Zannier。《算术与几何中的若干不太可能的交问题》，数学年刊研究丛书第 181 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012。附录由 David Masser 撰写。[Zha98] S Zhang。《小点与阿拉克洛夫理论》。载于《国际数学家大会论文集》第二卷，第 217–225 页，1998。

IAZD (Institute of Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics), Leibniz University Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover, Germany电子邮箱: ziyang.gao@math.uni-hannover.de

Department of Mathematics and Computer Science, University of Basel, Spiegel-gasse 1, 4051 Basel, Switzerland电子邮箱：philipp.habegger@unibas.ch