arXiv:2303.04943v1 [math.PR] 8 Mar 2023

零温下的球面混合 $p-$ 自旋玻璃

YUXIN ZHOU

Abstract. 我们研究球面混合 $p-$ 自旋模型，并考察零温下帕里西测度的结构。我们证明，对于具有 n 个分量的球面自旋模型，零温下的帕里西测度至多为 $n-$RSB 或 $n-$FRSB。我们还给出了一个必要且充分的计算判据，用于判定球面混合 $p-$ 自旋模型属于 $k-$RSB 还是 $k-$FRSB， $k \leq n$.

1. Introduction and main results

固定 N， $n>1$。考虑整数 p_1， $\cdots$， p_n，满足 $2<p_1<p_2<\cdots<p_n$ 且 λ_1， λ_2， $\cdots$， $\lambda_{n-1} \in[0,1]$。令 $\lambda_n=1-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$.。球面混合 p 自旋模型的哈密顿量是定义在 N 维球面 S_N: $=\left\{\sigma \in \mathbb{R}^N: \sum_{i=1}^N \sigma_i^2=N\right\}$ 上的高斯函数

$$H_N(\sigma):=\sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_{p_j} \leq N} \frac{\sqrt{\lambda_j}}{N^{\frac{p_j-1}{2}}} g_{i_1, \ldots, i_{p_j}} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{p_j}},$$

其中，所有（$g_{i_1, \cdots, i_{p_j}}$）、 $1 \leq i_1$， $\cdots$， $i_{p_j} \leq N$、 $j=1$， $\cdots$， n均为相互独立、同分布的标准高斯随机变量。

高斯场 H_N 是中心化的，其协方差为:

$$\mathbb{E} H_N(\sigma^1) H_N(\sigma^2)=N \xi(R_{1,2}),$$

wh其中$R_{1,2}:=\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^1 \sigma_i^2$是 σ^1 与 σ^2 之间的归一化内积 nd

$$\xi(x):=\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cdot x^{p_j}+\left(1-\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j\right) \cdot x^{p_n}. \tag{1}$$

配分函数 $Z_N=\int_{S_N} \exp \left(\beta H_N(\sigma)\right) d \sigma$ 以及最大值

$$M_N=\max_{\sigma \in S_N} H_N(\sigma)$$

长期以来，物理学和数学界都对其进行了研究。关于这方面的结果，可参阅 Mezard-Parisi-Virasoro的著作 [6], Talagrand [10], 近期综述 [1]及其中大量的参考文献。

记 $\mathcal{K}$ 为 $[0,1]$ 上的一族测度 ν，其形式为

$$\nu(d s)=\mathbb{1}_{[0,1)} \gamma(x) d x+\Delta \delta_{\{1\}}(d x),$$

其中， $\gamma(x)$ 是定义在 $[0,1)$ 上的非负、右连续且非递减函数， $\Delta>0$，且 $\delta_{\{1\}}$ 是集中于 1 的狄拉克测度。对于 $\nu \in \mathcal{K}$，定义 Crisanti-Sommers 泛函 [4] 为

$$\mathcal{Q}(\nu)=\frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \xi'(x) \nu(d x)+\int_0^1 \frac{d x}{\nu\big((x, 1]\big)}\Big).$$

关于最大能量的 Parisi 公式（见 [3, 定理 1]）指出，几乎必然有

$$\lim_{N \to \infty} N^{-1} M_N=\inf_{\nu \in \mathcal{K}} \mathcal{Q}(\nu).$$

Crisanti-Sommers 泛函 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{K}$ 上严格凸，因此右侧有唯一的极小化者，记为

$$\nu_P(dx) = \gamma_P(x)\mathbb{1}_{[0,1)}(x)dx + \Delta_P\delta_{\{1\}}(dx).$$

我们将由 γ_P 诱导的 $[0,1$ 上的测度记为 ρ_P，即

$$\gamma_P(x) = \rho_P([0,x]), \forall x \in [0,1),$$

并称 ν_P 为零温下的帕里西测度。在任意正温 β 下，Parisi 公式同样成立，即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) = \inf_{\mu}\mathcal{P}_\beta(\mu), \tag{2}$$

其中，式（2）中的下确界取遍 $[0,1]$ 上的概率测度空间，且 $\mathcal{P}_\beta$ 是定理1中所述的 Parisi 泛函 [9, 。1] 并且 [4]。式（ μ_P（β）2）的极小化者也是唯一的，称为逆温度 β 下的帕里西测度。

过去几十年来，帕里西测度在物理学和数学领域都备受关注。众所周知，帕里西测度的结构从定性上描述了相应哈密顿量的能量景观，并与一大类优化算法的效率相关 [5, 7, 8]。尽管序参量的作用和重要性已得到揭示，许多模型中的帕里西测度结构仍有待发现。近期，已有研究刻画了具有两个分量的球面模型的完整相图 [2]。然而，随着分量数量增加，零温下帕里西测度的结构可能性也大幅增多，仍需深入研究。

在本文中，我们研究具有任意分量数的球面对称自旋模型。我们证明，对于具有 n 个分量的球面模型，零温下帕里西测度的支撑集至多包含 $n+1$ 个孤立点。因此，帕里西测度至多为 $n-$RSB 或$n-$FRSB。

我们还为具有 n 个分量的球面模型提供了计算判据，以验证 $k-$RSB 和 $k-$FRSB 相，其中 $k \le n$。该计算判据通过用一些更有序、也更容易验证的不等式替代精确方程，降低了验证零温下帕里西测度的难度。我们列举了一个具有 3个分量的特定球面自旋模型作为示例，说明如何通过计算判据确定零温下帕里西测度的各相。

我们首先定义球面混合 $p-$自旋模型在零温下帕里西测度的可能结构 ν_P如下。

定义 1 (k-RSB)。 对于 $k \ge 0$，零温下的帕里西测度 ν_P 具有 k 步副本对称性破缺，或者等价地，该模型称为零温下的 ***k-RSB***（图 *1*），当且仅当 ν_P的支撑集是离散的，且恰有 $k+1$ 个点。具体而言，存在非负递增数列 $\{m_i\}_{i=1}^k$ 和 $\{q_i\}_{i=0}^k$，满足 $q_0 = 0$，$q_k = 1$ 使得 $\nu_P \in \mathcal{K}$ 具有如下形式

$$\nu_P(dx) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \mathbb{1}_{[q_{i-1},q_i)}(x)dx + \Delta \cdot \delta_{\{1\}}(dx).$$

当 $k = 0$ 且随后 $\nu_P(dx) = 0\cdot\mathbb{1}_{[0,1)}(x)dx+\Delta\cdot\delta_{\{1\}}(dx)$时，该模型在零温下也称为复制对称（*RS*）。

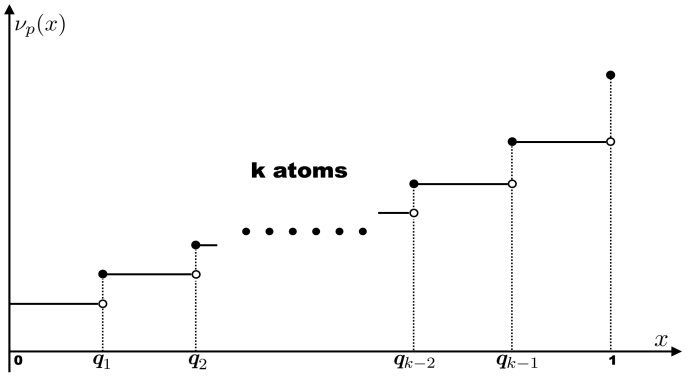

FIGURE 1. k-RSB 零温帕里西测度。

定义 2 (k-FRSB)。 若对于 $k>0$，存在以下条件，则称帕里西测度 ν_P 在零温下为 ***k-FRSB***:

(1) $s_1+s_2+\cdots+s_t=k$ 对某个固定的 $t\in[1,k]$. 定义 $w_j=\sum_{i=1}^{j}s_i$，其中 $j=0$、1、2、$\cdots$、t.(2) $q_l^j\in(0,1],$，其中 $q_{w_{j-1}}^{j-1}<q_{w_{j-1}}^{j}<q_{w_{j-1}+1}^{j}<\cdots<q_{w_j}^{j}$，对于 $j=1$、$\cdots$、t 以及 $l=w_{j-1}$、$w_{j-1}+1$、$\cdots$、w_j。令 $q_0^0=q_0^1=0$ 和 $q_{w_t}^t=1$。(3) $0<m_1<m_2<\cdots<m_k$, (4) 一个严格递增函数 $w(x)$,

使得 ν_P 具有以下形式

$$\nu_P(dx)=\sum_{j=1}^{t}\sum_{l=w_{j-1}+1}^{w_j}m_l\cdot\mathbb{1}_{[q_{l-1}^j,q_l^j)}(x)dx+\sum_{j=1}^{t-1}\omega(x)\cdot\mathbb{1}_{[q_{w_j}^j,q_{w_j}^{j+1})}(x)dx+\Delta\cdot\delta_{\{1\}}(dx).$$

注1。我们定义集合 $\mathcal{F}:=\{w_j|q_{w_j}^j\neq q_{w_j}^{j+1},j=1,\cdots t-1\}$，它标记了帕里西测度 ν_P. 中完全复制对称性破缺的位置。更具体地说，对于 $w_j\in\mathcal{F}$，第 w_j- 个原子和第 $w_{j+1}-$ 个原子之间存在光滑密度，它是 $j-$ 中第 ν_P 个光滑密度。当 $t=0$ 且 $\mathcal{F}$ 为空时，帕里西测度 ν_P 便是 k-RSB。下图 2 给出了一个 k-FRSB 零温帕里西测度的示例。

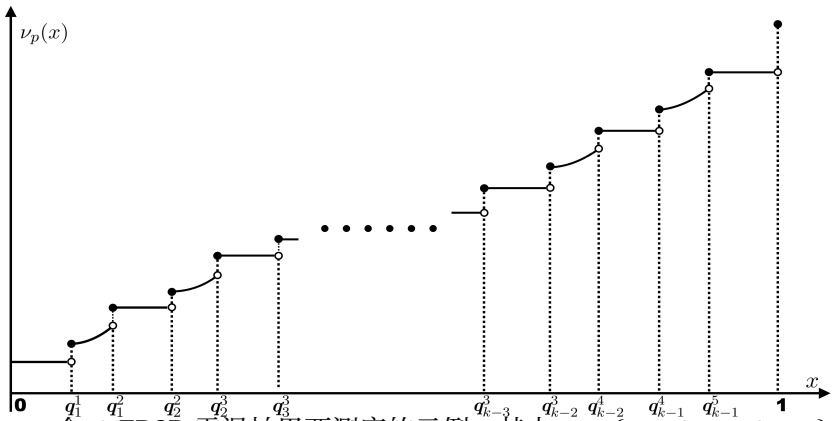

FIGURE 2. 一个 k-FRSB 零温帕里西测度的示例，其中$\mathcal{F}=\{1,2,k-2,k-1\}$。在此情形下，$s_1=s_2=s_4=s_5=1$，$s_3=k-4$ 且 $t=5$。

根据上述两个定义，如果零温下的帕里西测度 ν_P 对某个 $k\leq n.$ 是 k-RSB 或 k-FRSB，则称其至多为 n-RSB 或 n-FRSB

关于零温下的帕里西测度 ν_P，我们的主要结果如下：

定理1. 对于具有 $\xi(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot x^{p_i}$ 个分量的球面模型，零温下的帕里西测度ν_P至多为 n-*RSB* 或 n-*FRSB*，即 ν_P的支撑集至多包含 $n+1$个孤立点。

对于由 $\{A_i\}_{1\le i\le t}$ 构成且满足 $A_i\subseteq\mathbb{R}^{s_i}$ 的有限非空子集序列，我们定义以下关系：

$$A_1\tilde{<}A_2\tilde{<}\cdots\tilde{<}A_{t-1}\tilde{<}A_t,$$

如果满足以下条件：

(1) 对于 $i=1,\ \cdots,\ t-1$，$\max_{(x_1,\cdots,x_{s_i})\in A_i}x_{s_i}\le\min_{(x_1,\cdots,x_{s_{i+1}})\in A_{i+1}}x_1$,

(2) $\forall(x_1,\ \cdots,\ x_{s_1})\in A_1,\ \ x_1=0.\ \forall(x_1,\ \cdots,\ x_{s_t})\in A_t,\ \ x_{s_t}=1.$

接下来，我们给出以下判据，通过一系列集合 $\mathcal{H}$ 来刻画模型 ξ 在零温下的帕里西测度 ν_P；这些集合将在后文定义。我们首先针对 $k\le n$，引入一个判据，用于判断零温下的帕里西测度是否为 k–RSB：

定理 *2.* </style}模型 ξ 在零温下的帕里西测度 ν_P 是 k–*RSB*，当且仅当

(1) </style}存在 $(0,x_1,\cdots,x_{k-1},1)$ </style}使得 .(2) </style}不存在 $(0,x_1,\cdots,x_k,1)$ </style}使得 $\bar{x}\in\mathcal{H}^{k+1}$。

类似地，针对 $k\le n$，我们引入以下判据，用于判断零温下的帕里西测度是否为 k–FRSB：

定理 *3.* </style}模型 ξ 在零温下的帕里西测度 ν_P 是 k–*FRSB*，当且仅当对于 $1\le t\le k$ 以及满足 $s_1+s_2+\cdots+s_t=k$ 的 $s_1,s_2,\cdots,s_t\ge 0$，

(1) 关系 $\mathcal{H}^{s_1}\tilde{<}\mathcal{H}^{s_2}\tilde{<}\cdots\tilde{<}\mathcal{H}^{s_t}$ 成立，(2) 对于任意 $j\ =\ 1、\ \cdots、\ t$，关系 $\mathcal{H}^{s_1}\cdots\tilde{<}\mathcal{H}^{s_{j-1}}\tilde{<}\mathcal{H}^{s_j+1}\tilde{<}\mathcal{H}^{s_{j+1}}\tilde{<}\cdots\tilde{<}\mathcal{H}^{s_t}$ 或$\mathcal{H}^{s_1}\cdots\tilde{<}\mathcal{H}^{s_{j-1}}\tilde{<}\mathcal{H}^{1}\tilde{<}\mathcal{H}^{s_j}\tilde{<}\cdots\tilde{<}\mathcal{H}^{s_t}$ 均不成立。

事实上，当 $k=n$时，定理 2 中的条件 (2) 会自动满足。因此，对于零温下的帕里西测度，我们得到以下结果：其为 n-RSB：

推论 4。 对于 ξ，零温下的帕里西测度 ν_P 是 n-*RSB*，当且仅当存在$\bar{x}=(0、\ x_1、\ \cdots、\ x_{n-1}、1)$ 使得 $\bar{x}\in\mathcal{H}^n$。

备注 2。为了证明帕里西测度是 n-阶破缺副本对称，我们现在只需找到一些 $\bar{x}\in\mathcal{H}^n$，而不是求解 n 个精确方程，这大大降低了验证难度。

此外，当 $k=n$，定理 3 中的条件 (2) 也自动满足。因此，我们得到以下关于零温下帕里西测度为 n–FRSB 的结果：

推论 5。 当且仅当对于$1\le t\le n$ 以及 $s_1、\ s_2、\ \cdots、\ s_t\ge 0$ 满足 $s_1+s_2+\cdots+s_t=n$时，零温下 ξ 的帕里西测度 ν_P 为 n–*FRSB*，且 $\mathcal{H}^{s_1}\tilde{<}\mathcal{H}^{s_2}\tilde{<}\cdots\tilde{<}\mathcal{H}^{s_t}$ 成立。

现在我们固定 $0<k\le n$，并如下引入集合 $\mathcal{H}$ 的定义。我们首先定义以下函数

$$h(x,y,z)=\xi(y)-\xi(x)-\xi'(x)(y-x)+\big[\xi'(y)-\xi'(x)\big](y-x)\Big(\frac{1}{(z-1)}-\frac{z}{(z-1)^2}\log(z)\Big),$$

$$r_1(x,y,z)=\frac{[\xi'(z)-\xi'(y)](z-x)}{(z-y)[\xi'(z)-\xi'(x)]}\ \text{and}\ r_2(x,y)=\frac{\xi''(y)(y-x)}{[\xi'(y)-\xi'(x)]}.$$

对于任意非负整数 i，我们定义 $\iota(i)=\begin{cases}1\\0\end{cases}$，当 i 为偶数时取 **1**，当 i 为奇数时取 **1**。此外，对于 $l>0$ 和 $0\le x_{l-1}\le x_l\le x_{l+1}\le 1$，定义 $\mathbf{r}_l(x)=r_1(x_{l-1},\ x_{l+1},\ x_l)$。

对于任意 $s \geq 0$ 和 $\bar{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_s) \in [0,1]^{s+1}$，我们定义：

$$\mathcal{F}_l^s(\bar{x}) = r_2\big(x_{l-(-1)^{s-l}}, x_l\big) \cdot \prod_{i=1}^{\frac{s-l-\iota(s-l)}{2}} \Big(\frac{\mathbf{r}_{s+1-2i}(x)}{\mathbf{r}_{s-2i}(x)}\Big)^{(-1)^{s-l}}, \text{ for } 0 \leq l \leq s, \tag{3}$$

and

$$\mathcal{A}_l^s(\bar{x}) = r_1\big(x_l, x_{l-(-1)^{s-l}}, x_{l+(-1)^{s-l}}\big) \cdot \prod_{i=1}^{\frac{s-l-\iota(s-l)}{2}} \Big(\frac{\mathbf{r}_{s-2i}(x)}{\mathbf{r}_{s+1-2i}(x)}\Big)^{(-1)^{s-l}}, \text{ for } 1 \leq l \leq s-1. \tag{4}$$

接下来定义

$$\mathcal{Z}^s(x_0, x_1, \cdots, x_s) = \max\Big\{ \max_{0 \leq l \leq s, \iota(s-l)=1} \mathcal{F}_l^s(x), \max_{1 \leq l \leq s-1, \iota(s-l)=0} \mathcal{A}_l^s(x) \Big\},$$

and

$$\mathcal{Y}^s(x_0, x_1, \cdots, x_s) = \max\Big\{ \max_{0 \leq l \leq s, \iota(s-l)=0} \mathcal{F}_l^s(x), \max_{1 \leq l \leq s-1, \iota(s-l)=1} \mathcal{A}_l^s(x) \Big\}.$$

为避免混淆，我们分别将 $\mathcal{Z}^s(x_0, x_1, \cdots, x_s)$ 和 $\mathcal{Y}^s(x_0, x_1, \cdots, x_s)$ 简记为 $\mathcal{Z}^s(\bar{x})$ 和 $\mathcal{Y}^s(\bar{x})$。

对于任意 $s = 1, \cdots, k$，我们为 $(x_0, x_1, \cdots, x_s) \in [0,1]^{s+1}$ 定义如下条件：
条件 $\varkappa(s)$。

(1) $x_0 < x_1 < \cdots < x_s$,

(2) For $1 \leq l \leq s$, $\begin{cases} (-1)^{s-l} h\Big(x_{l-1}, x_l, \mathcal{Z}^s(\bar{x})^{(-1)^{s-l+1}} \mathcal{F}_l^s(\bar{x})^{-1} \cdot r_2(x_{l-1}, x_l)\Big) \geq 0, \\ (-1)^{s-l} h\Big(x_{l-1}, x_l, \mathcal{Y}^s(\bar{x})^{(-1)^{s-l}} \mathcal{F}_l^s(\bar{x})^{-1} \cdot r_2(x_{l-1}, x_l)\Big) \leq 0. \end{cases}$

因此，对于 $s = 1, \cdots, k$，我们定义 $\mathcal{H}$ 如下：

$$\mathcal{H}^s = \Big\{ \bar{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_s) \in [0,1]^{s+1} \Big| \ \bar{x} \text{ satisfies Condition } \varkappa(s) \Big\}.$$

现在我们提供几个例子，以展示如何通过上述引入的计算判据确定零温下 Parisi 测度的各个相。

例 1（具有两个分量的球面模型 [2]）。固定 $n = 2$ 沿用 [2]，$(x_{1\to 2}, \lambda_{1\to 2})$ 中的记号，$x_{1\to 2}, \lambda_{1\to 2})$ 是 $\begin{cases} h(0, x, r_1(0, x, 1)) = 0, h(x\ 1\ r_1\ x\ 1\ 0) = 0, \\ (,\ ,) \text{ 的唯一解，其中 } \lambda_{1\to 2} \text{ 是 1-RSB 相与 2-RSB 相的边界。此外，} (x_{2\to 2F}, \lambda_{2\to 2F}) \text{ 是 } \begin{cases} h(0, x, r_2 \\ (0, x)) = 0, h(x\ 1\ r_2\ 1\ x^{-1}) = 0, \\ (,) \text{ 的唯一解，其中 } \lambda_{2\to 2F} \text{是 2-RSB 相与 2-FRSB 相的边界。} \end{cases} \end{cases}$

令 $s = 2$. 对于 $0 < x < 1$, $\mathcal{Z}^s(x) = \frac{\xi''(x)(1-x)[\xi'(1)-\xi'(x)]}{}$ 且 $\mathcal{Y}^s(x) = \frac{\xi'}{(1)\xi' x^{x}}()$。对于 $x \in \mathcal{H}^2$，有

$$\begin{cases} h\big(0, x, r_1(0, x, 1)\big) \geq 0, h\big(x, 1, r_1(x, 1, 0)\big) \leq 0, \\ h\big(0, x, r_2(0, x)\big) \leq 0, h\big(x, 1, r_2(1, x)^{-1}\big) \geq 0. \end{cases}$$

对于 $\lambda \in [\lambda_{1\to 2}, \lambda_{2\to 2F}]$，有 $0 \tilde{\leq} \mathcal{H}^2 \tilde{\leq} 1$ 并且根据推论 4，零温下的帕里西测度为 2-*RSB*。

现在令 $t = 2$ 且 $s_1 = s_2 = 1$. 对于 $(0, x) \in \mathcal{H}^1$，有

$$h\big(0, x, r_2(0, x)\big) \leq 0,$$

此外，对于 $(x, 1) \in \mathcal{H}^1$，有

$$h\big(x, 1, r_2(1, x)^{-1}\big) \geq 0.$$

若 $0 \tilde{\leq} \mathcal{H}^1 \tilde{\leq} \mathcal{H}^1 \tilde{\leq} 1$，根据定义，最大$_{(0,x)\in\mathcal{H}^1} x \leq$ 最小$_{(x,1)\in\mathcal{H}^1} x$. 对于 $x_1 =$ 最大$_{(0,x)\in\mathcal{H}^1} x$，有$h\big(0, x, r_2(0, x)\big) = 0$. 此外，对于 $x_2 =$ 最小$_{(x,1)\in\mathcal{H}^1} x$，有 $h\big(1, x_2, r_2(1, x_2)^{-1}\big) = 0$.

对于 $\lambda \in [\lambda_{2\to 2F}, \lambda_{2\to 1F}]$，有 $0\tilde{\leq}\mathcal{H}^1\tilde{<}\mathcal{H}^1\tilde{\leq}1$ 且支撑集 $\nu_P = \{0,1\} \cup [x_1, x_2]$. 根据推论5，零温下的帕里西测度因此为 *2-FRSB*。对于 $\lambda \in [\lambda_{2\to 1F}, \lambda_{2\to 1}]$，有$0\tilde{\leq}\mathcal{H}^1\tilde{<}\{1\}$. 在这种情况下，支撑集 $\nu_P = \{0\} \cup [x_1, 1]$. 零温下的帕里西测度因此为 *1-FRSB*。

现在我们考虑一个具有3个分量的特定球面自旋模型。令 $n = k = 3$ and p_1 =4，$p_2 = 28$, $p_3 = 84$. 对于参数 λ_1 and λ_2，的不同取值，以下例子中的零温帕里西测度处于不同的相。

例2 (3-RSB)。令 $\lambda_1 = 0.88$ *and* $\lambda_2 = 0.1118$. 取 $x_1 = 0.9345$ *and* $x_2 = 0.975$. 则对于 $(0, x_1, x_2, 1) \in [0,1]^4$ 满足 $\mathcal{Z}^3(x) = \mathcal{A}_2(x)$ 且 $\mathcal{Y}^3(x) = \mathcal{F}_2(x)$。

容易验证，对于 $(0, x_1, x_2, 1) \in \mathcal{H}^3$,

$$h\Big(0, x_1, \frac{\boldsymbol{r}_1(x)}{\boldsymbol{r}_2(x)} \cdot \mathcal{Z}^3(x)^{-1}\Big) > 0 \text{ and } h\Big(0, x_1, \frac{\boldsymbol{r}_1(x)}{\boldsymbol{r}_2(x)} \cdot \mathcal{Y}^3(x)\Big) < 0,$$
$$h\Big(x_1, x_2, \boldsymbol{r}_2(x) \cdot \mathcal{Z}^3(x)\Big) < 0 \text{ and } h\big(x_1, x_2, \boldsymbol{r}_2(x) \cdot \mathcal{Y}^3(x)^{-1}\big) > 0,$$
$$h\big(x_2, 1, \mathcal{Z}^3(x)^{-1}\big) > 0 \text{ and } h\big(x_2, 1, \mathcal{Y}^3(x)\big) < 0.$$

由此可得 $(0,\ x_1,\ x_2,\ 1)$ 满足条件 $\varkappa(3)$ 且 $(0,\ x_1,\ x_2,\ 1) \in \mathcal{H}^3$。因此，根据推论，零温帕里西测度为 3-*RSB*（图 3）4。

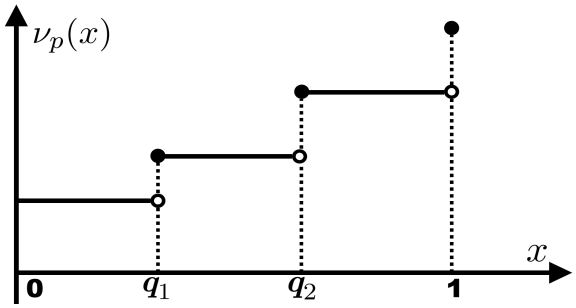

FIGURE 3. 例 2 中零温下的 3-RSB 帕里西测度。

现在我们将关于 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 的下列函数记为:

$$\bar{h}_1^L(x_1) = h\big(0, x_1, r_2(0, x_1)\big) \text{ and } \bar{h}_1^U(x_1, x_2) = h\big(0, x_1, \mathbf{r}_1(x) r_2(x_1, x_2)^{-1}\big),$$
$$\bar{h}_2^L(x_1, x_2) = h\big(x_1, x_2, r_2(x_2, x_1)^{-1}\big) \text{ and } \bar{h}_2^U(x_1, x_2) = h\big(x_1, x_2, r_2(x_1, x_2)\big),$$
$$\bar{h}_3^L(x_1, x_2) = h\big(x_2, 1, r_2(x_2, x_1)\mathbf{r}_2(x)\big) \text{ and } \bar{h}_3^U(x_2) = h\big(x_2, 1, r_2(1, x_2)^{-1}\big).$$

例 3（3-FRSB，$\mathcal{F} = \{1\}$）。令 $\lambda_1 = 0.86$ 且 $\lambda_2 = 0.1253$.

（1）令 $x_1 = 0.929$，则 $\bar{h}_1^L(x_1) \leq 0$，其中 $(0, x_1)$ 满足条件 $\varkappa$（1）。又令 $x_1' = 0.93$，则 $\bar{h}_1^L(x_1') \geq 0$，其中 $(0, x_1')$ 不满足条件 $\varkappa$（1）。此外，根据介值定理，存在 $q_1^1 \in [0.92, 0.93]$ 使得 $\bar{h}_1^L(q_1^1) = 0$。

(2) 令 $x_0^1 = 0.9352, x_1^1 = 0.9497$ 和 $x_0^2 = 0.936, x_1^2 = 0.94975.$。则对于 $(x_0, x_1) \in [x_0^1, x_0^2] \times [x_1^1, x_1^2]$，有 $\mathcal{Z}^2(x) = \mathcal{F}_1(x)$，$\mathcal{Y}^2(x) = \mathcal{F}_0(x)$ 以及

$$\bar{h}_2^U(x_0, x_1) \leq 0, \bar{h}_3^L(x_2) \geq 0.$$

此外，对于 $i = 1,\ 2$,

$$\bar{h}_2^L(x_0^1, x_1^i) \leq 0, \bar{h}_2^L(x_0^2, x_1^i) \geq 0,$$

and

$$\bar{h}_3^L(x_0^i, x_1^1) \leq 0, \bar{h}_3^L(x_0^i, x_1^2) \geq 0.$$

那么根据介值定理，存在 $(q_1^2, q_2^2) \in [x_0^1, x_0^2] \times [x_1^1, x_1^2]$ 使得

$$\begin{cases} \bar{h}_2^L(q_1^2, q_2^2) = 0, \\ \bar{h}_3^L(q_1^2, q_2^2) = 0. \end{cases} \quad Then\ q_1^2 = \min_{(x_0,x_1,1)\in\mathcal{H}^2} x_0.$$

由于 $q_1^1 \leq 0.93 < 0.9352 \leq q_1^2$，因此关系 $\mathcal{H}^1 \tilde{<} \mathcal{H}^2$ 成立。由推论 5可知，帕里西测度为 *3-FRSB*，其中 $\mathcal{F} = \{1\}$（图 4）。在此情形下，*supp* $\nu_P = \{0, q_2^2, 1\} \cup [q_1^1, q_1^2]$.

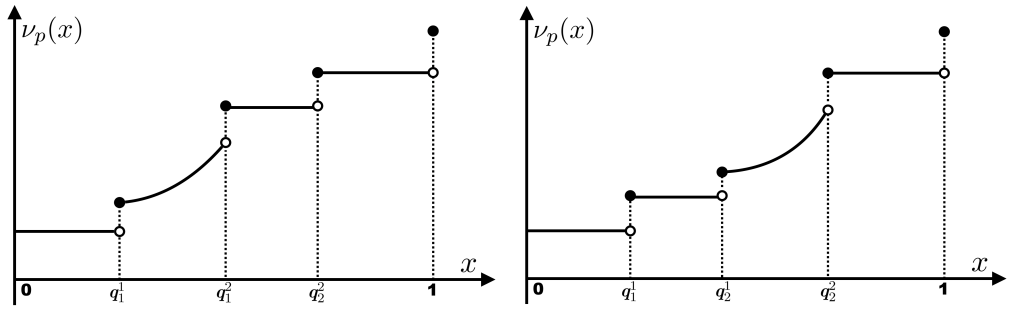

FIGURE 4. 例 3、4中的零温帕里西测度。左侧子图描述的是满足以下条件的零温 3-FRSB 帕里西测度： $\mathcal{F} = \{1\}$。右侧子图描述的是满足以下条件的零温 3-FRSB 帕里西测度： $\mathcal{F} = \{2\}$.

例 4 (3-FRSB，其中 $\mathcal{F} = \{2\}$)。设 $\lambda_1 = 0.88$ 且 $\lambda = 0.1113$.

(1) 令 $x_1^1 = 0.934676, x_2^1 = 0.97136$ 和 $x_1^2 = 0.9346764, x_2^2 = 0.97139$. 则对于 $(x_1, x_2) \in [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^1, x_2^2]$，有 $\mathcal{Z}^2(x) = \mathcal{F}_1(x)$， $\mathcal{Y}^2(x) = \mathcal{F}_2(x)$ 以及

$$\bar{h}_1^L(x_1) \leq 0, \bar{h}_2^L(x_1, x_2) \geq 0.$$

此外，对于 $i = 1,2$,

$$\bar{h}_2^U(x_1^i, x_2^1) \leq 0, \bar{h}_2^U(x_1^i, x_2^2) \geq 0,$$

and

$$\begin{cases} \bar{h}_1^U(x_1^1, x_2^1) \geq 0, \bar{h}_1^U(x_1^1, x_2^2) \leq 0, \\ \bar{h}_1^U(x_1^2, x_2^1) \geq 0, \bar{h}_1^U(x_1^2, x_2^2) \geq 0. \end{cases}$$

于是，根据介值定理，存在 $(q_1^1, q_2^1) \in [x_1^1, x_1^2] \times [x_2^1, x_2^2]$ 使得

$$\begin{cases} h_1^U(q_1^1, q_2^1) = 0, \\ \bar{h}_2^U(q_1^1, q_2^1) = 0. \end{cases} \quad Then\ q_2^1 = \max_{(0,x_1,x_2)\in\mathcal{H}^2} x_2.$$

(2) 令 $x_0 = 0.9714$，则 $h_3(\bar{x_0^U}) \leq 0$，其中 $(x_0, 1)$ 不满足条件 $\varkappa(1)$。此外，令 $x_0' = 0.9715$，则 $\bar{h}_3^U(x_0') \geq 0$，其中 $(x_0', 1)$ 满足条件 $\varkappa(1)$。此外，根据介值定理，存在 $q_2^2 \in [0.9714, 0.9715]$ 使得 $\bar{h}_3^U(q_2^2) = 0$。

由于 $q_2^1 \leq 0.97139 < 0.9714 \leq q_2^2$，因此关系 $\mathcal{H}^2 \tilde{<} \mathcal{H}^1$ 成立。根据推论5，帕里西测度是 *3-FRSB*，且 $\mathcal{F} = \{2\}$（图4）。在这种情况下，*supp* $\nu_P = \{0, q_1^1, 1\} \cup [q_2^1, q_2^2]$.

例 5 （3-FRSB， $\mathcal{F} = \{1, 2\}$）。设 $\lambda_1 = 0.88$ 且 $\lambda_2 = 0.1108$.

(1) 令 $x_1 = 0.9345$，则 $\bar{h}_1^L(x_1) \leq 0$，其中 $(0, x_1)$ 满足条件 $\varkappa(1)$。再令 $x_1' = 0.935$，则 $\bar{h}_1^L(x_1') \geq 0$，其中 $(0, x_1')$ 不满足条件 $\varkappa(1)$。此外，根据介值定理，存在 $q_1^1 \in [0.9345, 0.935]$，使得 $\bar{h}_1^L(q_1^1) = 0$。

(2) $x_1^1 = 0.939$、$x_1^2 = 0.94$ 以及 $x_2^1 = 0.959$、$x_2^2 = 0.961.$。对于 $i = 1, 2$，有

$$\bar{h}_2^U(x_1^i, x_2^1) \le 0, \bar{h}_2^U(x_1^i, x_2^2) \ge 0,$$

and

$$\bar{h}_2^L(x_1^1, x_2^i) \le 0, \bar{h}_2^L(x_1^2, x_2^i) \ge 0.$$

由介值定理，存在$(q_1^2, q_2^2) \in \left[x_1^1, x_1^2\right] \times \left[x_2^1, x_2^2\right]$ 使得$\begin{cases} \bar{h}_2^L(q_1^2, q_2^2) = 0, \\ \bar{h}_2^U(q_1^2\ q_2^2) = 0., \end{cases}$

(3) 令 $x_0 = 0.97$，则 $\bar{h}_3^U(x_0) \le 0$，其中$(x_0, 1)$ 不满足条件 $\varkappa(1)$。另令 $x_0' = 0.972$，则 $\bar{h}_3^U(x_0') \ge 0$，其中$(x_0', 1)$ 满足条件 $\varkappa(1)$。此外，由介值定理，存在 $q_2^3 \in [0.97, 0.972]$ 使得 $\bar{h}_3^U(q_2^3) = 0$。

由于 $q_1^1 \le 0.935 < q_1^2 < q_2^2 < 0.97 \le q_2^3$，因此关系 $\mathcal{H}^1 \tilde{<} \mathcal{H}^1 \tilde{<} \mathcal{H}^1$ 成立。由推论 5可知，帕里西测度是 *3-FRSB*，且 $\mathcal{F} = \{1, 2\}$（图 5）。在此情形下，*supp* $\nu_P = \{0, 1\} \cup \left[q_1^1, q_1^2\right] \cup \left[q_2^2, q_2^3\right]$.

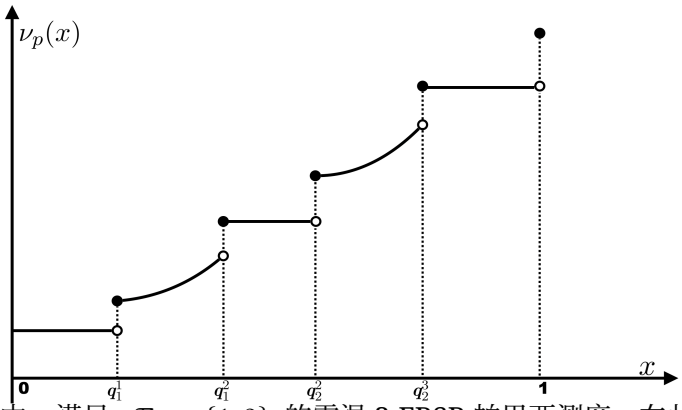

FIGURE 5. 例 5中，满足 $\mathcal{F} = \{1, 2\}$ 的零温 3-FRSB 帕里西测度。在此情形下，$t = 3$ 且 $s_1 = s_2 = s_3 = 1.$

注 3。从上述例子中我们注意到，除了 3-RSB 相之外，具有 3个分量的球面模型中还会出现三种类型的 3-FRSB。帕里西测度的第一个原子与第二个原子之间可能出现光滑密度，也可能出现在第二个原子与第三个原子之间。两段光滑密度也可能同时出现。这让我们直观地认为，在零温下，帕里西测度的任意两个原子之间都可能出现光滑密度。此外，多个光滑密度也可能同时出现在原子之间。因此我们预期，在具有 n 个分量的球面模型的相图中，将出现 $2^n - 1$ 种 n-FRSB。

本文其余部分安排如下：第 ν_P 节推导帕里西测度$k-$为 RSB 的一般判据2，第 ν_P 节推导帕里西测度 $k-$为 FRSB 的一般判据3。第 ν_P 节讨论 $n-$为 RSB 的特定判据4。此外，推论1 在第4节末尾得到证明。最后，定理2、3 以及推论4、5 的证明见第5节。

2. Criteria for $k-$RSB Parisi measure

假设测度 ν 是 $k-$RSB，且其形式为

$$\nu(dx)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot \mathbb{1}_{[q_{i-1},q_i)}(x)dx+\Delta\cdot\delta_{\{1\}}(dx).$$

令 $s=k$。对于 $\bar{q}=(0,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{k-1},\ 1)$ 和 $l=1,\ \cdots,\ k-1$，我们定义

$$\mathcal{F}_l^k=\mathcal{F}_l^s(\bar{q}) \text{ and } \mathcal{A}_l^k=\mathcal{A}_l^s(\bar{q}).$$

接着定义

$$\mathcal{Z}^k=\mathcal{Z}^k(\bar{q}) \text{ and } \mathcal{Y}^k=\mathcal{Y}^k(\bar{q}).$$

此外，令 $s=k+1$. 对于 $l=1,\ \cdots,\ k$ 和 $\bar{x}_l=(0,\ q_1,\ \cdots,\ q_{l-1},\ x,\ q_l,\ \cdots,\ q_{k-1},\ 1)\in[0,1]^{k+2}$，其中$x\in(q_{l-1},\ q_l)$，我们定义

$$\mathcal{A}_l^{k+1}(x)=\mathcal{A}_l^{k+1}(0,q_1,\cdots,q_{l-1},x,q_l,\cdots,q_{k-1},1).$$

and

$$\mathcal{F}_l^{k+1}(x)=\mathcal{F}_l^{k+1}(0,q_1,\cdots,q_{l-1},x,q_l,\cdots,q_{k-1},1).$$

我们给出以下判据，以判断帕里西测度 ν_P 是否为 $k-$RSB：

定理 *6. </style}*对于 ξ，帕里西测度 ν_P 是 $k-RSB$，当且仅当存在唯一的 $0<q_1<q_2<\cdots<q_{k-1}<1$ 和 $z_k>0$，使得以下条件成立

(1) *for* $l=1,\cdots,k$, $h\Big(q_{l-1},q_l,\big(\frac{(1+z_k)}{\mathcal{F}^k_{l-\iota(k-l)}}\cdot r_2(q_{l-\iota(k-l-1)},q_{l-\iota(k-l)})\big)^{(-1)^{k-l}}\Big)=0$,

(2) $\mathcal{Y}^k\le 1+z_k\le\big(\mathcal{Z}^k\big)^{-1}$,

(3) *for* $l=1,\cdots,k$, $h\big(x_l^*,q_l,r_1(x_l^*,q_l,q_{l-1})\big)\ge 0$ *where* $x_l^*\in(q_{l-1},q_l)$ *satisfies that* $1+z_k=\big(\mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)\big)^{(-1)^{k-l}}$.

我们首先给出帕里西测度的一般刻画：

定理 7 （ [3]中的定理 2）。 对于 $\nu_P\in\mathcal{K}$，令

$$g(u)=\int_u^1\Big(\xi'(t)-\int_0^t\frac{dr}{\nu_P((r,1])^2}\Big)dt.$$

那么，当且仅当满足以下条件时， ν_P 才是模型 ξ 的帕里西测度：

(i) $\quad\xi'(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{dr}{\nu_P((r,1])^2}$,

(ii) *the function* g *satisfies* $\min\limits_{u\in[0,1]}g(u)\ge 0$

(iii) *for* $S:=\{u\in[0,1):g(u)=0\}$, *one has* $\rho_P(S)=\rho_P([0,1))$. *Here* ρ_P *is the measure induced by* γ_P, *i.e.*$\rho_P([0,s])=\gamma_P(s)$.

接下来我们给出定理6 的证明：

定理的证明 *6*。 对于 $r\in[q_{l-1},q_l)$ $l=1,\ 2,\ \cdots,\ k$,

$$\nu((r,1])=m_l\cdot(q_l-r)+\sum_{i=l+1}^{k}m_i\cdot(q_i-q_{i-1})+\Delta$$

and

$$\int_{q_{l-1}}^{q_l}\frac{dt}{\nu_P((t,1])^2}=\frac{(q_l-q_{l-1})}{\big[\Delta+\sum_{j=l+1}^{k}m_j(q_j-q_{j-1})\big]\big[\Delta+\sum_{j=l}^{k}m_j(q_j-q_{j-1})\big]}$$

于是，通过直接计算可得，对于 $x \in [q_{l-1}, q_l]$,

$$\begin{aligned} g(x) &= g(q_l) + \int_x^{q_l} \bar{g}(t)dt \\ &= \xi(q_l) - \xi(x) - (q_l - x) \cdot \sum_{i=1}^{l-1} \frac{(q_i - q_{i-1})}{\left[\Delta + \sum_{j=i+1}^k m_j(q_j - q_{j-1})\right]\left[\Delta + \sum_{j=i}^k m_j(q_j - q_{j-1})\right]} \\ &\quad + \frac{q_l - x}{m_l \cdot \left[\Delta + \sum_{j=l}^k m_j(q_j - q_{j-1})\right]} - \frac{1}{m_l^2} \ln\left(1 + \frac{m_l(q_l - x)}{\Delta + \sum_{j=l+1}^k m_j(q_j - q_{j-1})}\right) + g(q_l) \end{aligned}$$

其中 $\bar{g}(t) = \xi'(t) - \int_0^t \frac{dr}{\nu_P \, r((, 1])^2}$

根据定理 7， ν 是 ξ 的帕里西测度当且仅当

$$(1) \quad g(q_l) = \bar{g}(q_l) = 0, \text{ for } l = 1, \cdots k, \tag{5}$$

$$(2) \quad g(u) \geq 0, u \in [0, 1]. \tag{6}$$

于是由条件（5），

$$\bar{g}(q_l) - \bar{g}(q_{l-1}) = 0, \text{ for } l = 1, \cdots k,$$

这意味着

$$\xi'(q_l) - \xi'(q_{l-1}) = \frac{(q_l - q_{l-1})}{\left[\Delta + \sum_{j=l+1}^k m_j(q_j - q_{j-1})\right]\left[\Delta + \sum_{j=l}^k m_j(q_j - q_{j-1})\right]}, \text{ for } l = 1, \cdots k, \tag{7}$$

令 $z_l = \frac{m_l \cdot}{(q_l - q_{l-1})\Delta}$ 对于 $l = 1, 2, \cdots, k$. (7) 可得

$$\Delta^2 = \frac{(1 - q_{k-1})}{[\xi'(1) - \xi'(q_{k-1})]} \cdot \frac{1}{(1 + z_k)} \tag{8}$$

然后对于 $l = 1, \cdots, k - 1$,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=l}^k z_i &= \frac{(q_l - q_{l-1})}{\Delta^2 \cdot [\xi'(q_l) - \xi'(q_{l-1})]} \cdot \frac{1}{(1 + \sum_{i=l+1}^k z_i)} \\ &= \frac{[\xi'(1) - \xi'(q_{k-1})] \cdot (q_l - q_{l-1})}{(1 - q_{k-1}) \cdot [\xi'(q_l) - \xi'(q_{l-1})]} \cdot \frac{(1 + z_k)}{(1 + \sum_{i=l+1}^k z_i)}, \end{aligned} \tag{9}$$

基于上述记号和方程（5）、（8）、（9），我们将 g（u）重写如下，其中 $u \in [q_{l-1}, q_l]$, $l = 1, 2, \cdots, k$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \xi(q_l) - \xi(x) - \frac{(q_l - x)}{\Delta^2} \cdot \sum_{i=1}^{l-1} \frac{(q_i - q_{i-1})}{\left[1 + \sum_{j=i+1}^k z_j\right]\left[1 + \sum_{j=i}^k z_j\right]} \\ &\quad + \frac{(q_l - q_{l-1})(q_l - x)}{\Delta^2 \cdot z_l\left[1 + \sum_{j=l}^k z_j\right]} - \frac{(q_l - q_{l-1})^2}{\Delta^2 \cdot z_l^2} \ln\left(1 + \frac{(q_l - x) \cdot z_l}{(q_l - q_{l-1})\left(1 + \sum_{j=l+1}^k z_j\right)}\right) \\ &= \xi(q_l) - \xi(x) - \xi'(q_{l-1})(q_l - x) + \frac{[\xi'(1) - \xi'(q_{k-1})](1 + z_k)}{(1 - q_{k-1})} \cdot \frac{(q_l - q_{l-1})(q_l - x)}{z_l\left[1 + \sum_{j=l}^k z_j\right]} \\ &\quad - \frac{[\xi'(1) - \xi'(q_{k-1})]}{(1 - q_{k-1})} \cdot \frac{(q_l - q_{l-1})^2(1 + z_k)}{z_l^2} \ln\left(1 + \frac{(q_l - x) \cdot z_l}{(q_l - q_{l-1})\left(1 + \sum_{j=l+1}^k z_j\right)}\right) \end{aligned}$$

特别地，当 $u = q_{l-1}$时，

$$g(q_{l-1}) = \xi(q_l) - \xi(q_{l-1}) - \xi'(q_{l-1})(q_l - q_{l-1}) + \frac{[\xi'(1) - \xi'(q_{k-1})](1+z_k)}{(1-q_{k-1})} \cdot \frac{(q_l - q_{l-1})^2}{z_l\left[1 + \sum_{j=l}^k z_j\right]}$$
$$- \frac{[\xi'(1) - \xi'(q_{k-1})]}{(1-q_{k-1})} \cdot \frac{(q_l - q_{l-1})^2(1+z_k)}{z_l^2} \ln\left(1 + \frac{z_l}{1 + \sum_{j=l+1}^k z_j}\right) = 0. \tag{10}$$

此外，由（8）、（9）可得

$$1 + \sum_{i=l}^k z_i = \begin{cases} (1+z_k) \cdot \prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}} \mathbf{r}_{l+2i}(q), & \text{for } k-l \text{ even}, \\ \prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}} \mathbf{r}_{l+2i}(q), & \text{for } k-l \text{ odd}, \end{cases} \tag{11}$$

然后

$$z_l = \begin{cases} (1+z_k) \cdot \prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}} \mathbf{r}_{l+2i}(q) - \prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}} \mathbf{r}_{l+1+2i}(q), & \text{for } k-l \text{ even}, \\ \prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}} \mathbf{r}_{l+2i}(q) - (1+z_k) \cdot \prod_{i=0}^{\frac{k-l-3}{2}} \mathbf{r}_{l+1+2i}(q), & \text{for } k-l \text{ odd}. \end{cases} \tag{12}$$

注意，对于偶数 $\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}} \mathbf{r}_{l+2i}(q) \cdot \mathbf{r}_{l+1+2i}(q) = \frac{(q_l - q_{l-1}[\xi' q_k - \xi' q_{k-1}])()()()()()()}{q_{l-1}]\, q_k - q_{k-1}}$，而对于奇数 $k-l$ even and $\prod_{i=0}^{\frac{k-l-3}{2}} \mathbf{r}_{l+1+2i}(q) \prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}} \mathbf{r}_{l+2i}(q) = \frac{[\xi'(q_k) - \xi'(q_{k-1})](q_l - q_{l-1})(q_k - q_{k-1})[\xi'(q_l) - \xi'(q_{l-1})]}{}$ for $k-l$ odd。

根据上述记号，我们注意到

$$g(q_{l-1}) \tag{13}$$
$$= \begin{cases} h\left(q_{l-1}, q_l, (1+z_k)\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}} \left(\frac{\mathbf{r}_{l+2i}(q)}{\mathbf{r}_{l+1+2i}(q)}\right)\right), & \text{if } k-l \text{ even}, \\ h\left(q_{l-1}, q_l, \frac{\mathbf{r}_{k-1}(x)}{(1+z_k)}\prod_{i=0}^{\frac{k-l-3}{2}} \left(\frac{\mathbf{r}_{l+2i}(q)}{\mathbf{r}_{l+1+2i}(q)}\right)\right), & \text{if } k-l \text{ odd}, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} h\left(q_{l-1}, q_l, \left(\frac{1+z_k}{\mathcal{F}_l^k}\right) \cdot r_2(q_{l-1}, q_l)\right) = h\left(q_{l-1}, q_l, \left((1+z_k)\mathcal{F}_{l-1}^k \cdot r_2(q_l, q_{l-1})^{-1}\right), & \text{if } k-l \text{ even}, \\ h\left(q_{l-1}, q_l, \left(\frac{\mathcal{F}_{l-1}^k}{1+z_k}\right) \cdot r_2(q_l, q_{l-1})^{-1}\right) = h\left(q_{l-1}, q_l, \left(\mathcal{F}_l^k(1+z_k)\right)^{-1} \cdot r_2(q_{l-1}, q_l)\right), & \text{if } k-l \text{ odd}. \end{cases}$$

对于 $l = 1 \cdots k$，我们定义 $h_l^k(\bar{q},\ 1+z_k) := g(q_{l-1})$，以反映其与 $q_1,\ \cdots,\ q_k,\ 1+z_k$ 和 k，的关系，其中 $\bar{q} = (q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{k-1})$。

注意到，当 $z > 0,\ \ h(x,\ y,\ z)$ 关于 z 严格递增，因此我们有以下命题：

引理 8. 当 $k-l$ 为偶数时，$h_l^k(\bar{q}, 1+z_k)$ 关于 $1+z_k$ 严格递增。类似地，当 $k-l$ 为奇数时，$h_l^k(\bar{q}, 1+z_k)$ 关于 $1+z_k$ 严格递减。

由于 ν_P 是 $[0,1]$, 上的测度，因此对于 $l = 1,\ \cdots,\ k-1$，有 $m_{l-1} < m_l < m_{l+1}$，这意味着

$$\frac{z_{l-1}}{(q_{l-1} - q_{l-2})} < \frac{z_l}{(q_l - q_{l-1})} < \frac{z_{l+1}}{(q_{l+1} - q_l)}.$$

回顾 (3)、(4) 的定义。令 $s = k,\ \ l = 0.$ 并将其应用于 $(q_0,\ q_1,\ \cdots,\ q_{s-1},\ q_s) \in [0,1]^{s+1}$。于是根据 (12)，对于 $k-l$ 为偶数的情形，

$$1 + z_k > \frac{[\xi'(q_l) - \xi'(q_{l-2})](q_{l-1} - q_{l-2})}{(q_l - q_{l-2})[\xi'(q_{l-1}) - \xi'(q_{l-2})]} \cdot \prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}} \frac{\mathbf{r}_{l+1+2i}(q)}{\mathbf{r}_{l+2i}(q)} = \mathcal{A}_{l-1}^k(q), \tag{14}$$

and

$$1 + z_k < \frac{[\xi'(q_{l+1}) - \xi'(q_l)](q_{l+1} - q_{l-1})}{(q_{l+1} - q_l)[\xi'(q_{l+1}) - \xi'(q_{l-1})]} \cdot \prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}} \frac{\mathbf{r}_{l+1+2i}(q)}{\mathbf{r}_{l+2i}(q)} = \frac{1}{\mathcal{A}_l^k(q)}. \tag{15}$$

其中 $q=(0,\ q_1,\ \cdots,\ q_{k-1},\ 1)$。

由（6），可得 $g(u)\geq 0$ 当 $u\in[q_{l-1},q_l]$ 且 $g(q_l)=0,\ \ l=1,\ \ 2,\ \cdots,\ k$，这意味着$g''(q_l)\geq 0$ 当 $l=1,\ \cdots,\ k-1$. 于是得到

$$\xi''(q_l)\leq \frac{1}{\left[\sum_{i=l+1}^{k} m_i\cdot(q_i-q_{i-1})+\Delta\right]^2},$$

$$<=>\quad \frac{[\xi'(1)-\xi'(q_{k-1})]}{\xi''(q_l)\cdot(1-q_{k-1})}\cdot(1+z_k)\geq\left[1+\sum_{i=l+1}^{k} z_i\right]^2.$$

由（11），当 $k-l$ 为偶数时,

$$1+z_k\geq\frac{\xi''(q_l)\cdot(q_k-q_{k-1})}{[\xi'(q_k)-\xi'(q_{k-1})]}\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^2(q)=\mathcal{F}_l^k(q),$$

and

$$1+z_k\leq\frac{[\xi'(q_k)-\xi'(q_{k-1})]}{\xi''(q_{l-1})\cdot(q_k-q_{k-1})}\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}\frac{1}{\mathbf{r}_{l+2i}^2(q)}=\frac{1}{\mathcal{F}_{l-1}^k(q)}.$$

因此，由定理 7，ν_P 是 ν_P 的帕里西测度，当且仅当

(1) $h_l^k(\bar{q},\ 1+z_k)=0$ 当 $l=1,\ \cdots,\ k$(2)

$\mathcal{Y}^k\leq 1+z_k\leq\left(\mathcal{Z}^k\right)^{-1}$, (3) 当 $l=1,\ \cdots,\ k$, g

$(x)>0$ 当 $x\in[q_{l-1},q_l]$.

接下来，我们需要证明上面的条件 (3) 等价于定理 6 中的条件 (3)。等价地，我们需要证明满足 $1+z_k=\mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)$ 的 $x_l^*\in(q_{l-1},q_l)$ 是 $g(x)$ 和 $g(x_l)=h_{l+1}^{k+1}(\bar{x}_l,\mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*))$ 的临界点，其中 $\bar{x}_l=(0,q_1,\cdots,q_{l-1},x_l^*,q_l,\cdots,q_{k-1},1)$。对于 $k-l$ 为偶数且区间 $[q_{l-1},q_l]$，一个临界点 $x_l^*\in[q_{l-1},q_l]$满足 $g(x)$ 的

$$-(1+z_k)^2[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1})](q_l-x)\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^2(q)-(x-q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(x)]\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^2(q)$$

$$+(1+z_k)\frac{[\xi'(q_k)-\xi'(q_{k-1})](q_l-q_{l-1})}{(1-q_{k-1})[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]}\Big[(x-q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(x)]+[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1})](q_l-x)\Big]=0$$

然后

$$1+z_k=\frac{(x_l^*-q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(x_l^*)]}{[\xi'(x_l^*)-\xi'(q_{l-1})](q_l-x_l^*)}\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}\frac{\mathbf{r}_{l+1+2i}}{\mathbf{r}_{l+2i}}.\tag{16}$$

注意到 $1+z_k=\mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)$。

对于 $k-l$ o dd 和区间 $[q_{l-1},q_l]$，$g(x)$ 的一个临界点 $x_l^*\in[q_{l-1},q_l]$ 满足

$$-(1+z_k)^2[\xi'(q_l)-\xi'(x)](x-q_{l-1})\prod_{i=1}^{\frac{k-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l-1+2i}^2-[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1})](q_l-x)\prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^2$$

$$+(1+z_k)\frac{[\xi'(1)-\xi'(q_{k-1})](q_l-q_{l-1})}{(1-q_{k-1})[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]}\Big[(x-q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(x)]+[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1})](q_l-x)\Big]=0$$

然后

$$1+z_k=\frac{[\xi'(x_l^*)-\xi'(q_{l-1})](q_l-x_l^*)}{(x_l^*-q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(x_l^*)]}\cdot\mathbf{r}_{l-1}\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}}\frac{\mathbf{r}_{l+2i}}{\mathbf{r}_{l-1+2i}}.\tag{17}$$

注意，$1+z_k=\left(\mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)\right)^{-1}$.

现在我们在 $1+z_k$ 中分别代入 (16) 和 (37)，代入 $g(x_l^*)$，得到 :

$$\begin{aligned}
& g(x_l^*) \\
= \;& \xi(q_l)-\xi(x_l^*)-\xi'(x_l^*)(q_l-x_l^*)+\frac{\left[\xi'(q_l)-\xi'(x_l^*)\right]\left[\xi'(x_l^*)-\xi'(q_{l-1})\right](q_l-x_l^*)(q_l-q_{l-1})}{\left\{\left[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})\right](x_l^*-q_{l-1})-(q_l-q_{l-1})\left[\xi'(x_l^*)-\xi'(q_{l-1})\right]\right\}} \\
& -\frac{\left[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})\right]\left[\xi'(q_l)-\xi'(x_l^*)\right]\left[\xi'(x_l^*)-\xi'(q_{l-1})\right](q_l-x_l^*)(q_l-q_{l-1})(x_l^*-q_{l-1})}{\left\{\left[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})\right](x_l^*-q_{l-1})-(q_l-q_{l-1})\left[\xi'(x_l^*)-\xi'(q_{l-1})\right]\right\}^2} \\
& \cdot\log\left(\frac{\left[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})\right](x_l^*-q_{l-1})}{(q_l-q_{l-1})\left[\xi'(x_l^*)-\xi'(q_{l-1})\right]}\right) \\
= \;& h\big(x_l^*,q_l,r_1(x_l^*,q_l,q_{l-1})\big) \\
= \;& h_{l+1}^{k+1}(\bar{x}_l,\mathcal{A}_l^{k+1}(x_l)).
\end{aligned}$$

至此，证明完成。

□

3. Criteria for $k-$FRSB Parisi measure

假设测度 ν 是 $k-$FRSB，且具有以下形式

$$\nu(dx)=\sum_{j=1}^{t}\sum_{l=w_{j-1}+1}^{w_j}m_l\cdot\mathbb{1}_{[q_{l-1}^j,q_l^j)}(x)dx+\sum_{j=1}^{t-1}\omega(x)\cdot\mathbb{1}_{[q_{w_j}^j,q_{w_j}^{j+1})}(x)dx+\Delta\cdot\delta_{\{1\}}(dx).$$

对于 $j=1,\cdots,t$，定义 $\bar{q}^j=(q_{w_{j-1}}^j,q_{w_{j-1}+1}^j,\cdots,q_{w_j}^j)$，我们定义：

$$F_l^j=\mathcal{F}_{l-w_{j-1}}^{s_j}(\bar{q}^j),\ \text{for } w_{j-1}\le l\le w_j,$$

and

$$A_l^j=\mathcal{A}_{l-w_{j-1}}^{s_j}(\bar{q}^j),\ \text{for } w_{j-1}+1\le l\le w_j-1.$$

接着定义

$$Z^j=\mathcal{Z}^{s_j}(q_{w_{j-1}}^j,q_{w_{j-1}+1}^j,\cdots,q_{w_j}^j),$$

and

$$Y^j=\mathcal{Y}^{s_j}(q_{w_{j-1}}^j,q_{w_{j-1}+1}^j,\cdots,q_{w_j}^j).$$

此外，设 $s=s_j+1$. 对于 $l=1,\ \cdots,\ s_j$ 以及 $\bar{x}^j=(q_{w_{j-1}}^j,\ q_{w_{j-1}+1}^j,\ \cdots,\ q_{l-1}^j,\ x,\ q_l^j,\ \cdots,\ q_{w_j}^j)\in[0,1]^{s_j+2}$，其中 $x\in(q_{l-1}^j,\ q_l^j)$，我们定义

$$A_l^j(x)=\mathcal{A}_l^{s_j+1}(\bar{x}^j).$$

我们推导出帕里西测度 ν_P 为 $k-$FRSB 的如下判据:

定理 9。 ξ 的帕里西测度 ν_P 为 $k-FRSB$，当且仅当 $j=1$、$\cdots$、t、$q_{w_{j-1}}^j$、$q_{w_{j-1}+1}^j$、$\cdots$、$q_{w_j}^j$ 满足以下条件

(1) 方程组

$$\begin{cases} h\Big(q_{l-1}^j,q_l^j,r_2(q_{l-1}^j,q_l^j)(F_l^j)^{-1}\cdot(*_j)^{(-1)^{w_j-l}}\Big)=0,\ for\ l=1,\cdots,w_j, \\ F_{w_{j-1}}^j=\left(F_{w_j}^j\right)^{(-1)^{s_j}},\ if\ 1<j<t. \end{cases} \tag{18}$$

其中，若 $*_j=F_{w_j}^j$，则 $j=1$、$\cdots$、$t-1$，并且 $*_t=(F_{w_{t-1}}^t)^{(-1)^{s_t}}$.

(2) $Y^j\le *_j\le(Z^j)^{-1}$.

(3) 对于 $l = w_{j_1}+1$、$\cdots$、w_j、$h(y_l^*$、q_l^j、$r_1(q_{l-1}^j$、q_l^j、$y_l^*))\geq 0$，其中 $y_l^*\in(q_{l-1}^j$、$q_l^j)$ 满足 $(*_j)^{(-1)^{\iota(w_j-l)}}=A_l^j(y_l^*)$。(4) 对于 $x\in[q_{w_j}^j,q_{w_j}^{j+1}]$、$\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}\leq 0$.

定理 9 的证明。注意，对于 $j_0=1,\ 2,\ \cdots,\ t+1,$ 以及 $l_0=w_{j_0-1}+1,\ \cdots,\ w_{j_0},\ r\in[q_{l_0-1}^{j_0},q_{l_0}^{j_0})$,

$$\nu((r,1])=m_{l_0}(q_{l_0}^{j_0}-r)+\sum_{l=l_0+1}^{w_{j_0}}m_l(q_l^{j_0}-q_{l-1}^{j_0})+\sum_{j=j_0+1}^{t+1}\sum_{l=w_{j-1}+1}^{w_j}m_l(q_l^j-q_{l-1}^j)+\sum_{j=j_0}^{t}\int_{q_{w_j}^j}^{q_{w_j}^{j+1}}\omega(s)ds+\Delta,$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{q_{l_0-1}^{j_0}}^{q_{l_0}^{j_0}}\frac{dt}{\nu_P((t,1])^2}\\&=\frac{(q_{l_0}^{j_0}-q_{l_0-1}^{j_0})}{\left[\sum_{l=l_0+1}^{w_{j_0}}m_l(q_l^{j_0}-q_{l-1}^{j_0})+\sum_{j=j_0+1}^{t+1}\sum_{l=w_{j-1}+1}^{w_j}m_l(q_l^j-q_{l-1}^j)+\sum_{j=j_0}^{t}\int_{q_{w_j}^j}^{q_{w_j}^{j+1}}\omega(s)ds+\Delta\right]}\\&\cdot\frac{1}{\left[\sum_{l=l_0+1}^{w_{j_0}}m_l(q_l^{j_0}-q_{l-1}^{j_0})+\sum_{j=j_0+1}^{t+1}\sum_{l=w_{j-1}+1}^{w_j}m_l(q_l^j-q_{l-1}^j)+\sum_{j=j_0}^{t}\int_{q_{w_j}^j}^{q_{w_j}^{j+1}}\omega(s)ds+\Delta\right]}\end{aligned}\tag{19}$$

根据定理 7，ν_P 是 ξ 的帕里西测度，当且仅当

$$(1)\quad g(q_l^j)=\bar{g}(q_l^j)=0,\ \text{for } j=1,\cdots t \text{ and } l=w_{j-1}+1,\cdots,w_j,\tag{20}$$

$$(2)\quad g(x)=\bar{g}(x)=\bar{g}'(x)=0,\ \text{for } x\in[q_{w_j}^j,q_{w_j}^{j+1}],j=1,\cdots t-1,\tag{21}$$

$$(3)\quad g(u)\geq 0,\quad u\in[0,1].\tag{22}$$

$$(4)\quad \omega(x)\text{ is increasing in }[q_{w_j}^j,q_{w_j}^{j+1}],\ \text{for } j=1,\cdots,t-1.\tag{23}$$

于是根据条件（21），对于 $x\in[q_{w_{j_0-1}}^{j_0-1},q_{w_{j_0-1}}^{j_0}],\ j_0=1,\ \cdots t,$

$$\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}=\nu((x,1])=\Delta+\sum_{j=j_0}^{t+1}\sum_{i=w_{j-1}+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\sum_{j=j_0}^{t}\int_{q_{w_j}^j}^{q_{w_j}^{j+1}}\omega(s)ds+\int_x^{q_{w_{j_0-1}}^{j_0}}\omega(s)ds$$

这意味着

$$\xi''(q_{w_{j_0-1}}^{j_0})^{-\frac{1}{2}}=\Delta+\sum_{j=j_0}^{t+1}\sum_{i=w_{j-1}+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\sum_{j=j_0}^{t}\int_{q_{w_j}^j}^{q_{w_j}^{j+1}}\omega(s)ds\tag{24}$$

and

$$\xi''(q_{w_{j_0-1}}^{j_0-1})^{-\frac{1}{2}}=\Delta+\sum_{j=j_0}^{t+1}\sum_{i=w_{j-1}+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\sum_{j=j_0-1}^{t}\int_{q_{w_j}^j}^{q_{w_j}^{j+1}}\omega(s)ds.\tag{25}$$

此外，我们得到，对于 $x\in[q_{w_{j-1}}^{j-1},q_{w_{j-1}}^{j}],j=1,\cdots t,$

$$\omega(x)=\frac{d}{dx}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}=\frac{1}{2}\xi''(x)^{-\frac{3}{2}}\xi'''(x).$$

因此，条件（23）等价于定理 9中的条件（4）。

将（25）从（24）中相减，可得对于 $j=1,\ \cdots,\ t-1,$

$$\xi''(q_{w_{j-1}}^j)^{-\frac{1}{2}}-\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{i=w_{j-1}+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j),$$

and

$$\xi''(q^t_{w_{t-1}})^{-\frac{1}{2}} = \Delta + \sum_{i=w_{t-1}+1}^{w_t} m_i(q^t_i - q^t_{i-1}).$$

令 $\mathbf{r}^j_l = \frac{[\xi'(q^j_{l+1})-\xi'(q^j_l)](q^j_l-q^j_{l-1})}{(q^j_{l+1}-q^j_l)[\xi'(q^j_l)-\xi'(q^j_{l-1})]}$。由归纳法可知，对于 $l = w_{t-1}+1, \cdots, w_t$,

$$\Delta+\sum_{i=l}^{w_t} m_i(q^t_i-q^t_{i-1}) = \begin{cases} \frac{1}{\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{t-1}-3}{2}} \mathbf{r}^t_{w_{t-1}+1+2i}\right)} \cdot \xi''(q^t_{w_{t-1}})^{-\frac{1}{2}}, & \text{for } l-w_{t-1} \text{ odd}, \\ \frac{(q^t_l-q^t_{l-1})}{\left[\xi'(q^t_l)-\xi'(q^t_{l-1})\right]}\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{t-1}-2}{2}} \mathbf{r}^t_{w_{t-1}+1+2i}\right) \cdot \xi''(q^t_{w_{t-1}})^{\frac{1}{2}}, & \text{for } l-w_{t-1} \text{ even}. \end{cases} \tag{26}$$

此外，对于 $j = 2, \cdots, t-1$ 和 $l = w_{j-1}+1, \cdots, w_j$, w_j+1, $\xi''(q^j_{w_j})^{-\frac{1}{2}} + \sum_{i=l}^{w_j} m_i(q^j_i - q^j_{i-1})$ 可表示为

$$\begin{cases} \frac{1}{\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{j-1}-3}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right)} \cdot \xi''(q^j_{w_{j-1}})^{-\frac{1}{2}}, & \text{for } l-w_{j-1} \text{ odd}, \\ \frac{(q^j_l-q^j_{l-1})}{\left[\xi'(q^j_l)-\xi'(q^j_{l-1})\right]}\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{j-1}-2}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right) \cdot \xi''(q^j_{w_{j-1}})^{\frac{1}{2}}, & \text{for } l-w_{j-1} \text{ even}. \end{cases} \tag{27}$$

特别地，对于 $j = 2, \cdots, t-1$

$$\xi''(q^j_{w_j})^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-w_{j-1}-2}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right)} \cdot \xi''(q^j_{w_{j-1}})^{-\frac{1}{2}}, & \text{for } s_j \text{ even}, \\ \frac{(q^j_{w_j}-q^j_{w_j-1})}{\left[\xi'(q^j_{w_j})-\xi'(q^j_{w_j-1})\right]}\left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-w_{j-1}-3}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right) \cdot \xi''(q^j_{w_{j-1}})^{\frac{1}{2}}, & \text{for } s_j \text{ odd}. \end{cases} \tag{28}$$

注意，对于 $j = 2, \cdots, t$，由此可得 $F^j_{w_{j-1}} = (F^j_{w_j})^{(-1)^{s_j}}$.

根据上述表达式，我们得到，对于 $j = 2, \cdots, t$ 和 $l = w_{j-1}, \cdots, w_j$, m_l 等于

$$\begin{cases} \frac{\xi''(q^j_{w_{j-1}})^{-\frac{1}{2}}}{(q^j_l-q^j_{l-1})\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{j-1}-3}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right)} - \frac{\xi''(q^j_{w_{j-1}})^{\frac{1}{2}}}{\left[\xi'(q^j_l)-\xi'(q^j_{l-1})\right]}\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{j-1}-3}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right), & l-w_{j-1} \text{ odd}, \\ \frac{\xi''(q^j_{w_{j-1}})^{\frac{1}{2}}}{\left[\xi'(q^j_l)-\xi'(q^j_{l-1})\right]}\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{j-1}-2}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right) - \frac{\xi''(q^j_{w_{j-1}})^{-\frac{1}{2}}}{(q^j_l-q^j_{l-1})\left(\prod_{i=0}^{\frac{l-w_{j-1}-2}{2}} \mathbf{r}^j_{w_{j-1}+1+2i}\right)}, & l-w_{j-1} \text{ even}. \end{cases} \tag{29}$$

因此，对于 $j = 1, \cdots t-1$ 和 $l = w_{j-1}+1, \cdots, w_j$, (19) 可简化为

$$\int_{q^j_{l-1}}^{q^j_l} \frac{dt}{\nu_P((t,1])^2} = \frac{(q^j_l - q^j_{l-1})}{\left[\sum_{i=l+1}^{w_j} m_i(q^j_i - q^j_{i-1}) + \xi''(q^j_{w_j})^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[\sum_{i=l}^{w_j} m_i(q^j_i - q^j_{i-1}) + \xi''(q^j_{w_j})^{-\frac{1}{2}}\right]}$$

同样由条件（20），

$$\bar{g}(q^j_l) - \bar{g}(q^j_{l-1}) = 0,$$

这意味着

$$\xi'(q^j_l) - \xi'(q^j_{l-1}) = \frac{(q^j_l - q^j_{l-1})}{\left[\sum_{i=l+1}^{w_j} m_i(q^j_i - q^j_{i-1}) + \xi''(q^j_{w_j})^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[\sum_{i=l}^{w_j} m_i(q^j_i - q^j_{i-1}) + \xi''(q^j_{w_j})^{-\frac{1}{2}}\right]}. \tag{30}$$

类似地，对于 $l=w_{t-1}+1,\ \cdots,\ w_t$,

$$\xi'(q_l^t)-\xi'(q_{l-1}^t)=\frac{(q_l^t-q_{l-1}^t)}{\left[\sum_{i=l+1}^{w_t}m_i(q_i^t-q_{i-1}^t)+\Delta\right]\cdot\left[\sum_{i=l}^{w_t}m_i(q_i^t-q_{i-1}^t)+\Delta\right]}.$$

应用（30）于 $j=1$、$\cdots$、$t-1$和 $l=w_{j-1}$、$\cdots$、w_j，我们还可以得到

$$\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}+\sum_{i=l}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)=\begin{cases}\left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^j\right)\cdot\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}, & \text{for } w_j-l \text{ odd},\\ \left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-2}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^j\right)\cdot\frac{(q_{w_j}^j-q_{w_j-1}^j)\cdot\xi''(q_{w_j}^j)^{\frac{1}{2}}}{\left[\xi'(q_{w_j}^j)-\xi'(q_{w_j-1}^j)\right]} & \text{for } w_j-l \text{ even}.\end{cases}\tag{31}$$

那么，当 $j=1$和 $l=1,\ \cdots,\ w_1,\ \ m_l$也等于

$$\begin{cases}\left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^j\right)\cdot\frac{\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}}{(q_l^j-q_{l-1}^j)}-\left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^j\right)^{-1}\cdot\frac{\xi''(q_{w_j}^j)^{\frac{1}{2}}}{\left[\xi'(q_l^j)-\xi'(q_{l-1}^j)\right]}, & \text{for } w_j-l \text{ odd},\\ \left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-2}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^j\right)^{-1}\cdot\frac{\xi''(q_{w_j}^j)^{\frac{1}{2}}}{\left[\xi'(q_l^j)-\xi'(q_{l-1}^j)\right]}-\left(\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-2}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^j\right)\cdot\frac{\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}}{(q_l^j-q_{l-1}^j)} & \text{for } w_j-l \text{ even}.\end{cases}$$

那么，直接计算可得，对于 $j_0=1,\ \cdots t-1,\ \ l=w_{j_0-1}+1,\ \cdots,\ \ w_{j_0}$和 $x\in[q_{l_0-1}^{j_0},q_{l_0}^{j_0}]$,

$$\begin{aligned}&g(x)\\&=g(q_{l_0}^{j_0})+\int_x^{q_{l_0}^{j_0}}\bar{g}(t)dt\\&=\xi(q_{l_0}^{j_0})-\xi(x)+\frac{q_{l_0}^{j_0}-x}{m_{l_0}\cdot\left[\sum_{i=l_0}^{w_j}m_i(q_i^{j_0}-q_{i-1}^{j_0})+\xi''(q_{w_{j_0}}^{j_0})^{-\frac{1}{2}}\right]}\\&-(q_{l_0}^{j_0}-x)\cdot\Bigg\{\sum_{j=1}^{j_0-1}\sum_{l=w_{j-1}+1}^{w_j}\frac{(q_l^j-q_{l-1}^j)}{\left[\sum_{i=l+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\sum_{i=l}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}\right]}\\&+\sum_{l=w_{j_0-1}+1}^{l_0-1}\frac{(q_l^{j_0}-q_{l-1}^{j_0})}{\left[\sum_{i=l+1}^{w_{j_0}}m_i(q_i^{j_0}-q_{i-1}^{j_0})+\xi''(q_{w_{j_0}}^{j_0})^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\sum_{i=l}^{w_{j_0}}m_i(q_i^{j_0}-q_{i-1}^{j_0})+\xi''(q_{w_{j_0}}^{j_0})^{-\frac{1}{2}}\right]}\Bigg\}\\&-\frac{1}{m_{l_0}^2}\ln\left(1+\frac{m_{l_0}(q_{l_0}^{j_0}-x)}{\xi''(q_{w_{j_0}}^{j_0})^{-\frac{1}{2}}+\sum_{i=l_0+1}^{w_{j_0}}m_i(q_i^{j_0}-q_{j-1}^{j_0})}\right)\end{aligned}$$

这意味着，对于 $j=1,\ \cdots t-1,\ \ l=w_{j-1}+1,\ \cdots,\ \ w_j$和 $x\in[q_{l-1}^j,q_l^j]$,

$$\begin{aligned}g(x)\ \ =\ \ &\xi(q_l^j)-\xi(x)-\xi'(q_{l-1}^j)(q_l^j-x)+\frac{q_l^j-x}{m_l\cdot\left[\sum_{i=l}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}\right]}\\&-\frac{1}{m_l^2}\ln\left(1+\frac{m_l(q_l^j-x)}{\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}+\sum_{i=l+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)}\right).\end{aligned}$$

这里我们使用关系 $g(q_l^j)=0$.

类似地，对于 $l=w_{t-1}+1,\cdots,w_t$ 以及 $x\in[q_{l-1}^t,q_l^t]$,

$$g(x) = \xi(q_l^t)-\xi(x)-\xi'(q_{l-1}^t)(q_l^t-x)+\frac{q_l^t-x}{m_l\cdot\left[\sum_{i=l}^{w_t}m_i(q_i^t-q_{i-1}^t)+\Delta\right]} -\frac{1}{m_l^2}\ln\left(1+\frac{m_l(q_l^t-x)}{\Delta+\sum_{i=l+1}^{w_t}m_i(q_i^t-q_{i-1}^t)}\right).$$

特别地，对于 $j=1,\cdots t-1,\ l=w_{j-1}+1,\ \cdots,\ w_j$和 $x=q_{l-1}^j$,

$$g(q_{l-1}^j) = \xi(q_l^j)-\xi(q_{l-1}^j)-\xi'(q_{l-1}^j)(q_l^j-q_{l-1}^j)+\frac{q_l^j-q_{l-1}^j}{m_l\cdot\left[\sum_{i=l}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}\right]} -\frac{1}{m_l^2}\ln\left(1+\frac{m_l(q_l^j-q_{l-1}^j)}{\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}+\sum_{i=l+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)}\right)=0.$$

此外，对于 $l=w_{t-1}+1,\ \cdots,\ w_t$和 $x=q_{l-1}^t$,

$$g(q_{l-1}^t) = \xi(q_l^t)-\xi(q_{l-1}^t)-\xi'(q_{l-1}^t)(q_l^t-q_{l-1}^t)+\frac{q_l^t-q_{l-1}^t}{m_l\cdot\left[\sum_{i=l}^{w_t}m_i(q_i^t-q_{i-1}^t)+\Delta\right]} -\frac{1}{m_l^2}\ln\left(1+\frac{m_l(q_l^t-q_{l-1}^t)}{\Delta+\sum_{i=l+1}^{w_t}m_i(q_i^t-q_{i-1}^t)}\right)=0.$$

根据关系 (26)、(27)、(28)、(29)，我们注意到，对于 $j=2,\ \cdots,\ t$和 $l=w_{j-1}+1,\ \cdots,\ w_j$，有

$$g(q_{l-1}^j)=h\left(q_{l-1}^j,q_l^j,(F_l^j)^{-1}r_2(q_{l-1}^j,q_l^j)\cdot\left(F_{w_{j-1}}^j\right)^{(-1)^{s_j+\iota(w_j-l)}}\right)=0,$$

并且对于 $j=1$和 $l=1,\ \cdots,\ w_1$,

$$g(q_{l-1}^j)=h\left(q_{l-1}^1,q_l^1,(F_l^1)^{-1}r_2(q_{l-1}^1,q_l^1)\cdot\left(F_{w_1}^1\right)^{(-1)^{w_1-l}}\right)=0.$$

对于$s=s_j$和 $l=w_{j-1}+1,\ \cdots w_j$，我们定义 $h_l^j(\bar{q}^j,\ F_{w_{j-1}}):=g(q_{l-1}^j)$，以反映其与$\bar{q}^j=(q_{w_{j-1}}^j,\ q_{w_{j-1}+1}^j,\ \cdots,\ q_{w_j}^j)$ 和 $F_{w_{j-1}}$.的关系

由（22），可得 $g(u)\geq 0$当 $u\in[0,1]$且 $g(q_l^j)=0$，当 $j=1,\ \cdots t,\ l=w_{j-1},\ \cdots,\ w_j$，这意味着 $g''(q_l^j)\geq 0$。我们得到

$$\xi''(q_l^j)\leq\frac{1}{\left[\sum_{i=l+1}^{w_j}m_i(q_i^j-q_{i-1}^j)+\xi''(q_{w_j}^j)^{-\frac{1}{2}}\right]^2}.$$

由（31），当 $j=1,\ \cdots,\ t-1$，进而可得，若 w_j-l为奇数，

$$F_{w_j}^j\cdot F_l^j\leq 1,$$

且若 w_j-l 为偶数，

$$F_l^j\leq F_{w_j}^j.$$

由于 ν_P是 $[0,1]$,上的测度，因此 $m_{l-1}<m_l<m_{l+1}$当 $l=1,\ \cdots,\ k-1$，这意味着由（29），当 $j=1,\ \cdots,\ t-1,\ l=w_{j-1}+1,\ \cdots,\ w_j$，若 w_j-l为偶数，

$$F_{w_j}^j\cdot A_l^j\leq 1, \tag{32}$$

且当 w_j-l 为奇数时，

$$F_{w_j}^j\geq A_l^j. \tag{33}$$

类似地，对于 $j=t$ 和 $l=w_{t-1}+1,\cdots,w_t,$，可得当 $k-l$ 为奇数时，

$$A_l^t \le (F_{w_{t-1}}^t)^{(-1)^{s_t}} \le (F_l^t)^{-1},$$

且当 $k-l$ 为偶数时，

$$F_l^t \le (F_{w_{t-1}}^t)^{(-1)^{s_t}} \le (A_l^t)^{-1}. \tag{34}$$

上述不等式等价于关系

$$Y^j \le *_j \le (Z^j)^{-1}, \text{ for } j=1,\cdots,t.$$

现在我们证明，$g(x)\ge 0$ 对于 $x\in(q_{l-1}^j,q_l^j)$ 等价于 $h\big(y_l^*,q_l^j,r_1(q_{l-1}^j,q_l^j,y_l^*)\big)\ge 0$，其中$y_l^*\in(q_{l-1}^j,q_l^j)$ 满足 $F_{w_j}^j=A_l^{k+1}(y_l^*)$，对于 $j=1,\cdots,t$和 $l=w_{j-1}+1,\cdots,w_j$.

固定 $j=1,\cdots t-1, l=w_{j-1}+1,\cdots,w_j$ 以及区间 $[q_{l-1}^j,q_l^j]$. 对于 w_j-l为偶数的情形，$g(x)$ 的一个临界点$y_l^*\in[q_{l-1}^j,q_l^j]$ 满足

$$\begin{aligned}
&-(F_{w_j}^j)^2[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^j)](q_l^j-x)\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-2}{2}}(\mathbf{r}_{l+2i}^j)^2-(x-q_{l-1}^j)[\xi'(q_l^j)-\xi'(x)]\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-2}{2}}(\mathbf{r}_{l+1+2i}^j)^2\\
&+F_{w_j}^j\cdot\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-2}{2}}(\mathbf{r}_{l+2i}^j\cdot\mathbf{r}_{l+1+2i}^j)\Big[(x-q_{l-1}^j)[\xi'(q_l^j)-\xi'(x)]+[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^j)](q_l^j-x)\Big]=0,
\end{aligned}$$

然后

$$F_{w_j}^j=\frac{[\xi'(q_l^j)-\xi'(y_l^*)](y_l^*-q_{l-1}^j)}{(q_l^j-y_l^*)[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^j)]}\cdot\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-2}{2}}\frac{\mathbf{r}_{l+1+2i}^j}{\mathbf{r}_{l+2i}^j}=A_l^j(y_l^*).$$

对于奇数 w_j-l，$g(x)$ 的一个临界点 $y_l^*\in[q_{l-1}^j,q_l^j]$ 满足

$$\begin{aligned}
&-(F_{w_j}^j)^2[\xi'(q_l^j)-\xi'(x)](x-q_{l-1}^j)\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-3}{2}}(\mathbf{r}_{l+1+2i}^j)^2-[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^j)](q_l^j-x)\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-1}{2}}(\mathbf{r}_{l+2i}^j)^2\\
&+F_{w_j}^j\cdot\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-3}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^j\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^j\cdot\Big[(x-q_{l-1}^j)[\xi'(q_l^j)-\xi'(x)]+[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^j)](q_l^j-x)\Big]=0,
\end{aligned}$$

然后

$$F_{w_j}^j=\frac{(q_l^j-y_l^*)[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^j)]}{[\xi'(q_l^j)-\xi'(y_l^*)](y_l^*-q_{l-1}^j)}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^j}{\prod_{i=0}^{\frac{w_j-l-3}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^j}=\big(A_l^j(y_l^*)\big)^{-1}.$$

类似地，对于 $j=t,l=w_{t-1}+1,\cdots,w_t$ 以及区间 $[q_{l-1}^t,q_l^t]$.。对于偶数 $k-l$，$g(x)$ 的一个临界点 $y_l^*\in[q_{l-1}^t,q_l^t]$ 满足

$$\begin{aligned}
&-\big(F_{w_{t-1}}^t\big)^{2(-1)^{s_t}}[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^t)](q_l^t-x)\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}(\mathbf{r}_{l+2i}^t)^2-(x-q_{l-1}^t)[\xi'(q_l^t)-\xi'(x)]\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}(\mathbf{r}_{l+1+2i}^t)^2\\
&+\big(F_{w_{t-1}}^t\big)^{(-1)^{s_t}}\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}(\mathbf{r}_{l+2i}^t\cdot\mathbf{r}_{l+1+2i}^t)\Big[(x-q_{l-1}^t)[\xi'(q_l^t)-\xi'(x)]+[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^t)](q_l^t-x)\Big]=0,
\end{aligned}$$

然后

$$\left(F_{w_{t-1}}^{t}\right)^{(-1)^{s_t}}=\frac{\left[\xi'(q_l^t)-\xi'(y_l^*)\right](y_l^*-q_{l-1}^t)}{(q_l^t-y_l^*)\left[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^t)\right]}\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-l-2}{2}}\frac{\mathbf{r}_{l+1+2i}^t}{\mathbf{r}_{l+2i}^j}=A_l^t(y_l^*).$$

对于 $k-l$ 为奇数的情形， $g(x)$ 的临界点 $y_l^*\in[q_{l-1}^t,q_l^t]$ 满足

$$-\left(F_{w_{t-1}}^{t}\right)^{2(-1)^{s_t}}[\xi'(q_l^t)-\xi'(x)](x-q_{l-1}^t)\prod_{i=0}^{\frac{k-l-3}{2}}(\mathbf{r}_{l+1+2i}^t)^2-[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^t)](q_l^t-x)\prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}}(\mathbf{r}_{l+2i}^t)^2$$

$$+\left(F_{w_{t-1}}^{t}\right)^{(-1)^{s_t}}\prod_{i=0}^{\frac{k-l-3}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^t\prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^t\Big[(x-q_{l-1}^t)[\xi'(q_l^t)-\xi'(x)]+[\xi'(x)-\xi'(q_{l-1}^t)](q_l^t-x)\Big]=0,$$

进而

$$\left(F_{w_{t-1}}^{t}\right)^{(-1)^{s_t}}=\frac{(q_l^t-y_l^*)\left[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^t)\right]}{\left[\xi'(q_l^t)-\xi'(y_l^*)\right](y_l^*-q_{l-1}^t)}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{\frac{k-l-1}{2}}\mathbf{r}_{l+2i}^t}{\prod_{i=0}^{\frac{k-l-3}{2}}\mathbf{r}_{l+1+2i}^t}=\left(A_l^t(y_l^*)\right)^{-1}.$$

现在，对于 $j=1,\ \cdots,\ t$，我们在 $g(y_l^*)$ 中用 $A_l^j(y_l^*)$ 代替 $*_j$，得到：

$$\begin{aligned}
&g(y_l^*)\\
=\ &\xi(q_l^j)-\xi(y_l^*)-\xi'(y_l^*)(q_l^j-y_l^*)+\frac{\left[\xi'(q_l^j)-\xi'(y_l^*)\right]\left[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^j)\right](q_l^j-y_l^*)(q_l^j-q_{l-1}^j)}{\left\{\left[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1}^j)\right](y_l^*-q_{l-1}^j)-(q_l-q_{l-1}^j)\left[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^j)\right]\right\}}\\
&-\frac{\left[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1}^j)\right]\left[\xi'(q_l^j)-\xi'(y_l^*)\right]\left[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^j)\right](q_l^j-y_l^*)(q_l-q_{l-1}^j)(y_l^*-q_{l-1}^j)}{\left\{\left[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1}^j)\right](y_l^*-q_{l-1}^j)-(q_l-q_{l-1}^j)\left[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^j)\right]\right\}^2}\\
&\cdot\log\left(\frac{\left[\xi'(q_l^j)-\xi'(q_{l-1}^j)\right](y_l^*-q_{l-1}^j)}{(q_l^j-q_{l-1}^j)\left[\xi'(y_l^*)-\xi'(q_{l-1}^j)\right]}\right)\\
=\ &h\left(y_l^*,q_l^j,r_1(q_{l-1}^j,q_l^j,y_l^*)\right).
\end{aligned}$$

因此，条件 $h\left(y_l^*,\ q_l^j,\ r_1(q_{l-1}^j,\ q_l^j,\ y_l^*)\right)>0$ 等价于条件 $g(x)>0$，其中 $x\in[q_{l-1}^j,q_l^j]$.

□

4. A special case: $k=n$

回顾该模型的设定

$$\xi(x):=\sum_{l=1}^{n-1}\lambda_l\cdot x^{p_l}+\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\lambda_l\right)\cdot x^{p_n}. \tag{35}$$

那么当 $k=n$，定理 6 可简化如下：

定理 10。 对于 ξ，帕里西测度 ν_P 是 $n-RSB$，当且仅当存在唯一的递增序列 $0<q_1<q_2<\cdots<q_{n-1}<1$ 和 $z_n>0$，使得以下条件成立

(1) 方程组

$$\begin{cases}h_1^n(\bar{q},1+z_n)=0,\\ \cdots\cdots\\ h_n^n(\bar{q},1+z_n)=0,\end{cases}$$

其中 $\bar{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_{k-1})$。

(2) $\mathcal{Y}^n \le 1 + z_n \le \big(\mathcal{Z}^n\big)^{-1}$.

证明。 根据定理 6，我们只需证明条件 (3) 可由条件 (1) 和 (2) 推导得出。

首先注意到

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\} &= \frac{1}{4}\xi''(x)^{-\frac{5}{2}}\cdot\{3\xi'''(x)^2 - 2\xi''(x)\xi''''(x)\}\\ &= \frac{1}{4}\xi''(x)^{-\frac{5}{2}}\cdot\Big(\sum_{l=1}^{n} p_l^3(p_l-1)^2(p_l-2)\lambda_l^2 x^{2p_l-6}\\ &\quad -2\sum_{1\le i<j\le n} p_i(p_i-1)p_j(p_j-1)(p_i^2+p_j^2+p_i+p_j-3p_ip_j)\lambda_i\lambda_j x^{p_i+p_j-6}\Big)\end{aligned}$$

于是，根据笛卡尔符号法则，$\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$ 至多有 $2(n-1)$ 个严格正根。回想一下，

$$h(x,y,z) = \xi(y) - \xi(x) - \xi'(x)(y-x) + \big[\xi'(y)-\xi'(x)\big](y-x)\Big(\frac{1}{(z-1)} - \frac{z}{(z-1)^2}\log(z)\Big),$$

并且 $r_2(x,\ y) = \frac{\xi''(y)(y-x)[\xi'(y)-\xi'(x)]}{}$ 定义 $h^F(x,\ y) = h(x,\ y,\ r_2(x,\ y))$。

经计算可得

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h^F(x,y)\Big) &= \operatorname{sgn}\Big([\xi'(y)-\xi'(x)]^2 - \xi''(x)\xi''(y)(y-x)^2\Big)\\ \operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial}{\partial y}h^F(x,y)\Big) &= \operatorname{sgn}\Big(\xi'''(y)[\xi'(y)-\xi'(x)](y-x) + 2\xi''(y)\big[\xi'(y)-\xi'(x)-\xi''(y)(y-x)\big]\Big)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}h^F(x,y)\big|_{x=y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}h^F(x,y)\big|_{x=y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}h^F(x,y)\big|_{y=x} = 0,\\ &\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial^4}{\partial x^4}h^F(x,y)\big|_{x=y}\Big) = \operatorname{sgn}\Big(3\xi'''(y)^2 - 2\xi''(y)\xi''''(y)\Big),\\ &\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial^3}{\partial y^3}h^F(x,y)\big|_{y=x}\Big) = -\operatorname{sgn}\Big(3\xi'''(x)^2 - 2\xi''(x)\xi''''(x)\Big).\end{aligned}$$

若对于固定的 x_0，$y_0 > x_0$ 是关于 y 的 $h^F(x,\ y)$ 的一个临界点，则

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2}h^F(x_0,y)\big|_{y=y_0}\Big)\\ =\ &\operatorname{sgn}\Big(\xi''''(y_0)\big[\xi'(y_0)-\xi'(x_0)\big](y_0-x_0) + 3\xi'''(y_0)\big[\xi'(y_0)-\xi'(x_0)-\xi''(y_0)(y_0-x_0)\big]\Big)\\ =\ &\operatorname{sgn}\Big(2\xi''(y_0)\xi''''(y_0) - 3\xi'''(y_0)^2\Big).\end{aligned}$$

这里我们使用关系 $\xi'''(y_0)[\xi'(y_0)-\xi'(x_0)](y_0-x_0) = -2\xi''(y_0)\big[\xi'(y_0)-\xi'(x_0)-\xi''(y_0)(y_0-x_0)\big]$。因此，对于固定的 x，$h^F(x,y)$ 的局部极小值 $y > x$ 满足 $\frac{d^2}{dy^2}\{\xi''(y)^{-\frac{1}{2}}\} < 0$，而局部极大值 $y > x$ 满足 $h^F(x,y)$ $\frac{d^2}{dy^2}\{\xi''(y)^{-\frac{1}{2}}\} > 0$.

此外，$h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_l^n)$ 和 $h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_{l-1}^n)$ 可按如下方式计算：

$$\begin{aligned}h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_l^n) &= \xi(q_l) - \xi(q_{l-1}) - \xi'(q_{l-1})(q_l-q_{l-1}) + \frac{(q_l-q_{l-1})\big[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})\big]^2}{\big\{\xi''(q_l)(q_l-q_{l-1}) - [\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]\big\}}\\ &\quad -\frac{\xi''(q_l)[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]^2(q_l-q_{l-1})^2}{\big\{\xi''(q_l)(q_l-q_{l-1}) - [\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]\big\}^2}\log\Big(\frac{\xi''(q_l)(q_l-q_{l-1})}{[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]}\Big),\end{aligned}$$

and

$$h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_{l-1}^n) = \xi(q_l)-\xi(q_{l-1})-\xi'(q_{l-1})(q_l-q_{l-1})+\frac{\xi''(q_{l-1})\big[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})\big](q_l-q_{l-1})^2}{\big\{\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})-\xi''(q_{l-1})(q_l-q_{l-1})\big\}}$$
$$-\frac{\xi''(q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]^2(q_l-q_{l-1})^2}{\big\{\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})-\xi''(q_{l-1})(q_l-q_{l-1})\big\}^2}\log\Big(\frac{[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})]}{\xi''(q_{l-1})(q_l-q_{l-1})}\Big).$$

注意， $h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_l^n)=h^F(q_{l-1},q_l)$ 和 $h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_{l-1}^n)=-h^F(q_l,q_{l-1})$。此外，

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial}{\partial q_{l-1}}h_l^n(\bar{q},F_l^n)\Big) &= -\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial}{\partial q_l}h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_{l-1}^n)\Big),\\ &= 1-\mathcal{F}_l^n\cdot\mathcal{F}_{l-1}^n.\end{aligned}$$

事实上，必定存在 $x\in(q_{l-1},q_l)$，使得 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}>0$。否则，若对所有 $x\in[q_{l-1},q_l)$ $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}<0$，则可得 $-h^F(q_l,x)<0$ 且 $h^F(x,q_l)>0$。于是由引理 8 可知， $\mathcal{F}_{l-1}^n\cdot\mathcal{F}_l^n>1$，这与 $\mathcal{Y}^n\subseteq\big(\mathcal{Z}^n\big)^{-1}$ 矛盾。

现在，对于任意 $0<x_1<\cdots<x_{n-1}<1$，令 $\bar{x}=(0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1)$。

对于 $l=1$， h_1^n（$\bar{x}$， $\mathcal{F}_1^n$）仅相对于 x_1.我们接着将 h_1^n（$\bar{x}$， $\mathcal{F}_1^n$）的第一个局部极小值记为 m_1，第一个局部极大值记为 M_1. 由（36），可得 $m_1<M_1$. 于是我们得到

$$\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}\big|_{x=m_1}<0 \text{ and } \frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}\big|_{x=M_1}>0.$$

由于 $\lim_{x\to0^+}\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}\big|_{x=m_1^1}=+\infty$，根据介值定理，在区间 $[0,m_1]$ 和 $[m_1,M_1]$ 内分别存在零点。

现在对于 $l=2$， $\cdots$， $n-1$，将大于 M_{l-1} 的 h_l（$\bar{x}$， F_l关于 x_l 的第一个局部极小值记为 m_l，第一个局部极大值记为 M_l. 由（36），可得 $m_l<M_l$. 于是我们得到

$$\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}\big|_{x=m_l}<0 \text{ and } \frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}\big|_{x=M_l}>0.$$

根据介值定理，区间 $[M_{l-1},m_l]$ 和 $[m_l,M_l]$ 中分别存在零点。由于 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$ 至多有 $2(n-1)$ 个严格正根，因此 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$ 在 $[M_{l-1},m_l]$ 和 $[m_l,M_l]$ 中恰有一个根，适用于 $l=1$， $\cdots$， $n-1$.

由 (2) 和引理 8，可得 $0<q_1<M_1$. 此外，对于 $l=2$， $\cdots$， $n-1$， 可得 $q_{l-1}<m_l$和 $q_l<M_l$. 区间 $[q_{l-1},q_l]$ 至多包含 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)$的两个根

回顾，对于 $l=1$、$\cdots$、n， $x\in[q_{l-1},q_l]$ 的临界点 $g(x)$ 满足 $1+z_n=\big(\mathcal{A}_l^{n+1}(x)\big)^{(-1)^{n-l}}$。随后，我们将定理10 中的方程组替换为

$$\begin{cases} h_1^n(\bar{q},\mathcal{A}_l^{n+1}(x))=0,\\ \cdots\cdots\\ h_n^n(\bar{q},\mathcal{A}_l^{n+1}(x))=0,\end{cases}$$

那么，为了证明定理6中的条件（3），只需证明存在唯一一组 $x\in(q_{l-1},\ q_l)$，分别对应 q_1，$\cdots$， q_{n-1} 并满足上述方程组。定义 $c_l(x):=h_l^n\big(\bar{q},\ (\mathcal{A}_l^{n+1}(x))^{(-1)^{k-l}}\big)$。经计算可得

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn}\Big(\frac{d}{dx}c_l(x)\Big)\\ =\ &\operatorname{sgn}\Big((q_l-q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(x)][\xi'(x)-\xi'(q_{l-1})]-\xi''(x)[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})](q_l-x)(x-q_{l-1})\Big)\\ =:\ &\operatorname{sgn}\Big(t_l(x)\Big),\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} t_l''(q_l) &= \xi'''(q_l)[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})](q_l-q_{l-1})+2\xi''(q_l)[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})-\xi''(q_l)(q_l-q_{l-1})] \\ &= \frac{\partial}{\partial q_l}\big(h^F(q_{l-1},q_l)\big) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_l}\big(h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_l^n)\big), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} t_l''(q_{l-1}) &= -\xi'''(q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})](q_l-q_{l-1})+2\xi''(q_{l-1})[\xi'(q_l)-\xi'(q_{l-1})-\xi''(q_{l-1})(q_l-q_{l-1})] \\ &= -\frac{\partial}{\partial q_{l-1}}\big(h^F(q_l,q_{l-1})\big) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_{l-1}}\big(h_l^n(\bar{q},\mathcal{F}_{l-1}^n)\big). \end{aligned}$$

由于 $h_l^n(\bar{q},\ \mathcal{F}_{l-1}^n)$ 和 $h_l^n(\bar{q},\ \mathcal{F}_l^n)$ 的局部极值由 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$ 决定，且区间 $[q_{l-1},q_l]$ 至多包含 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$ 的两个根。因此，$h_l^n(q_{l-1},\ x,\ \mathcal{F}_l^n)$ 在 $[q_{l-1},q_l]$ 中至多有两个临界点，这意味着 $t_l(x)$ 在 $[q_{l-1},q_l]$. 中至多有两个零点。若 $t_l(x)$ 在 $[q_{l-1},q_l]$ 中有两个零点 $a_l<b_l$，则有 $t'(a_l)<0$ 且 $t'(b_l)>0$.

注意，对于 $n-l$为偶数的情形，有 $\mathcal{A}_l^{n+1}(q_{l-1})=(\mathcal{F}_{l-1}^n)^{-1}$且 $\mathcal{A}_l^{n+1}(q_l)=\mathcal{F}_l^n$.。对于 $n-l$为奇数的情形，也有 $\mathcal{A}_l^{n+1}(q_{l-1})=\mathcal{F}_{l-1}^n$且 $\mathcal{A}_l^{n+1}(q_l)=(\mathcal{F}_l^n)^{-1}$.。由 (2) 和引理 8 可得$c_l(q_{l-1})\geq 0$ 且 $c_l(q_l)\leq 0$.。

因此，结合 $t_l(x)$ 在 $[q_{l-1},q_l]$，$c_l(x)$ 在 $[q_{l-1},q_l]$. 中至多有一个零点这一事实，

□

当 $k=n$，定理 9 也可简化如下:

定理 11。对于 ξ，帕里西测度 ν_P $n-$为 *FRSB*，当且仅当 $j=1$、$\cdots$、t、$q_{w_{j-1}}^j$、$q_{w_{j-1}+1}^j$、$\cdots$、$q_{w_j}^j$满足以下条件

(1) 方程组

$$\begin{cases} h_l^j\left(\bar{q}^j,*_j\right)=0,\ for\ l=w_{j-1}+1,\cdots,w_j, \\ F_{w_{j-1}}^j=\left(F_{w_j}^j\right)^{(-1)^{s_j}},\ if\ 1<j<t. \end{cases}$$

$where\ *_j=F_{w_j}^j\ if\ j=1,\cdots,t-1\ and\ *_t=(F_{w_{t-1}}^t)^{(-1)^{s_t}}.$

(2) $Y^j\leq *_j\leq (Z^j)^{-1}$

证明。根据定理 9，我们只需证明条件 (3) 和 (4) 可由条件 (1) 和 (2) 推导得出。

至于条件 (3)，基于条件 (1) 和 (2)，采用与定理 10的证明相同的论证即可。

接下来，我们只需证明 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}<0$对于 $x\in[q_{w_j}^j,q_{w_j}^{j+1}]$和 $j=1,\ \cdots,\ t-1$.

根据定理 10 的证明中的论证，$\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$在 $[m_{w_j},M_{w_j}]$上恰有一个根，其中 $j=1,\ \cdots t$. 记 $-h^F\left(q_{w_j+1}^{j+1}\right.$大于 $\left.x\right)$ 的第一个局部极大值为 $q_{w_j}^{j+1}$。由此可得 N_{w_j}。因此有 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}\big|_{x=N_{w_j}}<0$.，进而得到 $m_{w_j}<q_{w_j}^j<q_{w_j}^{j+1}<N_{w_j}<M_{w_j}$，这意味着 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}<0$，其中 $x\in[q_{w_j}^j,q_{w_j}^{j+1}]$. -

□

最后，我们如下证明推论 1:
推论 *1* 的证明 。根据定理 10 和 11 的证明 $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$ 必须至少有 2$(k-1)$ 个严格正根，因此 ν_P 为 $k-RSB.$。由于对于 $\xi(x) = \sum_{l=1}^{n-1}\lambda_l\cdot x^{p_l}+\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\lambda_l\right)\cdot x^{p_n}$, $\frac{d^2}{dx^2}\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\}$ 至多有 2$(n-1)$ 个严格正根，我们得出 $k\leq n$.

□

5. Proof of Theorem 2, 3 and Corollary 4, 5

回顾第 1 节中的记号，对于 $j=1,\ \cdots,\ t$ 以及任意 $\bar{q}^j=(q^j_{w_{j-1}},\ q^j_{w_{j-1}+1},\ \cdots,\ q^j_{w_j})\in\mathcal{H}^{s_j}$，有

$$h^j_l(\bar{q}^j,(\mathcal{Z}^j)^{-1}) = \begin{cases} h\left(q^j_{l-1},q^j_l,\left(F^j_l\cdot\mathcal{Z}^j\right)^{-1}\cdot r_2(q^j_{l-1},q^j_l)\right)\geq 0, \text{ for } w_j-l \text{ even},\\ h\left(q^j_{l-1},q^j_l,\frac{\mathcal{Z}^j}{F^j_l}\cdot r_2(q^j_{l-1},q^j_l)\right)\leq 0, \text{ for } w_j-l \text{ odd},\end{cases}$$

and

$$h^j_l(\bar{q}^j,\mathcal{Y}^j) = \begin{cases} h\left(q^j_{l-1},q^j_l,\frac{\mathcal{Y}^j}{F^j_l}\cdot r_2(q^j_{l-1},q^j_l)\right)\leq 0, \text{ for } w_j-l \text{ even},\\ h\left(q^j_{l-1},q^j_l,\left(\mathcal{Y}^j\cdot F^j_l\right)^{-1}\cdot r_2(q^j_{l-1},q^j_l)\right)\geq 0, \text{ for } w_j-l \text{ odd}.\end{cases}$$

特别地，对于 $\bar{q}=(0,\ q_1,\ \cdots,\ q_{k-1},\ 1)\in\mathcal{H}^k$，对于 $l=1,\ \cdots,\ k$，有

$$h^k_l(\bar{q},(\mathcal{Z}^k)^{-1}) = \begin{cases} h\left(q_{l-1},q_l,\frac{\mathcal{F}^k_{l-1}(\bar{q})}{\mathcal{Z}^k(\bar{q})}\cdot r_2(q_l,q_{l-1})^{-1}\right)\geq 0, \text{ for } k-l \text{ even},\\ h\left(q_{l-1},q_l,\frac{\mathcal{Z}^k(\bar{q})}{F^k_l(\bar{q})}\cdot r_2(q_{l-1},q_l)\right)\leq 0, \text{ for } k-l \text{ odd},\end{cases}$$

and

$$h^k_l(\bar{q},\mathcal{Y}^k) = \begin{cases} h\left(q_{l-1},q_l,\frac{\mathcal{Y}^k(\bar{q})}{\mathcal{F}^k_l(\bar{q})}\cdot r_2(q_{l-1},q_l)\right)\leq 0, \text{ for } k-l \text{ even},\\ h\left(q_{l-1},q_l,\frac{\mathcal{F}^k_{l-1}(\bar{q})}{\mathcal{Y}^k(\bar{q})}\cdot r_2(q_l,q_{l-1})^{-1}\right)\geq 0, \text{ for } k-l \text{ odd}.\end{cases}$$

接下来证明定理 2 如下:

定理 *2* 的证明。我们只需证明，定理 6中的条件 (1)、(2) 和 (3) 等价于定理2中的条件 (1)、(2)。

我们首先证明，定理 6中的条件 (1)、(2) 等价于定理 2中的条件 (1)。假设定理 6 中的条件 (1)、(2) 成立。由于对于 $l=1,\ \cdots,\ k$，有：若 $k-l$为偶数，

$$h\left(q_{l-1},q_l,(1+z_k)\mathcal{F}^k_{l-1}\cdot r_2(q_l,q_{l-1})^{-1}\right) = h\left(q_{l-1},q_l,(\frac{1+z_k}{\mathcal{F}^k_l})\cdot r_2(q_{l-1},q_l)\right) = 0, \tag{36}$$

且如果 $k-l$ 为奇数,

$$h\left(q_{l-1},q_l,\left(\mathcal{F}^k_l(1+z_k)\right)^{-1}\cdot r_2(q_{l-1},q_l)\right) = h\left(q_{l-1},q_l,(\frac{\mathcal{F}^k_{l-1}}{1+z_k})\cdot r_2(q_l,q_{l-1})^{-1}\right) = 0. \tag{37}$$

这等价于 $h^k_l(\bar{q},\ 1+z_k)=0$ 对于 $k=1,\ \cdots,\ l$.

此外，根据假设 $\mathcal{Y}^k\leq 1+z_k\leq\left(\mathcal{Z}^k\right)^{-1}$ 和引理 8，可得 $\bar{q}=(0,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{k-1},\ 1)$ 满足条件 $\varkappa(k)$，进而 $\bar{q}\in\mathcal{H}^k$，这意味着定理 2中的条件 (1)。

现在假设定理2 中的条件 (1) 成立。由介值定理可知，存在 $0<q_1<q_2<\cdots<q_{k-1}<1$ 和 $1+z_k\in[\mathcal{Y}^k,\left(\mathcal{Z}^k\right)^{-1}]$，使得对于 $l=1,\ \cdots,\ k$，(16) 和 (37) 成立。

接下来假设定理2 中的条件 (1)、(2) 成立，并证明定理 6中的条件 (3)。

对于 $l = 1, \cdots, k$，假设 x_l^* 是 $[q_{l-1}, q_l]$ 中 $g(x)$ 的临界点，并令 $\bar{x}_l = (0, q_1, \cdots, q_{l-1}, x_l^*, q_l, \cdots, q_{l-1}, 1)$。不失一般性，假设 x_l^* 是 $g(x)$ 的局部极小值，这意味着当 $k-l$ 为奇数时，$\mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*) > \mathcal{F}_l^{k+1}(x_l^*)$；当 $k-l$ 为偶数时，$\mathcal{F}_l^{k+1}(x_l^*) > \mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)$。

我们注意到，对于 $l' = l+1, \cdots, k$,

$$h_{l'}^k(\bar{q}, 1+z_k) = h_{l'+1}^{k+1}(\bar{x}_l, 1+z_k) = 0,$$

并且对于 $l' = 1, \cdots, l-1$,

$$h_{l'}^k(\bar{q}, 1+z_k) = h_{l'}^{k+1}(\bar{x}_l, 1+z_k) = 0 \text{ if } 1+z_k = \left(\mathcal{A}^{k+1}(x_l^*)\right)^{(-1)^{k-l}}.$$

另请注意，对于任意 $x \in [q_{l-1}, q_l]$,

$$\begin{aligned} & h_l^k\left(\bar{q}, \mathcal{A}_l^{k+1}(x)\right), \\ = \; & h_l^{k+1}(\bar{x}_l, \mathcal{A}_l^{k+1}(x)) + h_{l+1}^{k+1}(\bar{x}_l, \mathcal{A}_l^{k+1}(x)). \end{aligned}$$

回想一下，$h_l^k\left(\bar{q}, \mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)\right) = 0$. 那么，如果成立 $h_{l+1}^{k+1}\left(\bar{x}_l, \mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)\right) < 0$，则$h_l^{k+1}\left(\bar{x}_l, \mathcal{A}_l^{k+1}(x_l^*)\right) > 0$. 因此 $\bar{x}_l = (0, q_1, \cdots, q_{l-1}, x_l^*, q_l, q_{k-1}, 1) \in \mathcal{H}^{k+1}$，这与定理 2 中的条件 (2) 矛盾。因此，定理 6 中的条件 (3) 成立。

接下来，我们假设定理 6 中的条件 (3) 成立。我们用反证法证明定理 2 中的条件 (2)，并假设 $\mathcal{H}^{k+1} \neq \emptyset$. 如果 $\mathcal{H}^{k+2} = \emptyset$，那么根据前面的推理，帕里西测度 ν_P便是 $k+1$–RSB，这就导致矛盾。如果 $\mathcal{H}^{k+2} \neq \emptyset$ 且 $\mathcal{H}^{k+3} = \emptyset$，则同样的论证适用。根据定理 10，总有 $\mathcal{H}^{n+1} = \emptyset$，这就完成了证明。

□

现在我们转而证明定理 3。

定理 3的证明。 我们只需证明定理 9 中的条件（1-4）等价于定理 3中的条件（1-2）。

我们首先假设定理3中的条件（1-2）成立。

由于 $\mathcal{H}^{s_1} \tilde{<} \mathcal{H}^{s_2} \tilde{<} \cdots \tilde{<} \mathcal{H}^{s_t}$，因此对于满足 $q_{w_j} = \max_{(r_0, r_1 \cdots, r_{s_j}) \in \mathcal{H}_{s_j}^k} r_{s_j}$ 的 $j = 1, \cdots, t-1$ 和 $\bar{q}^j = (q_{w_{j-1}}, q_{w_{j-1}+1}, \cdots, q_{w_j})$，有 $\mathcal{Y}^{s_j} = F_{w_j}^j$ 和 $h_l^j(\bar{q}^j, F_{w_j}^j) = 0$, $l = w_{j-1}+1, \cdots, w_j$.

此外，对于 $j = 2, \cdots, t$和 $\bar{q}^j = (q_{w_{j-1}}, q_{w_{j-1}+1}, \cdots, q_{w_j}) \in \mathcal{H}^{s_j}$满足 $q_{w_{j-1}} = \min_{(r_0, r_1 \cdots, r_{s_j}) \in \mathcal{H}_{s_j}^k} r_0$ 的情形，有$F_{w_{j-1}}^j = \mathcal{Y}^{s_j}$在 s_j 为偶数时成立，而$F_{w_{j-1}}^j = \mathcal{Z}^{s_j}$在 s_j 为奇数时成立。此外，$h_l^j\left(\bar{q}^j, (F_{w_{j-1}}^j)^{(-1)^{s_j}}\right) = 0$, $l = w_{j-1}+1, \cdots, w_j$.

此外，对于 $j = 1, \cdots, t$和 $\bar{q}^j = (q_{w_{j-1}}, q_{w_{j-1}+1}, \cdots, q_{w_j}) \in \mathcal{H}^{s_j}$,

$$\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial}{\partial q_{w_j-1}} h_{w_j}^j(\bar{q}^j, F_{w_j}^j)\Big) = \operatorname{sgn}\big(1 - F_{w_j}^j \cdot F_{w_j-1}^j\big) \geq 0,$$

and

$$\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial}{\partial q_{w_{j-1}+1}} h_{w_{j-1}+1}^j\big(\bar{q}^j, (F_{w_{j-1}}^j)^{(-1)^{s_j}}\big)\Big) = \operatorname{sgn}\big(F_{w_{j-1}+1}^j \cdot F_{w_{j-1}}^j - 1\big) \leq 0.$$

那么，当 $q_{w_{j-1}+1}$ 递增时，$h_{w_{j-1}+1}^j\big(\bar{q}^j, (F_{w_{j-1}}^j)^{(-1)^{s_j}}\big)$ 的零点也递增。此外，当q_{w_j-1}递增时，$h_{w_j}^j(\bar{q}^j, F_{w_j}^j)$ 的零点递减。

因此，根据定理3中的条件 (1)，存在 $\bar{q}^j = (q_{w_{j-1}}^j, \cdots, q_{w_j}^j) \in \mathcal{H}^{s_j}$ 使得$q_{w_j}^j = \max_{(r_0, r_1 \cdots, r_{s_j}) \in \mathcal{H}^{s_j}} r_{s_j}$且 $q_{w_{j-1}}^j = \min_{(r_0, r_1 \cdots, r_{s_j}) \in \mathcal{H}^{s_j}} r_0$，其中 $q_{w_j}^j < q_{w_j}^{j+1}$，对 $j = 1, \cdots, t-1$.

此外， $\bar{q}^j$ 也满足 $\mathcal{Y}^j \cdot \mathcal{Z}^j < 1$ 以及方程组 (18)，这意味着定理9中的条件 (1-2)。

由于不存在满足关系 $\mathcal{H}^{s_1} \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_{j-1}} \precsim \mathcal{H}^1 \precsim \mathcal{H}^{s_j} \precsim \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_t}$ 的 $j = 1, \cdots, t$。因此，对于任意 (x, y)，都有 $h^F(x, y) \geq 0$ 且 $h^F(y, x) \geq 0.$，这意味着 $\frac{d^2}{dx^2}\left\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\right\} \leq 0$，其中 $x \in [\bar{q}^j_{w_j}, q^{j+1}_{w_j}]$.

假设 x_l^* 是 $[q^j_{l-1}, q^j_l]$ 中 $g(x)$ 的一个临界点。不失一般性，我们假设 x_l^* 是 $g(x)$ 的一个局部极小值，这意味着 $A^j_l(x^*_l) \cdot F^j_l \leq 1$.

现在我们定义 $\tilde{h}^j_l(\bar{x}^j_l, *_j) = g(q^j_{l-1})$ 对于 $s = s_j + 1$ 以及 $l = w_{j-1} + 1, \cdots w_j + 1$。

我们注意到，对于 $l' = l + 1, \cdots, w_j,$

$$h^j_{l'}(\bar{q}^j, *_j) = \tilde{h}^j_{l'+1}(\bar{x}^j_l, *_j) = 0,$$

并且对于 $l' = w_{j-1} + 1, \cdots, l - 1,$

$$h^j_{l'}(\bar{q}^j, *_j) = \tilde{h}^j_{l'}(\bar{x}_l, *_j) = 0 \text{ if } *_j = \left(\mathcal{A}^{k+1}(x^*_l)\right)^{(-1)^{w_j - l}}.$$

另请注意，对于任意 $x \in [q_{l-1}, q_l]$,

$$\begin{aligned} & h^j_l\left(\bar{q}, A^j_l(x)\right), \\ = \; & \tilde{h}^j_l(\bar{x}_l, A^j_l(x)) + \tilde{h}^j_{l+1}(\bar{x}_l, A^j_l(x)). \end{aligned}$$

回忆一下， $h^j_l\left(\bar{q}, A^j_l(x^*_l)\right) = 0.$ 那么，若满足 $h^j_{l+1}\left(\bar{x}_l, A^j_l(x^*_l)\right) < 0$，则 $h^{k+1}_l\left(\bar{x}_l, \mathcal{A}^{k+1}_l(x^*_l)\right) > 0$。因此 $\bar{x}^j_l \in \mathcal{H}^{s_j+1}$ 且 $\mathcal{H}^{s_1} \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_{j-1}} \precsim \mathcal{H}^{s_j+1} \precsim \mathcal{H}^{s_{j+1}} \precsim \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_t}$，这与定理 3中的条件 (2) 矛盾。因此，定理 9中的条件 (3) 成立。

现在假设定理 9 中的条件 (1-4) 成立。由于 $j = 1, \cdots, t+1$, $\bar{q}^j = (q^j_{w_{j-1}}, q^j_{w_{j-1}+1}, \cdots, q^j_{w_j})$ 满足 $h^j_l(\bar{q}^j, \mathrm{F}^j_{w_j}) = 0$，其中 $l = w_{j-1} + 1, \cdots, w_j$ 以及 $\mathrm{Y}^j \cdot \mathrm{Z}^j \leq 1$，可得 $\bar{q}^j \in \mathcal{H}_{s_j}$。

对于任意的 $(x_l, x_{l+1}) \in \mathcal{H}^1$，都有 $h^F(x_l, x_{l+1}) \leq 0$ 且 $h^F(x_{l+1}, x_l) \leq 0.$。由于 $\frac{d^2}{dx^2}\left\{\xi''(x)^{-\frac{1}{2}}\right\} \leq 0$，对于 $x \in [q^j_{w_j}, q^{j+1}_{w_j}]$，可得 $h^F(x_l, x_{l+1}) > 0$ 且 $h^F(x_{l+1}, x_l) < 0$，对任意 $q^j_{w_j} < x_l < x_{l+1} < q^{j+1}_{w_j}$. 均成立。因此，不存在满足 $\mathcal{H}^{s_j} \precsim \mathcal{H}^1 \precsim \mathcal{H}^{s_j+1}$ 的 $\mathcal{H}^1$。

接下来，我们假设存在 $1 \leq j \leq t$ 使得关系 $\mathcal{H}^{s_1} \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_{j-1}} \precsim \mathcal{H}^{s_j+1} \precsim \mathcal{H}^{s_{j+1}} \precsim \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_t}$ 成立。根据定理 11，不失一般性，我们假设关系 $\mathcal{H}^{s_1} \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_{j-1}} \precsim \mathcal{H}^{s_j+2} \precsim \mathcal{H}^{s_{j+1}} \precsim \cdots \precsim \mathcal{H}^{s_t}$ 不成立。由此前的推理，帕里西测度 ν_P 是（$k+1$）-FRSB，这导致矛盾。

□

最后，我们证明推论4和5 如下：

推论*4* 和 *5*的证明。 由定理 10可知，当 定理2 中的条件(2)（等价地，定理 6 中的条件(3)）自动满足，因此 $k = n,$ 从而可推出推论 4。

类似地，由定理 11可知，当定理3中的条件(2)、(3)（等价地，定理 9 中的条件(3)、(4)）自动满足，因此 $k = n,$ 从而可推出推论 4。

□

References

[1] A. Auffinger、A. Montanari 和 E. Subag。随机高维函数的优化：结构与算法。 *arXiv:2206.10217*，2022。[2] A. Auffinger 和 Y. Zhou。零温下的球面 p+s 自旋玻璃。 *arXiv:2209.03866*，2022。[3] W.-K. Chen 和 A. Sen。球面混合 p-自旋模型中基态能量的 Parisi 公式、无序混沌和涨落。 *Commun. Math. Phys.*，350，129–173，2017。

[4] A. Crisanti 和 H. Sommers。球面 p *Z. Phys. B. condensed*-自旋相互作用自旋玻璃模型：静态性质。，：–。[5] A. El Alaoui、A. Montanari 和 M. Sellke。平均场自旋玻璃的优化。 *The Annals of Probability*，49 6 2922 2960，2021（）：–。[6] M. M´ezard、G. Parisi 和 M. A. Virasoro。，第 卷。。世界科学出版公司，新泽西州蒂内克，。[7] A. Montanari。Sherrington-Kirkpatrick 哈密顿量的优化。载于 *2019 IEEE 60th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)* 1417 1433 2019，第 – 页。IEEE，。[8] E. Subag。追踪全 RSB 球面自旋玻璃的基态。 *Comm. Pure Appl. Math.*，74 1044，2021 1021：–。[9] M. Talagrand。球面平均场模型的自由能。 *Probab. Theory Related Fields*，134(3):339–382，2006。[10] M. Talagrand。 *Mean Field Models for Spin Glasses: Volume I*。施普林格出版社，柏林，2010。 *Spin glass theory and beyond* 9 *World Scientific Lecture Notes in Physics* 1987

Department of Mathematics, Northwestern Universty
Email address: yuxinzhou2023@u.northwestern.edu