arXiv:2303.04949v2 [quant-ph] 1 Aug 2023

玻色高斯系综的近乎最优测量

Hemant K. Mishra,[1,2,*] Ludovico Lami,[3,4,5,6,†] Prabha Mandayam,[7,8,‡] 和 Mark M. Wilde[1,2,§]

[1]康奈尔大学电气与计算机工程学院，纽约州伊萨卡 *14850*，美国 [2]路易斯安那州立大学 *Hearne* 理论物理研究所、物理与天文学系及计算与技术中心，美国路易斯安那州巴吞鲁日 *70803* [3]乌尔姆大学理论物理研究所与 *IQST*，*Albert-Einstein-Allee 11D-89069*，德国乌尔姆 [4]*QuSoft*，*Science Park 123*，*1098 XG*，荷兰阿姆斯特丹 [5]阿姆斯特丹大学柯特韦格–德弗里斯数学研究所，*Science Park 105-107*，*1098 XG*，荷兰阿姆斯特丹 [6]阿姆斯特丹大学理论物理研究所，*Science Park 904*，*1098 XH*，荷兰阿姆斯特丹 [7]印度理工学院马德拉斯分校量子信息、通信与计算中心，印度金奈 *600036* [8]印度理工学院马德拉斯分校物理系，印度金奈 *600036*

近乎最优测量是量子信息论中的一项基础分析工具，它提供了一种方法，用于推断标识从系综中按概率选取的量子态的经典标签。针对玻色高斯态这一类态识别并构造近乎最优测量，对于量子信息处理任务具有直接的实际意义。Holevo 最近证明，对于玻色高斯系综，近乎最优测量是一种玻色高斯测量，能够达到该系综的可访问信息 [*IEEE* 信息论汇刊，*66(9):5634–564, 2020*]。本文给出另一种证明，说明对于多模玻色态的高斯系综，近乎最优测量具有高斯性；我们重点建立该测量明确且可高效计算的高斯描述。我们还计算了近乎最优测量均方误差的明确形式，这与将其用于参数估计相关。

近乎最优测量的推广形式是一种称为优良仪器的量子仪器。我们证明，如果输入态是忠实高斯态，且其协方差矩阵满足某个条件，那么优良仪器的测量后态也是忠实高斯态。结合我们先前关于近乎最优测量的发现，并假设同一条件成立，可知期望输出态同样是忠实高斯态。在这种情况下，我们计算出测量后态和期望输出态的明确高斯描述。我们的研究结果表明，针对玻色高斯系综的优良仪器不再仅仅是一种分析工具，还可以在量子光学实验室中通过实验实现。

关键词： 近乎最优测量；优良仪器；玻色高斯系综；高斯测量；指数二次型；均方误差。

谨以此文献给 *Alexander S. Holevo*，以庆祝他*80*岁生日。*Holevo* 教授从过去 *[1]*到现在 *[2, 3]*, 以及他的教科书 *[4, 5]*所作出的众多奠基性贡献，一直是几代量子信息科学家的灵感来源和知识源泉。

* hemant.mishra@cornell.edu
† ludovico.lami@gmail.com
‡ prabhamd@physics.iitm.ac.in§ wilde@cornell.edu

目录

I. 引言 2

II. 背景
3A. 量子态与量子信道 3B. 量子系综与测量 3C. 量子仪器 4D. 玻色高斯态 4E. 高斯测量 6

III. 高斯态的近乎最优测量与均方误差
6IV. 高斯态的优良仪器 8V. 结论 9致谢 10参考文献 10附录 12附录 A. 操作指数二次型的黄金法则 12附录 B. 多维高斯分布的均方公式 13附录 C. 定理 1 的证明 13附录 D. 定理 2 的证明 18附录 E. 定理 3 的证明 20 附录 F. 矩阵的可逆性
$L^{-1}J^{-1}L - I$ 23附录 G. 矩阵的可逆性 J_7 由式 (44) 得到
24

I. 引言

量子测量是量子力学的基本组成部分，提供了一种猜测经典标签的方法，该标签用于标识从具有已知先验概率分布 [5–7] 的量子态系综中制备的量子系统的状态。它在量子通信 [8, 9], 、量子密钥分发 [10], 和量子密码学[11, 12]中有重要应用；更一般地说，它是读取编码在量子态中的经典信息的基本方式。

过去几十年来，人们对从有限维量子系统中提取信息进行了深入研究；这类系统被制备为有限多个量子态之一 [1, 4, 5, 8,13, 14]。对于此类系统，有多位作者独立提出了一种测量，其预期错误概率不超过最优错误概率的两倍 [15], [13, 16–18] （另见 [19]）。这种测量称为近乎最优测量或平方根测量，是量子信息论中常用的测量方法和分析工具 [20–30]。

最近，有人提出了一种量子算法，用于在离散变量系统中实现量子态系综的近乎最优测量 [31]。任意量子态系综的近乎最优测量都有一种规范的数学构造，因此也可作为连续变量（CV）系统的有效测量 [2, 3, 32]在研究玻色高斯系综的经典容量和可访问信息时 [32], Holevo 表明，对由多模玻色高斯态构成的高斯系综进行近乎最优测量，是一种高斯测量，并且能够达到该系综的可访问信息。

本文全面研究了玻色高斯系综的近乎最优测量及其推广——优良仪器。首先，我们给出玻色高斯系综的近乎最优测量具有高斯性的另一种证明，并提供该测量明确且可高效计算的高斯描述。此外，我们还计算了该测量均方误差的显式形式。接着，我们研究优良仪器 [33, Remark 14], ，它是对系综近乎最优测量进行推广的量子仪器。我们证明，在协方差矩阵满足某个条件时，与忠实高斯态相对应的优良仪器测量后态也是忠实高斯态。结合我们此前关于近乎最优测量的发现，并假设同一条件成立，可知期望输出态同样是忠实高斯态。在此情形下，我们还给出了测量后态和期望输出态各自明确的高斯描述。基于上述所有发现，多模玻色系统的优良仪器不再仅仅是用于量子信息理论推导的分析工具，还可以在量子光学实验室中通过实验实现。

本文结构安排如下。第II节回顾连续变量量子系统和玻色高斯态的一些定义及基础理论。第III节中，我们介绍玻色高斯系综的记号，并陈述两项主要结果：定理1 阐述近乎最优测量的高斯性及其显式形式；定理2 讨论测量的均方误差。随后，我们在第IV节研究近乎最优仪器，并在定理3中陈述我们的发现。附录A至G包含支持上述结果的详细计算和证明。

II. 背景

A. 量子态与量子信道

连续变量量子系统对应于复数域 $\mathbb{C}$上的一个无限维可分希尔伯特空间 H。该系统的量子态由密度算子 ρ 给出，它是作用于 H 上的自伴半正定算符，且具有单位迹。令 $\mathcal{D}(\mathrm{H})$ 表示密度算子的集合，$\mathrm{B}(\mathrm{H})$ 表示作用于 H 上的有界线性算符空间。两个连续变量系统分别由希尔伯特空间 H 和 $\mathcal{K}$ 表示，它们之间的量子信道 Φ 是一个从 $\mathrm{B}(\mathrm{H})$ 到 $\mathrm{B}(\mathcal{K})$ 的完全正保迹线性映射。特别地，对于所有 $\rho \in \mathcal{D}(\mathrm{H})$，有$\Phi(\rho) \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$。

B. 量子系综与测量

量子系综记作 $\{(p(x), \rho_x)\}_{x\in\Pi}$，由参数空间 Π 上的概率密度函数$p(x)$（其底层测度为 $\pi(\mathbf{d}x)$）以及取值于 $\mathcal{D}(\mathrm{H})$ 的量子态可测族 ρ_x 组成。例如，参数空间 Π 可以 $\mathbb{R}^m$ 配备勒贝格测度。量子测量由一个正算子值测度（POVM）给出。

It 是一族自伴半正定算子 $\{E_x\}_{x\in\Pi}$，满足

$$\int_{\Pi}\pi(\mathbf{d}x)E_x = \mathbb{I}, \tag{1}$$

其中 $\mathbb{I}$ 是作用于底层希尔伯特空间上的恒等算子。如果待测量的量子系统制备于状态 ρ，那么测量结果 x 的概率密度 $q(x)$由玻恩规则给出：

$$q(x) = \mathrm{Tr}[E_x\rho], \quad x \in \Pi. \tag{2}$$

与给定量子态系综相关联的近乎最优测量的构造如下。设 ρ 为该系综的平均态，其定义为

$$\rho \coloneqq \int_{\Pi}\pi(\mathbf{d}x)p(x)\rho_x, \tag{3}$$

其中，该积分在迹类算子巴拿赫空间 [32]中以强意义存在。由以下算子构成的族$\{E_x\}_{x\in\Pi}$ 定义为

$$E_x \coloneqq p(x)\rho^{-\frac{1}{2}}\rho_x\rho^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

是与之关联的近乎最优测量；当每个 E_x 都是有界算子时，该测量定义良好。在此情形下，$\{E_x\}_{x\in\Pi}$ 是正算子值测度这一事实，可由每个 E_x 均为半正定算子以及以下完备性条件得出：

$$\int_{\Pi}\pi(\mathbf{d}x)\,E_x = \int_{\Pi}\pi(\mathbf{d}x)\,p(x)\rho^{-\frac{1}{2}}\rho_x\rho^{-\frac{1}{2}} = \rho^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{\Pi}\pi(\mathbf{d}x)\,p(x)\rho_x\right)\rho^{-\frac{1}{2}} = \rho^{-\frac{1}{2}}\rho\rho^{-\frac{1}{2}} = \mathbb{I}. \tag{5}$$

C. 量子仪器

设 $\{\mathrm{M}_x\}_{x\in\Pi}$是一族完全正且迹不增的映射，且映射 $\int_{\Pi}\pi(\mathbf{d}x)\mathrm{M}_x$是保迹的，即为一个量子信道。这族映射 $\{\mathrm{M}_x\}_{x\in\Pi}$称为量子仪器，是描述测量的经典结果以及测量后态 [4, 34–36]的最一般方式。若输入态为 τ，则观测到测量结果 x 的概率密度为 $\mathrm{Tr}[\mathrm{M}_x(\tau)]$, ，而测量后态为 $\mathrm{M}_x(\tau)/\mathrm{Tr}[\mathrm{M}_x(\tau)]$。因此，量子仪器是量子测量的一种推广，它同时记录测量结果和测量后态。与正算子值测度 $\{E_x\}_{x\in\Pi}$ 相关联的量子仪器由映射族 $\{K_x(\cdot)K_x^\dagger\}_{x\in\Pi}$给出，其中 $E_x = K_x^\dagger K_x$对所有 $x \in \Pi$均成立。

D. 玻色高斯态

我们简要回顾一些数学定义以及有关量子高斯态的基本结果，这些内容将在本文的论述中发挥作用（综述见 [37–39] ）。一个 n 模连续变量量子系统由一个作用在张量积希尔伯特空间上的密度算子描述

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{H}_j, \tag{6}$$

其中每个 H_j 都是定义在 $\mathbb{C}$ 上的无限维可分希尔伯特空间。与第j个模相关的位置和动量正交分量（自伴）算子分别记为 $\hat{x}_j$ 和 $\hat{p}_j$，它们满足正则对易关系（CCR）：

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}, \quad \text{for all } j,k \in \{1,\ldots,n\}. \tag{7}$$

其中 $[\hat{x}_j,\ \hat{p}_k] = \hat{x}_j\hat{p}_k - \hat{p}_k\hat{x}_j$ 表示 $\hat{x}_j$ 与 $\hat{p}_k$的对易子，i 表示虚数单位，$\hbar$ 表示约化普朗克常数 $\hbar/2\pi$，而 $\delta_{j,\ k}$ 表示克罗内克δ。在对连续变量系统的处理中，我们令 $\hbar = 1$。令 $\hat{r}$ 表示以下正则算符向量：

$$\hat{r} \coloneqq (\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_{2n})^T \equiv (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \ldots, \hat{x}_n, \hat{p}_n)^T . \tag{8}$$

令 $\left[\hat{r},\ \hat{r}^T\right]$表示 $2n \times 2n$矩阵，其 $(j,\ k)$ 个元素定义为 $[\hat{r}_j,\ \hat{r}_k]$。正则对易关系可用矩阵形式表示为

$$\left[\hat{r}, \hat{r}^T\right] = i\Omega, \quad \text{where} \quad \Omega = I_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

且 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。一个 n 模忠实高斯态 ρ 可写为

$$\rho = \frac{1}{Z_\rho} \exp\left[-\hat{H}_\rho\right], \tag{10}$$

$$\hat{H}_\rho \coloneqq \frac{1}{2}(\hat{r} - r_\rho)^T H_\rho (\hat{r} - r_\rho), \tag{11}$$

$$Z_\rho \coloneqq \sqrt{\det\left([V_\rho + i\Omega]/2\right)}, \tag{12}$$

其中 H_ρ 是该态的二次哈密顿算符，H_ρ 是一个 $2n \times 2n$ 实正定矩阵，我们称之为哈密顿矩阵，$r_\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ 等于该态的均值向量$r_\rho = \hat{r}_\rho = \mathrm{Tr}[\hat{r}\rho]$，而 V_ρ 是 $2n \times 2n$ 正定协方差矩阵，其 $(j,\ k)$ 个元素定义为

$$[V_\rho]_{j,k} = \mathrm{Tr}\left[\{(\hat{r} - r_\rho)_j, (\hat{r} - r_\rho)_k\}\rho\right]. \tag{13}$$

这里，$a, b = \hat{a}b + b\hat{a}$表示两个算子 $\hat{a}$和 b的反对易子。忠实高斯态 ρ 的协方差矩阵V_ρ 满足以下不确定性原理：

$$V_\rho + i\Omega > 0. \tag{14}$$

我们将使用引理 10 中关于 [40] 忠实高斯态的协方差矩阵的以下关系：

$$V_\rho - i\Omega = \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}} V_\rho \left(V_\rho + i\Omega\right)^{-1} V_\rho \sqrt{I + \left(\Omega V_\rho\right)^{-2}}. \tag{15}$$

矩阵 H_ρ 和 V_ρ 之间的关系如下 [41, 42]:

$$H_\rho = 2i\Omega\, \mathrm{arcoth}\left(V_\rho i\Omega\right), \tag{16}$$

$$V_\rho = \coth\left(i\Omega H_\rho/2\right) i\Omega, \tag{17}$$

其中

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{18}$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \tag{19}$$

令 $W_\rho := -V_\rho i\Omega$。关系式（16）和（17）给出以下著名的凯莱变换[43, 44]:

$$\exp\left[i\Omega H_\rho\right] = \frac{W_\rho - I}{W_\rho + I}, \tag{20}$$

$$W_\rho = \frac{I + \exp\left[i\Omega H_\rho\right]}{I - \exp\left[i\Omega H_\rho\right]}, \tag{21}$$

其中，我们使用了可逆矩阵 A 和 B 的记号 $\frac{A}{B} := AB^{-1}$。对于 $r \in \mathbb{R}^{2n}$，定义酉算子 $\hat{D}(r)$ 如下:

$$\hat{D}(r) := \exp\left[ir^T\Omega\hat{r}\right]. \tag{22}$$

这也称为韦尔位移算子。其逆为 $\hat{D}(r)^\dagger = \hat{D}(-r)$。位移算子会将高斯态 ρ 的均值平移 r；也就是说，$\hat{D}(r)^\dagger\rho\,\hat{D}(r)$ 的均值向量为 $r_\rho + r$。位移算子的作用不会改变该态的协方差矩阵。

E. 高斯测量

与正算子值测度对应的测量

$$\left\{\frac{1}{(2\pi)^n}\mathbf{d}y_m\ \hat{D}(-y_m)\rho_m\hat{D}(y_m)\right\}_{y_m\in\mathbb{R}^{2n}}, \tag{23}$$

其中，ρ_m 是一个固定的 n 模高斯态，其均值向量为零，协方差矩阵 V_m 是一般形式，该测量属于高斯测量。因此，下列等式成立:

$$\mathbb{I} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathbf{d}y_m\ \hat{D}(-y_m)\rho_m\hat{D}(y_m). \tag{24}$$

这种测量也称为一般化的探测 [39], ，因为它表示高斯测量的一般形式。

III. 近乎最优　高斯态与均方误差的近乎最优测量　R

设 $\{(p(x), \rho_x)\}_{x\in\mathbb{R}^{2n}}$ 为一个高斯态系综，其中态 ρ_x 定义如下:

$$\rho_x := \hat{D}(-Lx)\rho_0\hat{D}(Lx), \tag{25}$$

其中，ρ_0 是一个固定的 n模忠实高斯态，而 L 是一个 $2n \times 2n$ 实可逆矩阵。此外，$p(x)$是一个高斯概率密度函数，其均值向量为 $\mu \in \mathbb{R}^{2n}$，实正定协方差矩阵 Σ为:

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^n\sqrt{\det\Sigma}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]. \tag{26}$$

我们可以说，系综 $\{(p(x),\ \rho_x)\}_{x\in\mathbb{R}^{2n}}$ 是正态位置模型的一种量子推广，这一模型在经典估计理论中广为人知 [45, 例 1。1]。请注意，均值向量 r_{ρ_x}和协方差矩阵 V_{ρ_x} 的 ρ_x 由下式给出

$$r_{\rho_x} = r_{\rho_0} + Lx,\quad V_{\rho_x} = V_{\rho_0}. \tag{27}$$

该系综的平均态 ρ 也是忠实高斯态，其均值向量和协方差矩阵由 [39, Section5.3.2] 给出：

$$r_\rho = r_{\rho_0} + L\mu,\quad V_\rho = V_{\rho_0} + 2L\Sigma L^T. \tag{28}$$

下述定理指出，与高斯系综相关联的近乎最优测量是高斯测量，并给出了其显式表达式。

定理 1。 设 $\{(p(x),\ \rho_x)\}_{x\in\mathbb{R}^{2n}}$ 是一个高斯系综，满足 $\rho_x = \hat{}D(-Lx)\rho_0\hat{}D(Lx)$，其中$\rho_0$ 是一个固定的 n 模忠实高斯态， L 是一个 $2n\times 2n$ 实可逆矩阵，而 $p(x)$ 是均值向量为 $\mu\in\mathbb{R}^{2n}$ 、协方差矩阵为 Σ 的高斯概率密度函数，其中 $2n\times 2n$ 为实正定矩阵。与该高斯系综相关联的近乎最优测量 $\{E_x\}_{x\in\mathbb{R}^{2n}}$ 是高斯测量。其显式高斯描述如下：

$$E_x\boldsymbol{d}x = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{D}(-y)\sigma\hat{D}(y)\boldsymbol{d}y, \tag{29}$$

其中， σ 是一个具有零均值向量和协方差矩阵 V_σ 的 n模忠实高斯态，其协方差矩阵由下式给出

$$V_\sigma = -V_\rho + \frac{1}{2}\sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho L^{-T}\Sigma^{-1}L^{-1}V_\rho\sqrt{I + \left(\Omega V_\rho\right)^{-2}}, \tag{30}$$

测量结果 y 与系综参数 x 的关系为

$$y = r_\rho + \frac{1}{2}\sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho L^{-T}\Sigma^{-1}(x-\mu). \tag{31}$$

证明。证明见附录C。 ■

现在，我们研究近乎最优测量在估计系综参数时的均方误差。设 X 是定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的一个随机变量，其概率密度为$_\sim p_X(x) = p(x)$，因此它表示系综的经典标签的真实值。此外，设 X是一个取值于 $\mathbb{R}^{2n}$ 的随机变量，其取值由近乎最优测量的测量结果给出。$\widetilde{}$在给定 $X = x$的情况下， X 的条件概率密度由玻恩规则$p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x) = \mathrm{Tr}[E_x\rho_{\tilde{x}}] = \mathrm{Tr}[p(x)\rho^{-\frac{1}{2}}\rho_x\rho^{-\frac{1}{2}}\rho_{\tilde{x}}]$给出。近乎最优测量的均方误差定义为 $\|X-\widetilde{X}\|^2$ 的期望值：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|X-\widetilde{X}\|^2] &:= \int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathbf{d}x\mathbf{d}\tilde{x}\ \|x-\tilde{x}\|^2 p_{X,\widetilde{X}}(x,\tilde{x})\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathbf{d}x\mathbf{d}\tilde{x}\ \|x-\tilde{x}\|^2 p_X(x)p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x).\end{aligned} \tag{32}$$

在下述定理中，我们给出了近乎最优测量的均方误差的精确表达式。

定理 2. 与定理*1* 中所述高斯系综相关联的近乎最优测量的均方误差为

$$\mathbb{E}[\|X-\widetilde{X}\|^2] = 2\,\mathrm{Tr}\left[\left(I - 2\Sigma L^T V_\rho^{-1}\left(\sqrt{I+\left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}\right)^{-1} L\right)\Sigma\right]. \tag{33}$$

证明。 证明见附录 D。 ■

IV. 高斯态的优良仪器

与近乎最优测量相关联的量子仪器称为优良仪器 （见 [33, 备注 14]）。对于高斯系综 $\{(p(x), \rho_x)\}_{x\in\mathbb{R}^{2n}}$，它定义为以下完全正迹非增映射的集合：

$$\left\{\tau \mapsto p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\right\}_{x\in\mathbb{R}^{2n}}. \tag{34}$$

我们强调，对于每个输入态 τ，算子 $\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}$ 都是迹类的。这是因为 $\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}$ 是有界算子，而这又是因为 ρ_x 和 ρ 的最大相对熵有限，因为 $V_{\rho_0} < V_\rho$。见 [40]的定理 24。我们关注观测到测量结果 x的概率密度函数 $t(x)$

$$t(x) = \mathrm{Tr}\left[p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\right], \tag{35}$$

测量后态

$$\frac{p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}}{t(x)}, \tag{36}$$

以及相关量子信道的期望输出态

$$\tau \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbf{d}x\; p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}. \tag{37}$$

以下定理指出，若输入态 τ 是满足 $V_\tau < V_\rho$的忠实高斯态，则仪器的测量后态和期望输出态均为高斯态。其证明见附录 E。

定理 3. 对于定理 *1*中所述高斯系综对应的优良仪器，若输入态 τ 是满足 $V_\tau < V_\rho$的忠实高斯态，则测量后态也是忠实高斯态，且由下式给出

$$\frac{p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}}{\mathrm{Tr}\left[p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\right]} = \hat{D}(-z)\rho_7\hat{D}(z). \tag{38}$$

在上述内容中， ρ_7 是一个均值向量为

$$r_{\rho_7} := r_\rho + J_6 J_5 (r_\tau - r_\rho), \tag{39}$$

且协方差矩阵为

$$V_{\rho_7} \coloneqq V_{\rho_0} - \sqrt{I + \left(V_{\rho_0}\Omega\right)^{-2}} V_{\rho_0} \left(V_5 + V_{\rho_0}\right)^{-1} V_{\rho_0} \sqrt{I + \left(\Omega V_{\rho_0}\right)^{-2}}, \tag{40}$$

其中

$$V_5 \coloneqq -V_\rho + \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}} V_\rho \left(V_\rho - V_\tau\right)^{-1} V_\rho \sqrt{I + \left(\Omega V_\rho\right)^{-2}}, \tag{41}$$

$$J_5 \coloneqq \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}} V_\rho \left(V_\rho - V_\tau\right)^{-1}, \tag{42}$$

$$J_6 \coloneqq \sqrt{I + \left(V_{\rho_0}\Omega\right)^{-2}} V_{\rho_0} \left(V_5 + V_{\rho_0}\right)^{-1}, \tag{43}$$

$$J_7 \coloneqq 2\left(I - J_6\right) L\Sigma L^T V_\rho^{-1} \left(\sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}\right)^{-1}. \tag{44}$$

变量 z 与 x 的关系为

$$z = J_7 \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}} V_\rho L^{-T} \Sigma^{-1} (x - \mu)/2. \tag{45}$$

在这种情况下，相应量子信道的期望输出态 $\tilde{\tau}$ (37) 也是一个忠实高斯态，其均值向量和协方差矩阵分别为

$$r_{\tilde{\tau}} \coloneqq r_{\rho_7} + J_7(r_\tau - r_\rho), \tag{46}$$

$$V_{\tilde{\tau}} \coloneqq V_{\rho_7} + J_7 \left[V_\tau + V_\sigma\right] J_7^T, \tag{47}$$

其中 V_σ 由定理 (30) 给出*1*。

V. 结论

我们工作的主要发现之一，是对以 $\mathbb{R}^{2n}$ 为参数的多模玻色高斯态系综的近乎最优测量给出了明确的数学高斯描述。此外，我们还给出了此类测量的均方误差闭式表达式。这些结果有望用于涉及高斯态贝叶斯量子估计任务的实验；这类任务旨在通过测量来估计式（ x （25）中的向量。事实上，由于这种情况下的近乎最优测量是高斯测量，实施该测量所需的实验条件远低于非高斯测量。我们工作的另一项发现，是对忠实高斯态 τ 在条件 $V_\tau < V_\rho$下所对应的近乎最优仪器的测量后态以及期望输出态，给出了明确的数学高斯描述，其中 ρ 是该系综的平均态。

接下来，一个重要的开放问题是，能否在不需要技术条件的情况下 $V_\tau < V_\rho$ 建立定理 3 中的优良仪器（34）是高斯仪器。我们怀疑这一条件并非必要。若能更明确地联系本文的发现与[46]关于高斯 Petz 恢复映射的早期结果，也会很有意思；因为在 [33, 备注 14]中已有讨论，在有限维情形下，优良仪器已知是 Petz 恢复映射的一种特殊情形。

致谢

HKM 和 MMW 感谢美国国家科学基金会通过资助编号 2304816 提供支持。作者感谢 Tiju Cherian John、Aby Philip、Soorya Rethinasamy、Vishal Singh、Komal Malik 和 Tanvi Jain 所进行的富有启发性的讨论。

---

[1] Alexander S. Holevo. 最优量子测量。《理论与数学物理》，17(3):1172–1177，1973年12月。[2] Alexander S. Holevo. 一般量子高斯系综的可访问信息。《数学物理学杂志》，62(9):092201，2021年9月。arXiv:2102.01981。[3] Alexander S. Holevo. 一般量子高斯测量的经典容量。《熵》，23(3):377，2021年3月。arXiv:2101.00423。[4] Alexander S. Holevo.《量子理论的概率与统计方面》。North-Holland，1982年。[5] Alexander S. Holevo.《量子理论的统计结构》。施普林格科学与商业媒体，2003年。[6] Howard M. Wiseman 和 Gerard J. Milburn.《量子测量与控制》。剑桥大学出版社，2009年。[7] Paul Busch、Pekka Lahti、Juha-Pekka Pellonpää 和 Kari Ylinen.《量子测量》。施普林格，2016年。[8] Carl W. Helstrom. 量子检测与估计理论。《统计物理学杂志》，1(2):231–252，1969年6月。[9] Stephen Barnett.《量子信息》。牛津大学出版社，2009年。[10] Joonwoo Bae 和 Leong-Chuan Kwek. 量子态判别及其应用。《物理学杂志A：数学与理论》，48(8):083001，2015年1月。arXiv:1707.02571。[11] Simon J. D. Phoenix 和 Paul D. Townsend. 量子密码学：如何利用量子力学击败破译者。《当代物理学》，36(3):165–195，1995年5月。[12] Dirk Bouwmeester、Artur Ekert 和 Anton Zeilinger.《量子信息物理学》。施普林格，2000年。[13] Paul Hausladen 和 William K. Wootters. 用于区分量子态的“相当好的”测量。《现代光学杂志》，41(12):2385–2390，1994年12月。[14] Jonathan Walgate、Anthony J. Short、Lucien Hardy 和 Vlatko Vedral. 多体正交量子态的局部可区分性。《物理评论快报》，85(23):4972，2000年12月。arXiv:quant-ph/0007098。[15] Howard Barnum 和 Emanuel Knill. 利用近乎最优的量子和经典保真度逆转量子动力学。《数学物理学杂志》，43(5):2097–2106，2002年5月。arXiv:quant-ph/0004088。[16] Viacheslav Belavkin. 非正交量子信号的最优区分。《无线电工程与电子物理》，20:39–47，1975年。[17] Viacheslav Belavkin. 最优多重量子统计假设检验。《随机过程》，1:315–345，1975年。[18] Lane P. Hughston、Richard Jozsa 和 William K. Wootters. 给定密度矩阵的量子系综的完整分类。《物理快报A》，183(1):14–18，1993年11月。[19] Alexander S. Holevo. 量子统计中渐近最优假设检验。《概率论及其应用》，23(2):411–415，1979年。[20] Michael J. W. Hall. 量子信息与关联界。《物理评论A》，55(1):100，1997年1月。[21] Cristopher Moore 和 Alexander Russell. 对于区分共轭隐藏子群，近乎最优测量已是最佳选择。2005年1月。arXiv:quant-ph/0501177。[22] Dave Bacon、Andrew M. Childs 和 Wim van Dam. 从最优测量到半直积群上隐藏子群问题的高效量子算法。第46届IEEE计算机科学基础年会（FOCS’05），第469–478页，2005年10月。arXiv:quant-ph/0504083。[23] Masahito Hayashi、Akinori Kawachi 和 Hirotada Kobayashi. 具有最优样本复杂度的隐藏子群问题量子测量。《量子信息与计算》，

8(3):345–358，2008年3月。arXiv:quant-ph/0604174。[24] Michele Mosca. 量子算法。《复杂性与系统科学百科全书》，第7088–7118页，2009年。arXiv:0808.0369。[25] Michele Dall'Arno、Giacomo Mauro D'Ariano 和 Massimiliano F. Sacchi. 量子测量的信息功率。《物理评论A》，83(6):062304，2011年6月。arXiv:1103.1972。[26] Alexander S. Holevo. 量子可观测量的信息容量。《信息传输问题》，48(1):1–10，2012年3月。arXiv:1103.2615。[27] Nicola Dalla Pozza 和 Gianfranco Pierobon. 平方根测量在量子态判别中的最优性。《物理评论A》，91(4):042334，2015年4月。[28] Raban Iten、Joseph M. Renes 和 David Sutter. 量子信息论中的相当好的测量。《IEEE信息论汇刊》，63(2):1270–1279，2016年12月。arXiv:1608.08229。[29] Hao-Chung Cheng. 对量子信道上经典通信可达性的一种简洁且更紧致的推导。2022年8月。arXiv:2208.02132。[30] Michał Studziński、Marek Mozrzymas 和 Piotr Kopszak. 基于端口的隐形传态方案中的平方根测量与资源态退化。《物理学杂志A：数学与理论》，55(37):375302，2022年8月。arXiv:2105.14886。[31] András Gilyén、Seth Lloyd、Iman Marvian、Yihui Quek 和 Mark M. Wilde. 用于Petz恢复信道和相当好的测量的量子算法。《物理评论快报》，128(22):220502，2022年6月。arXiv:2006.16924。[32] Alexander S. Holevo. 量子高斯可观测量和系综的高斯极大化者。《IEEE信息论汇刊》，66(9):5634–5641，2020年4月。arXiv:1908.03038。[33] Mark M. Wilde. 量子信息论中的可恢复性。《英国皇家学会会刊A辑》，471(2182):20150338，2015年10月。arXiv:1505.04661。[34] E. Brian Davies 和 John T. Lewis. 量子概率的操作方法。《数学物理通信》，17(3):239–260，1970年9月。[35] Edward B. Davies.《开放系统量子理论》。学术出版社，1976年。[36] Masanao Ozawa. 连续可观测量的量子测量过程。《数学物理学杂志》，25(1):79–87，1984年。[37] Filippo Caruso、Jens Eisert、Vittorio Giovannetti 和 Alexander S. Holevo. 多模玻色高斯信道。《新物理学杂志》，10(8):083030，2008年8月。arXiv:0804.0511。[38] Gerardo Adesso、Sammy Ragy 和 Antony R. Lee. 连续变量量子信息：高斯态及其他。《开放系统与信息动力学》，21(01n02):1440001，2014年6月。arXiv:1401.4679。[39] Alessio Serafini.《量子连续变量：理论方法入门》。CRC出版社，2017年。[40] Kaushik P. Seshadreesan、Ludovico Lami 和 Mark M. Wilde. 量子高斯态的Rényi相对熵。《数学物理学杂志》，59(7):072204，2018年7月。arXiv:1706.09885。[41] Xiao-yu Chen. 高斯纠缠相对熵。《物理评论A》，71(6):062320，2005年6月。arXiv:quant-ph/0402109。[42]Alexander S. Holevo. 无限维量子演化的熵增益与Choi–Jamiolkowski对应。《理论与数学物理》，166(1):123–138，2011年1月。[43] Arthur Cayley. 关于反对称行列式的若干性质。《纯粹与应用数学杂志》，33:119–123，1846年。[44] Arthur Cayley.《Arthur Cayley数学论文集》，第8卷。大学出版社，1895年。[45] Aleksandr Petrovich Korostelev 和 Olga Korosteleva.《数理统计学：渐近极小极大理论》，第119卷。美国数学学会，2011年。[46] Ludovico Lami、Siddhartha Das 和 Mark M. Wilde. 量子高斯动力学的近似逆转。《物理学杂志A：数学与理论》，51(12):125301，2018年2月。arXiv:1702.04737。[47] John Gurland. 多维高斯分布（Kenneth S. Miller），1966年。[48] Rajiah Simon、Narasimhaiengar Mukunda 和 Biswadeb Dutta. 多模系统的量子噪声矩阵：U(n)不变性、压缩与标准形。《物理评论A》，49(3):1567，1994年3月。[49] John Williamson. 关于线性动力系统标准形的代数问题。《美国数学杂志》，58(1):141–163，1936年1月。[50] Gerald B. Folland. 相空间中的调和分析。第122号。普林斯顿大学出版社，1989年。

[51] R. Simon、S. Chaturvedi 和 V. Srinivasan。正矩阵的合同与典范形式：在 Schweinler–Wigner 极值原理中的应用。《数学物理学杂志》，40(7):3632– 3642，1999年7月。arXiv:math-ph/9811003。[52] Kalyanapuram R. Parthasarathy。复数域中高斯态的对称群 $L^2(\mathbb{R}^n)$。《*Prokhorov* 与当代概率论：献给 *Yuri V. Prokhorov* 》，33:349–369，2012 年 11 月。[53] Ludovico Lami 、 Christoph Hirche 、 Gerardo Adesso 和 Andreas Winter。从对数行列式不等式到通过可恢复性理论研究高斯纠缠。《*IEEE* 信息论汇刊》，63(11):7553–7568，2017年8月。arXiv:1703.06149。

附录

附录 A T　　指数二次型运算的黄金法则　　S

我们简要回顾指数二次型乘积运算的黄金法则，本文中将反复用到该法则。更多详情请参见 [46, 附录 A]以及其中的参考文献 ˆ。设 H_j 为任意具有如下形式的非齐次二次算子

$$\hat{H}_j \coloneqq \frac{i}{2}\hat{r}^T \Omega X_j \hat{r} + i s_j^T \Omega \hat{r} + \frac{i}{2} a_j, \tag{48}$$

使得 X_j 是一个 $2n \times 2n$ 复矩阵，且 ΩX_j 对称， $s_j \in \mathbb{C}^{2n}$，并且 $a_j \in \mathbb{C}$。定义与算子 ˆ H_j对应的矩阵 $M_j(X_j, s_j, a_j)$，如下所示

$$M_j \equiv M_j(X_j, s_j, a_j) \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & s_j^T \Omega^T & a_j \\ 0 & X_j & s_j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

其指数为

$$\exp[M_j] = \begin{bmatrix} 1 & \left(\dfrac{I - \exp[-X_j]}{X_j} s_j\right)^T \Omega^T & a_j + s_j^T \Omega \dfrac{X_j - \sinh X_j}{X_j^2} s_j \\ 0 & \exp[X_j] & \dfrac{\exp[X_j] - I}{X_j} s_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{50}$$

其中 I 是 $2n \times 2n$ 单位矩阵，且 $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$。给定两个算子 ˆ H_1 和 ˆ H_2，满足以下条件的算子 H_3

$$\exp\left[\hat{H}_1\right] \exp\left[\hat{H}_2\right] = \exp\left[\hat{H}_3\right] \tag{51}$$

ˆ ˆ属于由 H_1 和 H_2生成的李代数。黄金法则指算子 H_3 与其对应矩阵 M_3 之间的一一对应关系，满足

$$\exp[M_1] \exp[M_2] = \exp[M_3]. \tag{52}$$

使用指数形式（50）和基本代数运算求解 M_3 中的（52）更容易。

附录 B 多维高斯分布的均方公式

设 $g:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是一个高斯概率密度函数，其均值向量为 $\eta \in \mathbb{R}^m$，并具有一个$m \times m$ 实正定协方差矩阵 Γ:

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sqrt{\det\Gamma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\eta)^T\Gamma^{-1}(x-\eta)\right]. \tag{53}$$

密度函数 g 满足关系式

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{d}x\ \|x-y\|^2 g(x) = \|\eta-y\|^2 + \mathrm{Tr}\,\Gamma, \quad \text{for all } y \in \mathbb{R}^m. \tag{54}$$

我们将式（54）称为均方公式，适用于多维高斯分布。利用以下性质即可轻松证明：对于所有 $1 \le i,\ j \le m$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{d}x\ x_i g(x) = \eta_i, \tag{55}$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{d}x\ (x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j) g(x) = \Gamma_{ij}. \tag{56}$$

关于涉及多维高斯密度的积分的详细论述，请参见 [47] 的第 2 章。

附录 C 定理1的证明

利用式（10）中高斯态的表示形式，我们可以将近乎最优测量改写为

$$E_x = p(x) Z_\rho Z_{\rho_0}^{-1} \exp\left[\hat{H}_\rho/2\right] \exp\left[-\hat{H}_{\rho_x}\right] \exp\left[\hat{H}_\rho/2\right]. \tag{57}$$

此处我们利用了 ρ_x 与 ρ_0 具有相同协方差矩阵这一事实，因此 $Z_{\rho_x} = Z_{\rho_0}$。^附录 A中所述的黄金法则保证存在一个形式如下的算子 H_4

$$\hat{H}_4 = \frac{i}{2}\hat{r}^T\Omega X_4 \hat{r} + i s_4^T \Omega \hat{r} + \frac{i}{2}a_4 \tag{58}$$

满足

$$\exp\left[\hat{H}_\rho/2\right] \exp\left[-\hat{H}_{\rho_x}\right] \exp\left[\hat{H}_\rho/2\right] = \exp[\hat{H}_4]. \tag{59}$$

式（58）中的矩阵 X_4、向量 s_4和标量 a_4 可按如下方式得到。令 M_4 为与算子 ^对应的矩阵 H_4，该算子由式（49）给出:

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & s_4^T\Omega^T & a_4 \\ 0 & X_4 & s_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

^ ^将算子 H_ρ 和 H_{ρ_x} 写成标准形式（48）：

$$\hat{H}_\rho = \frac{i}{2}\hat{r}^T\left(-iH_\rho\right)\hat{r} + i r_\rho^T\left(iH_\rho\right)\hat{r} + \frac{i}{2}\left(-i r_\rho^T H_\rho r_\rho\right), \tag{61}$$

$$\hat{H}_{\rho_x} = \frac{i}{2}\hat{r}^T\left(-iH_{\rho_0}\right)\hat{r} + ir_{\rho_x}^T\left(iH_{\rho_0}\right)\hat{r} + \frac{i}{2}\left(-ir_{\rho_x}^T H_{\rho_0} r_{\rho_x}\right), \tag{62}$$

并令 M_ρ 和 M_{ρ_x} 为由（49）给出的相应矩阵：

$$M_\rho = \begin{bmatrix} 0 & -ir_\rho^T H_\rho & -ir_\rho^T H_\rho r_\rho \\ 0 & i\Omega H_\rho & i\Omega H_\rho r_\rho \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{63}$$

$$M_{\rho_x} = \begin{bmatrix} 0 & -ir_{\rho_x}^T H_{\rho_0} & -ir_{\rho_x}^T H_{\rho_0} r_{\rho_x} \\ 0 & i\Omega H_{\rho_0} & i\Omega H_{\rho_0} r_{\rho_x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{64}$$

黄金法则表明，矩阵 M_ρ、M_{ρ_x} 和 M_4 满足

$$\exp\left[M_\rho/2\right]\exp\left[-M_{\rho_x}\right]\exp\left[M_\rho/2\right] = \exp[M_4]. \tag{65}$$

由（50）可知

$$\exp[M_\rho/2] = \begin{bmatrix} 1 & r_\rho^T\left(I - \exp[-i\Omega H_\rho/2]\right)^T\Omega^T & -r_\rho^T\Omega^T\sinh\left(i\Omega H_\rho/2\right)r_\rho \\ 0 & \exp[i\Omega H_\rho/2] & \left(\exp[i\Omega H_\rho/2] - I\right)r_\rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{66}$$

$$\exp[-M_{\rho_x}] = \begin{bmatrix} 1 & r_{\rho_x}^T\left(I - \exp[i\Omega H_{\rho_0}]\right)^T\Omega^T & r_{\rho_x}^T\Omega^T\sinh\left(i\Omega H_{\rho_0}\right)r_{\rho_x} \\ 0 & \exp[-i\Omega H_{\rho_0}] & \left(\exp[-i\Omega H_{\rho_0}] - I\right)r_{\rho_x} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{67}$$

$$\exp[M_4] = \begin{bmatrix} 1 & \left(\dfrac{I - \exp[-X_4]}{X_4}s_4\right)^T\Omega^T & a_4 + s_4^T\Omega\dfrac{X_4 - \sinh X_4}{X_4^2}s_4 \\ 0 & \exp[X_4] & \dfrac{\exp[X_4] - I}{X_4}s_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{68}$$

使用（66）和（67），将（65）左边的矩阵相乘，并与$\exp[M_4]$比较；经过一些代数运算，我们得到

$$\exp[X_4] = \exp[i\Omega H_\rho/2]\exp[-i\Omega H_{\rho_0}]\exp[i\Omega H_\rho/2], \tag{69}$$

$$\frac{\exp[X_4] - I}{X_4}s_4 = \left(\exp[X_4] - I\right)r_\rho - \exp[i\Omega H_\rho/2]\left(I - \exp[-i\Omega H_{\rho_0}]\right)(r_{\rho_x} - r_\rho). \tag{70}$$

由（69），应用命题 6：[40]两次，可得 $X_4 = -i\Omega H_4$，其中 $H_4 = 2i\Omega\,\mathrm{arcoth}\,(V_4 i\Omega)$，且 V_4 是一个由下式给出的 $2n\times 2n$ 实对称矩阵

$$V_4 = -V_\rho + \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1}V_\rho\sqrt{I + \left(\Omega V_\rho\right)^{-2}} \tag{71}$$

$$= -V_\rho + \frac{1}{2}\sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho L^{-T}\Sigma^{-1}L^{-1}V_\rho\sqrt{I + \left(\Omega V_\rho\right)^{-2}}. \tag{72}$$

我们在最后一个等号中使用了关系 $V_\rho - V_{\rho_0} = 2L\Sigma L^T$。将协方差矩阵关系（15）用于 V_ρ 中的（71），可得

$$V_4 + i\Omega = -\left(V_\rho - i\Omega\right) + \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1}V_\rho\sqrt{I + \left(\Omega V_\rho\right)^{-2}} \tag{73}$$

$$= \sqrt{I + (V_\rho \Omega)^{-2}} V_\rho \left[(V_\rho - V_{\rho_0})^{-1} - (V_\rho + i\Omega)^{-1} \right] V_\rho \sqrt{I + (\Omega V_\rho)^{-2}} \tag{74}$$

$$> 0. \tag{75}$$

最后一个不等式成立，是因为 $V_{\rho_0} + i\Omega > 0$ 蕴含 $(V_\rho - V_{\rho_0})^{-1} > (V_\rho + i\Omega)^{-1}$。因此， V_4 是忠实高斯态的一个合法协方差矩阵 [48]；我们将 ρ_4 记为均值向量为零、协方差矩阵为 $V_{\rho_4} = V_4$的高斯态。

利用关系 $X_4 = -i\Omega H_4$ 和 $r_{\rho_x} - r_\rho = L(x - \mu)$ 在式（70）中，我们得到

$$s_4 = -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \left(\exp[-i\Omega H_4] - I \right)^{-1} \exp[i\Omega H_\rho / 2] \left(\exp[-i\Omega H_{\rho_0}] - I \right) L(x - \mu) \right]. \tag{76}$$

利用式（20）中的凯莱变换，我们得到

$$s_4 = -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \left(W_{\rho_4} - I \right) \exp[i\Omega H_\rho / 2] \left(W_{\rho_0} - I \right)^{-1} L(x - \mu) \right]. \tag{77}$$

根据推论4和 [40], 式（130）中的函数关系，我们得到

$$\exp[i\Omega H_\rho / 2] = \sqrt{I - W_\rho^{-2}} \left(W_\rho + I \right)^{-1} W_\rho. \tag{78}$$

将上述关系代入式（77）可得

$$s_4 = -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \left(W_{\rho_4} - I \right) \sqrt{I - W_\rho^{-2}} \left(W_\rho + I \right)^{-1} W_\rho \left(W_{\rho_0} - I \right)^{-1} L(x - \mu) \right] \tag{79}$$

$$= -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \left(W_{\rho_4} - I \right) \sqrt{\left(I - W_\rho^{-1} \right) \left(I + W_\rho^{-1} \right)} \left(I + W_\rho^{-1} \right)^{-1} \left(W_{\rho_0} - I \right)^{-1} L(x - \mu) \right] \tag{80}$$

$$= -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \left(W_{\rho_4} - I \right) \sqrt{\left(I - W_\rho^{-1} \right) \left(I + W_\rho^{-1} \right)^{-1}} \left(W_{\rho_0} - I \right)^{-1} L(x - \mu) \right] \tag{81}$$

$$= -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \left(W_{\rho_4} - I \right) \sqrt{\left(I - W_\rho^{-1} \right)^{-1} \left(I + W_\rho^{-1} \right)^{-1}} \left(I - W_\rho^{-1} \right) \left(W_{\rho_0} - I \right)^{-1} L(x - \mu) \right] \tag{82}$$

$$= -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \left(W_{\rho_4} - I \right) \sqrt{\left(I - W_\rho^{-2} \right)^{-1}} \left(I - W_\rho^{-1} \right) \left(W_{\rho_0} - I \right)^{-1} L(x - \mu) \right]。 \tag{83}$$

由（74）可得

$$W_{\rho_4} - I = \sqrt{I - W_\rho^{-2}} W_\rho \left[(W_\rho - W_{\rho_0})^{-1} - (W_\rho - I)^{-1} \right] W_\rho \sqrt{I - W_\rho^{-2}} \tag{84}$$

$$= \sqrt{I - W_\rho^{-2}} W_\rho \left(W_\rho - W_{\rho_0} \right)^{-1} \left[(W_\rho - I) - (W_\rho - W_{\rho_0}) \right] (W_\rho - I)^{-1} W_\rho \sqrt{I - W_\rho^{-2}} \tag{85}$$

$$= \sqrt{I - W_\rho^{-2}} W_\rho \left(W_\rho - W_{\rho_0} \right)^{-1} \left(W_{\rho_0} - I \right) (W_\rho - I)^{-1} W_\rho \sqrt{I - W_\rho^{-2}}. \tag{86}$$

将上述 $W_{\rho_4} - I$ 的表达式代入（83），可得

$$s_4 = -i\Omega H_4 \left[r_\rho + \sqrt{I - W_\rho^{-2}} W_\rho \left(W_\rho - W_{\rho_0} \right)^{-1} L(x - \mu) \right] =: -i\Omega H_4 y, \tag{87}$$

其中

$$y = r_\rho + JL(x - \mu), \tag{88}$$

$$J \coloneqq \sqrt{I - W_\rho^{-2}} W_\rho \left(W_\rho - W_{\rho_0}\right)^{-1} = \sqrt{I + \left(V_\rho \Omega\right)^{-2}} V_\rho \left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} \tag{89}$$

$$= \sqrt{I + \left(V_\rho \Omega\right)^{-2}} V_\rho \left(2L\Sigma L^T\right)^{-1}. \tag{90}$$

将数值 $X_4 = -i\Omega H_4$ 和 $s_4 = -i\Omega H_4 y$ 代入式（58），并化简可得

$$\hat{H}_4 = -\frac{1}{2}\left(\hat{r} - y\right)^T H_4 \left(\hat{r} - y\right) + \frac{1}{2}\left(ia_4 + y^T H_4 y\right). \tag{91}$$

将 (91) 代入 (59)，再结合 (57，得到

$$E_x = p(x) Z_\rho Z_{\rho_0}^{-1} \exp\left[\frac{1}{2}\left(ia_4 + y^T H_4 y\right)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\hat{r} - y\right)^T H_4 \left(\hat{r} - y\right)\right] \tag{92}$$

$$= \xi p(x) Z_\rho Z_{\rho_4} Z_{\rho_0}^{-1} \hat{D}(-y) \rho_4 \hat{D}(y), \tag{93}$$

其中 $\xi \coloneqq \exp[(ia_4 + y^T H_4 y)/2]$。

在证明的剩余部分，我们将证明 $\xi = (2\pi)^{-n}$(行列式 $\Sigma)^{-1/2} p(x)^{-1}$，进而得出高斯近优测量的最终形式。按照 12 中的命题 [40], 对 (69) 应用相同的论证，可得

$$Z_{\rho_4} = \sqrt{\det\left(\left[V_{\rho_4} + i\Omega\right]/2\right)} \tag{94}$$

$$= \sqrt{\frac{\det\left(\left[V_\rho + i\Omega\right]/2\right) \det\left(\left[V_{\rho_0} + i\Omega\right]/2\right)}{\det\left(\left[V_\rho - V_{\rho_0}\right]/2\right)}} \tag{95}$$

$$= \sqrt{\frac{\det\left(\left[V_\rho + i\Omega\right]/2\right) \det\left(\left[V_{\rho_0} + i\Omega\right]/2\right)}{\det L^2 \det \Sigma}} \tag{96}$$

$$= \frac{Z_\rho Z_{\rho_0}}{|\det L| \sqrt{\det \Sigma}}. \tag{97}$$

将 Z_{ρ_4} 的值代入 (93) 可得

$$E_x = \frac{\xi p(x) Z_\rho^2}{|\det L| \sqrt{\det \Sigma}} \hat{D}(-y) \rho_4 \hat{D}(y). \tag{98}$$

此外，由（89）可得

$$\det J = \det \sqrt{I + \left(V_\rho \Omega\right)^{-2}} \det V_\rho \det\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} \tag{99}$$

$$= \det \sqrt{I - \left(V_\rho i\Omega\right)^{-2}} \det V_\rho \det\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} \tag{100}$$

$$= \sqrt{\det\left[I - \left(V_\rho i\Omega\right)^{-1}\right] \det\left[I + \left(V_\rho i\Omega\right)^{-1}\right]} \det V_\rho \det\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} \tag{101}$$

$$= \sqrt{\det\left[V_\rho - i\Omega\right] \det V_\rho^{-1} \det\left[V_\rho + i\Omega\right] \det V_\rho^{-1}} \det V_\rho \det\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} \tag{102}$$

$$= \sqrt{\det\left[V_\rho + i\Omega\right] \det\left[V_\rho + i\Omega\right]} \det\left(2L\Sigma L^T\right)^{-1} \tag{103}$$

$$= \det\left(\left[V_\rho + i\Omega\right]/2\right) \left(\det L^2 \det \Sigma\right)^{-1} \tag{104}$$

$$= \frac{Z_\rho^2}{\det L^2 \det \Sigma}, \tag{105}$$

这意味着

$$\frac{Z_\rho^2}{|\det L| \sqrt{\det \Sigma}} = |\det[JL]| \sqrt{\det \Sigma}. \tag{106}$$

由（98）和（106），我们得到

$$E_x = \xi p(x) |\det[JL]| \sqrt{\det \Sigma}\, \hat{D}(-y)\rho_4 \hat{D}(y). \tag{107}$$

我们有 $\mathrm{Tr}[E_x\rho] = \mathrm{Tr}[\rho^{-1/2}p(x)\rho_x\rho^{-1/2}\rho] = p(x)$。利用（107），于是得到

$$p(x) = \xi p(x) |\det[JL]| \sqrt{\det \Sigma}\, \mathrm{Tr}[\hat{D}(-y)\rho_4 \hat{D}(y)\rho], \tag{108}$$

这意味着

$$\xi = \frac{1}{|\det[JL]| \sqrt{\det \Sigma}\, \mathrm{Tr}[\hat{D}(-y)\rho_4 \hat{D}(y)\rho]}. \tag{109}$$

根据高斯态重叠公式 [39, 式（4.51）]，，我们得到

$$\mathrm{Tr}[\hat{D}(-y)\rho_4 \hat{D}(y)\rho] = \frac{1}{\sqrt{\det([V_{\rho_4} + V_\rho]/2)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - r_\rho)^T([V_{\rho_4} + V_\rho]/2)^{-1}(y - r_\rho)\right]. \tag{110}$$

由（109）、（110），并利用关系 $y = r_\rho + JL(x - \mu)$，于是得到

$$\xi = \frac{\sqrt{\det([V_{\rho_4} + V_\rho]/2)}}{|\det[JL]| \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[\frac{1}{2}(x - \mu)^T \left(L^{-1}J^{-1}[V_{\rho_4} + V_\rho]J^{-T}L^{-T}/2\right)^{-1}(x - \mu)\right] \tag{111}$$

$$= \frac{\sqrt{(\det[JL])^{-2} \det([V_{\rho_4} + V_\rho]/2)}}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[\frac{1}{2}(x - \mu)^T \left(L^{-1}J^{-1}[V_{\rho_4} + V_\rho]J^{-T}L^{-T}/2\right)^{-1}(x - \mu)\right] \tag{112}$$

$$= \frac{\sqrt{\det(L^{-1}J^{-1}[V_{\rho_4} + V_\rho]J^{-T}L^{-T}/2)}}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[\frac{1}{2}(x - \mu)^T \left(L^{-1}J^{-1}[V_{\rho_4} + V_\rho]J^{-T}L^{-T}/2\right)^{-1}(x - \mu)\right]. \tag{113}$$

由（72）和（89），以及 $V_{\rho_4} = V_4$这一事实，我们有

$$\frac{1}{2}L^{-1}J^{-1}[V_{\rho_4} + V_\rho]J^{-T}L^{-T} = \frac{1}{2}L^{-1}J^{-1}\sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho \left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} V_\rho \sqrt{I + \left(\Omega V_\rho\right)^{-2}}J^{-T}L^{-T} \tag{114}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)L^{-T} \tag{115}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left(2L\Sigma L^T\right)L^{-T} \tag{116}$$

$$= \Sigma. \tag{117}$$

将（117）代入（113）得

$$\xi = \exp\left[\frac{1}{2}(x - \mu)^T\Sigma^{-1}(x - \mu)\right] = (2\pi)^{-n}(\det \Sigma)^{-1/2}p(x)^{-1}. \tag{118}$$

将上述 ξ 的值代入（107），得

$$E_x = \frac{|\det[JL]|}{(2\pi)^n}\hat{D}(-y)\rho_4\hat{D}(y). \tag{119}$$

回顾式（88），可知 $y = r_\rho + JL(x-\mu)$，这意味着 $\mathbf{d}y = |\det[JL]|\mathbf{d}x$。因此得到

$$E_x\mathbf{d}x = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{D}(-y)\rho_4\hat{D}(y)\mathbf{d}y. \tag{120}$$

最后，代入 $\rho_4 \to \sigma$，即可得到定理1中的精确表述。

附录 D 定理2的证明

回顾式（32），可得

$$\mathbb{E}[\|X-\widetilde{X}\|^2] = \int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathbf{d}x\mathbf{d}\tilde{x}\ \|x-\tilde{x}\|^2\, p(x)p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x), \tag{121}$$

其中，$p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x)$ 是随机变量 X 在给定 $X=x$ 条件下的条件概率密度，其表达式为

$$p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x)\mathbf{d}\tilde{x} = \mathrm{Tr}[E_{\tilde{x}}\rho_x]\mathbf{d}\tilde{x}. \tag{122}$$

根据定理1，可得

$$E_{\tilde{x}}\mathbf{d}\tilde{x} = (2\pi)^{-n}\hat{D}(-\tilde{y})\sigma\hat{D}(\tilde{y})\mathbf{d}\tilde{y} \tag{123}$$

其中 $\tilde{y} = r_\rho + JL(\tilde{x}-\mu)$ 且 J 由（89）给出。这也给出了关系式 $\mathbf{d}\,\tilde{y} = |\det[JL]|\,\mathbf{d}\,\tilde{x}$。将（123）代入（122），于是得到

$$p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x)\mathbf{d}\tilde{x} = \frac{|\det[JL]|}{(2\pi)^n}\,\mathrm{Tr}[\hat{D}(-\tilde{y})\sigma\hat{D}(\tilde{y})\rho_x]\mathbf{d}\tilde{x}. \tag{124}$$

根据高斯态重叠公式 [39, 式（4.51）] 并经过一些化简，我们有

$$\mathrm{Tr}[\hat{D}(-\tilde{y})\sigma\hat{D}(\tilde{y})\rho_x] = \frac{1}{\sqrt{\det\left[(V_\sigma+V_{\rho_0})/2\right]}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{x}-\mu_x)^T\widetilde{\Sigma}^{-1}(\tilde{x}-\mu_x)\right], \tag{125}$$

其中

$$\mu_x = \mu + L^{-1}J^{-1}L(x-\mu), \tag{126}$$

$$\widetilde{\Sigma} = \frac{L^{-1}J^{-1}[V_\sigma+V_{\rho_0}]J^{-T}L^{-T}}{2}. \tag{127}$$

将（125）代入（124）可得

$$p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x)\mathbf{d}\tilde{x} = \frac{1}{(2\pi)^n\sqrt{\det\widetilde{\Sigma}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{x}-\mu_x)^T\widetilde{\Sigma}^{-1}(\tilde{x}-\mu_x)\right]\mathbf{d}\tilde{x}. \tag{128}$$

因此，$p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x)$ 是一个均值向量为 μ_x、协方差矩阵 Σ 的高斯概率密度函数。利用附录B中讨论的公式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbf{d}\tilde{x}\, \|x-\tilde{x}\|^2 p_{\widetilde{X}|X}(\tilde{x}|x) = \|\mu_x - x\|^2 + \operatorname{Tr}\widetilde{\Sigma} = \left\| \left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)(x-\mu) \right\|^2 + \operatorname{Tr}\widetilde{\Sigma}. \tag{129}$$

将上述值代入（121）可得

$$\mathbb{E}[\|X-\widetilde{X}\|^2] = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbf{d}x \left(\left\| \left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)(x-\mu) \right\|^2 + \operatorname{Tr}\widetilde{\Sigma} \right) p(x) \tag{130}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbf{d}x \left\| \left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)(x-\mu) \right\|^2 p(x) + \operatorname{Tr}\widetilde{\Sigma}. \tag{131}$$

注意到矩阵 $\left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)$ 可逆，其证明见附录 F。通过变量替换（即 $z = \left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)(x-\mu)$），可得

$$\mathbb{E}[\|X-\widetilde{X}\|^2] = \left|\det[L^{-1}J^{-1}L - I]\right|^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbf{d}z\, \|z\|^2 p(\mu + [L^{-1}J^{-1}L - I]^{-1}z) + \operatorname{Tr}\widetilde{\Sigma} \tag{132}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbf{d}z\, \|z\|^2 q(z) + \operatorname{Tr}\widetilde{\Sigma}, \tag{133}$$

其中 $q(z)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的高斯概率密度函数，其均值向量为零，协方差矩阵为 $\left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)\Sigma\left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)^T$。再次将附录 B 中的公式应用于（133），可得

$$\mathbb{E}[\|X-\widetilde{X}\|^2] = \operatorname{Tr}\left[\left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)\Sigma\left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)^T \right] + \operatorname{Tr}\widetilde{\Sigma}. \tag{134}$$

利用关系式（Σ 由（127）给出，并结合（28）和（30），可化简为

$$\widetilde{\Sigma} = L^{-1}J^{-1}\left[-(V_\rho - V_{\rho_0}) + \sqrt{I + (V_\rho\Omega)^{-2}}V_\rho \left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} V_\rho \sqrt{I + (\Omega V_\rho)^{-2}} \right] J^{-T}L^{-T}/2 \tag{135}$$

$$= -L^{-1}J^{-1}L\Sigma L^T J^{-T}L^{-T} + \frac{1}{2}L^{-1}J^{-1}\sqrt{I + (V_\rho\Omega)^{-2}}V_\rho \left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)^{-1} V_\rho \sqrt{I + (\Omega V_\rho)^{-2}} J^{-T}L^{-T} \tag{136}$$

$$= -L^{-1}J^{-1}L\Sigma L^T J^{-T}L^{-T} + \frac{1}{2}L^{-1}\left(V_\rho - V_{\rho_0}\right)L^{-T} \tag{137}$$

$$= -L^{-1}J^{-1}L\Sigma J^{-T}L^{-T} + \Sigma。 \tag{138}$$

将（138）代入（134），得到

$$\mathbb{E}[\|X-\widetilde{X}\|^2] = \operatorname{Tr}\left[\left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)\Sigma\left(L^{-1}J^{-1}L - I\right)^T \right] + \operatorname{Tr}\left[-L^{-1}J^{-1}L\Sigma J^{-T}L^{-T} + \Sigma \right] \tag{139}$$

$$= 2\operatorname{Tr}\Sigma - 2\operatorname{Tr}\left[L^{-1}J^{-1}L\Sigma\right] \tag{140}$$

$$= 2\operatorname{Tr}\left[(I - L^{-1}J^{-1}L)\Sigma\right]. \tag{141}$$

通过将 J 的值重新代入（33）中，我们得到所需的表达式（141）。

附录 E 定理3 的证明

令 τ 为一个任意的忠实高斯态。我们有

$$\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2} = \frac{Z_\rho}{Z_{\rho_0}Z_\tau}\exp[-\hat{H}_{\rho_x}/2]\exp[\hat{H}_\rho/2]\exp[-\hat{H}_\tau]\exp[\hat{H}_\rho/2]\exp[-\hat{H}_{\rho_x}/2]. \quad (142)$$

我们首先合并指数算符的乘积 $\exp[\hat{H}_\rho/2]\exp[-\hat{H}_\tau]\exp[\hat{H}_\rho/2]$。黄金规则表明，存在一个形式如下的算子 H_5

$$\hat{H}_5 = \frac{i}{2}\hat{r}^T\Omega X_5\hat{r} + is_5^T\Omega\hat{r} + \frac{i}{2}a_5, \quad (143)$$

它满足

$$\exp[\hat{H}_\rho/2]\exp[-\hat{H}_\tau]\exp[\hat{H}_\rho/2] = \exp[\hat{H}_5]. \quad (144)$$

通过与定理 1 证明中类似的论证，我们得到 $X_5 = -i\Omega H_5$ 和 $s_5 = X_5 y_5$，其中

$$H_5 = 2i\Omega\,\mathrm{arcoth}(V_5 i\Omega), \quad (145)$$

$$V_5 := -V_\rho + \sqrt{I + (V_\rho\Omega)^{-2}}V_\rho\left(V_\rho - V_\tau\right)^{-1}V_\rho\sqrt{I + (\Omega V_\rho)^{-2}}, \quad (146)$$

$$y_5 = r_\rho + J_5(r_\tau - r_\rho), \quad (147)$$

$$J_5 := \sqrt{I + (V_\rho\Omega)^{-2}}V_\rho\left(V_\rho - V_\tau\right)^{-1}. \quad (148)$$

我们注意到 $V_5 - i\Omega > 0$，只要 $V_\tau < V_\sigma$。事实上，利用关系式（15），我们得到

$$V_5 - i\Omega = -(V_\rho + i\Omega) + \sqrt{I + (V_\rho\Omega)^{-2}}V_\rho\left(V_\rho - V_\tau\right)^{-1}V_\rho\sqrt{I + (\Omega V_\rho)^{-2}} \quad (149)$$

$$= \sqrt{I + (V_\rho\Omega)^{-2}}V_\rho\left[\left(V_\rho - V_\tau\right)^{-1} - \left(V_\rho - i\Omega\right)^{-1}\right]V_\rho\sqrt{I + (\Omega V_\rho)^{-2}}. \quad (150)$$

由于 $V_\tau < V_\sigma$ 意味着 $\left(V_\rho - V_\tau\right)^{-1} - \left(V_\rho - i\Omega\right)^{-1} > 0$，我们有 $V_5 - i\Omega > 0$。事实是， V_5 是一个实矩阵，满足 $V_5 - i\Omega > 0$ 意味着 $V_5 > 0$，其证明可见 [39]第 58 页。因此， V_5 是忠实高斯态的一个合法协方差矩阵。也很容易看出， y_5是一个实向量。现在，将 X_5 和 s_5 代入（143）得

$$\hat{H}_5 = -\frac{1}{2}\left(\hat{r} - y_5\right)^T H_5\left(\hat{r} - y_5\right) + \frac{1}{2}\left(ia_5 + y_5^T H_5 y_5\right). \quad (151)$$

由（142），利用关系式（144）和（151），我们有

$$\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2} = \frac{Z_\rho}{Z_{\rho_0}Z_\tau}\exp\left[\frac{1}{2}\left(ia_5 + y_5^T H_5 y_5\right)\right]$$
$$\exp[-\hat{H}_{\rho_x}/2]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\hat{r} - y_5\right)^T H_5\left(\hat{r} - y_5\right)\right]\exp[-\hat{H}_{\rho_x}/2]. \quad (152)$$

再次应用黄金法则，并采用与定理证明中类似的论证1，我们得到一个算子 H_6 其形式为

$$\hat{H}_6 = \frac{i}{2}\hat{r}^T\Omega X_6\hat{r} + is_6^T\Omega\hat{r} + \frac{i}{2}a_6, \quad (153)$$

满足

$$\exp[-\hat{H}_{\rho_x}/2]\exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{r}-y_5)^T H_5(\hat{r}-y_5)\right]\exp[-\hat{H}_{\rho_x}/2]=\exp[\hat{H}_6]. \tag{154}$$

此外，我们有 $X_6=-i\Omega H_6$ 和 $s_6=X_6y_6$，其中

$$H_6=2i\Omega\operatorname{arcoth}(V_6i\Omega), \tag{155}$$

$$V_6 \coloneqq V_{\rho_0}-\sqrt{I+\left(V_{\rho_0}\Omega\right)^{-2}}V_{\rho_0}\left(V_5+V_{\rho_0}\right)^{-1}V_{\rho_0}\sqrt{I+\left(\Omega V_{\rho_0}\right)^{-2}}, \tag{156}$$

$$y_6=r_{\rho_x}+J_6(y_5-r_{\rho_x}), \tag{157}$$

$$J_6 \coloneqq \sqrt{I+\left(V_{\rho_0}\Omega\right)^{-2}}V_{\rho_0}\left(V_5+V_{\rho_0}\right)^{-1}. \tag{158}$$

下面的论证表明 V_6 在满足 $V_\tau<V_\rho$时，是忠实高斯态的合法协方差矩阵。根据（15），我们有

$$V_6-i\Omega=\sqrt{I+\left(V_{\rho_0}\Omega\right)^{-2}}V_{\rho_0}\left[\left(V_{\rho_0}+i\Omega\right)^{-1}-\left(V_5+V_{\rho_0}\right)^{-1}\right]V_{\rho_0}\sqrt{I+\left(\Omega V_{\rho_0}\right)^{-2}}. \tag{159}$$

如果 $V_\tau<V_\rho$，我们知道 $V_5+i\Omega>0$。这意味着 $\left(V_{\rho_0}+i\Omega\right)^{-1}-\left(V_5+V_{\rho_0}\right)^{-1}>0$。因此得到 $V_6-i\Omega>0$。我们还注意到， y_6 是一个实向量，因为 y_5 是一个实向量，而 J_6 是一个实矩阵。将 X_6 和 s_6 的值代入（153）可得

$$\hat{H}_6=-\frac{1}{2}(\hat{r}-y_6)^T H_6(\hat{r}-y_6)+\frac{1}{2}\left(ia_6+y_6^T H_6 y_6\right). \tag{160}$$

根据（152），利用关系式（154）和（160），我们得到

$$\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}=\frac{\tilde{\xi}Z_\rho}{Z_{\rho_0}Z_\tau}\exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{r}-y_6)^T H_6(\hat{r}-y_6)\right], \tag{161}$$

其中，$\tilde{\xi}$ 是一个标量，定义为

$$\tilde{\xi} \coloneqq \exp\left[\frac{1}{2}\left(i(a_5+a_6)+y_5^T H_5 y_5+y_6^T H_6 y_6\right)\right]. \tag{162}$$

接下来，我们将化简（161），以得到所需的仪器结构。由（161）可得

$$\operatorname{Tr}\left[p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\right]\mathbf{d}x=\frac{\tilde{\xi}p(x)Z_\rho}{Z_{\rho_0}Z_\tau}\operatorname{Tr}\exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{r}-y_6)^T H_6(\hat{r}-y_6)\right]\mathbf{d}x \tag{163}$$

$$=\frac{\tilde{\xi}p(x)Z_\rho}{Z_{\rho_0}Z_\tau}\sqrt{\det([V_6+i\Omega]/2)}\mathbf{d}x. \tag{164}$$

此外，我们有

$$\operatorname{Tr}\left[p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\right]\mathbf{d}x$$

$$=\operatorname{Tr}\left[\tau\rho^{-1/2}p(x)\rho_x\rho^{-1/2}\right]\mathbf{d}x \tag{165}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\operatorname{Tr}\left[\tau\hat{D}(-y)\sigma\hat{D}(y)\right]\mathbf{d}y \tag{166}$$

$$= \frac{(2\pi)^{-n}}{\sqrt{\det([V_\tau + V_\sigma]/2)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - r_\tau)^T([V_\tau + V_\sigma]/2)^{-1}(y - r_\tau)\right] \mathbf{d}y, \tag{167}$$

其中 y 和 σ 如定理 1所示。第一个等式由迹的循环性质得出，第二个等式由（29）得出，第三个等式则由高斯态重叠公式 [39, 式（4.51）]得出。比较两个表达式（167）和（164），可得

$$\frac{\tilde{\xi} p(x) Z_\rho}{Z_{\rho_0} Z_\tau} \mathbf{d}x = \frac{(2\pi)^{-n}}{\sqrt{\det([V_6 + i\Omega]/2)}\sqrt{\det([V_\tau + V_\sigma]/2)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - r_\tau)^T([V_\tau + V_\sigma]/2)^{-1}(y - r_\tau)\right] \mathbf{d}y. \tag{168}$$

将上述值代入（161）得

$$p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\mathbf{d}x = \frac{\tilde{p}(y)}{\sqrt{\det([V_6 + i\Omega]/2)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{r} - y_6)^T H_6 (\hat{r} - y_6)\right] \mathbf{d}y. \tag{169}$$

其中， $\tilde{p}(y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的高斯概率密度函数，其均值向量为 r_τ，协方差矩阵为 $(V_\tau + V_\sigma)/2$。为了将右端的指数算子（169）表示为 y 的函数，我们将 y_6 用 y 表示。回顾（88）， $x = L^{-1}J^{-1}(y - r_\rho) + \mu$，其中 J 由（89）给出。因此，利用关系式 $r_{\rho_x} = r_{\rho_0} + Lx$、 $r_\rho = r_{\rho_0} + L\mu$ 以及（157），可得

$$\begin{aligned}
y_6 &= (I - J_6)r_{\rho_x} + J_6 y_5 && (170)\\
&= (I - J_6)(Lx + r_{\rho_0}) + J_6 y_5 && (171)\\
&= (I - J_6)\left[J^{-1}(y - r_\rho) + L\mu + r_{\rho_0}\right] + J_6 y_5 && (172)\\
&= (I - J_6)J^{-1}y - (I - J_6)J^{-1}r_\rho + (I - J_6)r_\rho + J_6 y_5 && (173)\\
&= (I - J_6)J^{-1}y - (I - J_6)J^{-1}r_\rho + r_\rho + J_6(y_5 - y_\rho). && (174)
\end{aligned}$$

将上述关系中的$y_5 - r_\rho$ 用（147）中的值代入，得

$$y_6 = (I - J_6)J^{-1}y + \left[I - (I - J_6)J^{-1}\right] r_\rho + J_6 J_5(r_\tau - r_\rho) \coloneqq J_7(y - r_\rho) + y_7, \tag{175}$$

其中， J_7 是实矩阵， y_7 是实向量，定义如下：

$$J_7 = (I - J_6)J^{-1} = 2(I - J_6)L\Sigma L^T V_\rho^{-1}\left(\sqrt{I + (V_\rho\Omega)^{-2}}\right)^{-1}, \tag{176}$$

$$y_7 = r_\rho + J_6 J_5(r_\tau - r_\rho)。 \tag{177}$$

由（169）和（175），因此可得

$$p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\mathbf{d}x = \tilde{p}(y)\hat{D}(-J_7(y - r_\rho))\rho_7\hat{D}(J_7(y - r_\rho))\mathbf{d}y, \tag{178}$$

其中 ρ_7 是一个忠实高斯态，其均值为$r_{\rho_7} = y_7$，由（177）给出，协方差矩阵为$V_{\rho_7} = V_6$，由（156）给出。注意到 J_7 可逆，这一点在附录G中证明。因此，对（178）右侧进行变量替换（即 $z = J_7(y - r_\rho)$），可得

$$p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\mathbf{d}x = \tilde{q}(z)\hat{D}(-z)\rho_7\hat{D}(z)\mathbf{d}z, \tag{179}$$

其中 $\tilde{q}(z)$ 是高斯密度函数，其均值向量为 $J_7(r_\tau - r_\rho)$，协方差矩阵为$J_7(V_\tau + V_\sigma)J_7^T/2$。变量 z 与 x 的关系为

$$z = J_7(y - r_\rho) = J_7\sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho(V_\rho - V_{\rho_0})^{-1}L(x-\mu) \tag{180}$$

$$= J_7\sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho L^{-T}\Sigma^{-1}(x-\mu)/2. \tag{181}$$

仪器的测量后态由下式给出：179：

$$\frac{p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}}{\mathrm{Tr}\left[p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}\right]} = \hat{D}(-z)\rho_7\hat{D}(z). \tag{182}$$

为了得到丢弃测量结果后得到的期望输出态 $\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathbf{d}x\ p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2}$，考虑以下论证。对式 (179两边积分，并使用 [39, 式 (5.76)], 中给出的经典混合公式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathbf{d}x\ p(x)\rho_x^{1/2}\rho^{-1/2}\tau\rho^{-1/2}\rho_x^{1/2} = \int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathbf{d}z\ \tilde{q}(z)\hat{D}(-z)\rho_7\hat{D}(z) = \tilde{\tau}, \tag{183}$$

其中 $\tilde{\tau}$ 是一个高斯态，其均值向量和协方差矩阵为

$$r_{\tilde{\tau}} = r_{\rho_7} + J_7(r_\tau - r_\rho), \tag{184}$$

$$V_{\tilde{\tau}} = V_{\rho_7} + J_7\left[V_\tau + V_\sigma\right]J_7^T. \tag{185}$$

附录 F 矩阵的可逆性 $L^{-1}J^{-1}L - I$

我们证明矩阵 $L^{-1}J^{-1}L - I$可逆，其中 L在式 (25) 中定义， J在式 (89) 中定义。回顾一下，假设 L可逆，并且 J可逆，因为它是可逆矩阵的乘积。由于 $L^{-1}J^{-1}L - I = L^{-1}J^{-1}(I - J)L$，只需证明 $I - J$ 可逆。我们反复使用矩阵函数演算：若 A 是可对角化矩阵，且 X 是可逆矩阵，则对于定义在 A的谱上的任意连续函数 f，都有 $f(X^{-1}AX) = X^{-1}f(A)X$ 成立。

由（89）可得

$$I - J = \left[V_\rho - V_{\rho_0} - \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}V_\rho\right](V_\rho - V_{\rho_0})^{-1} \tag{186}$$

$$= \left[\left(I - \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}\right)V_\rho - V_{\rho_0}\right](V_\rho - V_{\rho_0})^{-1}, \tag{187}$$

由此得到

$$(I - J)(V_\rho - V_{\rho_0}) = \left(I - \sqrt{I + \left(V_\rho\Omega\right)^{-2}}\right)V_\rho - V_{\rho_0}. \tag{188}$$

根据 Williamson 定理， [49], 存在一个辛矩阵 S，其定义满足$S^T\Omega S = \Omega$，使得 $V_\rho = S^TDS$，其中 $D = \Lambda \otimes I_2$，且 Λ是一个具有正对角元素的对角矩阵。关于 Williamson 定理的更多细节，请参阅文献 [50–52] 。由式（188），并利用这一事实 $S\Omega = \Omega S^{-T}$，我们因此得到

$$(I - J)(V_\rho - V_{\rho_0}) = \left(I - \sqrt{I + (S^TDS\Omega)^{-2}}\right)S^TDS - V_{\rho_0} \tag{189}$$

$$= \left(I - \sqrt{I + (S^T D\Omega S^{-T})^{-2}}\right) S^T DS - V_{\rho_0} \tag{190}$$

$$= S^T \left(I - \sqrt{I + (D\Omega)^{-2}}\right) S^{-T} S^T DS - V_{\rho_0} \tag{191}$$

$$= S^T \left(I - \sqrt{I - D^{-2}}\right) DS - V_{\rho_0}. \tag{192}$$

这里注意到 $D > I_n$。事实上，将 Williamson 定理应用于条件（14），可得$D + i\Omega > 0$，这等价于 $D > I_n$。对于 $x > 1$，我们还有如下函数关系：

$$\left(1 - \sqrt{1 - x^{-2}}\right) x = \frac{x^{-1}}{1 + \sqrt{1 - x^{-2}}} < x^{-1}. \tag{193}$$

将上述函数关系代入（192），再进一步化简，得到

$$(I - J)(V_\rho - V_{\rho_0}) < S^T D^{-1} S - V_{\rho_0} \tag{194}$$

$$= \left(S^{-1} D S^{-T}\right)^{-1} - V_{\rho_0} \tag{195}$$

$$= \left(S^{-1} \Omega D \Omega^T S^{-T}\right)^{-1} - V_{\rho_0} \tag{196}$$

$$= \left(\Omega S^T D S \Omega^T\right)^{-1} - V_{\rho_0} \tag{197}$$

$$= \left(\Omega V_\rho \Omega^T\right)^{-1} - V_{\rho_0} \tag{198}$$

$$= \Omega V_\rho^{-1} \Omega^T - V_{\rho_0}. \tag{199}$$

回忆 $V_\rho > V_{\rho_0}$，这意味着 $V_\rho^{-1} < V_{\rho_0}^{-1}$。因此，由（199）可得

$$(I - J)(V_\rho - V_{\rho_0}) < \Omega V_{\rho_0}^{-1} \Omega^T - V_{\rho_0}. \tag{200}$$

矩阵 $\Omega V_{\rho_0}^{-1} \Omega^T - V_{\rho_0}$ 是负定的，这由 [53]中的引理 11 得出。因此，我们证明了（$I - J$）（$V_\rho - V_{\rho_0}$）< 0。特别地，$I - J$ 是一个可逆矩阵。

附录 G 由式（J_7）得到的矩阵的可逆性，其中44)

要证明由（$J_7 = 2(I - J_6) L\Sigma L^T V_\rho^{-1} \left(\sqrt{I + (V_\rho \Omega)^{-2}}\right)^{-1}$（44）得到的 $I - J_6$ 可逆，只需证明 J_6 可逆，其中 J_6 定义于（43）中。我们有

$$(I - J_6)\left(V_5 + V_{\rho_0}\right) = V_5 + V_{\rho_0} - \sqrt{I + \left(V_{\rho_0}\Omega\right)^{-2}} V_{\rho_0} > V_{\rho_0} - \sqrt{I + \left(V_{\rho_0}\Omega\right)^{-2}} V_{\rho_0}. \tag{201}$$

最后一个不等式成立，是因为 $V_5 > 0$，在给定条件下 $V_\rho > V_\tau$。再次应用 Williamson 定理（如附录 F中所述），得到一个辛矩阵 S_0，使得 $V_{\rho_0} = S_0^T D_0 S_0$，其中$D_0 = \Lambda_0 \otimes I_2$，且 Λ_0 是一个具有正对角元素的对角矩阵。对（201）应用与（189）–（192）中相似的论证，可得

$$(I - J_6)\left(V_5 + V_{\rho_0}\right) > S_0^T \left(I - \sqrt{I - D_0^{-2}}\right) D_0 S_0 > 0. \tag{202}$$

由此我们证明了 $(I - J_6)\left(V_5 + V_{\rho_0}\right)$ 是一个正定矩阵。特别地，$I - J_6$ 是可逆的。