arXiv:2303.04952v1 [math.CO] 8 Mar 2023

孪生顶点之间的分数复现

Hermie Monterde, [1]

2023年3月10日

摘要

本文刻画了加权图中相对于其邻接矩阵、拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵的孪生顶点之间的分数复现。作为应用，我们刻画了双锥顶点之间的分数复现。

关键词：分数复现、完美态传输、孪生顶点、邻接矩阵、拉普拉斯矩阵、无符号拉普拉斯矩阵

MSC2010 分类：05C50；15A18；05C22；81P45；81A10

目录

1 引言 **1**2 孪生顶点 **3**3 分数复现 **4**4 分数复现带来的周期性、渐近完美态传输和完美态传输 **7**5 当 $\phi(M,t)$ 具有整数系数 **8**6 双锥 **10**

1 引言

Farhi 和 Gutmann 于 1998 [FG98], 提出了连续时间量子游走；此后，连续时间量子游走成为研究量子自旋网络中各种态传输的重要内容。在量子信息论中，能够实现可产生纠缠的态传输类型的连续时间量子游走备受青睐。其中一种态传输类型就是分数复现。

从数学角度看，分数复现已在邻接动力学 [CCT+19、CCD+22]、拉普拉斯动力学 [CJL+21]、关联方案 [CCT+20]、阿贝尔凯莱图[CL22], 、阈值图 [KZ20] 以及非余谱顶点 [GZ22]等背景下得到研究。本文研究相对于邻接矩阵、拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵的孪生顶点之间的分数复现。

本文的结构安排如下。在第2节，我们回顾孪生顶点的若干已知态传输性质，并证明当真分数复现涉及一个

[1]加拿大曼尼托巴省温尼伯市曼尼托巴大学数学系，邮编 R3T 2N2

带有孪生顶点的顶点时，真分数复现具有一夫一妻制。在第3节，我们给出刻画（定理2 和3），并提出孪生顶点之间发生分数复现的充要条件（推论4和5）。在第4节，我们探讨允许真分数复现的孪生顶点之间是否存在周期性、完美态传输和近乎完美态传输。在第5节，我们研究在增加条件 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$后，第3 和4 节中的结果会有何变化。随后，我们在第6 节应用这些结果，刻画允许真且平衡的分数复现的双锥。本节剩余部分介绍相关的图论和矩阵论背景，以及态传输的基本概念。

本文中，我们始终假设X 是一个允许含有自环但不含重边的连通加权无向图，并用$V(X)$表示其顶点集。我们允许X 的边具有非零实权重。若X 不含自环，则称X 为简单图；若X 的所有边的权重均为 1，则称X 为无权图。对于$u \in V(X)$，我们将u 的特征向量记为 $\mathbf{e}_u$，它在由u 索引的分量上取值为 1，其他分量均为 0；将u 的邻点集记为$N_X(u)$。我们还将方阵H 关于变量t 的特征多项式记为 $\phi(H,t)$。最后，我们分别将具有n 个顶点的简单无权空图、圈图、完全图和路径图记为O_n、C_n、K_n和P_n。

X 的邻接矩阵 A(X) 逐项定义如下：若 u 与 v 邻接，则 $\mathrm{A(X)}_{u,v} = \omega_{u,v}$，其中$\omega_{u,v}$ 是边 (u, v) 的权重；否则 $\mathrm{A(X)}_{u,v} = 0$。X 的度矩阵 D(X) 是由 X 的顶点度构成的对角矩阵，其中对于每个 $\mathrm{u} \in \mathrm{V(X)}$，$\deg(\mathrm{u}) = 2\omega_{u,u} + \sum_{\mathrm{j}\neq \mathrm{u}} \omega_{u,j}$。X 的拉普拉斯矩阵 L(X) 定义为矩阵 L(X) = D(X) − A(X)，而 X 的无符号拉普拉斯矩阵 Q(X) 定义为矩阵 Q(X) = D(X) + A(X)。我们用 M(X) 表示 A(X)、L(X) 或 Q(X)。若上下文明确，则分别将 M(X)、A(X)、L(X)、Q(X) 和 D(X) 简记为 M、A、L、Q 和 D。

相对于H，X 上的（连续时间）量子游走由转移矩阵决定

$$U_H(t) = e^{itH}. \tag{1}$$

矩阵 H 称为量子游走的哈密顿算子。通常，H 取 A、L 或 Q，但一般来说，任何符合 X 的邻接关系的厄米矩阵 H 都应当适用（也就是说，当且仅当 u 和 v 之间没有边时，$\mathrm{H}_{u,v} = 0$）。若 H = M，且上下文已明确 M，则我们简写 $\mathrm{U}_M(\mathrm{t})$ 为 U(t)。由于 M 是实对称矩阵，我们可以将 M 写成其谱分解形式：$\mathrm{M} = \sum_{\mathrm{j}} \lambda_j \mathrm{E}j$，其中 λ_j是 M 的互异特征值，$\mathrm{E}j$ 是对应于 λ_j的特征子空间的正交投影矩阵。如果特征值没有编号，我们也用 E_λ 表示 M 的特征值 λ 所对应的正交投影矩阵。由此可将（1）写为

$$U(t) = \sum_j e^{it\lambda_j} E_j. \tag{2}$$

注意，$U(t)$ 是复对称酉矩阵，因此，对于X的任意顶点u，$\sum_{j=1} |U(\tau)_{u,j}|^2 = 1$。基于此，若$u$ 和v 是X的顶点，则 $|U(\tau)_{u,v}|^2$ 可解释为时间 τ时u 与v 之间量子态传输的保真度（概率）。已知若X 是简单的带权k正则图，则关于A、L和Q 的量子游走在全局相位意义下等价，因此它们都表现出相同类型的态传输。类似地，若X 是二分图，则关于L 和Q 的量子游走在局部相位意义下等价，因此它们也表现出相同类型的态传输。

我们称在时间 τ，若 $|\mathrm{U}(\tau)_{u,v}|^2 = 1$，则 u 与 v 之间发生完美态传输（PST）。我们称 u 在时间 τ 是周期的，若 $|\mathrm{U}(\tau)_{u,u}|^2 = 1$。我们称 u 与 v 之间发生近乎完美态传输，若对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个时间 τ_ϵ，使得 $|\mathrm{U}(\tau_\epsilon)_{u,v}|^2 > 1-\epsilon$。若 $\alpha = |\mathrm{U}(\tau)_{u,u}|$ 且 $\beta = |\mathrm{U}(\tau)_{u,v}|$，并且 $|\mathrm{U}(\tau)_{u,u}|^2 + |\mathrm{U}(\tau)_{u,v}|^2 = 1$，则称在时间 τ 从 u 到 v 发生 (α,β)-分数复现（FR）。如果特定的 α 和 β 并不重要，我们就简称分数复现。情形 $\beta \neq 0$ 称为真分数复现，而情形 $|\alpha| = |\beta|$ 称为平衡分数复现。注意，分数复现是完美态传输和周期性的推广。当我们讨论 M = A 时，有时会称邻接矩阵完美态传输（分别对应周期性、分数复现）；当 M = L、Q 时，也使用类似说法。

2 孪生顶点

若 X 中两个不同的顶点 u 和 v 满足以下条件，则称它们为孪生顶点：(i) $N_X(u)\backslash\{u, v\} = N_X(v)\backslash\{u, v\}$；(ii) 对每个 $w \in N_X(u)\backslash\{u, v\}$，边 (u, w) 和 (v, w) 具有相同的权重；(iii) 如果 u 和 v 上有自环，则它们的权重相同。给定 $\omega, \eta \in \mathbb{R}$，若 $T = T(\omega, \eta)$ 是 V(X) 的一个至少包含两个顶点的子集，且 T 中的顶点两两互为孪生顶点，则称 T 是 X 中的孪生点集。也就是说，T 中每个顶点都有一个权重为 ω 的自环（若 $\omega = 0$，则没有自环），且 T 中任意一对顶点之间都有一条权重为 η 的边（若 $\eta = 0$，则没有边）。现在我们陈述 Monterde [Mon22 给出的孪生顶点谱刻画 , 引理 2 .9].

引理 1. L et $T = T(\omega, \eta)$ 是X中的孪生顶点集。则u,$v \in T$ 当且仅当以下两个条件成立 *d:*

1. $\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v$ 是M的特征向量，并且
2. 与$\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v$ 对应的特征值为

$$\theta = \begin{cases} \omega - \eta, & if\ M = A \\ deg(u) - \omega + \eta, & if\ M = L \\ deg(u) + \omega - \eta, & if\ M = Q. \end{cases} \tag{3}$$

相对于M，u 的特征值支撑，记作 $\sigma_u(M)$，是集合

$$\sigma_u(M) = \{\lambda_j : E_j\mathbf{e}_u \neq \mathbf{0}\}.$$

相对于 M，若 $(E_j)_{u,u} = (E_j)_{v,v}$ 对每个 j 都成立，我们称 u 和 v 余谱；若对每个 j，$Ej\mathbf{e}_u = cjEj\mathbf{e}_v$ 对某个常数 cj 成立，则称它们平行；若对每个 j，$Ej\mathbf{e}_u = \pm Ej\mathbf{e}_v$ 都成立，则称它们强余谱。注意，若 u 和 v 强余谱，则 $\sigma_u(M) = \sigma_v(M)$，因此我们可以写作 $\sigma_u(M) = \sigma^+_{uv}(M) \cup \sigma^-_{uv}(M)$，其中

$$\sigma^+_{uv}(M) = \{\lambda_j : E_j\mathbf{e}_u = E_j\mathbf{e}_v\} \quad \text{and} \quad \sigma^-_{uv}(M) = \{\lambda_j : E_j\mathbf{e}_u = -E_j\mathbf{e}_v\}.$$

若 u 和 v 是孪生顶点，则引理 1表明 $\theta \in \sigma_u(M)$。接下来，我们给出孪生顶点的代数刻画及一个有用性质（分别见 [Mon22] 中的引理 2.10 和推论 2.11）。

引理 2. 顶点u 和v 在X 中是孪生顶点，当且仅当存在一个作用于X 的对合，将u和v 互换并固定所有其他顶点。此外，孪生顶点相对于M是余谱的。

下面的结果表明，当 $\sigma^-_{uv}(M)$ 是单元素集合时，u 和v 是强余谱的孪生顶点 [Mon22，定理 3。9]。

引理 3。设$T = \{u、v\}$ 是X中的孪生点集，并考虑 θ 在（3）中。若u 和v 是强余谱的，则 $\sigma^-_{uv}(M) = \{\theta\}$，并且$u$ 和v 不可能与任何$w \in V(X)\backslash\{u、v\}$强余谱。

结合引理3 和 [Mon22，定理 3。4]）可得 $|\sigma^+_{uv}(M)| \geqslant 2$。我们还陈述 Kirkland 等人关于含有孪生顶点的图的转移矩阵的一个结果 [KMP22，推论 2]。

推论 1。设T 是X中的孪生点集。若$u、v \in T$，且$u \neq v$，则

$$|U(t)_{u,u}|^2 + (|T| - 1)\,|U(t)_{u,v}|^2 + \sum_{w \notin T} |U(t)_{u,w}|^2 = 1 \tag{4}$$

对于任意$t \in \mathbb{R}$。若再加上 $|T| \geqslant 3$，则$U(t)_{u,\ u} \neq 0$ 对于任意$t \in \mathbb{R}$。

由（4）可知，若 T 是 X 中的孪生点集，且 $u、v \in T$ 满足 $u \neq v$，则 $|U(t)_{u,\ v}|^2 \leqslant \frac{1}{|T|-1}$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立；当 $|T| \geqslant 3$时，该不等式为严格不等式。这得到了一个类似于 [KMP22推论 3]的结果。

推论 2. 假设X 有$n \geqslant 3$个顶点，且T 是X中的孪生点集。那么，T 中的顶点不能与不属于T的顶点发生真分数复现。此外，若 $|T| \geqslant 3$，则T 中的任意顶点都不能与X中的任何顶点发生真分数复现。

以下结论是推论 2的直接推论。

推论 3. 设u 是X 的一个顶点，且有一个孪生顶点v。那么u 在真分数复现中至多只能与X 中的一个顶点配对。此外，如果u 参与了真分数复现，那么它必定是与v配对。

Chan 等人构造了无穷多个图族，其中一个顶点可能在真分数复现中与另外两个顶点配对 [CJL+21]。但是，正如推论 3 所表明的，涉及具有孪生顶点的顶点的真分数复现是一夫一妻制的。

如果子集S 属于 $\sigma_u(M)$ 且至少包含两个元素，则称其满足比率条件，当且仅当

$$\frac{\lambda_p - \lambda_q}{\lambda_j - \lambda_k} \in \mathbb{Q},$$

对所有 $\lambda_p, \lambda_q, \lambda_j, \lambda_k \in S$ 满足 $\lambda_j \neq \lambda_k$ 以下事实出自 Coutinho 和 Godsil [CG21]（推论 7.3.1 和定理 7.6.1），该事实刻画了周期顶点。

定理 1. 设X 是一个允许带有自环的加权图。以下命题等价。

1. 顶点u 在X 中关于M是周期的。
2. $\sigma_u(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 满足比率条件。

如果再加上 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$，那么$u$ 是周期的，当且仅当满足以下条件之一：(i) $\sigma_u(M) \subseteq \mathbb{Z}$；或 (ii) 存在一个无平方因子整数 $\Delta > 1$ 和一个整数 a，使得每个 $\lambda_j = \frac{1}{2}\left(a + c_j\sqrt{\Delta}\right)$ 都对应某个整数c_j，并且M) 中任意两个特征值之差都是 $\sqrt{\Delta}$的整数倍。

关于孪生顶点之间的周期性、完美态传输和渐近完美状态转移，读者可参阅 [KMP22]。

3 分数复现

由于从 u 到 v 发生真 (α, β)-分数复现，当且仅当从 v 到 u 发生真 $\left(-\frac{\bar{\alpha}\beta}{\beta}, \beta\right)$-分数复现 [CCT+19, 命题 4.1], ，因此我们可以用 u 和 v 之间的分数复现代替从 u 到 v 的分数复现。本节刻画孪生顶点之间的真分数复现。以下结果是 [CCT+19，命题 4.2]、引理 2 和 [GS17，引理 4.1] 的推论。

引理 4. 若孪生顶点u 和v 之间发生真分数复现，则它们强余谱。

根据引理 4和推论 2，要刻画孪生顶点之间的真分数复现，只需考虑大小为二的孪生点集。

定理 2. 设 $T = \{u、v\}$ 是 X 中的一个孪生点集，且 $\sigma_u(M) = \{\theta, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r\}$，其中 θ 由式（3）给出。若在时间 $(e^{i\zeta}\cos\gamma$，即$^{i\zeta}\sin\gamma)$处，u 和 v 之间发生真 τ分数复现，则

1. u 和v 强余谱，具有 $\sigma^+_{uv}(M) = \{\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r\}$ 以及 $\sigma^-_{uv}(M) = \{\theta\}$，并且
2. *for any j and k, $\tau(\lambda_j - \lambda_k) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ and $\tau(\lambda_j - \theta) \equiv 2\gamma \pmod{2\pi}$.*

此外，当且仅当 γ 不是 π的整数倍时，逆命题成立。

证明。引理3和引理4证明了 (1)。为证明 (2)，设 u 和 v 是强余谱孪生顶点， $\sigma_u(\mathrm{M})$ 的特征值为 $\theta, \lambda_1, \ldots,$ λ_r，对应的谱幂等算子分别为 $\mathrm{E}_\theta, \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_r$，其中 θ 由 (3) 给出。若 u 和 v 之间发生 (α, β)-分数复现，则存在时间 τ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$，使得

$$U(\tau)\mathbf{e}_u = \alpha \mathbf{e}_u + \beta \mathbf{e}_v. \tag{5}$$

由引理 3， $\sigma_{uv}^{-}(M) = \{\theta\}$，因此利用谱幂等算子的和为恒等算子这一事实，我们得到

$$\alpha \mathbf{e}_u + \beta \mathbf{e}_v = \sum_{\lambda \in \sigma_u(M)} (\alpha E_\theta \mathbf{e}_u + \beta E_\theta \mathbf{e}_v) = (\alpha - \beta) E_\theta \mathbf{e}_u + (\alpha + \beta) \sum_{j=1}^{r} E_j \mathbf{e}_u. \tag{6}$$

结合（2）、（5）和（6），可得

$$\alpha - \beta = e^{i\tau\theta} \quad \text{and} \quad \alpha + \beta = e^{i\tau\lambda_j} \tag{7}$$

对每个j均成立。解出 α 和 β，得到 $\alpha = e^{i\zeta} \cos\gamma$ 和 $\beta = ie^{i\zeta} \sin\gamma$，其中 γ和 $\zeta \in \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\gamma \equiv \tau(\lambda_1 - \theta)/2 \ (\mathrm{mod}\ \pi) \quad \text{and} \quad \zeta \equiv \tau(\lambda_1 + \theta)/2 \ (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{8}$$

由于 $\alpha - \beta = e^{i(\zeta-\gamma)}$ 和 $\alpha + \beta = e^{i(\zeta+\gamma)}$，我们可以将（7）改写为

$$e^{i(\zeta-\gamma)} = e^{i\tau\theta} \quad \text{and} \quad e^{i(\zeta+\gamma)} = e^{i\tau\lambda_j}. \tag{9}$$

现在，（9）意味着$e^{i\tau(\lambda_j-\theta)} = e^{i2\gamma}$ 对每个j均成立。因此，（9）成立，当且仅当（2）中的两个方程成立。最后一个结论显然成立。 □

定理 2 中的分数复现是平衡的，当且仅当 γ 是 $\frac{\pi}{4}$ 的奇数倍。接下来，我们确定孪生顶点之间发生真分数复现的必要条件。下文中，对于强余谱孪生点u 和v，令$\sigma_{uv}^{+}(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ 以及$\sigma_{uv}^{-}($ $M) = \{\theta\}$，其中$r \geqslant 2$， $\lambda_1 > \lambda_2$ 且 θ 由（3）给出。

推论 4. 如果u 和v 是X 中的孪生顶点，且在时间τ发生适当的 $(e^{i\zeta} \cos\gamma, ie^{i\zeta} \sin\gamma)$-分数复现，那么 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 满足比率条件。特别地，如果p_j 和q_j 是整数，且 $\frac{\lambda_1-\lambda_j}{\lambda_1-\lambda_2} = p_j\, q_j$，并且 $\gcd\{p_j, q_j\} = 1$，那么

$$\tau = \frac{2\pi q k}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad and \quad \gamma \equiv qk \left(\frac{\lambda_1 - \theta}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \pi \ (mod\ \pi)$$

对于某个整数k，其中q ＝最小公倍数$(q_2, \ldots, q_n)$，且$q\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)$ 不是整数。

证明。设 u 和 v 是在时间 τ发生真分数复现的孪生顶点。根据定理 2，u 和 v 是强余谱顶点，且 $\sigma_{uv}^{+}($ M) $= \{\lambda_1$、……、$\lambda_r\}$ 以及 $\sigma_{uv}^{-}(\mathrm{M}) = \{\theta\}$。 $\sigma_{uv}^{+}(\mathrm{M})$ 满足比率条件这一事实可直接由 [CCT+19，推论 5.3]得出。现在，式 (7) 中的方程 $\alpha + \beta = \mathrm{e}^{it\lambda_j}$ 成立，当且仅当对所有 j $\in$ {2，……，r}，都有 e $^{it(\lambda_1-\lambda_j)} = 1$。在定理4.2 的证明中用 $\sigma_{uv}^{+}(\mathrm{M})$ 替换 $\sigma_u(\mathrm{M})$，可得满足 $\mathrm{e}^{it(\lambda_1-\lambda_j)} = 1$ 的最小时间 t 为 t $= \frac{2\pi}{\mathrm{q}\overline{\lambda_1-\lambda_2}}$。因此，u 和 v 之间发生分数复现的时间 τ 必须是 t 的整数倍。也就是说，对于某个整数 k，有 $\tau = \frac{2\pi}{\mathrm{qk}\overline{\lambda_1-\lambda_2}}$。由 (8) 可得，$\gamma \equiv \frac{1}{2}\tau(\lambda_1 - \theta)\ (\mathrm{mod}\ \pi) \equiv \mathrm{qk}(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2})\pi\ (\mathrm{mod}\ \pi)$。由于发生的是真分数复现， γ 不是π的整数倍。等价地，$\mathrm{qk}(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2})$ 不是整数，这意味着 $\mathrm{q}(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2})$ 不是整数。 □

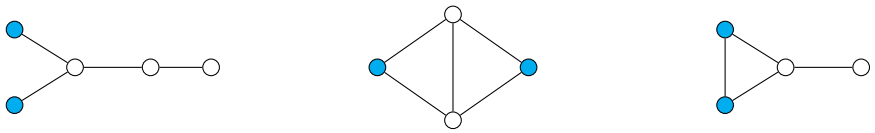


图 1：图X（左）、Y（中）和Z（右），其中孪生顶点u和v以蓝色标出

注意，推论 τ 4 中发生真分数复现的时间仅取决于$\sigma_{uv}^{+}(M)$中的特征值。对于强余谱顶点，只有当这些顶点是孪生顶点时才会出现这种情况。事实上，如果两个顶点是强余谱顶点但不是孪生顶点，那么 [Mon22，推论 3.17(1)] 给出 $|\sigma_{uv}^{-}(M)| \geqslant 2$，而 [CCT+19，推论 5.6] 意味着 τ 取决于以下两个矩阵中的特征值：$\sigma_{uv}^{+}(M)$ 和 $\sigma_{uv}^{-}(M)$。

我们用下面的例子说明推论 4。

例 1. 考虑图 X（见图 *1*）。则 u 和 v 相对于邻接矩阵 $\sigma_{uv}^{+}(A) = \left\{\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\right\}$ 和 $\sigma_{uv}^{-}(A) = \{0\}$是邻接强余谱。由于 $\sigma_{uv}^{+}(A)$ 不满足比率条件，根据推论 4，u 和 v 之间不会发生真正的邻接融合。不过，由于 $\sigma_{uv}^{+}(A)$ 中的所有特征值在 $\mathbb{Q}$上线性无关，可以验证 u 和 v之间会发生邻接渐近完美态转移。

下面的结果不仅给出了推论 4中第一条结论的逆命题，还确定了所有满足以下条件的时间 τ和角度 γ：$(e^{i\zeta}\cos\gamma$，即$^{i\zeta}\sin\gamma)$-分数复现发生在孪生顶点之间，时间为 τ。

推论 5. 设 u 和 v 是 X 中满足比率条件的强余谱孪生顶点，其中 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 。令 q 为推论 *4*中定义的量。对每个正整数 k，令

$$\tau_k = \frac{2\pi qk}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad \zeta_k \equiv \frac{1}{2}\tau_k(\lambda_1+\theta)\ (mod\ \pi), \quad and \quad \gamma_k \equiv \frac{1}{2}\tau_k(\lambda_1-\theta)\ (mod\ \pi).$$

那么，对每个正整数 k，$(e^{i\zeta_k}\cos\gamma_k$,即$^{i\zeta_k}\sin\gamma_k)$-分数复现发生在 u 和 v 之间，时刻为 τ_k；当且仅当 $qk\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)$ 不是整数时，该复现是非平凡的。此外，$\{\tau_k:\ k$ 为整数$\}$ 和$\{\gamma_k:\ k$ 为整数$\}$ 分别是所有满足以下条件的时间 τ和角度 γ 的集合：$(e^{i\zeta}\cos\gamma$,即$^{i\zeta}\sin\gamma)$-分数复现发生在 u 和 v之间，时刻为 τ。

证明。若 σ_{uv}^{+}(M) 满足比率条件，则如推论 4 的证明中所述，对于每个 j，满足 $e^{it(\lambda_1-\lambda_j)} = 1$ 的最小 t 为 t $= {}^{2\pi}q\,\overline{\lambda_1-\lambda_2}$。现在，上述 τ_k、ζ_k 和 γ_k 满足对所有 j $\in \{1,\ldots,r\}$ 均有 $e^{i(\zeta_k+\gamma_k)} = e^{i\tau_k\lambda_j}$，且 $e^{i(\zeta_k-\gamma_k)} = e^{i\tau_k\theta}$。因此，(9) 成立，于是 $(e^{i\zeta_k}\cos\gamma_k$，即 $^{i\zeta_k}\sin\gamma_k)$-分数复现发生在 u 和 v 之间，时刻为 τ_k。由于 $\gamma_k \equiv qk(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2})\pi$，当且仅当 $qk(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}) \notin \mathbb{Z}$ 时，$\sin\gamma_k = 0$。由于 γ_k取决于 τ_k，且推论 4 表明分数复现发生的时间是 τ_1 的整数倍。 □

因此，最小分数复现时间为 $\tau_1 = {}^{2\pi}q\,\overline{\lambda_1-\lambda_2}$。如果再加上 $\phi(M,\ t) \in \mathbb{Z}[x]$，那么 $\tau_1 = \frac{2\pi}{s\sqrt{\Delta}}$（见命题 1）。由于 $\gamma_k = k\gamma_1$，我们还注意到，如果u 和v 在 τ_1时是周期的，那么它们之间不会发生真分数复现；而如果u 和v 在 τ_1时存在完美态传输，那么它们之间不会发生平衡分数复现。

推论4 和5 共同给出了孪生顶点之间分数复现的另一种刻画。

定理 3. 设u 和v 是X中的孪生顶点。那么，u 和v 之间发生真分数复现，当且仅当这些顶点强余谱，$\sigma_{uv}^{+}(M)$ 满足比率条件，并且$q\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)$ 对于某个 λ_1，$\lambda_2 \in \sigma_{uv}^{+}(M)$不是整数，其中$q$ 在推论*4*中定义。

我们指出，只要 θ 是H 的一个特征值，且对应的特征向量为 $e_u - e_v$，上述刻画对任意实对称H都成立。

4 分数复现引发的周期性、渐近完美态传输与完美态传输

以下结果结合了 [CCT+19]中的推论 5.8 和 5.11，表明强余谱顶点之间的分数复现意味着周期性、完美态传输或渐近完美状态转移。

引理 5. 设u 和v 是强余谱顶点，且在时间 τ 发生 $(e^{i\zeta}\cos\gamma, ie^{i\zeta}\sin\gamma)$ 型分数复现。

1. 若 $\gamma = \frac{a}{b}\pi$，其中a 和b 为整数，且 $\gcd(a、b) = 1$，则u 和v 在时间$b\tau$时为周期的。若再假设 b 为偶数，则u 与v 之间在时间$b\tau/2$时发生完美态传输。2. 若 $\gamma = c\pi$ f

或c为某个无理数，则u 与v之间会发生渐近完美态传输。

回顾一下，平衡的 $(e^{i\zeta}\cos\gamma, ie^{i\zeta}\sin\gamma)$-分数复现发生在 u 和 v 之间，当且仅当 $\gamma = \frac{a}{4}\pi$ 为某个奇数 a。将此引理5(1) 与 Chan 等人的以下结果结合起来 [CJL+21，推论 5。9]。

推论 6. 设u 和v 是强余谱顶点。若u与v 之间发生平衡分数复现，且最小时间为 τ，则u 与v 之间会在最小时间为 2τ 时发生完美态传输。

现在我们将引理5 应用于孪生顶点。若顶点u 和v 表现出真近乎完美态传输，即这些顶点表现出近乎完美态传输，但不具有周期性。

定理 4. 设u 和v 是强余谱孪生点，在时间 τ发生分数复现。

1. 若 $\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 是整数，且 $\gcd(a, b) = 1$，则 u 和 v 在时间 bτ具有周期性。若 b 为偶数，则 u 和 v 之间在时间 b$\tau/2$发生完美态传输。2. 若 $\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$，则 u 和 v 之间发生真近乎完美态传输。此外，对于每个整数 k，u 和 v 之间在时间 τ_k 发生 proper($e^{i\zeta_k}\cos\gamma_k$, 即 $i\zeta_k\sin\gamma_k$)-分数复现，其中 τ_k、ζ_k 和 γ_k 的定义见推论 5(1)。

证明。由推论 5(1)，我们知道对于某个整数 k，$\tau = \tau_k$和 $\gamma = \gamma_k$，因此 $\gamma \equiv \mathrm{qk}\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\pi(\mod \pi)$。于是，若$\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2} \in \mathbb{Q}$，则 γ 是 π的有理数倍，因此适用引理 5(1)。否则，适用引理 5(2)。此外，若 $\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$，则对任意整数$\ell$，$\gamma_\ell$ 都不是 π 的有理数倍，因此对于任意整数 ℓ，u 和 v 在 τ_ℓ 处都不是周期的。应用推论 5(1)即可完成证明。 □

假设孪生顶点 u 和 v 之间发生真分数复现。要确定它们之间是否发生周期性或真分数渐近完美状态转移，只需在已知 γ 时应用引理 5。然而，若未知 γ，但已知 $\sigma_{uv}^{+}(\mathrm{M})$ 和 $\sigma_{uv}^{-}(\mathrm{M})$中的元素，则可以使用定理 4。我们还指出，定理 4 中陈述 (1) 和 (2) 的逆命题并不成立。也就是说，能够实现渐近完美状态转移的孪生顶点未必能实现真分数复现，如例 1 所示；而周期性强余谱孪生顶点也未必表现出真分数复现，如例 3 所示。后一条观察促使我们刻画能够实现真分数复现的周期性强余谱孪生顶点。对于整数 b，记整除 b 的最大 2 的幂为 ν_2(b)。我们也用 b $\nmid$ q 表示 b 不整除 q。

定理 5. 设 u 和v 是具有强余谱性质的周期性孪生顶点。以下结论成立

1. 设a 和b 为整数，使得 $\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{a}{b}$ 且最大公约数$(a,b) = 1$。当且仅当$b \nmid q$时，u 与v 之间会发生真分数复现，时间为 τ，其中q 定义见推论4。2. 假设$b \nmid q$，并令g = 最大公约数(b,q)。则 $\{\tau_k$：满足$b \nmid k\}$ 的整数k 构成u 与v之间发生真分数复现的所有时间集合。以下结论也成立。

(a) 若 $\nu_2(q) \geqslant \nu_2(b)$，则$u$与$v$之间既不会发生完美态传输，也不会发生平衡分数复现。
(b) 若 $\nu_2(b) \geqslant \nu_2(q)+1$，则$u$ 与v 之间会发生完美态传输，最小时间为$\frac{\tau_1}{b2}g$；当且仅当 $\nu_2($ $b) \geqslant \nu_2(q)+2$时，u 与v 之间会发生平衡分数复现。

证明。根据定理 3，上述假设意味着，当且仅当 q $\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right) \notin \mathbb{Z}$ 时，u 和 v 之间会发生真分数复现。由于 u 是周期的，定理 1 表明 $\sigma_u(\mathrm{M})$ 满足比率条件，因此，对于某些整数 a 和 b，有 $\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}$ = a b，且最大公约数 (a, b) = 1。因此，当且仅当 b ∤ q 时，q $\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)$ = qa b 不是整数。这就证明了 (1)。应用推论 5(1)可证明 (2)，并且我们注意到，推论 5(1)中的 γ_k 满足 $\gamma_k = \mathrm{k}\gamma_1 = \mathrm{k}\left(\frac{qa}{\mathrm{b}}\right)\pi$。现在，假设 $\nu_2(\mathrm{q}) \geqslant \nu_2(\mathrm{b})$。那么，$\gamma_1$ 的任意整数倍都不是 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，因此 u 和 v 之间既不会发生完美态传输，也不会发生平衡分数复现。这就证明了 (2a)。最后，假设 $\nu_2(\mathrm{b}) \geqslant \nu_2(\mathrm{q})+1$。若 k = b 2g，则 γ_k = qa 2g π 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，因此时间 τ_k 发生的分数复现就是完美态传输，而 τ_k 是完美态传输发生的最早时间，因为 γ_k 是 $\frac{\pi}{2}$ 的最小正奇数倍。若 $\nu_2(\mathrm{b}) = \nu_2(\mathrm{q})+1$，则对于所有 ℓ，γ_ℓ 都不是 $\frac{\pi}{4}$ 的奇数倍，因此 u 和 v 之间确实会发生平衡分数复现。然而，若 $\nu_2(\mathrm{b}) \geqslant \nu_2(\mathrm{q})+2$，则我们可以选取 k = b 4g，使得 γ_k = qa 4gπ 是 $\frac{\pi}{4}$ 的奇数倍，从而 u 和 v 之间会发生平衡分数复现。这就证明了 (2b)。 □

由推论 6可知，存在平衡分数复现（发生于时间 τ）会自动推出存在完美态传输（发生于时间 2τ）。然而，定理 5(2b)表明，逆命题并不成立。

5 当 $\phi(M,t)$ 具有整数系数时

现在，我们来探究在上一节的结果中加入 $\phi(M,t)$ 具有整数系数这一条件后会发生什么。下面的结果是推论 4 的一个类似结论。

推论 7. 设 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$，并且 u 和 v 是 X 中一对孪生顶点，且它们允许分数复现。那么θ 是一个整数，并且以下两种情况之一成立：(i) $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 中的所有元素都是整数；或 (ii) 存在一个无平方因子整数 $\Delta > 1$ 和一个整数 a，使得 $\lambda_j = \frac{1}{2}(a + c_j\sqrt{\Delta})$，其中某个整数 cj 与 a 奇偶性相同。

证明。 由于 θ 是一个代数整数，因此它是整数。此外，推论 4表明 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 满足比率条件；根据 [CG21，定理 7.6，该条件等价于 (i) 和 (ii)。1]。 □

我们还重新考察推论 *4*中的参数 q以及 τ_k 推论 5中的参数。

命题 1. 设 $\phi(M、t) \in \mathbb{Z}[x]$。则 $q = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{g\sqrt{\Delta}}$且 $\tau_k = \frac{2\pi k}{g\sqrt{\Delta}}$，其中 g = 是 $\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}、\ \ldots\ldots、\ \frac{\lambda_1-\lambda_r}{\sqrt{\Delta}}\right)$ 的最大公约数；若 $\sigma_u(M) \subseteq \mathbb{Z}$，则为 $\Delta = 1$；否则 $\Delta > 1$ 是无平方因子整数。

证明。由于 ϕ(M、t) $\in \mathbb{Z}$[x]，σ_{uv}^{+}(M) 满足比率条件等价于推论 7。因此，推论 4 中的 q$_j$'s 满足 q$_j = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mathrm{h}_j\sqrt{\Delta}}$，其中 h$j$ = 是$\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}、\ \frac{\lambda_1-\lambda_j}{\sqrt{\Delta}}\right)$、$\Delta = 1$ 的最大公约数；若 $\sigma_u(\mathrm{M}) \subseteq \mathbb{Z}$，则 $\Delta > 1$为无平方因子的。于是，q = 是$\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mathrm{h}_2\sqrt{\Delta}}、\ \ldots\ldots、\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{r\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}$ h g 的最小公倍数，其中 g = 是(h$_2$,、……、h$_r$) =的最大公约数，$\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}、\ \ldots\ldots、\ \frac{\lambda_1-\lambda_r}{\sqrt{\Delta}}\right)$的最大公约数；由此得到 $\tau_k = \frac{2\pi \mathrm{qk}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{2\pi \mathrm{k}}{\mathrm{g}\sqrt{\Delta}}$。 □

接下来，我们得到以下版本的定理3 当 $\phi(M,\ t) \in \mathbb{Z}[x]$。

定理 6。令 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$，并假设 u 和 v 是 X中的孪生顶点。当且仅当u 和v 强余谱，且满足以下条件之一时，它们之间会发生真分数复现。

1. (i) $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 中的所有元素都具有 $\frac{1}{2}(2\theta + b_j\sqrt{\Delta})$的形式，其中 bj 为偶数，且 $\Delta = 1$ 或 $\Delta > 1$ 为无平方因子的，并且 (ii) $g \nmid \frac{\lambda_1-\theta}{\sqrt{\Delta}}$，其中 g 由命题 *1*给出。

2. 所有元素 i n $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 的形式为 $\frac{1}{2}(a + b_j\sqrt{\Delta})$，其中$a \neq 2\theta$、$bj$ 为偶数，且 $\Delta > 1$ 无平方因子。

证明。设 u 和 v 强余谱。我们证明定理 3 中的两个条件等价于 (1) 和 (2)。由于 $\phi(M, t) \in \mathbb{Z}[x]$, $q = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{g\sqrt{\Delta}}$ 由命题 1 可知， θ 是整数（由推论 7），并且 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 满足比率条件等价于推论 7(i,ii)。若每个 $\lambda_j \in \sigma_{uv}^{+}(M)$ 的形式为$\frac{1}{2}(2\theta + b_j\sqrt{\Delta})$，则 $q\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right) = \frac{\lambda_1-\theta}{g\sqrt{\Delta}} \notin \mathbb{Z}$ 当且仅当 $g \nmid \frac{\lambda_1-\theta}{\sqrt{\Delta}}$。但若每个 $\lambda_j \in \sigma_{uv}^{+}(M)$ 的形式为$\frac{1}{2}(a + b_j\sqrt{\Delta})$，其中 $a \neq 2\theta$，则 $\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$，因此 $q\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right) \notin \mathbb{Z}$。由定理 3 即得证。 □

例 2。 考虑图 1 中的简单无权图 Y （见图 *1*）。其中 u 和 v 是无符号拉普拉斯矩阵强余谱的，且 $\sigma_{uv}^{+}(Q) = \{3 \pm \sqrt{5}\}$ 以及 $\sigma_{uv}^{-}(Q) = \{2\}$。根据定理 *6*(2)，在 u 和 v 之间会在时间 $\tau_1 = \frac{\pi}{5}$ 发生真拉普拉斯分数复现。图 Y 中标为白色的那对顶点也具有相同性质。

对于拉普拉斯矩阵情形，我们有如下结果；它与 Chan 等人 [CJL+21 的定理 26]所得到的真拉普拉斯分数复现刻画一致。

定理 7。设 $\phi(L,t) \in \mathbb{Z}[x]$ 和 X 为一个具有孪生顶点 u 和 v的简单正权图。当且仅当这些顶点是强余谱的、$\sigma_u(L) \subseteq \mathbb{Z}$，且 $g \nmid \theta$，其中 g =为 $(\lambda_1$、λ_3、.....、$\lambda_r)$ 和 $\lambda_2 = 0$的最大公约数时，u 和 v 之间才会发生真拉普拉斯分数复现。

证明。该假设意味着 L 是半正定的，且 0 是一个具有全 1 特征向量的简单特征值。因此， $0 \in \sigma_{uv}^{+}(M)$, 所以根据推论 7， $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 中的特征值要么全都是整数，要么全都是某个无平方因子整数 $\Delta > 1$ 的 $\sqrt{\Delta}$ 的整数倍。由于 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 在代数共轭下封闭，$b\sqrt{\Delta} \in \sigma_{uv}^{+}(M)$ 当且仅当 $-b\sqrt{\Delta} \in \sigma_{uv}^{+}(M)$，而这是不可能的，因为 L 是半正定的。因此，满足比率条件的 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 等价于 $\sigma_u(L) \subseteq \mathbb{Z}$。现在，令 $\lambda_2 = 0$。根据命题 1， $q = \frac{\lambda_1}{g\sqrt{\Delta}}$，因此 $q\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right) = \frac{\lambda_1-\theta}{g} \notin \mathbb{Z}$ 当且仅当 $g \nmid \theta$，其中 $g = \gcd(\lambda_1$、λ_3、... ...、$\lambda_r)$，因为 $\sigma_u(L) \subseteq \mathbb{Z}$ 和 $\lambda_2 = 0$。应用定理 3 即可完成证明。 □

若 $1 \in \sigma_{uv}^{+}(L)$，则 u 和 v 之间不会发生真分数复现（即使它们不是孪生顶点也成立）。现在，若 $|\sigma_{uv}^{+}(L)| = 2$，则当且仅当 $\lambda_1 \nmid \theta$ 时，u 和 v 之间会发生真分数复现，这由定理 7 得出。另一方面，若 $|\sigma_{uv}^{+}(L)| \geqslant 3$，则 $\sigma_{uv}^{+}(L)$ 中两个非零特征值互素时会产生真分数复现；但当 $g > 1$，且 (i) θ 是素数并且 $\theta \neq g$，或 (ii) $\theta = 1$ 时，则不会发生真分数复现。下面通过一个例子说明定理 7。

例 3. 考虑图 1 中的简单无权图 Z （见图*1*）。那么 u 和 v 是拉普拉斯强余谱顶点，且 $\sigma_{uv}^{+}(L) = \{4,1,0\}$ 和 $\sigma_{uv}^{-}(L) = \{3\}$。由于 $1 \in \sigma_{uv}^{+}(L)$，u 和 v之间不会发生真拉普拉斯分数复现。不过，它们是拉普拉斯周期的，最小周期为 2π。

现在我们给出定理 4和 5(2) 的一个类似结果。

定理 8. 设 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$，并假设 u 和 v 是 X 中的孪生顶点，且它们允许分数复现。

1. 当且仅当 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 中的所有元素都具有 $\frac{1}{2}(2\theta + b_j\sqrt{\Delta})$ 的形式，且 bj 为偶数，并且 $\Delta = 1$ 或 $\Delta > 1$ 是无平方因子的时，顶点 u 和 v 是周期的。以下结论也成立。

(a) If $\nu_2\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\sqrt{\Delta}}\right) \geqslant \nu_2(g)$, *then neither PST nor balanced FR occurs between u and v.*

(b) 若 $\nu_2(g) \geqslant \nu_2\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\sqrt{\Delta}}\right)+1$，则 u 和 v 之间会发生完美态传输，最小时间为 $\frac{\tau_1}{b2^g}$。此外，当且仅当 $\nu_2(g) \geqslant \nu_2\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\sqrt{\Delta}}\right)+2$ 时，u 和 v 之间会发生平衡分数复现。

2. 当且仅当 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 中的所有元素均具有 $\frac{1}{2}(a+b_j\sqrt{\Delta})$ 的形式，且 u 与 v 之间发生真分数渐近完美状态转移时，$a \neq 2\theta$、bj 均为偶数，且 $\Delta > 1$ 无平方因子。

证明。根据推论 7，定理 6 的 (1i) 或 (2) 成立。由于根据推论 7，θ 是整数，定理 1 推出 (1)。因为 $\phi($ M, t$) \in \mathbb{Z}$[x]，命题 1 表明 q $= \frac{\lambda_1-\lambda_2}{}g_{\sqrt{\Delta}}$，因此 q$^{\left(\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)} = \frac{\lambda_1-\theta}{\sqrt{\Delta}}$g。在定理 5(2) 中应用相同的论证即可证明 (1b)。为证明 (2)，设 u 与 v 之间发生渐近完美状态转移。由于 (1i) 推出周期性，定理 6(2) 成立。逆命题由定理 4(2) 得出。 □

可以验证，定理 8(1b) 实际上等价于 Kirkland 等人给出的孪生顶点之间存在完美态传输的刻画，只要 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$ 满足 [KMP22，定理 10]。因此，定理 8 不仅推广了关于 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$时孪生顶点之间周期性、完美态传输和渐近完美状态转移的已知结果，还刻画了孪生顶点之间的平衡分数复现。

推论 8. 设 $\phi(M,t) \in \mathbb{Z}[x]$，并设$u$ 和v 是X 中的孪生顶点，且存在分数复现。若 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 中至少有一个元素是整数，则u 和v 是周期的。

证明。 这直接由推论 7和定理 1得出。 □

若 X 是简单且具有正权重的图，则在上述推论中取 $M = L$，并注意到$0 \in \sigma_{uv}^{+}(L)$，即可得到 Chan 等人的结果：周期性是发生真拉普拉斯矩阵分数复现的必要条件 [CJL^{+}21，推论 31]。然而，对于 $M \in \{A,Q\}$，孪生顶点之间存在真分数复现并不一定意味着它们是周期的（参见 4 中 $M = A$ 的例子，以及 2 中 $M = Q$的例子）。

6 双锥

本节中，我们刻画双锥顶点之间分数复现的存在性。两个加权图 X 和 Y 的连接是指图 X $\vee$Y，其中 X 的每个顶点都与 Y 的每个顶点以权重为一的边相连。若 X $\in \{K_2, O_2\}$，则与 X $\vee$ Y 同构的图称为 Y 上的双锥，而 X $\vee$Y 的两个顶点称为顶点。特别地，$K_2 \vee$Y 称为连通双锥，而 $O_2 \vee$Y 称为非连通双锥。我们先给出以下引理，它是推论 5 和命题 1 的直接推论。

引理 6. 设u 和v 是X 中的强余谱孪生顶点，且满足 $|\sigma_{uv}^{+}(M)| = 2$。那么 $\sigma_{uv}^{+}(M)$ 满足比率条件，$q = 1$ 且 $\tau_k = {}^{2k\pi}/_{\lambda_1-\lambda_2}$。若再假设 $\phi(M、t) \in \mathbb{Z}[x]$，那么$g = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}$且 $\tau_k = {}^{2k\pi}/_{\sqrt{\Delta}}$。

6.1 非连通双锥

我们首先处理拉普拉斯矩阵。

定理 9. 设Y 是一个具有n 个顶点的简单正权图。对于每个满足 > 0 such that$(n+2) \nmid 2k$的整数 k，在$O_2 \vee Y$的顶点u 和v 之间，会在时间 τ_k发生 proper Laplacian $(e^{i\zeta_k}\cos\gamma_k, ie^{i\zeta_k}\sin\gamma_k)$-分数复现，其中 $\tau_k = \gamma_k = {}^{2k\pi}/_{n+2}$且 $\zeta_k = {}^{2k(n+1)\pi}/_{n+2}$。以下结论也成立。

1. 如果n 为奇数，或者$n \equiv 0$ (模 4)，那么u 与v之间既不会发生完美态传输，也不会发生平衡分数复现。

2. 如果$n \equiv 2$ （模 4），那么u 与v 之间会发生完美态传输，最小时间为 $\frac{\pi}{2}$；并且u 与v 之间会发生平衡的分数复现，当且仅当 $\nu_2(n+2) \geqslant 3$。

证明。设 u 和 v 是 $O_2 \vee Y$ 的顶点。根据 [KMP22，引理 5(2)]，$\sigma_u(L) = \{0、n、n+2\}$，即使 Y 是简单且具有正权重的图，该结论也适用。现在，根据 [Mon22，推论 6，9] 可知 u 和 v 强余谱，且 $\sigma^+_{uv}(L) = \{0、n+2\}$。运用推论 5 和引理 6 可得 $q = 1$，且 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k$，即 $^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现会在时间 τ_k 发生于 u 和 v 之间，对所有整数 $k > 0$ 均成立。由于 $\frac{\lambda_1-\theta}{\lambda_1-\lambda_2} = {}^{2}n+2$ 且 $q = 1$，应用定理 5 即完成证明。 □

Chan 等人最早证明，任意含有n 个顶点的非连通双锥都能在时间 τ_1于顶点之间实现适当的拉普拉斯矩阵分数复兴。利用我们为孪生顶点建立的方法，我们进一步拓展了这一结果，确定了所有参数 τ、ζ和 γ，使得适当的拉普拉斯矩阵 $(e^{i\zeta}\cos\gamma$，$ie^{i\zeta}\sin\gamma)$-分数复现在u 与 v 之间于时间 τ发生，并找出了所有能产生平衡分数复现的 n 值。

根据定理 9(2)，当且仅当 $n = 2$时，Laplacian PST 会在 $O_2 \vee Y$ 中的 u 与 v 之间于时间 τ_1 发生；这一结果最早由 [CJL+21 的定理 11]证明。不过，我们澄清一点：对于两个以最小时间 τ_1实现适当拉普拉斯分数复现的顶点，它们之间在时间 τ_1 不存在拉普拉斯完美状态转移，并不意味着它们之间永远不会发生拉普拉斯完美状态转移。例如，若对于某个奇数 $p \geqslant 3$，$n = 4p-2$，则 $\nu_2(n+2) = 2$。根据定理 9，u 与 v 之间会在时间$\tau_1 = \frac{\pi}{2}p$ 发生适当的拉普拉斯分数复现，而定理 9(2)则表明，它们之间会在 $p\tau_1 = \frac{\pi}{2}$发生拉普拉斯完美状态转移。

我们还提及 Chan 等人在[CJL+21]中的一些有趣结果。设 X 是一个有 m 个顶点的简单无权图。他们证明，X 在时间 $\frac{2\pi}{}$ m 发生非平凡的拉普拉斯分数复兴，当且仅当 X 是非连通双锥；他们还证明，如果 m 是素数且 X 存在非平凡的拉普拉斯分数复兴，那么 X 是非连通双锥。不过，我们注意到，如果 m 是合数且 X 存在非平凡的拉普拉斯分数复兴，那么 X 未必是双锥。例如，圈 C_6, 是 2-正则的，并且在时间 $\frac{2\pi}{3}$于对踵顶点之间发生邻接矩阵$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i)$-分数复现（见 [CCT+19，例 7.3]）。

对于 $M \in \{A、Q\}$，我们假设 Y 是一个简单无权的 ℓ-正则图。设 u 和 v 是 $O_2 \vee Y$ 的顶点。根据 [Mon22，推论 6.9(1)]，，u 和 v 强余谱，而引理 3 得出$\sigma^-_{uv}(A) = \{0\}$ 和 $\sigma^-_{uv}(Q) = \{n\}$。应用 [KMP22] 中的引理 4(2b)和推论 4(2b)，可得$\sigma_u(A) = \{\lambda^{\pm}, 0\}$，其中 $\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(\ell \pm \sqrt{\ell^2+8n})$；以及 $\sigma_u(Q) = \{\lambda^{\pm}, n\}$，其中 $\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(2\ell+n+2 \pm \sqrt{(2\ell+n+2)^2-8\ell n})$，分别成立。两种情况下，均有 $|\sigma^+_{uv}(M)| = 2$。对于 $M = A$，我们有以下结论。

定理 10. 设Y 是一个简单的无权 ℓ正则图，具有n 个顶点，且$D_1 = \ell^2 + 8n$。那么，邻接矩阵 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, ie^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现会在$O_2 \vee Y$ 的顶点之间发生，时间为 τ_k，对所有整数$k > 0$均成立，其中 $\tau_k = {}^{2k}\frac{\pi}{\sqrt{}}D_1$ 且 $\gamma_k = \frac{(\ell+\sqrt{D_1})k\pi}{2\sqrt{}_1}D$。此外，以下结论也成立。

1. 若 $\ell = 0$，则u 与v 之间会发生完美态传输，其最小时间为 $\tau_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$

2. 若 $\ell > 0$ 且 $\ell^2 + 8n$ 不是完全平方数，则u 与v 之间会在每个 τ_k发生真分数 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, e^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现。$u$ 与v之间也会发生真分数渐近完美状态转移。

3. 设 $\ell > 0$，并假设$n = \frac{1}{2}s(\ell+s)$，其中s 是满足$s(\ell+s)$ 为偶数且f = 最大公约数$(\ell+s, s)$的某个整数。则 $\{\tau_k : k$ 是一个整数，使得 $^{\ell+2}{}_{s\,f}\!\!\not\,k\}$ 构成u 与v之间发生真分数复现的所有时间的集合。此外，以下结论也成立。

   (a) 若 $\nu_2(\ell) \leqslant \nu_2(s)$，则 u 与 v之间既不会发生完美态传输，也不会发生平衡分数复现。
   (b) 若 $\nu_2(\ell) \geqslant \nu_2(s)+1$，则 u 与 v 之间会以最小时间$\frac{\pi}{2}$发生完美态传输；当且仅当 $\nu_2(\ell) = \nu_2(s)+1$时，u 与 v 之间会发生平衡分数复现。

证明。 推论 5 和引理 6 表明，$q = 1$ 且 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, ie^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现在$u$ 与v 之间于时间 τ_k 发生，对所有整数$k > 0$均成立。若 $\ell = 0$，则 $\gamma_k = k\frac{\pi}{2}$，因此$u$ 与v之间对每个奇数k都在时间 τ_k发生完美态传输，但不会发生平衡分数复现。因此，(1)成立。现在，设 $\ell > 0$。若D_1 不是完全平方数，

则 $\frac{\lambda^+-\theta}{\lambda^+-\lambda^+} \notin \mathbb{Q}$。利用定理 4(2)可证明(2)。最后注意，$D_1$ 是完全平方数，当且仅当存在某个整数 s，使得 $8n = 4s(\ell+s)$。因此，若 ℓ^2+8n 是完全平方数，则 $\frac{\lambda^+-\theta}{\lambda^+-\lambda^+} = (\ell+s)/f(\ell+2s)/f$，其中 $f =$ 最大公约数$(\ell+s,\ \ell+2s) =$ 最大公约数$(\ell+s,\ s)$。

- 设 $\nu_2(\ell) \leqslant \nu_2(s)$。若 $\nu_2(\ell) = \nu_2(s)$，则 $\nu_2(\ell+2s) = \nu_2(\ell) = \nu_2(s) < \nu_2(\ell+s)$，因此 $\nu_2(f) = \nu_2(s) = \nu_2(\ell+2s)$。但若 $\nu_2(\ell) < \nu_2(s)$，则 $\nu_2(\ell+2s) = \nu_2(\ell+s) = \nu_2(\ell) < \nu_2(s)$，因此 $\nu_2(f) = \nu_2(\ell+s) = \nu_2(\ell+2s)$。两种情况下，我们都得到 $(\ell+2s)/f$ 是奇数。
- 设 $\nu_2(\ell) \geqslant \nu_2(s)+1$。则 $\nu_2(\ell+s) = \nu_2(s) \geqslant 1$，因为 $s(\ell+s)$ 是偶数，因此 $\nu_2(f) = \nu_2(s)$。若 $\nu_2(\ell) = \nu_2(s)+1$，则 $\nu_2(\ell+2s) \geqslant \nu_2(s)+2$，因此 $\nu_2((\ell+2s)/f) \geqslant 2$。同时，若$\nu_2(\ell) \geqslant \nu_2(s)+2$，则 $\nu_2(\ell+2s) = \nu_2(s)+1$，因此 $\nu_2((\ell+2s)/f) = 1$。

由于 $q = 1$，应用定理 5即可完成 (3) 的证明。 □

对于无符号拉普拉斯矩阵的情形，我们有以下结果。注意，我们省略了 $\ell = 0$的情况，因为 $O_2 \vee Y$ 是一个二分图，因此定理 9 适用。

定理 11. 设Y 是一个简单的无权 ℓ-正则图，具有 n 个顶点，其中 $\ell > 0$ 且 $D_2 = (2\ell+n+2)^2 - 8\ell n$。那么，无符号拉普拉斯矩阵 $(e^{i\zeta_k}\cos\gamma_k$,即$^{i\zeta_k}\sin\gamma_k)$-分数复现发生在$O_2 \vee Y$ 的顶点之间，在 τ_k处对所有整数 $k > 0$均成立，其中 $\tau_k = {}^{2}k\sqrt{\pi}D_2$, $\gamma_k = \frac{(2\ell-n+2+\sqrt{D_2})k\pi}{2\sqrt{\ }_2}D$且 $\zeta_k = \frac{(2\ell+3n+2+\sqrt{D_2})k\pi}{2\sqrt{\ }_2}D$。此外，下列结论也成立。

1. 若 $n = 2\ell+2$，则对于每个奇数 k，在 τ_k 时，u 与v 之间发生 PST。

2. 若 $n \neq 2\ell+2$ 且D_2 不是完全平方数，则真分数 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, e^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现发生于$u$ 与v 之间的每个 τ_k。u 与v之间也会发生真分数渐近完美状态转移。

3. 设 $n \neq 2\ell+2$，$n = {}^{+2)}s$，其中s 是某个整数，满足$s(2\ell+n-s+2)$ 为偶数（即 D_2 是完全平方数），且$f =$ 最大公约数$(2\ell-s+2,\ n-s)$。则 $\{\tau_k$：<style id='k'>k 为整数，使得 $^{2\ell+}{}_{n-2s+2}f^{\prime}k\}$ 构成u 与v之间发生真分数复现的所有时间的集合。

(a) 若 $\nu_2(2\ell-s+2) \neq \nu_2(n-s)$，则 u 与 v 之间既不会发生完美态传输，也不会发生平衡分数复现。(b) 若 $\nu_2(2\ell-s+2) = \nu_2(n-s)$，则 u 与 v 之间会发生 PSTr，最小时间为 $\frac{\pi}{2}$；并且，当且仅当 $\nu_2(a+b) \geqslant 2$ 时，u 与 v 之间会发生平衡分数复现，其中 a 和 b 是奇整数，满足 $2\ell-s+2 = 2^{\nu_2(2\ell-s+2)}a$，且 $n-s = 2^{\nu_2(n-s)}b$。

证明。由推论 5 和引理 6 可得 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k$，即 $e^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现会在 τ_k 时发生于 u 与 v 之间，对每个 $k > 0$ 都成立。此外，(1) 和 (2) 可由定理 4 立即推出。为证明 (3)，令 $D_2 = (2\ell+n+2)^2 - 8\ell n$ 为一个完全平方数，即对于某个整数 s，有 $8\ell n = 4s(2\ell+n-s+2)$，且 $s(2\ell+n-s+2)$ 为偶数。这给出 $n = s(2\ell-s2\ell-{}^{+2)}s$，并且容易验证 $\frac{\lambda^+-\theta}{\lambda^+-\lambda^+} = {}^{2\ell-}n{}_{+2+\sqrt{}}D2\sqrt{\ }{}^{2}D_2 = {}^{(2\ell-}{}_{(2\ell+\ s+2)/f\,n-2s+2)/}f$，其中 $f =$ 最大公约数$(2\ell-s+2,\ n-s)$。采用定理 10 证明中的相同论证即可证明 (3)。 □

6.2 连通双锥

对于连通双 锥，关于拉普拉斯矩阵，我们有如下否定结果 .

定理 12. 设Y 是一个有n 个顶点的简单正权图。如果连接$K_2 \vee Y$ 顶点的边权重为 1，那么$K_2 \vee Y$的顶点之间不会发生真分数复现。

证明。 由 [Mon22，推论 6.8(2)], 的 $K_2 \vee Y$ 的顶点并不强余谱。应用定理 2即可得到所需结果。 □

对于邻接矩阵和无符号拉普拉斯矩阵情形，我们再次假设 Y 是一个简单无权 ℓ 正则图，其中 $\ell < n - 1$。设 u 和 v 是 $K_2 \vee Y$ 的顶点，根据[Mon22，推论 6.9(2)]，它们是强余谱的。引理 3 给出 $\sigma_{uv}^{-}(A) = \{-1\}$ 和 $\sigma_{uv}^{-}(Q) = \{n\}$。在 [KMP22] 中应用引理 4(2a) 和推论 4(2a)，即可得到 $\sigma_u(A) = \{\lambda^{\pm}, -1\}$，其中 $\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(\ell + 1 \pm \sqrt{D_1})$ 和 $D_1 = (\ell-1)^2 + 8n$；以及 $\sigma_u(Q) = \{\lambda^{\pm}, n\}$，其中 $\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(2\ell + n + 4 \pm \sqrt{D_2})$ 和 $D_2 = (2\ell - n)^2 + 8n$，分别成立。若 $M = A$，则 $\frac{\lambda^+ - \theta}{\lambda^+ - \lambda^+} = \frac{\ell+3\pm\sqrt{D_2}}{\sqrt{D_1}}$；而若 $M = Q$，则 $\frac{\lambda^+ - \theta}{\lambda^+ - \lambda^+} = \frac{2\ell - n+4+\sqrt{D_2}}{\sqrt{2}}$。运用定理 ~~10 和定理~~ 11 证明中的相同论证，我们得到以下~~关于正则图~~上的连通双锥的刻画：它们关于 $M = A$ 和 $M = Q$ 允许真分数复现。

定理 13. 设Y 是一个简单的无权 ℓ-正则图，具有n 个顶点，且满足 $\ell < n - 1$ 和$D_1 = (\ell-1)^2 + 8n$。那么，邻接矩阵 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, ie^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现发生在$K_2 \vee Y$ 的顶点之间，时间为 τ_k，对所有整数$k > 0$均成立，其中 $\tau_k = \frac{\pi}{k\sqrt{D_1}}$，$\gamma_k = \frac{(\ell+3+\sqrt{D_1})k\pi}{2\sqrt{D_1}}$，且 $\zeta_k = \frac{(\ell-1+\sqrt{D_1})k\pi}{2\sqrt{D_1}}$。此外还有以下结论。

1. 若D_1 不是完全平方数，则每个 τ_k时刻，u 与v 之间都会发生真分数 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, e^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现。$u$ 与v之间也会发生真分数渐近完美状态转移。

2. 设$n = \frac{1}{2}s(\ell - 1 + s)$，其中$s$ 为某个整数，使得$s(\ell - 1 + s)$ 为偶数（即D_1 是完全平方数），且$f =$ 最大公约数$(\ell + s + 1, s - 2)$。那么，$\{\tau_k : k$ 是一个整数，使得 $\frac{\ell+2}{s-1}k\}$ 构成所有使u 与v之间发生真分数复现的时间的集合。此外还有以下结论。

   (a) 若 $\nu_2(\ell + s + 1) \neq \nu_2(s - 2)$，则 u 与v之间既不会发生完美态传输，也不会发生平衡分数复现。(b) 若 $\nu_2(\ell + s + 1) = \nu_2(s - 2)$，则$u$ 与v 之间会以最小时间 $\frac{\pi}{2}$ 发生完美态传输；当且仅当 $\nu_2(a + b) \geqslant 2$时，u 与v 之间会发生平衡分数复现，其中a 和b 是奇整数，且 $\ell + s + 1 = 2^{\nu_2(\ell+s+1)}a$ 且$s - 2 = 2^{\nu_2(s-2)}b$。

定理 14. 设Y 是一个简单的无权 ℓ-正则图，具有 $\ell < n - 1$ 个顶点，且 $D_2 = (2\ell - n)^2 + 8n$。那么，对于所有整数$k > 0$，在 τ_k 时，$K_2 \vee Y$的顶点之间会发生无符号拉普拉斯矩阵 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, ie^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现，其中 $\tau_k = \frac{\pi}{k\sqrt{D_2}}$，$\gamma_k = \frac{(2\ell-n+4+\sqrt{D_2})k\pi}{2\sqrt{2}}$，且 $\zeta_k = \frac{(2\ell+3n+4+\sqrt{D_2})k\pi}{2\sqrt{2}}$。此外还成立以下结论。

1. 若$n = 2\ell + 4$，则对于每个奇数k，u 与v 之间会在时间 τ_k 发生完美态传输。

2. 若$n \neq 2\ell + 4$，且D_2 不是完全平方数，则在u 与v 之间，每个 τ_k都会发生真分数复现 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, e^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$。此外，$u$ 与v之间也会发生真分数渐近完美状态转移。

3. 设$n \neq 2\ell + 4$，$n = \frac{s(2\ell+s)}{s+2}$，其中$s$ 是某个整数，满足$s(2\ell - n + s)$ 为偶数（即D_2 是完全平方数），且$f = \gcd(2\ell - n + s + 2, s - 2)$。那么，$\{\tau_k : k$ 是一个整数，使得 $\frac{2\ell-n+2s}{f}k\}$ 构成u 与v之间发生真分数复现的所有时间的集合。以下结论也成立。

   (a) 若 $\nu_2(2\ell - n + s + 2) \neq \nu_2(s - 2)$，则 u 和 v 之间既不会发生完美态传输，也不会发生平衡分数复现。(b) 若 $\nu_2(2\ell - n + s + 2) = \nu_2(s - 2)$，则 u 和 v 之间会在 $\frac{\pi}{2}$ 发生完美态传输；当且仅当 $\nu_2(a + b) \geqslant 2$ 时，u 和 v 之间会发生平衡分数复现，其中 a 和 b 是奇整数，满足 $s - 2 = 2^{\nu_2(s-2)}b$ 且 $2\ell - n + s + 2 = 2^{\nu_2(2\ell-n+s+2)}a$。

Kirkland 等人刻画了存在邻接矩阵和无符号拉普拉斯矩阵完美态传输的非连通和连通双锥。事实上，可以验证定理 10(1,3b) 和 11(1,3b) 中的条件等价于 [KMP22 中定理 11] 给出的非连通双锥存在完美态传输的条件；而定理 13(2b) 和 14(1,3b) 中的条件等价于[KMP22 中定理 12] 给出的连通双锥存在完美态传输的条件。最后给出以下例子。

例4。令 $m \geqslant 4$，考虑删去一条边的完全图 $K_m \backslash e = O_2 \vee K_{m-2}$。我们应用定理 10，其中 $\ell = m - 3 > 0$，且 $n = m - 2$。由于对于所有 $m \geqslant 4$，$\ell^2 + 8n = m^2 + 2m - 7$ 都不是完全平方数，因此在 $K_m \backslash e$ 中，当 τ_k 时，对于每个 k，u 和 v 之间都存在适当的邻接 $(e^{i\gamma_k}\cos\gamma_k, e^{i\gamma_k}\sin\gamma_k)$-分数复现，其中 $\tau_k = 2k\sqrt{m^2+2m-7}$ 且 $\gamma_k = \frac{(m-3+\sqrt{m^2+2m-7})k\pi}{2}$。u 和 v 之间也存在适当的邻接渐近完美态转移。

例5. 设 $n = s + \sqrt{2s+1} - 1$，其中 $s \equiv 0 \pmod 4$ 为某个整数，且 $2s+1$ 是完全平方数，$\sqrt{2s+1} - 1 \equiv 2 \pmod 4$。设 X 是一个具有 n 个顶点的简单无权 ℓ-正则图，其中 $\ell = \frac{n}{2} + 1$。由于 $\nu_2(n) = 1$ 且 $\nu_2(s) \geqslant 2$，可得 $\nu_2(n-s) = 1$。应用定理 11，可得 $f = \text{最大公约数}(n-s, n-s+4) = \text{最大公约数}(n-s, 4) = 2$，并且对于所有满足 $n - s + 2 \nmid k$ 的整数 k，适当的无符号拉普拉斯矩阵 $(e^{i\zeta_k}\cos\gamma_k, e^{i\zeta_k}\sin\gamma_k)$-分数复现以时间 τ_k 发生在 u 和 v 之间，对每个 k 均成立，其中 $\tau_k = k\pi n - s + 2$ 且 $\gamma_k = \frac{(n^2 - s + 4)k}{n s}$。此外，由于 $\nu_2(n - s + 4) = \nu_2(n - s) = 2$，无符号拉普拉斯矩阵完美态传输以最小时间 $\frac{\pi}{2}$ 发生在 u 和 v 之间。特别地，若将 $n - s + 4 = 2a$ 和 $n - s = 2b$ 写成某些奇数 a 和 b，则当且仅当 $\nu_2(a+b) \geqslant 2$ 时，u 和 v 之间存在平衡的无符号拉普拉斯分数复兴。

致谢

H.M. 获得了曼尼托巴大学理学院和研究生院的资助。H.M. 谨此感谢 Steve Kirkland 和 Sarah Plosker 的指导与宝贵意见。

参考文献

[CCD+22] Ada Chan、Gabriel Coutinho、Whitney Drazen、Or Eisenberg、Chris Godsil、Mark Kempton、Gabor Lippner、Christino Tamon 和 Hanmeng Zhan，《图上的分数复现基础》，《线性代数及其应用》655（2022），129–158。↑1[CCT+19] Ada Chan、Gabriel Coutinho、Christino Tamon、Luc Vinet 和 Hanmeng Zhan，《图上的量子分数复活》，《离散应用数学》269（2019），86–98。↑1, 4, 5, 6, 7, 11[CCT+20]，《分数复活与关联方案》，《离散数学》343（2020），第11期，112018。↑1[CG21] Gabriel Coutinho 和 Chris Godsil，《图谱与连续量子游走》（2021），可于 https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/quagmire/pdfs/GrfSpc3.pdf 查阅。↑4, 8[CJL+21] Ada Chan、Bobae Johnson、Mengzhen Liu、Malena Schmidt、Zhanghan Yin 和 Hanmeng Zhan，《图上的拉普拉斯分数复兴》，Electron. J. Comb. 28（2021），3。↑1, 4, 7, 9, 10, 11[CL22] Xiwang Cao 和 Gaojun Luo，《阿贝尔凯莱图上的分数复活》，arXiv，2022。↑1[FG98] Edward Farhi 和 Sam Gutmann，《量子计算与决策树》，《物理评论A》- 原子、分子与光学物理 58（1998），第2期，915–928。↑1[GS17] Chris Godsil 和 Jamie Smith，《强余谱顶点》，arXiv:1709.07975（2017）。↑4[GZ22] Chris D. Godsil 和 Xiaohong Zhang，《非余谱顶点上的分数复活》，《线性代数及其应用》（2022）。↑1[KMP22] Stephen Kirkland、Hermie Monterde 和 Sarah Plosker，《加权图中孪生顶点之间的量子态传输》（2022）。↑3, 4, 5, 10, 11, 13[KZ20] Steve Kirkland 和 Xiaohong Zhang，《拉普拉斯动力学下阈值图的分数复现》，Discus- siones Mathematicae - Graph Theory 40（2020），第2期，585–600。↑1[Mon22] Hermie Monterde，《加权图中的强余谱性与孪生顶点》，The Electronic Journal of Linear Algebra（2022），494–518。↑3, 6, 11, 12, 13