arXiv:2303.04969v1 [math.DG] 9 Mar 2023

¨三维光锥中零平均曲率曲面的 Björling 问题

JOSEPH CHO、SO YOUNG KIM、DAMI LEE、WONJOO LEE 和 SEONG-DEOG YANG

Abstract. 我们求解三维光锥中零平均曲率曲面的 Bj¨örling 问题。作为应用，我们构造并分类所有旋转零平均曲率曲面。

1. Introduction引言

经典的*Bj ¨örling* 问题 [7]提出了以下问题：设曲线 γ： $I \to \mathbb{E}^3$ 以及单位向量场 N 沿着 γ 在欧几里得三维空间 $\mathbb{E}^3$ 中给定，且满足

$$\dot{\gamma} \cdot N = 0,$$

其中 $\dot{}$ 表示对 $u \in I$求导， $\cdot$ 是标准欧几里得内积。目标是求一个极小曲面 X，使其包含γ，且沿着 γ 的单位法向量为给定的 N。根据极小曲面的Weierstrass表示 [23], ，该问题可通过将 γ 和 N 解析延拓到复平面来求解:

$$X(z) = \int_{u_0}^{z} (\dot{\gamma}(w) - iN(w) \times \dot{\gamma}(w))\, \mathrm{d}w$$

其中 $\times$ 表示标准欧氏叉积。曲线及其指定的法向量合称为$Bj\,¨orling$ 数据。这类Bj¨orling 问题已在各种空间形式中的多种曲面上得到广泛研究（例如，参见[5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 24]）。

注意到 $\mathcal{L} := N \times \dot{\gamma}$与 $\dot{\gamma}$垂直，且长度与 $\dot{\gamma}$相同，因此可以对 Bj¨orling 数据稍作修改。这样，若给定 $\mathcal{L}$，便可通过 $N = \frac{\dot{\gamma} \times \mathcal{L}}{|\dot{\gamma} \times \mathcal{L}|}$ 求得N，从而可以用 γ和 $\mathcal{L}$代替 γ和 N作为 Bj¨orling 数据。从几何上看，Bj¨orling 数据中的向量场 $\mathcal{L}$ ，等价于指定曲面沿γ与 $\dot{\gamma}$ 垂直的切向量场。对 Bj¨orling 问题中所给数据的这一视角转变，有助于得到（奇异）*Bj ¨orling* 表示 [15] ，适用于极大曲面[21] 以及 Lorentz三空间中的广义类时极小曲面 [14] ；它也有助于得到各向同性三空间中零平均曲率曲面的 Bj¨orling 表示 [20]。

本文旨在求解三维光锥 $\mathbb{Q}^3_+$ 中零平均曲率曲面的 Bj¨orling 问题。对于其他二次曲面的类似情形

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 53A10；次要分类号 53B30。
Key words and phrases. 零平均曲率曲面，Bj¨örling 表示。

洛伦兹四维空间中的双曲三维空间 $\mathbb{H}^3(-1)$ 和德西特三维空间$\mathbb{S}^3_1(1)$，其切空间分别同构于欧几里得三维空间或 Lorentz 三空间。因此，可以在切空间中使用叉积，以类似于欧几里得情形的方式得到 Bj¨orling 表示 [24] 。然而， $\mathbb{Q}^3_+$ 的切空间同构于各向同性三空间，因此不具有叉积结构。因此，对于¨中的 Bj $\mathbb{Q}^3_+$orling 问题，我们采用另一种观点，并假设给定的 Bj¨orling 数据由一条类空解析曲线 γ及沿曲线的一个类空向量场 $\mathcal{L}$ 构成，然后求出包含 γ 且以 $\mathcal{L}$ 作为沿 γ的切向量场的零平均曲率曲面。

本文结构如下：在第 $\mathbb{Q}^3_+$ 节回顾2中关于¨的基本几何与曲面理论后，我们在第3节介绍如何为给定的带预设切向量场的类空解析曲线求解*Bj¨orling*问题，并最终得到3维类光锥中的零平均曲率曲面的Bjorling表示（见定理3.8）。作为应用，我们在$\mathbb{Q}^3_+$ 的第4节构造并分类（见定理4.4）旋转不变零平均曲率曲面。此外，许多在带不定度量的各种空间形式中具有Weierstrass表示的曲面都可以延拓穿过类光直线（例如见 [2–4, 12, 13, 22]）；我们在 $\mathbb{Q}^3_+$ 的第4.5节给出了此类曲面的一个例子。

2. Preliminaries

我们首先简要回顾三维光锥的几何及其曲面理论。详细说明请参见 [16–18]。

2.1. 三维光锥的厄米矩阵模型。

设 $\mathbb{L}^4$ 表示洛伦兹四维空间，其内积为

$$\langle (t_1,x_1,y_1,z_1),(t_2,x_2,y_2,z_2)\rangle = -t_1t_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

洛伦兹四维空间可以与集合 2×2 厄米矩阵 Herm$(2,\mathbb{C})$ 等同，具体如下：

$$(t,x,y,z)\sim \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix}$$

其中我们将向量与矩阵视为相同。于是，对任意 $V,W\in$Herm$(2,\mathbb{C})\cong\mathbb{L}^4$,

$$\langle V,W\rangle = -\frac{1}{2}\left(\det(V+W)-\det V-\det W\right),$$

因此

$$|V|^2 := \langle V,V\rangle = -\det V.$$

这里我们指出，对所有 $A\in$M$(2,\ \mathbb{C})$，对称双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 都是良定义的。

定义

$$f_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad f_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad f_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\quad f_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

我们看到，$\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ 构成了 $\mathbb{L}^4 \cong$Herm(2, $\mathbb{C}$)的渐近正交归一基。

在厄米模型中，双曲三维空间 $\mathbb{H}^3(-1)$、三维光锥 $\mathbb{Q}^3_+$ 和德西特三维空间 $\mathbb{S}^3_1(1)$ 可分别定义为 $\mathbb{L}^4$ 中的二次曲面：

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^3(-1) &:= \{X \in \mathrm{Herm}(2,\mathbb{C}) : \langle X, X\rangle = -1, \operatorname{tr} X > 0\},\\ \mathbb{Q}^3_+ &:= \{X \in \mathrm{Herm}(2,\mathbb{C}) : \langle X, X\rangle = 0, \operatorname{tr} X > 0\},\\ \mathbb{S}^3_1(1) &:= \{X \in \mathrm{Herm}(2,\mathbb{C}) : \langle X, X\rangle = 1\},\end{aligned}$$

分别为。注意，对于任意 $X \in \mathbb{Q}^3_+$，存在某个 $F \in$ SL(2, $\mathbb{C}$)，使得

$$X = F\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}F^\star = Ff_3F^\star$$

其中，$F^\star$ 表示 F 的共轭转置。

当我们对印第安纳州中的曲面进行可视化时，将使用以下立体投影

$$\mathbb{Q}^3_+ \ni (t, x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+t}, \frac{y}{1+t}, \frac{z}{1+t}\right).$$

于是，$\mathbb{Q}^3_+$ 被识别为 $\{(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < a^2 + b^2 + c^2 < 1\}$。

2.2. 曲面理论与魏尔斯特拉斯型表示。设 D 是一个二维单连通区域，并假设 $X : D \to \mathbb{Q}^3_+$ 是一个类空浸入，即在 X 的每一点$p \in D$ 处，切平面上的诱导度量都是黎曼度量。于是，对于共形坐标$(u,\ v) \in D$，其复结构由 $z = u + iv$给出，假设第一基本形式为

$$\mathrm{d}s^2 = \phi^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2) = \phi^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}$$

对于某个 ϕ:$D \to \mathbb{R}^\times$。此外，我们有 $\langle X, X_u\rangle = \langle X, X_v\rangle = 0$，因此存在唯一的类光 n : $D \to \mathbb{L}^4$ 满足

$$\langle n, n\rangle = \langle n, X_u\rangle = \langle n, X_v\rangle = 0, \quad \langle n, X\rangle = 1. \tag{2.1}$$

这样的 n 称为 X的高斯映射，于是第二基本形式的系数可通过 n 计算如下：

$$L := -\langle X_u, n_u\rangle, \quad M := -\langle X_u, n_v\rangle = -\langle X_v, n_u\rangle, \quad N := -\langle X_v, n_v\rangle.$$

因此，形算子 S 为

$$S = \phi^{-2}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$$

其中（外在）高斯曲率 K 和平均曲率 H 由下式给出：

$$K = \det S, \quad H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} S.$$

满足 $H \equiv 0$ 的曲面 X 称为零平均曲率曲面。

我们回顾三维光锥中零平均曲率曲面的魏尔斯特拉斯型表示 [17, 定理 3。2] （另见 [19, § 4。2]和[20,定理 39]）：

事实 2.1。任意零平均曲率曲面 $X: D \to \mathbb{Q}^3_+$ 局部上都可表示为

$$X = F f_3 F^\star = F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^\star$$

其中 $F: D \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 满足

$$\mathrm{d}FF^{-1} = \begin{pmatrix} G & -G^2 \\ 1 & -G \end{pmatrix} \Omega$$

对于某个亚纯函数 $G: D \to \mathbb{C}$ 以及全纯1形式$\Omega: D \to \mathbb{C}$，使得 $G^2\Omega$ 全纯。数对 (G,Ω) 称为魏尔斯特拉斯数据。

3. Solution of the Björling problem

利用事实2.1中的魏尔斯特拉斯型表示，我们现在来求解¨中零平均曲率曲面的 Bj $\mathbb{Q}^3_+$问题。与双曲三维空间 $\mathbb{H}^3(-1)$ 和德西特三维空间 $\mathbb{S}^3_1(1)$ 的情形不同，我们所考虑的 Bj¨orling 数据将由一条解析曲线及其切向量场组成，这是因为 $\mathbb{Q}^3_+$的切空间中缺少叉积结构。

3.1. Bj¨orling 数据的共形条件。设区间 I 的参数为 $u \in I$，令 $\gamma : I \to \mathbb{Q}^3_+$ 为一条类空解析曲线，$\mathcal{L}$ 为沿着 γ 的解析类空向量场，使得

$$\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle, \quad \langle \dot\gamma, \mathcal{L} \rangle = 0, \quad \langle \gamma, \mathcal{L} \rangle = 0. \tag{3.1}$$

从几何上看，条件（3.1）保证 $\mathcal{L}$ 将成为切向量场；因此，我们将（3.1）称为共形条件。我们的目标是求出一个零平均曲率曲面 $X: D \to \mathbb{Q}^3_+$ 它包含 γ，并且使 $\mathcal{L}$ 成为沿着 γ 的切向量场。

注意，若存在这样的零平均曲率曲面 X，则

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}F f_3 F^\star = \mathrm{d}FF^{-1} F f_3 F^\star = \begin{pmatrix} G & -G^2 \\ 1 & -G \end{pmatrix} \Omega X =: \mathbf{\Omega} X. \tag{3.2}$$

因此，由 γ 和 $\mathcal{L}$，我们将构造这样的 1-形式 $\mathbf{\Omega}$。

注 3.1. 与 $\mathbb{H}^3(-1)$ 和 $\mathbb{S}^3_1(1)$ 的情形有一个重要区别：$X \in \mathbb{Q}^3_+$ 不可逆，因为 $\det X = 0$。因此，与其像 XX^{-1} 情形中那样考虑 d $\mathbb{H}^3(-1)$ 和 $\mathbb{S}^3_1(1)$ 一样，不如考虑方程（3.2）。

对于 Bj¨orling 数据 γ 以及 $\mathcal{L}$ 满足共形条件（3.1）的情形，令 $\gamma(u) = X(u,0)$ 且 $\mathcal{L}(u) := X_v(u,0)$。那么，在一维定义域 I上，（3.2）意味着我们˜必须求解满足以下条件的 $\mathbf{\Omega} =: \Omega \mathrm{d}u$ 。

$$\Lambda(u) := \frac{1}{2}(\dot\gamma(u) - i\mathcal{L}(u)) = X_z(u,0) = \tilde\Omega(u) X(u,0) = \tilde\Omega(u)\gamma(u). \tag{3.3}$$

˜我们断言，存在唯一一个满足（3.3）的 Ω。

注意，$\det \Lambda = 0$ 由（3.1）可知，并且 $\det \gamma = 0$ 因为它是 $\mathbb{Q}^3_+$中的一条曲线。根据标准理论，我们知道

$$\det \tilde\Omega = \operatorname{tr} \tilde\Omega = 0.$$

因此

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} G & -G^2 \\ 1 & -G \end{pmatrix} \Omega$$

对于某些函数 G 和 1-形式 Ω。我们将 (3.3) 改写为

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G\tilde{\Omega} & -G^2\tilde{\Omega} \\ \tilde{\Omega} & -G\tilde{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

˜ ˜考察 (1,1) 和 (2,1) 分量的 (3.4)，可知 $G = G_1$ 以及 Ω $= \Omega_1$其中

$$G_1 = \frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}}, \quad \tilde{\Omega}_1 = \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_{21}\gamma_{11} - \Lambda_{11}\gamma_{21}}. \tag{3.5}$$

另一方面，考察 (1,2) 和 (2, 2) 分量的 (3.4)，可知˜ ˜$G = G_2$ 以及 Ω $=\Omega_2$ 其中

$$G_2 = \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \frac{\Lambda_{22}^2}{\Lambda_{22}\gamma_{12} - \Lambda_{12}\gamma_{22}}. \tag{3.6}$$

由 $\det \Lambda = 0$这一事实可立即看出 $G_1 = G_2$。于是

$$\tilde{\Omega}_1 = \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_{21}\gamma_{11} - \frac{\Lambda_{12}\Lambda_{21}}{\Lambda_{22}}\gamma_{21}} = \frac{\Lambda_{21}\Lambda_{22}}{\Lambda_{22}\gamma_{11} - \Lambda_{12}\gamma_{21}},$$
$$\tilde{\Omega}_2 = \frac{\Lambda_{22}^2}{\Lambda_{22}\gamma_{12} - \frac{\Lambda_{11}\Lambda_{22}}{\Lambda_{21}}\gamma_{22}} = \frac{\Lambda_{21}\Lambda_{22}}{\Lambda_{21}\gamma_{12} - \Lambda_{11}\gamma_{22}}.$$

因此，只需证明分母相同即可。

为此，我们将 (3.4) 右乘 γ 的伴随矩阵，得到

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{22} & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & \gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G\tilde{\Omega} & -G^2\tilde{\Omega} \\ \tilde{\Omega} & -G\tilde{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \det\gamma & 0 \\ 0 & \det\gamma \end{pmatrix}.$$

然而，由于它是 $\mathbb{Q}^3_+$ 中的一条曲线，我们有 $\det\gamma = 0$。因此，等式左边是零矩阵。特别地，其迹为 0；于是

$$\Lambda_{11}\gamma_{22} - \Lambda_{12}\gamma_{21} - \Lambda_{21}\gamma_{12} + \Lambda_{22}\gamma_{11} = 0,$$

˜ ˜，这意味着 $\Omega_1 = \Omega_2$。

˜ ˜现在，(3.5) 和 (3.6) 中 Ω_1 和 Ω_2 的表达式表明，Björling¨数据γ 和 $\mathcal{L}$ 满足 (3.1) 时还必须满足

$$\gamma_{11}\Lambda_{21} - \gamma_{21}\Lambda_{11} \neq 0. \tag{3.7}$$

遗憾的是，共形条件（3.1）本身并不能保证这一点；甚至可以构造出明确的例子，使表达式（3.7）对某些满足共形条件的 Bj¨orling 数据为零。

3.2. **Bj¨örling 数据的可定向性条件**。 为了对条件（3.7）作出几何解释，我们定义以下概念。

定义 3.2。 对于张成黎曼子空间 W 的两个线性无关类空向量 U， $V \in \mathbb{L}^4$，取 W 的一组正交归一基 $\{e_1, e_2\}$，使得存在某个 $F \in$ SL(2，$\mathbb{C}$)，满足 $Ff_iF^\star = e_i$，其中 $i = 1$， 2。 U与 V 的有向面积 记为 SA(U， V)，定义如下：

$$U \wedge V =: \mathrm{SA}(U, V)e_1 \wedge e_2.$$

有向面积的一个重要特征是，它在 $\mathbb{Q}^3_+$ 的保向等距变换 下保持不变。另一方面，有向面积的平方（或面积平方）可以利用环境四维洛伦兹空间的内积计算：

引理 3.3。 对于张成黎曼子空间 W 的线性无关类空向量 U、 V，有

$$\mathrm{SA}(U, V)^2 = \langle U, U\rangle\langle V, V\rangle - \langle U, V\rangle^2.$$

证明。 设 $\{e_1, e_2\}$为一个正交归一基 W，使得 $Ff_iF^\star = e_i$对于 $i = 1$，2 与 $F \in$ SL(2，$\mathbb{C}$)。写成

$$U = ae_1 + be_2, \quad V = ce_1 + de_2$$

对于某些常数 a， b， c， $d \in \mathbb{R}$，我们计算得到

$$\mathrm{SA}(U, V)e_1 \wedge e_2 = (ae_1 + be_2) \wedge (ce_1 + de_2) = (ad - bc)e_1 \wedge e_2.$$

另一方面，我们有

$$\langle U, U\rangle\langle V, V\rangle - \langle U, V\rangle^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2,$$

从而得到所需结论。 □

下面的引理给出了 Bj¨orling 数据满足（3.7）的其他几何判据，这些判据以有向面积表示。

引理 3.4。 给定 *Bj¨orling* 数据 γ 以及 $\mathcal{L}$ 满足共形条件的数据， $\dot\gamma$ 与 $\mathcal{L}$ 的有向面积不为零。

证明。 反设 SA($\dot\gamma$， $\mathcal{L}$) $= 0$。那么直接计算可得，对于某个 α， $\mathcal{L} = \alpha\gamma \pm \dot\gamma$。因此

$$\pm\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = \langle\dot\gamma, \alpha\gamma \pm \dot\gamma\rangle = \langle\dot\gamma, \mathcal{L}\rangle = 0,$$

这与 $\dot\gamma$ 是类空的矛盾。 □

引理 3.5。 给定 *Bj¨orling* 数据 γ，以及满足共形条件的 $\mathcal{L}$，G 和 Ω 有定义，当且仅当 $\dot\gamma$ 和 $\mathcal{L}$ 的有向面积为负。

证明。 在整个证明过程中固定任意一个 $u_0 \in I$。由于有向面积在保向等距变换下不变，不妨设$\gamma = 2f_3$，因此 $T_\gamma\mathbb{Q}^3_+$ 中的任意向量都可写成

$$\ell\gamma + xf_1 + yf_2$$

存在 ℓ, x, $y \in \mathbb{R}$。由 Bj3.1örling 数据的共形条件¨，可得 $\dot{\gamma}$, $\mathcal{L} \in T_\gamma \mathbb{Q}^3_+$；因此，存在一些常数 a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$ 使得

$$\dot{\gamma} = a\gamma + bf_1 + cf_2, \quad \text{and} \quad \mathcal{L} = d\gamma + ef_1 + ff_2.$$

由于 $\Lambda := \frac{1}{2}(\dot{\gamma} - i\mathcal{L})$，我们计算得

$$\gamma_{11}\Lambda_{21} - \gamma_{21}\Lambda_{11} = (b - f) - i(c + e),$$

因此

$$\begin{aligned} |\gamma_{11}\Lambda_{21} - \gamma_{21}\Lambda_{11}|^2 &= b^2 + c^2 + e^2 + f^2 + 2(ce - bf) \\ &= |\dot{\gamma}|^2 + |\mathcal{L}|^2 + 2(ce - bf) \\ &= 2(|\dot{\gamma}|^2 - (bf - ce)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

现在，由于 γ 分量不影响有向面积，我们注意到

$$\mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) = \mathrm{SA}(bf_1 + cf_2, ef_1 + ff_2).$$

然而，我们也可以计算得出

$$\mathrm{SA}(bf_1 + cf_2, ef_1 + ff_2) f_1 \wedge f_2 = (bf_1 + cf_2) \wedge (ef_1 + ff_2) = (bf - ce) f_1 \wedge f_2,$$

从而可以推导出

$$\mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) = bf - ce.$$

另一方面，引理 3.3 和共形条件（3.1）意味着

$$\mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L})^2 = |\dot{\gamma}|^2 |\mathcal{L}|^2 - \langle \dot{\gamma}, \mathcal{L} \rangle^2 = |\dot{\gamma}|^4$$

因此

$$bf - ce = \mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) = \begin{cases} |\dot{\gamma}|^2, & \text{if } \mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) > 0, \\ -|\dot{\gamma}|^2, & \text{if } \mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) < 0. \end{cases}$$

因此，利用（3.8）可以得出

$$|\gamma_{11}\Lambda_{21} - \gamma_{21}\Lambda_{11}|^2 = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) > 0, \\ 4|\dot{\gamma}|^2, & \text{if } \mathrm{SA}(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) < 0. \end{cases}$$

因此，当且仅当 $SA(\dot{\gamma}, \mathcal{L}) < 0$ 时，G 和 Ω 有定义。 □

注记 3.6。引理3.5中的有向面积条件编码了 $\dot{\gamma}$ 和 $\mathcal{L}$ 的定向必须正确这一事实。因此，我们称有向面积条件为 可定向性条件。

注记 3.7。对于其他二次曲面中的 Bj¨orling 数据，例如 $\mathbb{H}^3(-1)$ 和 $\mathbb{S}^3_1(1)$，可定向性条件并非必要；关键区别在于用于定义第二基本形式的（类光）高斯映射的定义。在 $\mathbb{H}^3(-1)$ 和 $\mathbb{S}^3_1(1)$ 的情形下，高斯映射 n 和位置向量 X 必须满足 $\langle n, X \rangle = 0$；然而，在 $\mathbb{Q}^3_+$ 的情形下，我们有 $\langle n, X \rangle = 1$，因此不能随意改变高斯映射的符号。

我们在本文的下一个主要定理中总结了研究结果，即三维光锥中零平均曲率曲面的 *Bj¨orling* 表示：

定理 3.8。考虑将 $\mathbb{Q}^3_+$ 视为 $\mathrm{Herm}(2,\mathbb{C})$ 的一个子集，并将其与 $\mathbb{L}^4$ 等同。给定一条类空解析曲线 $\gamma\colon I\to\mathbb{Q}^3_+$，以及一个满足共形条件的解析向量场 $\mathcal{L}$

$$\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle=\langle\mathcal{L},\mathcal{L}\rangle,\quad \langle\dot\gamma,\mathcal{L}\rangle=0,\quad \langle\gamma,\mathcal{L}\rangle=0,$$

以及可定向性条件

$$\mathrm{SA}(\dot\gamma(u),\mathcal{L}(u))<0\qquad \textit{for all } u\in I,$$

存在唯一的零平均曲率曲面 X，使得

$$X(u,0)=\gamma(u),\qquad X_v(u,0)=\mathcal{L}(u)$$

对所有 $u\in I$ 均成立。它由 $X=Ff_3F^\star$ 给出，其中 $F\in C^\omega$ ($\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$，$\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$) 是以下方程的解

$$\mathrm{d}FF^{-1}=\ \textit{the analytic extension of}\ \mathbf{\Omega},\qquad F(u_0)f_3F(u_0)^\star=\gamma(u_0)$$

˜其中 u_0 是 γ 的定义域中的一个元素，且 $\mathbf{\Omega}=:\Omega\,\mathrm{d}u$ 是下列方程的解

$$\Lambda=\tilde\Omega\gamma,\qquad \textit{where}\quad \Lambda(u):=\frac{1}{2}(\dot\gamma(u)-i\mathcal{L}(u))\in M(2,\mathbb{C}).$$

4. Rotational zero mean curvature surfaces in $\mathbb{Q}^3_+$

本节中，我们构造并分类旋转不变零平均曲率曲面，称之为三维光锥中的悬链面。Bj¨orling 问题尤其适合用于构造此类曲面，因为初始曲线可以选为单点在 $\mathbb{Q}^3_+$的旋转作用下形成的轨道。

首先，我们仿照双曲空间中的定义 $\mathbb{Q}^3_+$ 来定义旋转曲面 [10,定义 2。2] (另见 [1, 定义 3。1])：

定义 4.1。设 P^k 表示 k维子空间 $\mathbb{L}^4$。选取某个P^2和 $P^3\supset P^2$，使得 $P^3\cap\mathbb{Q}^3_+\neq\varnothing$，记 O($P^2$) 为保持 P^2不变的正交变换集合。对于 $P^3\cap\mathbb{Q}^3_+$中一条不与 P^2相交的正则曲线 γ，我们称 γ在 O(P^2)作用下的轨道为由 γ生成的旋转曲面。此外，我们称该旋转曲面为

- 若 P^2 上的诱导度量是洛伦兹度量，则为椭圆型旋转曲面，
- 若 P^2 上的诱导度量是退化的，则为抛物型旋转曲面，且
- 若 P^2 上的诱导度量是黎曼度量，则为双曲型旋转曲面。

以下事实有助于从旋转不变的 Bj¨orling 数据恢复悬链面的显式参数化：

事实4.2 ([24, 引理 4.2])。对于 $\nu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$F_0(z):=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}z^{1/2}&0\\0&z^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}^{-1}&\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu}^{-1}\\\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu}^{-1}&\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^{-\nu/2}&0\\0&z^{\nu/2}\end{pmatrix}$$

是.....的一个解

$$\mathrm{d}FF^{-1}=\begin{pmatrix}G&-G^2\\1&-G\end{pmatrix}\Omega\quad \textit{with}\quad G:=z,\quad \Omega:=\lambda\frac{\mathrm{d}z}{z^2},\quad \lambda:=\frac{1-\nu^2}{4}.\tag{4.1}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{4}\}$。此外， $\tilde{F} := F_0 R$也满足 （4.1）其中 $R \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$控制初始条件。

事实 4.3 （[24, 引理 4.2]）。对于 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，令

$$F_1(z) := \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{-1/2} & 0 \\ 0 & \beta^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta z & -\sin \beta z \\ \sin \beta z & \cos \beta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{1/2} & 0 \\ 0 & \beta^{-1/2} \end{pmatrix}$$

是.....的一个解

$$\mathrm{d}FF^{-1} = \begin{pmatrix} G & -G^2 \\ 1 & -G \end{pmatrix} \Omega \quad with \quad G := z, \quad \Omega := \beta^2 \, \mathrm{d}z. \tag{4.2}$$

˜此外， $F := F_1 R$ 也满足 （4.2）其中 $R \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 控制初始条件。

4.1. 椭圆悬链面。考虑对点 进行椭圆旋转

$$R^{\mathrm{E}}(u) = \begin{pmatrix} e^{iu} & 0 \\ 0 & e^{-iu} \end{pmatrix}$$

以得到一个椭圆圆

$$\gamma(u) = R^{\mathrm{E}}(u) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} R^{\mathrm{E}}(u)^\star = \begin{pmatrix} 1 & e^{2iu} \\ e^{-2iu} & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 4$，并且 $\gamma(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_3 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^\star$。

为了补全 Bj¨orling 数据，我们首先注意到，任何满足共形条件的 $\mathcal{L}$ 都必须具有以下形式

$$\mathcal{L}_\pm(u) = f(u)\gamma(u) \pm 2e_3$$

对于任意函数 f。现在我们可以验证， $\mathcal{L}_+ = f\gamma + 2e_3$不满足可定向性条件，即

$$\Lambda_{21}\gamma_{11} - \Lambda_{11}\gamma_{21} = 0,$$

而 $\mathcal{L}_- = f\gamma - 2e_3$ 满足可定向性条件。

因此，我们取 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_-$，并注意到，对于旋转不变曲面， $\mathcal{L}$ 必须由所考虑的椭圆旋转生成，即

$$\mathcal{L}(u) = R^{\mathrm{E}}(u)\mathcal{L}(0)R^{\mathrm{E}}(u)^\star.$$

因此，我们得到

$$f(u)\gamma(u) - 2e_3 = \mathcal{L}(u) = R^{\mathrm{E}}(u)\mathcal{L}(0)R^{\mathrm{E}}(u)^\star = f(0)\gamma(u) - 2e_3,$$

并且有 $f(u) = f(0) =: a$ 是一个常函数，因此

$$\mathcal{L}(u) = a\gamma(u) - 2e_3.$$

考虑 γ 和 $\mathcal{L}$ 作为 Bj¨orling 数据，我们使用 Bj¨orling 表示定理3.8 来计算该结果

$$G = \frac{a-2}{a+2} e^{2iu}, \quad \text{and} \quad \Omega = \frac{-i(a+2)^2}{8} e^{-2iu} \, \mathrm{d}u.$$

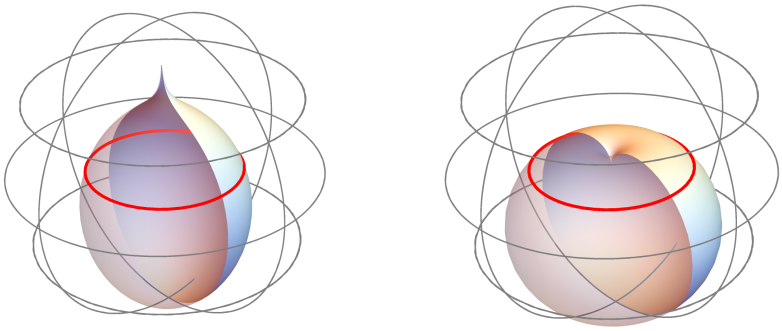

FIGURE 1. 三维光锥中的椭圆悬链面，左侧为 $a = 3\ 2$，右侧为 $\bar{a} = 4$，其中初始给定曲线以高亮显示。

为获得显式参数化，我们对 G 和 Ω 进行解析延拓，并通过以下方式进行变量替换：

$$\frac{a-2}{a+2}e^{2iw} =: z.$$

Then

$$G = z, \quad \Omega = \lambda\frac{\mathrm{d}z}{z^2}, \quad \lambda := \frac{4-a^2}{16},$$

这使我们能够使用事实 4.2 来计算椭圆型悬链面的显式参数化：

$$X^{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} e^{(a-2)v} & e^{2iu+av} \\ e^{-2iu+av} & e^{(a+2)v} \end{pmatrix} = R^{\mathrm{E}}(u)e^{av}\begin{pmatrix} e^{-2v} & 1 \\ 1 & e^{2v} \end{pmatrix} R^{\mathrm{E}}(u)^{\star}$$

其中 $w = u + iv$（另见图 1）。

4.2. 双曲悬链面。 给定一个双曲旋转的一参数群

$$R^{\mathrm{H}}(u) = \begin{pmatrix} e^{u} & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix},$$

曲线

$$\gamma(u) := R^{\mathrm{H}}(u)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} R^{\mathrm{H}}(u)^{\star} = \begin{pmatrix} e^{2u} & 1 \\ 1 & e^{-2u} \end{pmatrix}$$

是一个双曲圆。注意，$\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = 4$ 并且 $\gamma(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_3 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{\star}$。

为了求出 Bj¨orling 数据，我们发现，任何满足共形条件的 $\mathcal{L}$ 都必须取如下形式

$$\mathcal{L}_{\pm}(u) = f(u)\gamma(u) \pm f_2,$$

对于任意函数 f。由于 $\mathcal{L}_{+}$ 不满足可定向性条件，我们令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-}$。此外，$\mathcal{L}$ 由所考虑的旋转生成；因此，

$$\mathcal{L}(u) = b\gamma(u) \pm f_2,$$

其中某个常数为 b。

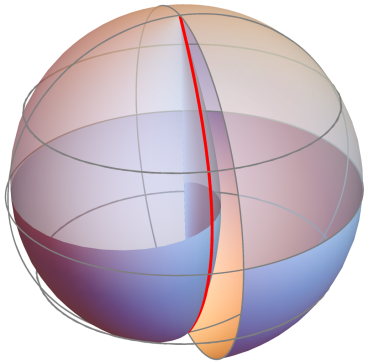

FIGURE 2. 三维光锥中的双曲型悬链面，参数为 $b = \frac{3}{2}$，其中初始给定曲线已高亮显示。

现在，我们计算 Bj¨orling 数据如下：

$$G = \frac{b+2i}{b-2i}e^{2u}, \quad \text{and} \quad \Omega = \frac{1}{8}(b-2i)^2 e^{-2u}\,\mathrm{d}u.$$

解析延拓 G 和 Ω，并令

$$\frac{b+2i}{b-2i}e^{2w} = z,$$

使得

$$G = z, \qquad \Omega = \lambda\frac{\mathrm{d}z}{z^2}, \qquad \lambda = \frac{4+b^2}{16},$$

我们可以利用事实 4.2 计算双曲型悬链面的显式参数化：

$$X^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} e^{2u+bv} & e^{(b+2i)v} \\ e^{(b-2i)v} & e^{-2u+bv} \end{pmatrix} = R^{\mathrm{H}}(u)e^{bv}\begin{pmatrix} 1 & e^{2iv} \\ e^{-2iv} & 1 \end{pmatrix} R^{\mathrm{H}}(u)^{\star}$$

其中 $w = u + iv$（见图 2）。

4.3. 抛物型悬链面。 最后，我们考虑抛物旋转

$$R^{\mathrm{P}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & u-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

作用于点 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，得到一个抛物圆

$$\gamma(u) = R^{\mathrm{P}}(u)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} R^{\mathrm{P}}(u)^{\star} = \begin{pmatrix} u^2 & u \\ u & 1 \end{pmatrix}.$$

注意，$\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 1$，并且 $\gamma(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_3 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{\star}$。

我们注意到，任何满足共形条件的 $\mathcal{L}$ 都必须满足

$$\mathcal{L}_{\pm}(u) := f(u)\gamma(u) \pm f_2$$

对于某个函数 f，直接计算可知 $\mathcal{L}_-$ 不满足可定向性条件。因此，我们选择 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$，而 $\mathcal{L}$ 必须由所考虑的旋转生成这一事实使我们能够推断出

$$\mathcal{L}(u) = c\gamma(u) + f_2.$$

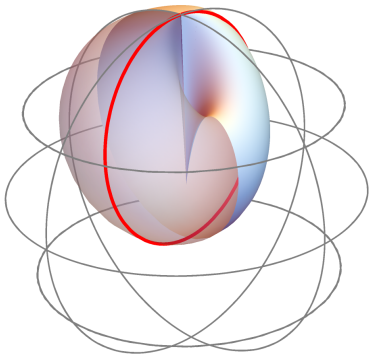

FIGURE 3. 三维光锥中的参数为 $b = \frac{1}{2}$ 的抛物型悬链面，其中初始给定曲线以高亮显示。

其中 c 为某个常数。

以 γ 和 $\mathcal{L}$ 作为 Bj¨orling 数据，我们计算得

$$G = u + \frac{2i}{c}, \quad \text{and} \quad \Omega = \frac{c^2}{4}\,\mathrm{d}u.$$

对 G 和 Ω 作解析延拓，并进行坐标变换，使得

$$w + \frac{2i}{c} = z,$$

我们有

$$G = z, \qquad \Omega = \frac{c^2}{4}\,\mathrm{d}z.$$

这使我们可以利用事实4.3 得到抛物型悬链面的显式参数化：

$$X^{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} e^{cv}(u^2+v^2) & e^{cv}(u+iv) \\ e^{cv}(u-iv) & e^{cv} \end{pmatrix} = R^{\mathrm{P}}(u+1)e^{cv}\begin{pmatrix} v^2 & iv \\ -iv & 1 \end{pmatrix} R^{\mathrm{P}}(u+1)^{\star}$$

其中 $w = u + iv$ （见图 3）。

4.4. 旋转不变零平均曲面的分类。 $\mathbb{Q}^3_+$ 中的任意一个圆，经过位似变换和等距变换后，都与我们构造的某个圆全等；这些圆是点在旋转作用下的轨道。因此我们得出：

定理 4.4。 $\mathbb{Q}^3_+$ 中的任何旋转不变零平均曲率曲面，都必定是以下某个曲面的一部分（并给出相应的魏尔斯特拉斯数据）：

- 椭圆型悬链面 $(G = \frac{a-2}{a+2}e^{2iw},\ \Omega = \frac{-i}{8}(a+2)^2 e^{-2iw}\,\mathrm{d}w)$
- 双曲型悬链面 $(G = \frac{b+2i}{b-2i}e^{2w},\ \Omega = (b-2i)^2 e^{-2w}\,\mathrm{d}w)$，或
- 抛物型悬链面 $(G = w + \frac{2i}{c},\ \Omega = \frac{c^2}{4}\,\mathrm{d}w)$

在 $\mathbb{Q}^3_+$ 的位似变换和等距变换下。

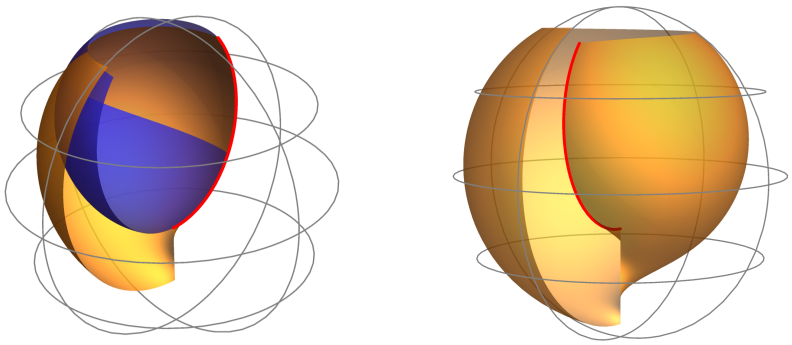

FIGURE 4. 一个抛物型悬链面和一个非旋转零平均曲率曲面共享同一条初始曲线，其中初始给定曲线以高亮显示（左侧）；非旋转零平均曲率曲面在更大的定义域上绘制（右侧）。

4.5. **解析延拓的附加示例**。与抛物型悬链面的情形一样，取抛物圆作为初始曲线，即

$$\gamma(u) = R^{\mathrm{P}}(u)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}R^{\mathrm{P}}(u)^{\star} = \begin{pmatrix}u^2 & u\\ u & 1\end{pmatrix}.$$

我们已经看到，$\mathcal{L} = f\gamma + f_2$ 对于任意函数 f，都满足共形条件和可定向性条件。

现在，如果我们取

$$f(u) = \frac{c}{u}$$

对于 $u \in (0,\ \infty)$，则有 $\mathcal{L} = \frac{c}{u}\gamma + f_2$ 并非由所考虑的旋转生成；因此，所得曲面不是旋转不变的。我们仍可以计算得出

$$G = \frac{c+2i}{c}u, \qquad \Omega = \frac{c^2}{4u^2}\,\mathrm{d}u.$$

对 G 和 Ω 进行解析延拓，并令

$$\frac{c+2i}{c}w =: z,$$

使得

$$G = z, \qquad \Omega = \lambda\frac{\mathrm{d}z}{z^2}, \qquad \lambda = \frac{c(c+2i)}{4},$$

我们可以利用事实 4.2 计算显式参数化：

$$X = e^{cv}\begin{pmatrix}e^{2u} & e^{u+iv}\\ e^{u-iv} & 1\end{pmatrix},$$

其中 $w = e^{u+iv}$（见图 4）。

若我们改变参数，使得 $\tilde{u} = e^u$，则可得

$$\tilde{X} = e^{cv}\begin{pmatrix}\tilde{u}^2 & e^{iv}\tilde{u}\\ e^{-iv}\tilde{u} & 1\end{pmatrix}$$

因此

$$\langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v\rangle = e^{2bv}\tilde{u}^2.$$

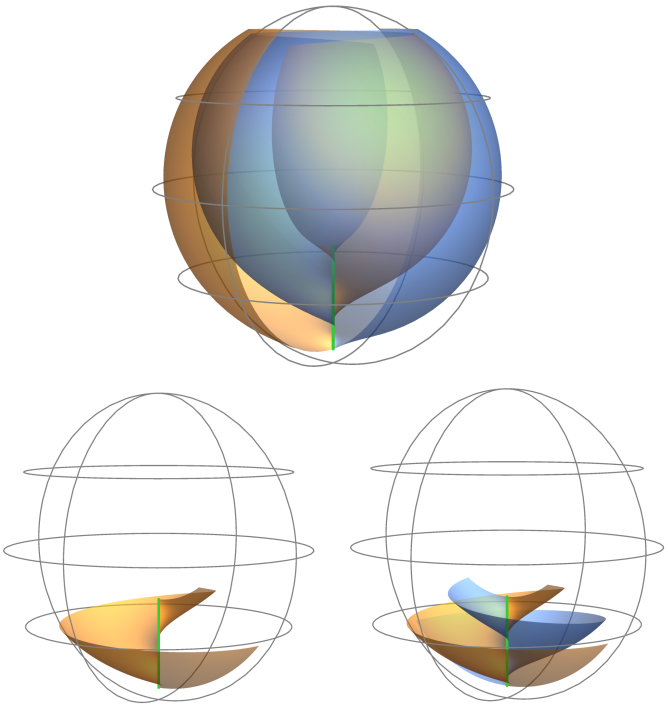

FIGURE 5. 非旋转零平均曲率曲面跨越类光圆的解析延拓（上图）；类光圆附近解析延拓的放大图（下图）。所有图中，类光圆均已突出标示。

这意味着 $L(v) := \tilde{X}(0, v)$ 是 $\mathbb{Q}^3_+$ 中的一条类光曲线。事实上，

$$\begin{aligned} L(v) = \tilde{X}(0,v) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{cv} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{-cv}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{cv}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{-cv}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{cv}{2}} \end{pmatrix}^{\star} \\ &= R^{\mathrm{H}}(\tfrac{-cv}{2}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R^{\mathrm{H}}(\tfrac{-cv}{2})^{\star}, \end{aligned}$$

˜因此 L 是一个类光圆。因此，我们有 X 是 X 跨越类光圆的解析延拓 L （见图 5）。

致谢。 最后一位作者谨此感谢韩国国家研究基金会（NRF）的资助（2017R1E1A1A03070929 和 NRF 2020R1F1A1A01074585）。

REFERENCES

[1] M. Abe、J. Cho 和 Y. Ogata，*curvature lines on horospheres* *Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space with* **35** 2018 1 2, 21 44 ，Kobe J. Math.（），第–期。MR[2] 3890133 *Reflection principle for lightlike line segments on maximal surfaces*

S. Akamine 和 H. Fujino，Ann. Global Anal. Geom.**59**（2021年），第1期，93–108。MR4198711

[3] S. Akamine 和 H. Fujino, *Reflection principles for zero mean curvature surfaces in the simply isotropic 3-space* **77** 2022 4, 176, 13 , 4453362 Results Math.（）, 论文编号：。MR[4]

S. Akamine、M. Umehara 和 K. Yamada, *Space-like maximal surfaces containing entire null lines in Lorentz-Minkowski 3-space* **95** 2019 , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.（）, 第9期, 97 102 4026357 –。MR[5] L. J. Al´ıas、R. M. B. Chaves 和 P. Mira, *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space* **134** 2003 2, 289 316 Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.（）, 第–期。MR 1972140

[6] A. C. Asperti 和 J. A. M. Vilhena, *Björling problem for spacelike zero mean curvature surfaces in $\mathbb{L}^4$* **56** 2006 2, 196 213 , J. Geom. Phys.（）, 第–期。MR 2173893

[7] E. G. Bjorling, *In integrationem aequationis Derivatarum partialium superficiei¨ cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario* , Arch. Math. Phys. (1) 4（1844年）, 290–315。[8] D. Brander 和 J. F. Dorfmeister, *The Björling problem for non-minimal constant mean curvature surfaces* **18** 2010 1, 171 194 , Comm. Anal. Geom.（）, 第–期。MR[9] 2660462

D. Brander 和 P. Wang, *On the Björling problem for Willmore surfaces* J. Differential Geom. **108** 2018 3, 411 457 3770847（）, 第–期。MR M. P. do Carmo 和 M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** 1983 2, 685 709 694383（）, 第–期。MR[10] M. P. Dussan、A. P. Franco Filho 和 M. Magid, *The Björling problem for timelike minimal surfaces in $\mathbb{R}^4_1$* 4 **196** 2017 4, 1231 1249 , Ann. Mat. Pura Appl.（）[11] 3673665

（）, 第–期。MR[12] S. Fujimori、Y. Kawakami、M. Kokubu、W. Rossman、M. Umehara、K. Yamada 和 S.-D. Yang, *Analytic extensions of constant mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space* **84** 2022 101924, 35 , Differential Geom. Appl.（）, 论文编号：。MR[13] 4451410

S. Fujimori、Y. W. Kim、S.-E. Koh、W. Rossman、H. Shin、M. Umehara、K. Yamada 和 S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line* **52** 2015 1, 285 297 3326612 , Osaka J. Math.（）, 第–期。MR[14] Y. W. Kim、S.-E. Koh、H. Shin 和 S.-D. Yang, *Spacelike maximal surfaces timelike minimal surfaces and Björling representation formulae* **48** 2011 5, 1083 , J. Korean Math. Soc.（）, 第–期, 1100 , MR2850077[15] Y. W. Kim 和 S.-D. Yang, *Prescribing singularities of maximal surfaces via a singular Björling representation formula* **57** 2007 11, 2167 2177 , J. Geom. Phys.（）, 第–期。MR 2360235

[16] *Surfaces in the lightlike cone* **325** 2007 2, 1171 1181 H. Liu, J. Math. Anal. Appl.（）, 第–期。MR2270077[17] H. Liu, *Representation of surfaces in 3-dimensional lightlike cone*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **18** 2011 4, 737 748 2907616（）, 第–期。MR H. Liu 和 S. D. Jung, J. Geom. Phys. 58 7, 913 2008 922 2426248（）, 第–期。MR[18] *Hypersurfaces in lightlike cone*[19] M. Pember, *Weierstrass-type representations*, Geom. Dedicata 204（2020年）, 第1期, 299–309。MR4056704[20] J. J. Seo 和 S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in isotropic three-space*, Bull. Korean Math. Soc. **58** 2021 1, 1 20 4206079（）, 第–期。MR M. Umehara 和 K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** 2006 1, 13 40 2225080（）, 第–期。MR[21] M. Umehara 和 K. Yamada, *Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold*, J. Geom. Anal. **29** 2019 4, 3405 3437 4015443（）, 第–期。MR[22] K. T. Weierstrass, *Untersuchungen über die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist* 1866 612 625 , Monatsber. Berliner Akad.（）, –。[23] *Björling formula for mean curvature one surfaces in hyperbolic three-space and in de Sitter three-space* **54** 2017 1, 159 175 3614568 , Bull. Korean Math. Soc.（）, 第–期。MR[24] S.-D. Yang,

(Joseph Cho) Institute of Discrete Mathematics and Geometry, TU Wien, Wien, 1040,Austria

Email address: jcho@geometrie.tuwien.ac.at

(SO YOUNG KIM) Department of Mathematics, Korea University, Seoul, 02841, Republic of Korea

Email address: sykim0224@gmail.com

(DAMI LEE) Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington, IN, 47405, US A

Email address: damilee@indiana.edu

(WONJOO LEE) Department of Mathematics, Korea University, Seoul, 02841, Republic of Korea

Email address: wontail123@korea.ac.kr

(SEONG-DEOG YANG) Department of Mathematics, Korea University, Seoul, 02841, Republic of Korea

Email address: sdyang@korea.ac.kr