arXiv:2303.04973v1 [math.NA] 9 Mar 2023

一般状态方程和逐点状态约束下椭圆最优控制问题的间断伽辽金方法

刘思静、谭志宇和张毅

Abstract. 我们研究了在一般多边形区域上，具有一般状态方程和逐点状态约束的椭圆最优控制问题的间断伽辽金方法。我们证明，用于一般二阶椭圆边值问题的间断伽辽金方法可用于求解带有逐点状态约束的椭圆最优控制问题。我们给出了具体误差估计，并通过数值实验验证了理论结果。

1. 引言

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$, $y_d \in L_2(\Omega)$ 中的一个多边形区域， β 是一个正常数，且$g \in H^4(\Omega)$。椭圆最优控制问题是求

$$(\bar{y}, \bar{u}) = \underset{(y,u)\in\mathbb{K}_g}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right], \tag{1.1}$$

其中 (y, u) 属于 $\mathbb{K}_g \subset H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ 当且仅当

$$\begin{aligned} a(y, v) &= \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \\ y &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

以及逐点状态约束

$$y \le \psi \quad \text{a.e. in} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

其中函数

$$\psi \in W^{3,p} \text{ with } p > 2 \text{ and } \psi > g \text{ on } \partial\Omega. \tag{1.4}$$

日期：2023年3月10日。2020年数学主题分类：49J20、49M41、65N30、65K15。关键词和短语：椭圆分布参数最优控制问题、一般状态方程、逐点状态约束、间断伽辽金方法。

双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 定义为,

$$a(y,v)=\int_\Omega \nabla y\cdot\nabla v\ dx+\int_\Omega(\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla y)v\ dx+\int_\Omega \gamma yv\ dx, \tag{1.5}$$

其中，向量场 $\boldsymbol{\zeta}\in[W^{1,\infty}(\Omega)]^2$ 和函数 $\gamma\in W^1_\infty(\Omega)$ 非负。若 $\boldsymbol{\zeta}\neq 0$，则约束条件 (1.5) 是含有对流项的一般二阶偏微分方程的弱形式。我们假设

$$\gamma-\frac{1}{2}\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}\geq\gamma_0>0 \tag{1.6}$$

使得问题 (1.2) 适定。

本文中我们始终采用微分算子、函数空间和范数的标准记号，例如可参见 [28, 17]。

我们将 $H^1_0(\Omega)$ 的子空间 $\mathring{E}(\Delta;\ L_2(\Omega))$ 定义为

$$\mathring{E}(\Delta;L_2(\Omega))=\{y\in H^1_0(\Omega):\mathcal{L}y\in L_2(\Omega)\}, \tag{1.7}$$

其中 $\mathcal{L}y=-\Delta y+\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla y+\gamma y$。我们还记

$$E(\Delta;L_2(\Omega))=\{y\in H^1(\Omega):\mathcal{L}y\in L_2(\Omega)\}. \tag{1.8}$$

由于椭圆正则性， [29, 41] $\mathring{E}(\Delta;L_2(\Omega))$ 是 $H^{1+\alpha}(\Omega)\cap H^2_{loc}(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ 的一个子空间，其中某个 $\alpha\in(\frac{1}{2},1]$,满足：若 Ω 是凸集，则 $\alpha=1$，并且

$$\|z\|_{H^{1+\alpha}(\Omega)}\leq C_\Omega\|\mathcal{L}z\|_{L_2(\Omega)}\quad\forall z\in\mathring{E}(\Delta;L_2(\Omega)). \tag{1.9}$$

由（1.9）和 Sobolev 不等式 [1, 定理 4.12] 可知， $g+E(\Delta;L_2(\Omega))\subset C(\Omega)$。因此，我们可以将（1.1）—（1.3）改写如下:

$$\bar{y}=\underset{y\in K_g}{\operatorname{argmin}}\left[\frac{1}{2}\|y-y_d\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{\beta}{2}\|\mathcal{L}y\|^2_{L_2(\Omega)}\right], \tag{1.10}$$

其中

$$K_g=\{y\in g+\mathring{E}(\Delta;L_2(\Omega)):y\leq\psi\ \text{ in }\ \Omega\}. \tag{1.11}$$

由于拉格朗日乘子的正则性较低，带有逐点状态约束的最优控制问题更难分析。在 [18, 24], 中，作者证明了拉格朗日乘子 μ 是一个非负博雷尔测度，同时也属于 $\mu\in H^{-1}(\Omega)$。利用这一正则性结果，便可以处理逐点状态约束。

在 $\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0}$ and $\gamma=0$ 的情形下， [20, 24, 40, 39, 43, 26, 35, 37] 使用 P_1 有限元方法研究了带逐点状态约束的分布参数最优控制问题 (1.1)-(1.3)。针对 [20] 中的新方法，已建立了若干扩展方法 [16, 14]。针对 (1.1)-(1.3) 还提出了其他方法，例如，C^0 内罚方法 [11, 22], Morley 有限元方法 [13], 以及虚

单元方法 [21]。[15, 10] 还研究了求解 (1.1)-(1.3) 的快速求解器。关于 (1.1)-(1.3) 的有限元方法综述，详见 [9] 。总的来说，正如 [9], 所指出的，带逐点状态约束的最优控制问题可以利用四阶边值问题的已知有限元方法进行分析。这一关键观察为带逐点状态约束的最优控制问题开辟了多种可能的数值方法。

最近，文献 [12] 提出并分析了适用于 (1.1)-(1.3) 且满足 $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ 和$\gamma = 0$ 的间断伽辽金（DG）方法，其中采用了一种新的内部最大值估计[19] 。对于 $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}$ 和 $\gamma \neq 0$ 的一般情形，文献 [14]提出并分析了一种连续的 P_1有限元方法。本文旨在将文献 [12, 14] 中的结果推广到具有一般状态方程 (1.1)-(1.3) 的最优控制问题。采用 DG 方法的原因是，它能通过原始-对偶活动集算法快速求解离散问题；该算法具有超线性收敛性（见注 3.2）。由于双线性型 (1.3) 是非对称的，我们必须采用伴随一致的 [3] 方法 (3.12)，以获得涉及 R_h 和 E_h 的估计，而这些估计是收敛性分析的关键要素。

本文其余部分安排如下。第 2 节汇总连续问题 (1.1)-(1.3) 的一些已知正则性结果。这些结果有助于收敛性分析。第 3 节提出求解问题 (1.1)-(1.3) 的混合间断伽辽金方法，并建立离散问题的一些重要性质。第 4 节定义并分析三个关键算子 E_h、 R_h 和 $\mathfrak{C}_h$。第 5 节给出具体误差估计。第 6 节提供数值结果，并在第 7 节作总结。附录 A 描述原始-对偶活动集算法，附录 B 给出引理 3.3 和引理 4.3 的证明。

在本文中，我们用 C （带或不带下标）表示一个与任何网格参数无关的通用正数常量。此外，为避免常量过多，我们用记号 $A \lesssim B$ （或 $A \gtrsim B$）表示 $A \leq$ （常量）B。记号 $A \approx B$ 等价于 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$。

2. 连续问题

设 $\bar{z} = \bar{y} - g$。则问题 (1.10)-(1.11) 等价于求

$$\bar{z} = \underset{z \in \widetilde{K}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{2} \|z - (y_d - g)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{L}(z + g)\|^2_{L_2(\Omega)} \right], \tag{2.1}$$

其中

$$\widetilde{K} = \{z \in \mathring{E}(\Delta; L_2(\Omega)) : z \leq \psi - g \ \text{ in } \ \Omega\}. \tag{2.2}$$

根据经典变分法理论，众所周知，方程 (2.1) 存在唯一解 $\bar{z}$。因此，问题 (1.10) 存在唯一解

且 $\bar{y}$ 可通过以下方式刻画

$$(\bar{y}-y_d, y-\bar{y})_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}\bar{y}, \mathcal{L}(y-\bar{y}))_{L_2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall\, y \in K_g. \tag{2.3}$$

$\bar{y}$的内部正则性

根据四阶变分不等式的内部正则性结果 [32, 33]，我们有$\bar{z} \in H^3_{loc}(\Omega) \cap W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)$。由于 $g \in H^4(\Omega)$根据 Sobolev 不等式是 $W^{2,\infty}(\Omega)$的一个子空间，因此我们得出

$$\bar{y} \in H^3_{loc}(\Omega) \cap W^{2,\infty}_{loc}(\Omega). \tag{2.4}$$

证明可见于 [14]。

拉格朗日乘子 μ

在（2.3）中取 $y = -\phi + \bar{y} \in K_g$，其中 ϕ 是 $C_0^\infty(\Omega)$中的非负函数。因此我们有

$$\int_\Omega \Big[(\bar{y}-y_d)\phi + \beta(\mathcal{L}\bar{y})(\mathcal{L}\phi)\Big] dx \leq 0. \tag{2.5}$$

根据 [44, 第 13 节、定理 25] 或 [45, 定理 2.14]，可得

$$\int_\Omega \Big[(\bar{y}-y_d)z + \beta(\mathcal{L}\bar{y})(\mathcal{L}z)\Big] dx = \int_\Omega z \, d\mu \quad \forall z \in \mathring{E}(\Delta; L_2(\Omega)), \tag{2.6}$$

其中

$$\mu \text{ is a non-positive regular Borel measure.} \tag{2.7}$$

此外，可以证明 [18, 24]

$$\mu \in H^{-1}(\Omega), \tag{2.8}$$

并且我们有如下互补条件

$$\int_\Omega (\psi - \bar{y})\, d\mu = 0. \tag{2.9}$$

$\bar{u}$的正则性以及 $\bar{y}$的整体正则性

可以证明 [11, 20] $\bar{u} \in H^1_0(\Omega)$。根据（1.9），我们有

$$\bar{y} \in H^{1+\alpha}(\Omega), \tag{2.10}$$

其中 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$和

$$\|\bar{y}\|_{H^{1+\alpha}(\Omega)} \leq C_\Omega \|\mathcal{L}\bar{y}\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.11}$$

3. The Discrete Problem

设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的形状正则单纯形剖分。 $T \in \mathcal{T}_h$的直径记为 h_T， $h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$为网格直径。设 $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^b \cup \mathcal{E}_h^i$，其中$\mathcal{E}_h^i$（分别）表示内部边（分别为边界边）的集合。

我们进一步将边界边 $\mathcal{E}_h^b$分解为流入部分 $\mathcal{E}^{b,}{}_h{}^-$和流出部分 $\mathcal{E}^{b,}{}_h{}^+$ 其定义如下:

$$\mathcal{E}_h^{b,-} = \{e \in \mathcal{E}_h^b : e \subset \{x \in \partial\Omega : \boldsymbol{\zeta}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}\}, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{E}_h^{b,+} = \mathcal{E}_h^b \setminus \mathcal{E}_h^{b,-}. \tag{3.2}$$

对于一条边 $e \in \mathcal{E}_h^i$，设 h_e 为 e的长度。对于每条边，我们指定一个固定的单位法向量 n。记 T^+ 为 n 指向其外法向量的单元，并记T^- 为 –n 指向其外法向量的单元。我们将间断有限元空间 V_h 定义为

$$V_h = \{v \in L_2(\Omega) : v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h\}. \tag{3.3}$$

对于边 e上的 $v \in V_h$ ，我们定义

$$v^+ = v|_{T^+} \quad \text{and} \quad v^- = v|_{T^-}. \tag{3.4}$$

对于边 e 上的 $v \in V_h$ ，我们将跳跃和平均值定义如下:

$$[v] = v^+ - v^-, \quad \{v\} = \frac{v^+ + v^-}{2}. \tag{3.5}$$

对于带有 $e \in \partial T$ 的 $e \in \mathcal{E}_h^b$，我们令

$$[v] = \{v\} = v|_T. \tag{3.6}$$

我们还记

$$(w, v)_e := \int_e wv\, ds \quad \text{and} \quad (w, v)_T := \int_T wv\, dx. \tag{3.7}$$

3.1. 混合间断伽辽金方法。我们将分片 H^s 空间定义为

$$H^s(\Omega; \mathcal{T}_h) = \{v \in L_2(\Omega) : v|_T \in H^s(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h\}. \tag{3.8}$$

定义 $\mathcal{L}_{h,\ g}$： $H^s(\Omega; \mathcal{T}_h) \to V_h$ 为

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{h,g} w, v)_{L_2(\Omega)} = a_h(w, v) &+ \sum_{e\in\mathcal{E}_h^b} (g, \mathbf{n} \cdot \nabla v - \frac{\sigma}{h_e} v)_e \\ &+ \sum_{e\in\mathcal{E}_h^{b,-}} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta} g, v)_e \quad \forall v \in V_h,\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中

$$a_h(w,v) = a_h^{\mathrm{sip}}(w,v) + a_h^{\mathrm{ar}}(w,v) \quad \forall w, v \in V_h. \tag{3.10}$$

Here

$$\begin{aligned} a_h^{\mathrm{sip}}(w,v) = &\sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\nabla w, \nabla v)_T - \sum_{e\in\mathcal{E}_h} (\{\mathbf{n}\cdot\nabla w\}, [v])_e - \sum_{e\in\mathcal{E}_h} (\{\mathbf{n}\cdot\nabla v\}, [w])_e \\ &+ \sigma \sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_e^{-1} ([w], [v])_e \end{aligned} \tag{3.11}$$

是具有足够大惩罚参数 σ 的对称内罚法（SIP）的双线性型，并且

$$a_h^{\mathrm{ar}}(w,v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla w + \gamma w, v)_T - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i\cup\mathcal{E}_h^{b,-}} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta}[w], \{v\})_e. \tag{3.12}$$

是对流和反应项的未稳定化间断伽辽金格式（参见 [23] 和 [30, 第 2.2] 节）。

注3.1。本文不考虑对流占优情形。因此，双线性型 $a_h^{\mathrm{ar}}(\cdot,\cdot)$ 不包含任何稳定化项。不过，若考虑对流占优情形，则可采用以下众所周知的 [38, 4] 迎风格式，

$$a_h^{\mathrm{ar}}(w,v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla w + \gamma w, v)_T - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta}[w], v^{\mathrm{up}})_e - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^{b,-}} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta}\, w, v)_e, \tag{3.13}$$

函数在内部边 $e \in \mathcal{E}_h^i$ 上的迎风值 v^{up} 定义如下

$$v^{\mathrm{up}} = \begin{cases} v^+ & \text{if} \quad \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n} \geq 0, \\ v^- & \text{if} \quad \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n} < 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

则（1.10）的离散问题为求解

$$\bar{y}_h = \operatorname*{argmin}_{y_h\in K_h} \left[\frac{1}{2}(y_h - y_d, y_h - y_d)_{L_2(\Omega)} + \frac{\beta}{2}(\mathcal{L}_{h,g} y_h, \mathcal{L}_{h,g} y_h)_{L_2(\Omega)} \right], \tag{3.15}$$

其中

$$K_h = \{y \in V_h : y_T(p) \leq \psi(p) \ \text{ for all } \ p \in \mathcal{V}_T \text{ and all } T \in \mathcal{T}_h\}. \tag{3.16}$$

这里 $\mathcal{V}_T$ 是 $T \in \mathcal{T}_h$的顶点集合。注意，我们通过 $\mathcal{L}_{h,\ g}$弱施加狄利克雷边界条件 $y = g$ 。

注 3.2。离散问题 (3.15)-(3.16) 可通过原始-对偶活动集方法求解（参见附录 A）。令 $\mathbf{M}_h$ 表示相对于 V_h中的自然间断节点基，双线性型 $(\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$ 对应的质量矩阵。注意，计算$\mathcal{L}_{h,\ g}$ 时会用到 $\mathbf{M}_h^{-1}$ 。与 [20, 16, 14], 不同，矩阵 $\mathbf{M}_h$ 是块对角的，因此可以轻易地求得 $\mathbf{M}_h^{-1}$ 。

3.2. $a_h(\cdot,\cdot)$ 的性质。设 D 是 Ω 的一个子域， $\mathcal{T}_h(D)$ 是与 D 有非空交集的所有单元的集合。在 V_h 上定义网格依赖范数,

$$|\!|\!| v |\!|\!|_{h,D}^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h(D)} \left[\|\nabla v\|_{L_2(T)}^2 + \sum_{e\in\partial T} \frac{\sigma}{h_e} \|[v]\|_{L_2(e)}^2 + \sum_{e\in\partial T} \frac{h_e}{\sigma} \|\{\mathbf{n}\cdot\nabla v\}\|_{L_2(e)}^2 \right]. \tag{3.17}$$

如果没有歧义，我们用 $|\!|\!| v |\!|\!|_h$ 表示范数$|\!|\!| v |\!|\!|_{h,\ \Omega}$ 。下面的引理证明了 $a_h(\cdot,\cdot)$ 的连续性和强制性，这是间断伽辽金方法 [3, 42, 17] 的标准性质。证明见附录 B。

引理 3.3。我们有

$$a_h(w,v) \le C\, |\!|\!| w |\!|\!|_h\, |\!|\!| v |\!|\!|_h \quad \forall w,v \in E(\Delta; L_2(\Omega)) + V_h, \tag{3.18}$$

$$a_h(v,v) \ge C\, |\!|\!| v |\!|\!|_h^2 \qquad \forall v \in V_h, \tag{3.19}$$

当 σ 足够大时。

3.3. $\mathcal{L}_{h,\ g}$ 的性质。根据 $\mathcal{L}_{h,\ g}$ 的定义以及分部积分，我们有对于任意 $w \in g + \mathring{E}(\Delta; L_2(\Omega))$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{h,g} w, v)_{L_2(\Omega)} &= a_h(w,v)_{L_2(\Omega)} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^b} (g, \mathbf{n}\cdot\nabla v - \frac{\sigma}{h_e} v)_e + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^{b,-}} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta} g, v)_e \\ &= (\mathcal{L} w, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \tag{3.20}$$

这给出了$\mathcal{L}_{h,\ g}$的相容性。此外，我们有

$$\mathcal{L}_{h,g} w = Q_h \mathcal{L} w \quad \forall w \in g + \mathring{E}(\Delta; L_2(\Omega)), \tag{3.21}$$

其中， Q_h 是从 $L_2(\Omega)$到 V_h的正交投影。

3.4. 离散变分不等式。定义 $\mathcal{L}_h:\ H^s(\Omega;\mathcal{T}_h) \to V_h$ 如下:

$$(\mathcal{L}_h w, v)_{L_2(\Omega)} = a_h(w,v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in V_h. \tag{3.22}$$

注意，我们有如下结果:

$$\mathcal{L}_{h,g} w_1 - \mathcal{L}_{h,g} w_2 = \mathcal{L}_h(w_1 - w_2) \quad \forall w_1, w_2 \in H^s(\Omega;\mathcal{T}_h). \tag{3.23}$$

特别地，我们有

$$\mathcal{L}_h w = \mathcal{L}_{h,0} w = Q_h \mathcal{L} w \quad \forall w \in \mathring{E}(\Delta; L_2(\Omega)). \tag{3.24}$$

由于 K_h 是一个非空闭凸集，且 (3.15) 中的目标函数是强凸的，因此离散问题 (3.15)-(3.16) 存在唯一解 $\bar{y}_h \in V_h$，其特征可由下式刻画

$$(\bar{y}_h - y_d, y_h - \bar{y}_h)_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}_{h,g}\bar{y}_h, \mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall\, y_h \in K_h. \tag{3.25}$$

4. Preliminary Estimates

本节中，我们为收敛分析建立一些初步估计。我们同时考虑准一致网格和凹角附近的分级网格 [7, 5, 2] 。

4.1. 分级网格。对于具有凹角的非凸区域，众所周知，状态方程 (1.2) 的解一般不属于 $H^2(\Omega)$（见 (2.10)）。为克服这种正则性不足，我们可以采用具有以下性质的三角剖分$\mathcal{T}_h$。设 ω_1、ω_2、.....、ω_L 分别为有界多边形区域 Ω 的角点 c_1、c_2、.....、c_L 处的内角，且 c_T为$T \in \mathcal{T}_h$的中心。存在常数 C_1 和 C_2 ，使得

$$C_1 h_T \leq \Phi_\mu(T) h \leq C_2 h_T, \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h, \tag{4.1}$$

其中 $\Phi_\mu(T) = \Pi_{l=1}^{L} |c_l - c_T|^{1-\mu_l}$。这里，分级参数 μ_1、μ_2、.....、μ_L选取如下:

$$\begin{aligned} \mu_l &= 1, \quad \omega_l < \pi, \\ \frac{1}{2} < \mu_l &< \frac{\pi}{\omega_l}, \quad \omega_l > \pi. \end{aligned} \tag{4.2}$$

满足 (4.1) 的分级网格的构造可见 [7, 5, 2]。

4.2. 初步不等式。以下标准不等式 [3, 42, 12] 是必要的。设 D 是 Ω 的一个子域，且满足 $D \Subset \Omega$，即 D 的闭包是 Ω 的一个紧集。注意，对于分级网格， $\mathcal{T}_h$ 在 D 周围是拟一致的。因此，由标准逆估计可得

$$|||v_h|||_{h,D} \leq C h^{-1} \|v_h\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.3}$$

我们还有以下离散 Sobolev 不等式 [12]

$$\|y_h\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C(1 + |\ln h|)^{\frac{1}{2}} |||y_h|||_h \quad \forall y_h \in V_h. \tag{4.4}$$

对于 $T \in \mathcal{T}_h$和 $v \in H^{1+s}(T)$，其中 $s \in (\frac{1}{2}, 1]$,，以下带尺度因子的迹不等式是标准结果（参见 [31, 引理 7.2] 和 [27, 命题 3.1]），

$$\|v\|_{L_2(\partial T)} \leq C(h_T^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(T)} + h_T^{s-\frac{1}{2}} |v|_{H^s(T)}), \tag{4.5}$$

$$\|\nabla v\|_{L_2(\partial T)} \leq C(h_T^{-\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(T)} + h_T^{s-\frac{1}{2}} |\nabla v|_{H^s(T)}). \tag{4.6}$$

对于 DG函数 [8, 4, 25] ， 以下离散 Poinca´re 不等式对所有$v \in V_h$均成立,

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\nabla v\|^2_{L_2(T)} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\frac{1}{h_e}\|[v]\|^2_{L_2(e)}\right). \tag{4.7}$$

4.3. 插值算子 I_h。设 V_h^c 为与 $\mathcal{T}_h$相关联的协调 P_1 有限元空间。我们采用通常的连续节点插值算子 I_h: $E(\Delta; L_2(\Omega)) \to V_h^c$ （其属于 V_h）， [3, 42] 使其满足以下性质。

引理**4.1**。我们有

$$\|z - I_h z\|_{L_2(\Omega)} + h\,|||z - I_h z|||_h \lesssim h^{1+\tau}\|\mathcal{L}z\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall z \in E(\Delta; L_2(\Omega)). \tag{4.8}$$

对于准一致网格或分级网格，我们还有

$$\|z - I_h z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^\tau\|\mathcal{L}z\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall z \in E(\Delta; L_2(\Omega)). \tag{4.9}$$

这里， τ 定义为

$$\tau = \begin{cases} \alpha & \textit{if } \mathcal{T}_h \textit{ is quasi-uniform,} \\ 1 & \textit{if } \mathcal{T}_h \textit{ is graded around the reentrant corners,} \end{cases} \tag{4.10}$$

其中 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$是式（**1.9**）中的椭圆正则性指标。

以下引理对收敛性分析很有用。

引理 **4.2.** 设 ϕ 为一个在 Ω 中具有紧支撑的 C^∞ 函数。我们有

$$\|\mathcal{L}_h(I_h\phi)\|_{L_2(\Omega)} \lesssim \|\phi\|_{H^2(\Omega)}. \tag{4.11}$$

证明。设 $D \Subset \Omega$ 是 ϕ 和 $v_h \in V_h$的支撑的一个开邻域，由 **(3.22)**、**(4.3)**、**(3.18)** 和 **(4.8)**，我们有,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_h(\phi - I_h\phi), v_h)_{L_2(\Omega)} &= a_h(\phi - I_h\phi, v_h) \\ &\lesssim |||\phi - I_h\phi|||_h\,|||v_h|||_{h,D} \\ &\lesssim h|\phi|_{H^2(\Omega)}\,|||v_h|||_{h,D} \\ &\lesssim |\phi|_{H^2(\Omega)}\|v_h\|_{L_2(\Omega)},\end{aligned}$$

因此,

$$\|\mathcal{L}_h(\phi - I_h\phi)\|_{L_2(\Omega)} \lesssim |\phi|_{H^2(\Omega)}. \tag{4.12}$$

由（3.24）和（4.12）可知

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}_h(I_h\phi)\|_{L_2(\Omega)} &\le \|\mathcal{L}_h(\phi - I_h\phi)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{L}_h\phi\|_{L_2(\Omega)}\\ &\lesssim |\phi|_{H^2(\Omega)} + \|Q_h\mathcal{L}\phi\|_{L_2(\Omega)}\\ &\lesssim |\phi|_{H^2(\Omega)} + \|\mathcal{L}\phi\|_{L_2(\Omega)}\\ &\lesssim \|\phi\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

□

4.4. Ritz投影算子 R_h。我们定义算子 R_h：$E(\Delta; L_2(\Omega)) \to V_h$ 如下：

$$a_h(R_h w, v) = a_h(w, v) \quad \forall v \in V_h. \tag{4.14}$$

由 (3.9)、(3.21) 和 (4.14) 可得

$$\mathcal{L}_{h,g}(R_h w) = \mathcal{L}_{h,g} w = Q_h(\mathcal{L}w) \quad \forall w \in g + \mathring{E}(\Delta; L_2(\Omega)). \tag{4.15}$$

此外，由 (3.22) 可得，

$$\mathcal{L}_h R_h w = \mathcal{L}_h w \quad \forall w \in E(\Delta; L_2(\Omega)). \tag{4.16}$$

引理 4.3。我们有以下关于 R_h的误差估计，

$$|||w - R_h w|||_h \le Ch^\tau \|\mathcal{L}w\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall w \in E(\Delta; L_2(\Omega)), \tag{4.17}$$

$$\|w - R_h w\|_{L_2(\Omega)} \le Ch^{2\tau} \|\mathcal{L}w\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall w \in E(\Delta; L_2(\Omega)). \tag{4.18}$$

证明。证明见附录 B。 □

我们有如下内部误差估计 [12, 19, 25] 对于 $D \Subset \Omega$，

$$\|\bar{y} - R_h\bar{y}\|_{L_\infty(D)} \le C((1 + |\ln h|)h^2 + h^{2\tau}). \tag{4.19}$$

由 (4.4) 和 (4.17) 可得

$$\|\bar{y} - R_h\bar{y}\|_{L_\infty(\Omega)} \le C((1 + |\ln h|)h^\tau. \tag{4.20}$$

°4.5. 平滑算子 E_h. 算子 E_h：$V_h \to E(\Delta; L_2(\Omega))$ 定义为

$$\mathcal{L}E_h v_h = \mathcal{L}_h v_h \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.21}$$

特别地，对于所有 $w \in V_h$，

$$a_h(E_h v_h, w) = (\mathcal{L}E_h v_h, w)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{L}_h v_h, w)_{L_2(\Omega)} = a_h(v_h, w). \tag{4.22}$$

注意到 (4.22) 和 (4.14) 可推出

$$v_h = R_h(E_h v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.23}$$

引理 4.4。对于所有 $v_h \in V_h$，我们有以下估计

$$|||E_h v_h - v_h|||_h \lesssim h^\tau \|\mathcal{L}_h v_h\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.24}$$

$$\|E_h v_h - v_h\|_{L_2(\Omega)} \lesssim h^{2\tau} \|\mathcal{L}_h v_h\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.25}$$

$$|||E_h v_h - v_h|||_{h,G(\mathscr{A})} \lesssim h \|\mathcal{L}_h v_h\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.26}$$

其中，$G(\mathscr{A})$ 是活动集 $\mathscr{A} = \{x \in \Omega : \bar{y}(x) = \psi(x)\}$ 的一个开邻域，且 $G(\mathscr{A})$ 的闭包是 Ω 的一个紧子集。

证明。由 (4.23) 和 (4.17)-(4.19) 可得这些估计。详细内容见[12]。□

4.6. 连接算子 $\mathfrak{C}_h$。我们需要一个连接算子 $\mathfrak{C}_h : V_h \to \mathring{V}_h^c = V_h \cap H_0^1(\Omega)$，定义如下：

$$(\mathfrak{C}_h y_h)(p) = \frac{1}{|\mathcal{T}_h(p)|} \sum_{T \in \mathcal{T}_h(p)} (y_h|_T)(p) \tag{4.27}$$

其中，p 是 P_1 中位于 Ω 内部的任意一个有限元空间节点，$\mathcal{T}_h(p)$ 是 $\mathcal{T}_h$ 中与节点 p 相邻的三角形集合。根据 (3.16) 和 (4.27)，算子 $\mathfrak{C}_h$ 具有以下性质：

$$\mathfrak{C}_h v_h = v_h \quad \forall v_h \in \mathring{V}_h^c, \tag{4.28}$$

$$\mathfrak{C}_h y_h \in K_h \quad \forall y_h \in K_h. \tag{4.29}$$

对于 Ω 的任意子域 D，有：

$$h^{-2}\|y_h - \mathfrak{C}_h y_h\|_{L_2(D)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |y_h - \mathfrak{C}_h y_h|_{H^1(T)}^2 \le C \sum_{T \in \mathcal{T}_h^*(D)} \sum_{e \in \partial T} |e|^{-1} \|[y_h]\|_{L_2(e)}^2, \tag{4.30}$$

其中，$T \in \mathcal{T}_h$ 属于 $\mathcal{T}_h^*(D)$当且仅当 $S_T \cap D = \emptyset$。这里，S_T（T的星形邻域）是 $\mathcal{T}_h$ 中所有与 T共享一个顶点的三角形的并集。我们还有（参见 [12]）

$$\|\mathfrak{C}_h y_h\|_{L_\infty(T)} \le C \|y_h\|_{L_\infty(S_T)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \tag{4.31}$$

由(4.26)和(3.17)可得，

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^*(D)} \sum_{e \in \partial T} |e|^{-1} \|[y_h]\|_{L_2(e)}^2 \le C h^2 \|\mathcal{L}_h y_h\|_{L_2(\Omega)}^2 \qquad \forall y_h \in V_h. \tag{4.32}$$

注 4.5. 由于 $V_h \not\subset H_0^1(\Omega)$ 和 $\mathring{V}_h^c \subset H_0^1(\Omega)$ 的事实，采用算子 $\mathfrak{C}_h$ 将离散问题与连续问题联系起来。

5. Convergence Analysis

本节中，我们推导间断伽辽金方法 (3.15) 的误差估计。我们定义一个网格依赖范数

$$\|v\|_h^2 = (v,v)_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}_h v, \mathcal{L}_h v)_{L_2(\Omega)}. \tag{5.1}$$

5.1. 抽象误差估计。令 $\bar{y}_h \in K_h$ 为（3.15）的解。由（3.25）和（3.23），对于任意 $y_h \in K_h$，有:

$$\begin{aligned}
\|y_h - \bar{y}_h\|_h^2 &= (y_h - \bar{y}_h, y_h - \bar{y}_h)_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h), \mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \\
&= (y_h - \bar{y}, y_h - \bar{y}_h)_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}), \mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \\
&\quad + (\bar{y} - y_d, y_h - \bar{y}_h)_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}_{h,g}\bar{y}, \mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \\
&\quad - (\bar{y}_h - y_d, y_h - \bar{y}_h)_{L_2(\Omega)} - \beta(\mathcal{L}_{h,g}\bar{y}_h, \mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \\
&\le \|y_h - \bar{y}\|_h \|y_h - \bar{y}_h\|_h + (\bar{y} - y_d, y_h - \bar{y}_h)_{L_2(\Omega)} \\
&\quad + \beta(\mathcal{L}_{h,g}\bar{y}, \mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

注意 在 $E_h(y_h - \bar{y}_h) \in E(\Delta; L_2(\Omega))$ 中，由（2.6）、（4.21）和（3.21）可得，

$$\begin{aligned}
&(\bar{y} - y_d, y_h - \bar{y}_h)_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}_{h,g}\bar{y}, \mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \\
&\quad = (\bar{y} - y_d, (y_h - \bar{y}_h) - E_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \\
&\quad\quad + (\bar{y} - y_d, E_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} + \beta(\mathcal{L}\bar{y}, \mathcal{L}E_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \\
&\quad = (\bar{y} - y_d, (y_h - \bar{y}_h) - E_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega E_h(y_h - \bar{y}_h)\, d\mu.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

由（4.25）可知

$$(\bar{y} - y_d, (y_h - \bar{y}_h) - E_h(y_h - \bar{y}_h))_{L_2(\Omega)} \lesssim h^{2\tau} \|\mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h)\|_{L_2(\Omega)} \lesssim h^{2\tau} \|y_h - \bar{y}_h\|_h. \tag{5.4}$$

对于 (5.3) 中的最后一项，我们有如下引理。

引理 5.1. 对任意 y_h、$\bar{y}_h \in K_h$，有:

$$\int_\Omega E_h(y_h - \bar{y}_h)\, d\mu \le C\left(h\|\mathcal{L}_h(y_h - \bar{y}_h)\|_{L_2(\Omega)} + h^2 + \|I_h(\bar{y} - \mathfrak{C}_h y_h)\|_{L_\infty(\mathscr{A})}\right), \tag{5.5}$$

其中，C 与 h 无关，且 $\mathscr{A}$ 为活动集。

证明。我们概述证明过程。详细内容见 [12, 定理 4.1]。由 (3.16) 和 (2.7)，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega E_h(y_h-\bar{y}_h)\,d\mu &= \int_\Omega [E_h(y_h-\bar{y}_h)-\mathfrak{C}_h(y_h-\bar{y}_h)]\,d\mu+\int_\Omega I_h(\psi-\mathfrak{C}_h\bar{y}_h)\,d\mu\\ &\quad+\int_\Omega [I_h\mathfrak{C}_h(\bar{y}_h-y_h)-\mathfrak{C}_h(\bar{y}_h-y_h)]\,d\mu+\int_\Omega I_h(\bar{y}-\psi)\,d\mu\\ &\quad+\int_\Omega I_h(\mathfrak{C}_h y_h-\bar{y})\,d\mu\\ &= T_1+T_2+T_3+T_4+T_5.\end{aligned}\tag{5.6}$$

我们可以界定 T_2、T_4 和 T_5，如下所示。由 (2.7)、(3.16) 和 (4.29) 可得

$$T_2=\int_\Omega I_h(\psi-\mathfrak{C}_h\bar{y}_h)\,d\mu\le 0.\tag{5.7}$$

我们还有

$$\begin{aligned}T_4=\int_\Omega I_h(\bar{y}-\psi)\,d\mu &= \int_\Omega [I_h(\bar{y}-\psi)-(\bar{y}-\psi)]\,d\mu\\ &\le \|I_h(\bar{y}-\psi)-(\bar{y}-\psi)\|_{L_\infty(\mathscr{A})}|\mu(\Omega)|\le Ch^2,\end{aligned}\tag{5.8}$$

and

$$T_5=\int_\Omega I_h(\mathfrak{C}_h y_h-\bar{y})\,d\mu\le \|I_h(\mathfrak{C}_h y_h-\bar{y})\|_{L_\infty(\mathscr{A})}|\mu(\Omega)|\tag{5.9}$$

根据 (1.4)、(2.7)、(2.9) 和 (2.4)。对于 T_1，由 (2.8)、(4.26)、(4.30) 和 (4.32) 可得

$$T_1=\int_\Omega [E_h(y_h-\bar{y}_h)-\mathfrak{C}_h(y_h-\bar{y}_h)]\,d\mu\le Ch\|\mathcal{L}_h(y_h-\bar{y}_h)\|_{L_2(\Omega)}.\tag{5.10}$$

最后，我们得到

$$T_3=\int_\Omega [I_h\mathfrak{C}_h(\bar{y}_h-y_h)-\mathfrak{C}_h(\bar{y}_h-y_h)]\,d\mu\le Ch\|\mathcal{L}_h(y_h-\bar{y}_h)\|_{L_2(\Omega)}\tag{5.11}$$

由 (2.8)、(4.30)、(4.32) 和 (4.8) 得出。 □

注 5.2。引理 5.1 证明中的关键要素是正则性结果 (2.8) 和连接算子 $\mathfrak{C}_h$，该算子此前已用于非协调方法的分析中（参见 [8]）。

由式 (5.2)、(5.4) 和引理 5.1，我们得到以下抽象误差估计：

$$\|\bar{y}-\bar{y}_h\|_h\le C\left(h+\inf_{y_h\in K_h}\left[\|y_h-\bar{y}\|_h+\|I_h(\bar{y}-\mathfrak{C}_h y_h)\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathscr{A})}\right]\right).\tag{5.12}$$

5.2. 具体误差估计。

引理 5.3. 对于足够小的 h，存在 $y_h^* \in K_h$ 使得

$$\|y_h^* - \bar{y}\|_h + \|I_h(\bar{y} - \mathfrak{C}_h y_h^*)\|_{L_\infty(\mathscr{A})}^{\frac{1}{2}} \leq C((1 + |\ln h|)^{\frac{1}{2}} h + h^\tau), \tag{5.13}$$

其中 τ 在 (4.10) 中定义。

证明。我们简要说明证明思路。详细证明见 [12, 引理 5.1]。关键是构造一个合适的 $y_h^* \in K_h$，以界定 (5.12) 中的下确界。设 $G(\mathscr{A})$ 是活动集 $\mathscr{A}$ 的一个开邻域，并且 $\epsilon_h = \|R_h\bar{y} - \bar{y}\|_{L_\infty(G(\mathscr{A}))}$。于是，我们将 $y_h^* \in V_h$ 定义如下:

$$y_h^* = R_h\bar{y} - \epsilon_h I_h\phi, \tag{5.14}$$

其中，$\phi \in C^\infty$ 是一个在 Ω 中具有紧支撑的非负函数，且在 $G(\mathscr{A})$ 上满足 $\phi = 1$。我们可以证明 $y_h^* \in K_h$。因此，由引理 4.2、(4.18) 和 (4.16) 可得

$$\|\bar{y} - y_h^*\|_{L_2(\Omega)} \leq C\epsilon_h, \tag{5.15}$$

$$\|\mathcal{L}_h(\bar{y} - y_h^*)\|_{L_2(\Omega)} \leq C\epsilon_h. \tag{5.16}$$

因此，由 (5.1) 和 (4.19) 可得，

$$\|\bar{y} - y_h^*\|_h \leq C((1 + |\ln h|)h^2 + h^{2\tau}). \tag{5.17}$$

最后，由 (4.31)、(4.28)、(4.19) 和 (4.8) 可得，

$$\|I_h(\bar{y} - \mathfrak{C}_h y_h^*)\|_{L_\infty(\mathscr{A})}^{\frac{1}{2}} \leq C((1 + |\ln h|)^{\frac{1}{2}} h + h^\tau). \tag{5.18}$$

□

下面的定理（参见 [12]）给出了间断 Galerkin 方法 (3.15) 的具体误差估计。

定理 5.4. 设 $\bar{y}_h \in K_h$ 是 (3.15) 的解，且 $\bar{u}_h = \mathcal{L}_{h,g}\bar{y}_h$。则有

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L_2(\Omega)} + \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L_2(\Omega)} + |||\bar{y} - \bar{y}_h|||_h + \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C((1 + |\ln h|)^{\frac{1}{2}} h + h^\tau),$$

其中 τ 在 (4.10) 中定义。

6. 数值结果

本节报告两个算例的数值结果。离散问题 (3.15) 采用原始-对偶活动集算法 [6, 36]求解。对于所有算例，我们取惩罚参数 $\sigma = 6$和正则化参数$\beta = 1$。为简便起见，我们还取 $\gamma = 1$。计算中使用了 MATLAB\C++ 工具箱 FELICITY [46]。

例6.1（正方形区域 $[14]$）。对于此算例，我们在 (3.15) 中取 $\Omega = [-4,4]^2$, $g=0$, $\zeta=[1,\ 0]^t$和 $\psi=|x|^2-1$。我们考虑如下定义的函数 y_d，

$$y_d=\begin{cases}\mathcal{L}^t\mathcal{L}\bar{y}+\bar{y} & |x|>1\\ \mathcal{L}^t\mathcal{L}\bar{y}+\bar{y}+2 & |x|\le 1\end{cases}.$$

函数 $\bar{y}$ 由下式给出

$$\bar{y}=\begin{cases}|x|^2-1 & |x|\le 1\\ v(|x|)+(1-\phi(|x|))w(x) & 1\le|x|\le 3\\ w(x) & |x|\ge 3\end{cases},$$

其中

$$\begin{aligned}v(|x|)&=(|x|^2-1)(1-\frac{|x|-1}{2})^4+\frac{1}{4}(|x|-1)^2(|x|-3)^4,\\ \phi(|x|)&=(1+4\frac{|x|-1}{2}+10(\frac{|x|-1}{2})^2+20(\frac{|x|-1}{2})^3)(1-\frac{|x|-1}{2})^4,\\ w(x)&=2\sin(\frac{\pi}{8}(x_1+4))^3\sin(\frac{\pi}{8}(x_2+4))^3.\end{aligned}$$

根据构造，函数 $\bar{y}$ 是精确解，且 $\bar{y}\le\psi$。活动集是单位圆盘 $\{x:\ |x|<1\}$。均匀网格上的收敛率见表1。可以看出，状态的 L_2和 L_∞误差的收敛率平均约为 $O(h^2)$，而控制的 L_2误差收敛率为 $O(h^{\frac{3}{2}})$。这些结果优于定理 5.4 中的估计，并且与事实 $\bar{y}\in H^{\frac{7}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ 相符。我们还观察到状态在 $\|\cdot\|_h$中的 $O(h)$ 收敛，这与定理 5.4 相符。最优状态、控制以及第6层的活动集见图1。

TABLE 1. 例6.1在均匀网格上、 $\zeta=[1\ 0]^t$条件下的收敛结果

k	$\|\bar{y}-y_h\|_{L_2(\Omega)}$	阶数	$\|\bar{y}-y_h\|_h$	阶数	$\|\bar{u}-u_h\|_{L_2(\Omega)}$	阶数	$\|\bar{y}-y_h\|_{L^\infty(\Omega)}$	阶数
1	3.00e+01	-	3.14e+01	-	6.23e+01	-	8.45e+00	-
2	1.02e+01	1.55	9.33e+00	1.75	2.66e+01	1.23	4.68e+00	0.85
3	2.70e+00	1.92	3.34e+00	1.48	9.33e+00	1.51	9.50e-01	2.30
4	7.45e-01	1.86	1.19e+00	1.48	3.54e+00	1.40	2.80e-01	1.76
5	1.40e-01	2.41	4.30e-01	1.47	1.39e+00	1.35	5.03e-02	2.48
6	6.74e-02	1.05	1.95e-01	1.14	5.59e-01	1.31	2.11e-02	1.25
7	3.76e-02	0.84	9.58e-02	1.02	2.08e-01	1.43	1.28e-02	0.72
8	7.18e-03	2.39	4.31e-02	1.15	6.75e-02	1.62	2.56e-03	2.32

例6.2（L形区域 $[14]$）。在此例中，我们在（3.15）中取 $\Omega=[-8,8]^2\setminus[0,8]\times[-8,0]$, $g=10$和 $\zeta=[2,\ 1]^t$。本例是对

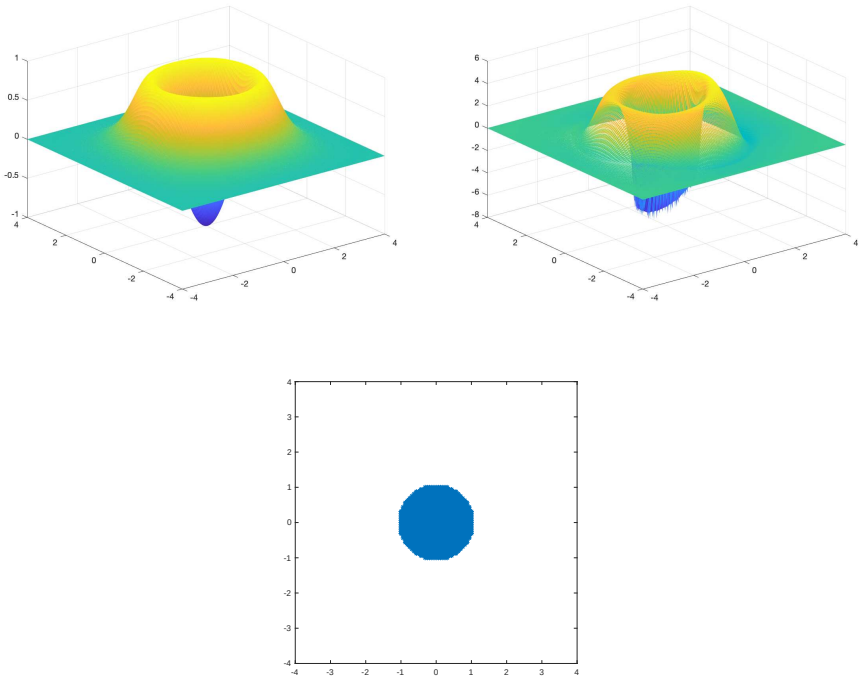


FIGURE 1. 例6.1第6层的状态、控制和活动集

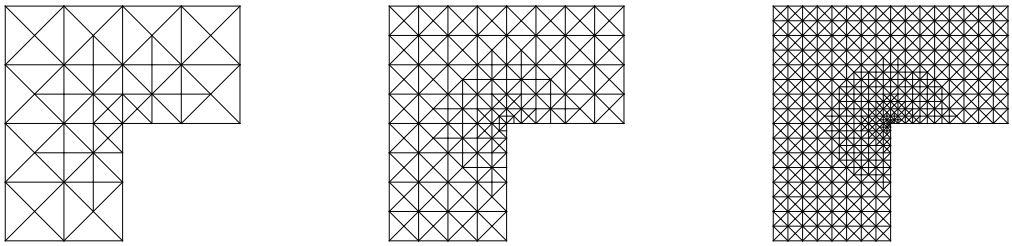


FIGURE 2. L形区域上的分级网格

例6.1。函数 y_d 和 ψ 通过点 $x_* =$ （$-4, 4$）进行平移。随后，将一个奇异函数 $10\psi_s$ 添加到函数 y_d 和 ψ中。根据构造，精确解为 $\tilde{y} = \bar{y}$（$x - x_*$）$+ 10\psi_s$，其中 $\bar{y}$ 在例6.1中定义。这里

函数 ψ_s 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\psi_s &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \psi_s &= 1 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.1}$$

表 2 和表3给出了间断伽辽金方法 (3.15) 在均匀网格和分级网格（见图 2）上的收敛率。由表 2 可见，状态在 $\|\cdot\|_h$ 和 L_∞ 范数下的收敛率趋近于 $O(h^{\frac{2}{3}})$。这与具有 $\tau = \alpha = \frac{2}{3} - \varepsilon$ 的理论结果一致。状态在 L_2 范数下的收敛率接近 $O(h^2)$，而控制在 L_2 范数下的收敛率趋近于 $O(h^{\frac{3}{2}})$。这些结果优于定理 5.4 中的估计，并且与 $\bar{y} \in H^{\frac{7}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ 和 $\bar{u} \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ 的事实相符。我们还观察到，表 3 中状态在 $\|\cdot\|_h$ 和 L_∞ 范数下的收敛率有明显提升。这也与定理 5.4 中具有 $\tau = 1$ 的结果一致。

TABLE 2. 例6.2 在均匀网格上的收敛结果

k	$\|\bar{y} - y_h\|_{L_2(\Omega)}$	阶数	$\|\bar{y} - y_h\|_h$	阶数	$\|\bar{u} - u_h\|_{L_2(\Omega)}$	阶数	$\|\bar{y} - y_h\|_{L^\infty(\Omega)}$	阶数
1	3.30e+01	-	2.79e+01	-	6.79e+01	-	7.03e+00	-
2	1.97e+01	0.75	2.39e+01	0.22	3.10e+01	1.13	6.73e+00	0.06
3	7.34e+00	1.42	1.52e+01	0.65	9.37e+00	1.73	4.90e+00	0.46
4	2.02e+00	1.86	8.82e+00	0.79	3.31e+00	1.50	3.08e+00	0.67
5	5.09e-01	1.99	4.66e+00	0.92	1.27e+00	1.39	1.88e+00	0.71
6	1.38e-01	1.88	2.44e+00	0.93	4.99e-01	1.35	1.15e+00	0.71
7	4.76e-02	1.54	1.33e+00	0.87	1.81e-01	1.47	7.15e-01	0.69
8	1.10e-02	2.12	7.64e-01	0.80	5.82e-02	1.63	4.47e-01	0.68

TABLE 3. 分级网格上例6.2的收敛结果

k	$\|\bar{y} - y_h\|_{L_2(\Omega)}$	阶	$\|\bar{y} - y_h\|_h$	阶	$\|\bar{u} - u_h\|_{L_2(\Omega)}$	阶	$\|\bar{y} - y_h\|_{L^\infty(\Omega)}$	阶数
1	2.13e+01	-	2.94e+01	-	3.09e+01	-	6.78e+00	-
2	1.14e+01	0.91	2.66e+01	0.15	2.49e+01	0.31	5.07e+00	0.42
3	4.18e+00	1.44	1.78e+01	0.58	4.66e+00	2.42	2.55e+00	0.99
4	1.04e+00	2.01	9.67e+00	0.88	1.77e+00	1.40	9.81e-01	1.38
5	2.52e-01	2.04	4.55e+00	1.09	8.51e-01	1.05	3.15e-01	1.64
6	6.75e-02	1.90	2.03e+00	1.16	3.74e-01	1.19	1.50e-01	1.07
7	3.24e-02	1.06	9.06e-01	1.17	1.66e-01	1.17	5.93e-02	1.34
8	3.99e-03	3.02	4.14e-01	1.13	5.49e-02	1.59	2.80e-02	1.08

7. Concluding Remark

我们提出并分析了间断伽辽金方法，用于求解一般多边形区域上具有一般状态方程和逐点状态约束的最优控制问题。我们给出了具体误差估计，并提供数值结果以支持理论结果。本文不考虑对流占优情形，因此本文中的常数可能依赖于 ζ 和 γ。不过，我们想指出，我们的方法有望用于求解由对流占优方程支配且带有逐点状态约束的最优控制问题。此前已有一些工作 [38, 34]研究了由对流占优问题支配且不带状态约束的最优控制问题。正如 [38], 所指出的，对于由对流占优方程支配的最优控制问题，对狄利克雷边界条件进行弱处理（如我们在 (3.9) 中所做的）至关重要。然而，对流占优情形的严格分析似乎并非易事。我们将在未来的工作中对此进行研究。

Appendix A. Primal-dual active set algorithm

现在我们将 (3.15) 改写为矩阵和向量形式。令 M_h （分别地，A_h）表示质量（分别地，刚度）矩阵，它们表示双线性型 $(\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$ （分别地，$a_h(\cdot,\cdot)$），其所依据的是 V_h 中自然的间断节点基。假设 L_h 表示$\mathcal{L}_{h,\ g}$，且 g 表示 (3.9) 中的边界积分项。由 (3.9) 可得

$$\mathbf{v}^t\mathbf{M}_h\mathbf{L}_h(\mathbf{u}) = \mathbf{v}^t\mathbf{A}_h\mathbf{u} + \mathbf{v}^t\mathbf{g} \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n_h}, \tag{A.1}$$

其中 $n_h = \dim V_h$。由此得到关系式

$$\mathbf{L}_h(\mathbf{u}) = \mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{A}_h\mathbf{u} + \mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{g} \quad \forall \mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n_h}, \tag{A.2}$$

and

$$(\mathbf{L}_h(\mathbf{u}))^t = \mathbf{u}^t\mathbf{A}_h^t\mathbf{M}_h^{-1} + \mathbf{g}^t\mathbf{M}_h^{-1} \quad \forall \mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n_h}. \tag{A.3}$$

因此，根据 (A.2) 和 (A.3)，(3.15) 可改写为：

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{argmin}_{\mathbf{y}_h\le\boldsymbol{\psi}} \frac{1}{2}(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_d)^t\mathbf{M}_h(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_d) + \frac{\beta}{2}(\mathbf{L}_h(\mathbf{y}_h))^t\mathbf{M}_h\mathbf{L}_h(\mathbf{y}_h)\\
&= \operatorname*{argmin}_{\mathbf{y}_h\le\boldsymbol{\psi}} \frac{1}{2}\mathbf{y}_h^t\mathbf{M}_h\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_h^t(\mathbf{M}_h\mathbf{y}_d)\\
&\qquad + \frac{\beta}{2}(\mathbf{y}_h^t\mathbf{A}_h^t\mathbf{M}_h^{-1} + \mathbf{g}^t\mathbf{M}_h^{-1})\mathbf{M}_h(\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h + \mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{g})\\
&= \operatorname*{argmin}_{\mathbf{y}_h\le\boldsymbol{\psi}} \frac{1}{2}\mathbf{y}_h^t\left[\beta\mathbf{A}_h^t\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{A}_h + \mathbf{M}_h\right]\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_h^t(-\beta\mathbf{A}_h^t\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{M}_h\mathbf{y}_d).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

记 $\mathsf{B}_h = \beta\mathsf{A}_h^t\mathsf{M}_h^{-1}\mathsf{A}_h + \mathsf{M}_h$ and $\tilde{\mathsf{y}}_d = -\beta\mathsf{A}_h^t\mathsf{M}_h^{-1}\mathsf{g} + \mathsf{M}_h\mathsf{y}_d$。令 $\mathfrak{n} = \{1, 2, \ldots, n_h\}$，则 (A.4) 的原始-对偶活动集方法如下。

- 给定初始猜测 $(\mathsf{y}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$，其中 $\boldsymbol{\lambda}_0 \geq 0$，定义

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{j \in \mathfrak{n} : \boldsymbol{\lambda}_0 + c(\mathbf{y}_0(j) - \boldsymbol{\psi}(j)) > 0\}, \\ \mathcal{I}_0 &= \{j \in \mathfrak{n} : \boldsymbol{\lambda}_0 + c(\mathbf{y}_0(j) - \boldsymbol{\psi}(j)) \leq 0\} = \mathfrak{n} \setminus \mathcal{A}_0. \end{aligned}$$

- 对于 $k \geq 1$，我们递归地求解该系统

$$\mathbf{B}_h\mathbf{y}_k + \boldsymbol{\lambda}_k = \tilde{\mathbf{y}}_d, \tag{A.5}$$

$$\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\psi} \quad \text{on} \quad \mathcal{A}_{k-1}, \tag{A.6}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = 0 \quad \text{on} \quad \mathcal{I}_{k-1}. \tag{A.7}$$

- 然后按如下方式更新活动集和非活动集

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &= \{j \in \mathfrak{n} : \boldsymbol{\lambda}_k + c(\mathbf{y}_k(j) - \boldsymbol{\psi}(j)) > 0\}, \\ \mathcal{I}_k &= \{j \in \mathfrak{n} : \boldsymbol{\lambda}_k + c(\mathbf{y}_k(j) - \boldsymbol{\psi}(j)) \leq 0\} = \mathfrak{n} \setminus \mathcal{A}_k. \end{aligned}$$

(A.5)-(A.7) 的唯一解由下式确定

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k(\mathcal{A}_{k-1}) &= \boldsymbol{\psi}(\mathcal{A}_{k-1}), \\ \boldsymbol{\lambda}_k(\mathcal{I}_{k-1}) &= 0, \\ \mathbf{B}_h(\mathcal{I}_{k-1},\mathcal{I}_{k-1})\mathbf{y}_k(\mathcal{I}_{k-1}) &= \tilde{\mathbf{y}}_d(\mathcal{I}_{k-1}) - \mathbf{B}_h(\mathcal{I}_{k-1},\mathcal{A}_{k-1})\boldsymbol{\psi}(\mathcal{A}_{k-1}), \\ \boldsymbol{\lambda}_k(\mathcal{A}_{k-1}) &= \tilde{\mathbf{y}}_d(\mathcal{A}_{k-1}) - (\mathbf{B}_h\mathbf{y}_k)(\mathcal{A}_{k-1}). \end{aligned} \tag{A.8}$$

注 A.1. 这里遵循 MATLAB 惯例：向量 $\mathsf{y}_k(\mathcal{A}_{k-1})$ 是由 y_k 中与索引集 $\mathcal{A}_{k-1}$ 对应的分量构成的子向量；矩阵 $\mathsf{B}_h(\mathcal{I}_{k-1},\mathcal{I}_{k-1})$ 是由 B_h 中与索引集 $\mathcal{I}_{k-1}$ 对应的行和列构成的子矩阵，等等。

Appendix B. Proofs of Lemma 3.3 and Lemma 4.3

引理 3.3 的证明。众所周知，[3, 42, 17]

$$a_h^{\mathrm{sip}}(w, v) \leq C\,|||w|||_h\,|||v|||_h \quad \forall w, v \in E(\Delta; L_2(\Omega)) + V_h, \tag{B.1}$$

$$a_h^{\mathrm{sip}}(v, v) \geq C\,|||v|||_h^2 \quad \forall v \in V_h. \tag{B.2}$$

对于对流-反应项，对所有 $w, v \in E(\Delta;\ L_2(\Omega))$，有 $+V_h$ ，

$$
\begin{aligned}
a_h^{\mathrm{ar}}(w,v) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla w+\gamma w, v)_T - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i\cup\mathcal{E}_h^{b,-}}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta}[w],\{v\})_e \\
&\lesssim \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\nabla w\|^2_{L_2(T)}\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \\
&\quad + \left(\sum_{e\in\mathcal{E}_h^i\cup\mathcal{E}_h^{b,-}}\frac{\sigma}{h_e}\|[w]\|^2_{L_2(e)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{e\in\mathcal{E}_h^i\cup\mathcal{E}_h^{b,-}}\frac{h_e}{\sigma}\|\{v\}\|^2_{L_2(e)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim |\!|\!|w|\!|\!|_h\,|\!|\!|v|\!|\!|_h\,,
\end{aligned}
$$

其中我们使用了 $\boldsymbol{\zeta}\in[W^{1,\infty}(\Omega)]^2$, $\gamma\in W^1_\infty(\Omega)$、(4.5) 和 (4.7)。此外，经过分部积分，对于所有 $v\in V_h$，有：

$$
\begin{aligned}
a_h^{\mathrm{ar}}(v,v) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla v+\gamma v, v)_T - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i\cup\mathcal{E}_h^{b,-}}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta}[v],\{v\})_e \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}((\gamma-\frac{1}{2}\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})v, v)_T + \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial T}\frac{1}{2}(\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n})v^2\,ds \\
&\quad - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i\cup\mathcal{E}_h^{b,-}}\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}[v]\{v\}\,ds \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}((\gamma-\frac{1}{2}\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})v, v)_T + \int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}|\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}|v^2\,ds.
\end{aligned}
$$

根据假设 (1.6)，我们立即得到 $a_h^{\mathrm{ar}}(v,v)\ \geq 0$。证明至此完成。□

P引理 4.3 的证明。由 (3.18)、(3.19)、(4.14) 和 (4.8) 可得

$$
\begin{aligned}
|\!|\!|I_h w - R_h w|\!|\!|_h^2 &\leq C a_h(I_h w - R_h w, I_h w - R_h w) \\
&= C a_h(I_h w - w, I_h w - R_h w) \\
&\leq C h^\tau \|\mathcal{L} w\|_{L_2(\Omega)}\,|\!|\!|I_h w - R_h w|\!|\!|_h\,,
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

这意味着

$$
|\!|\!|I_h w - R_h w|\!|\!|_h \leq C h^\tau \|\mathcal{L} w\|_{L_2(\Omega)}. \tag{B.4}
$$

因此，由三角不等式可得（4.17）。通过对偶论证可得估计式（4.18）。设 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 定义为

$$\begin{aligned} -\Delta\phi - \boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\phi + (\gamma - \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})\phi &= w - R_h w \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \phi &= 0 \qquad\qquad\quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{B.5}$$

对偶问题 (B.5) 的弱形式是求满足以下条件的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$a(v,\phi) = (v, w - R_h w) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{B.6}$$

由椭圆正则性 (1.9)，可得

$$\|\phi\|_{H^{1+\alpha}(\Omega)} \le C_\Omega \|w - R_h w\|_{L_2(\Omega)}. \tag{B.7}$$

由 (B.5) 可知,

$$\begin{aligned} \|w - R_h w\|_{L_2(\Omega)}^2 &= (-\Delta\phi - \boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\phi + (\gamma - \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})\phi, w - R_h w)_{L_2(\Omega)} \\ &= (-\Delta\phi, w - R_h w)_{L_2(\Omega)} + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (-\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\phi + (\gamma - \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})\phi, w - R_h w)_T. \end{aligned} \tag{B.8}$$

由 SIP 方法的伴随一致性，可得

$$(-\Delta\phi, w - R_h w)_{L_2(\Omega)} = a_h^{sip}(w - R_h w, \phi). \tag{B.9}$$

由分部积分可得

$$\begin{aligned} &\sum_{T\in\mathcal{T}_h} (-\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\phi + (\gamma - \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})\phi, w - R_h w)_T \\ =&\sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla(w - R_h w), \phi)_T + (\gamma(w - R_h w), \phi)_T \\ &- \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n})(w - R_h w)\phi \, ds. \end{aligned} \tag{B.10}$$

最后一项可改写如下： [3, 30],

$$\begin{aligned} &\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n})(w - R_h w)\phi \, ds \\ =&\sum_{e\in\mathcal{E}_h^i} \int_e \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}[(w - R_h w)\phi] \, ds + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^b} \int_e \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}(w - R_h w)\phi \, ds \\ =&\sum_{e\in\mathcal{E}_h^i} \int_e \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}[w - R_h w]\{\phi\} \, ds + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i} \int_e \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}\{w - R_h w\}[\phi] \, ds \\ &+ \sum_{e\in\mathcal{E}_h^b} \int_e \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}(w - R_h w)\phi \, ds. \end{aligned} \tag{B.11}$$

于是，根据 $[\phi]=0$ 在内部边上以及 $\phi=0$ 在 $\partial\Omega$上，可得

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial T}(\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n})(w-R_hw)\phi\,ds=\sum_{e\in\mathcal{E}_h^i\cup\mathcal{E}_h^{b,-}}\int_e\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{n}[(w-R_hw)]\{\phi\}\,ds. \tag{B.12}$$

根据 (B.10)–(B.12)，可得

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(-\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\phi+(\gamma-\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})\phi,w-R_hw)_T=a_h^{ar}(w-R_hw,\phi), \tag{B.13}$$

结合 (B.9)，可得以下结果：

$$\|w-R_hw\|^2_{L_2(\Omega)}=a_h(w-R_hw,\phi). \tag{B.14}$$

因此，由 (B.14)、(4.14)、(4.8)、(3.18) 和 (B.7) 可得

$$\begin{aligned}\|w-R_hw\|^2_{L_2(\Omega)}&=a_h(w-R_hw,\phi)\\&=a_h(w-R_hw,\phi-I_h\phi)\le C\,|||w-R_hw|||_h\,|||\phi-I_h\phi|||_h\\&\le Ch^\tau\,|||w-R_hw|||_h\,\|w-R_hw\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{B.15}$$

结合 (4.17) 和 (B.15)，我们得到估计式 (4.18)。

□

Acknowledgement

作者谨向 Susanne C. Brenner 教授和 Li-Yeng Sung 教授致谢，感谢他们对本项目提出的建议并参与讨论。第三位作者的部分研究工作得到了美国国家科学基金会项目 DMS-2111004 的资助。

References

[1] R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier。《Sobolev空间》，第 140 卷。爱思唯尔，2003 年。[2] T. Apel、A.-M. S¨andig 和 J. R. Whiteman。带角非光滑区域中椭圆边值问题有限元解的分级网格加密与误差估计。《应用科学中的数学方法》，19(1):63–85，1996 年。[3] D. N. Arnold、F. Brezzi、B. Cockburn 和 L. Marini。椭圆问题间断伽辽金方法的统一分析。《SIAM 数值分析杂志》，39(5):1749–1779，2002 年。[4] B. Ayuso 和 L. D. Marini。对流-扩散-反应问题的间断伽辽金方法。《SIAM 数值分析杂志》，47(2):1391–1420，2009 年。[5] I. Babu˘ska。带角区域的有限元方法。《Computing》，6(3):264–273，1970 年。[6] M. Bergounioux 和 K. Kunisch。状态约束最优控制问题的原始-对偶策略。《计算优化与应用》，22(2):193–224，2002 年。[7] J. J. Brannick、H. Li 和 L. T. Zikatanov。针对角点奇异性，分级网格上多重网格 V循环的一致收敛性。《数值线性代数及其应用》，15(2-3):291–306，2008 年。

[8] S. C. Brenner。分片 ′函数的 Poincar ′e–Friedrichs 不等式。《SIAM 数值分析杂志》，41(1):306–324，2003 年。[9] S. C. Brenner。具有逐点状态约束的椭圆分布参数最优控制问题的有限元方法（综述）。《数学科学进展》，第 3–16 页，2020 年。[10] S. C. Brenner、C. B. Davis 和 L.-Y. Sung。采用单位分解方法离散化的状态约束椭圆分布参数最优控制问题的加性 Schwarz 预条件子。载于《科学与工程中的区域分解方法 XXV 25》，第 100–107 页。施普林格，2020 年。[11] S. C. Brenner、J. Gedicke 和 L.-Y. Sung。 C^0 非凸多边形区域上具有逐点状态约束的椭圆分布参数最优控制问题的内罚方法。《SIAM 数值分析杂志》，56(3):1758–1785，2018 年。[12] S. C. Brenner、J. Gedicke 和 L.-Y. Sung。具有逐点状态约束的椭圆分布参数最优控制问题的对称内罚方法。《应用数学计算方法》，2023 年。[13] S. C. Brenner、T. Gudi、K. Porwal 和 L.-Y. Sung。具有逐点状态约束和控制约束的椭圆分布参数最优控制问题的 Morley 有限元方法。《ESAIM：控制、优化与变分法》，24(3):1181–1206，2018 年。[14] S. C. Brenner、S. Liu 和 L.-Y. Sung。采用一般状态方程并带有逐点状态约束的分布参数椭圆最优控制问题的 P_1 有限元方法。《应用数学计算方法》，21(4):777–790，2021 年。[15] S. C. Brenner、S. Liu 和 L.-Y. Sung。具有逐点状态约束的椭圆最优控制问题的多重网格方法。《应用数学研究成果》，17:100356，2023 年。[16]S. C. Brenner、M. Oh 和 L.-Y. Sung。具有诺伊曼边界条件的椭圆状态约束分布参数最优控制问题的 P_1 有限元方法。《应用数学研究成果》，8:100090，2020 年。[17] S. C. Brenner 和 L. R. Scott。《有限元方法的数学理论》，第 15 卷。Springer Science & Business Media，2008 年。[18] S. C. Brenner 和 L.-Y. Sung。具有逐点状态约束的椭圆分布参数最优控制问题有限元方法的一种新收敛性分析。《SIAM 控制与优化杂志》，55(4):2289–2304，2017 年。[19] S. C. Brenner 和 L.-Y. Sung。平面多边形区域上对称内罚方法的内部最大模误差估计。《应用数学计算方法》，2022 年。[20] S. C. Brenner、L.-Y. Sung 和 J. Gedicke。 P_1 具有逐点状态约束的椭圆最优控制问题的有限元方法。《IMA 数值分析杂志》，2018 年 11 月。[21] S. C. Brenner、L.-Y. Sung 和 Z. Tan。具有逐点状态约束的椭圆分布参数最优控制问题的 C^1 虚单元方法。《应用科学中的数学模型与方法》，31(14):2887–2906，2021 年。[22] S. C. Brenner、L.-Y. Sung 和 Y. Zhang。具有状态约束的椭圆最优控制问题的二次 C^0 内罚方法。载于《偏微分方程间断伽辽金有限元方法的最新进展》，第 97–132 页。施普林格，2014 年。[23] F. Brezzi、L. D. Marini 和 E. S ¨uli。一阶双曲问题的间断伽辽金方法。《应用科学中的数学模型与方法》，14(12):1893–1903，2004 年。

[24] E. Casas、M. Mateos 和 B. Vexler。具有状态约束的最优控制问题的新正则性结果与改进误差估计。ESAIM：控制、优化与变分法，20(3)：803–822，2014。[25] Z. Chen 和 H. Chen。带惩罚项的间断伽辽金方法用于二阶椭圆问题的逐点误差估计。SIAM 数值分析杂志，42(3)：1146–1166，2004。[26] S. Cherednichenko 和 A. R¨osch。具有逐点控制和状态约束的椭圆控制问题离散化的误差估计。计算优化与应用，44(1)，2009。[27] P. Ciarlet。分数阶Sobolev空间中Scott–Zhang 插值的分析。数值数学杂志，21(3)：173–180，2013。[28] P. G. Ciarlet。椭圆问题的有限元方法，第19卷。1978。[29] M. Dauge。角域上的椭圆边值问题。《数学讲义》，1341：1，1988。[30] D. A. Di Pietro 和 A. Ern。间断Galerkin方法的数学 аспект，第69卷。Springer Science & Business Media，2011。[31]A. Ern 和 J.-L. Guermond。有限元拟插值与最佳逼近。ESAIM：数学建模与数值分析，51(4)：1367–1385，2017。[32] J. Frehse。关于高阶变分不等式中的可微性问题。在《汉堡大学数学研讨班论文集》中，第36卷，第140–149页。Springer，1971。[33]J. Frehse。双调和变分不等式解的正则性。Manuscripta Mathematica，9(1)：91–103，1973。[34] M. Heinkenschloss 和 D. Leykekhman。对流占优椭圆线性二次最优控制问题的 SUPG解的局部误差估计。SIAM 数值分析杂志，47(6)：4607–4638，2010。[35] M. Hinterm¨uller 和 M. Hinze。状态约束椭圆控制问题中的 Moreau–Yosida正则化：误差估计与参数调整。SIAM 数值分析杂志，47(3)：1666–1683，2009。[36] M. Hinterm¨uller、K. Ito 和 K. Kunisch。原始-对偶主动集策略作为半光滑牛顿方法。SIAM优化杂志，13(3)：865–888，2002。[37] M. Hinterm¨uller、A. Schiela 和 W. Wollner。基于 Moreau–Yosida 的路径跟踪方法中状态约束最优控制的原始-对偶路径长度。SIAM优化杂志，24(1)：108–126，2014。[38] D. Leykekhman 和 M. Heinkenschloss。对流占优椭圆线性二次最优控制问题的间断Galerkin方法局部误差分析。SIAM 数值分析杂志，50(4)：2012–2038，2012。[39] W. Liu、W. Gong 和 N. Yan。状态约束最优控制问题的一种新有限元逼近。计算数学杂志，第97–114页，2009。[40] C. Meyer。具有逐点状态和控制约束的椭圆控制问题有限元逼近的误差估计。控制与控制论，37：51–83，2008。[41] S. Nazarov 和 B. A. Plamenevsky。分片光滑边界域中的椭圆问题，第13卷。Walter de Gruyter，2011。[42] B. Rivi`ere。求解椭圆与抛物方程的间断Galerkin方法：理论与实现。SIAM，2008。

[43] A. R¨osch 和 D. Wachsmuth。具有状态和控制约束的最优控制问题的后验误差估计。数值数学，120(4)：733–762，2012。[44] H. L. Royden 和 P. Fitzpatrick。实分析，第32卷。麦克米伦纽约，1988。[45] W. Rudin。实分析与复分析。塔塔麦格劳-希尔教育，2006。[46] S. W. Walker。FELICITY：用于开发有限元方法和仿真建模的 MATLAB/C++ 工具箱。SIAM 科学计算杂志，40(2)：C234–C257，2018。

Sijing Liu, Department of Mathematics, University Of Connecticut, Storrs, CT,USA电子邮箱：sijing.liu@uconn.eduZhiyu Tan, Center for Computation & Technology, Louisiana State University,Baton Rouge, LA, USA电子邮箱：ztan@cct.lsu.eduYi Zhang, Department of Mathematics, University Of North Carolina Greens-boro, Greensboro, NC, USA电子邮箱：yzhang7@uncg.edu

-