arXiv:2303.04978v1 [math.AG] 9 Mar 2023

δ-形式的推前与拉回及其在非阿基米德阿拉克洛夫几何中的应用

Yulin Cai

2023年3月10日

摘要

我们研究了两类 δ-形式的推前，并定义了 δ-形式的拉回。作为 Gubler-K¨unnemann 理论的推广，我们证明了投影公式和热带 Poincar´e-Lelong 公式。作为一项应用，我们沿用 [10] 中的思路，推广了代数簇上 δ-形式的概念，从而能够为任意分段光滑度量定义第一陈形式。

目录

1 引言 1 2 $N_{\mathbb{R}}$ **3**上的超形式与超流 3
$N_{\mathbb{R}}$ **94** δ上的多面体超流
$N_{\mathbb{R}}$ **13**上的形式 5 δ-形
式的推前与拉回 22 6 X^{an} **29**上的图表
与 δ-形式 7 Poincar´e-Lelong 公式 35

致谢 **36**

参考文献 **37**

1 引言

[6], Chambert-Loir 和 Ducros 为 Berkovich 意义下完备非阿基米德域 K 上的解析空间 X（不一定是代数的或紧的）引入了一种势理论。这种理论以类似于阿基米德情形的方式处理阿拉克洛夫理论的非阿基米德部分。借助这一理论，他们证明 Chambert-Loir 测度 [4] 是光滑赋度量线丛的第一陈形式楔积的极限。

[10], Gubler 和 K¨unnemann 给出了代数簇上的 δ-形式与 δ-流理论。借助他们的理论，他们为赋范线丛 $\overline{L}$ 定义了第一陈形式 $c_1(\overline{L})$，由此自然得到测度 $c_1(\overline{L})^n$ 。此外，他们还为所谓的 δ-度量定义了第一陈形式；这是一种特殊的分段光滑度量。他们证明，阿贝尔簇上线丛的典范度量是 δ-度量。

受 Gubler 和 K¨unnemann 论文 [10], 的启发，Mihatsch 在热带几何中引入了 δ-形式，并在 [14] 中构造了交乘积。在他最近的另一篇论文 [13], 中，他研究了热带空间上的δ-形式。由于良好 Berkovich 空间的骨架满足热带平衡条件，他得以在良好、严格的 Berkovich 空间上定义 δ-形式。

本文的主要目标是发展热带几何中 δ-形式的理论，包括推前与拉回，以及一些重要公式：投影公式、热带 Poincar´e-Lelong 公式。作为应用，沿用 [10], 中的思路，我们可以在代数簇上得到比 [10], 更多的 δ-形式，并且可以为任意分段

光滑度量定义第一陈形式。利用热带 Poincar´e-Lelong 公式，我们证明了 δ-流的 Poincar´e-Lelong 公式。

为方便读者，我们在第 2 节、第 3 节回顾仿射空间上的超形式、超流和多面体超流。

我们将在第 4 节回顾 Mihatsch 的主要结果，包括定理 4.7，该定理断言，多面体超流是平衡的，当且仅当它是 δ-形式；以及定理 4.23，该定理表明存在唯一的 $\wedge$-乘积，可用于 δ-形式。一个有趣的事实是，$\wedge$-乘积同时推广了超形式的乘积和热带循环的交乘积。对于有限生成的自由阿贝尔群 N 和开子集 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$，$\Omega$ 上 (p,q,l) 型的 δ-形式（分别为 (p,q) 型的分片光滑形式）构成的集合记作 $B^{p,\,q,\,l}(\widetilde{\Omega})$（分别记作 $PS^{p,\,q}(\widetilde{\Omega})$）。定义 4.17 中给出了 $\alpha \in B^{p,\,q,\,l}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\phi \in PS^{0,\,0}(\widetilde{\Omega})$ 的角轨迹除子 $\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha$ 的概念。接着，我们证明以下热带 Poincar´e-Lelong 公式，它推广了 [10, 推论 3.19]。

定理 1.1（定理 4.25，热带 Poincar´é–Lelong 公式）。对于任意 $\alpha \in B^{p,\,q,\,l}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\phi \in PS^{0,\,0}(\widetilde{\Omega})$，我们有

$$\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha = d'd''\phi\wedge\alpha - d'_P d''_P\phi\wedge\alpha = \partial'(d''_P\phi\wedge\alpha) + d''_P\phi\wedge\partial'\alpha$$

属于 $P(\widetilde{\Omega})$。特别地，$\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha \in B^{p,\,q,\,l+1}(\widetilde{\Omega})$。

这里 d'_P, d''_P（分别为 ∂', ∂''）是多面体导数（分别为边界导数），且 $d' = d'_P + \partial', d'' = d''_P + \partial''$。

在第 5 节中，我们通过整 $\mathbb{R}$-仿射映射考察 δ-形式的两类推前：一类从超流的视角出发，另一类从热带循环的视角出发。我们定义 δ-形式的拉回，这对我们在代数簇上定义 δ-形式至关重要。此外，我们证明以下结果。

定理 1.2（定理 5.13）。预层 $B : \mathcal{AT}op_{\mathbb{Z},\mathbb{R}} \to \mathcal{R}ing, (N,\Omega) \mapsto B(\Omega)$ 是一个 C^∞-模。此外，对于态射 $F\colon (N',\Omega') \to (N,\Omega)$，下列陈述成立。

(1) $B(\Omega)$ 上的 $\wedge$-乘积关于 $d', d'', d'_P, d''_P, \partial'$ 和 ∂'' 满足莱布尼茨法则。(2) F^* 与 $d', d'', d_P, d''_P, \partial', \partial''$ 可交换，并且它是分次的，即 $F^*(B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})) \subset B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}')$,. (3)（关于 F_* 的投影公式）对于任意 $\alpha \in B_c(\Omega')$ $\beta \in B(\Omega)$，有

$$F_*(\alpha \wedge F^*\beta) = F_*\alpha \wedge \beta \in B(\widetilde{\Omega}).$$

(4)（F_*的投影公式）对于任意 $\alpha \in B(N'_{\mathbb{R}})$ $\beta \in B(N_{\mathbb{R}})$，我们有

$$\widehat{F}_*(\alpha \wedge F^*\beta) = \widehat{F}_*\alpha \wedge \beta \in B(N_{\mathbb{R}}).$$

在第6节中，我们回顾热带化和代数簇上的典范图表的概念。然后，我们遵循 [10] 中的思想定义 δ-形式。我们的定义给出了更多的 δ-形式，从而无需像 [10, 4.6] 中那样取商就可以得到微分。大多数概念和结果，例如积分、斯托克斯公式，也可以用类似的方式给出。

在第7节中，我们通过热带 Poincar´é-Lelong 公式重新证明 Poincar´é-Lelong 公式。

定理1.3（定理 7.3，Poincar´é-Lelong 公式）。设 X 是定义在 K 上的整代数簇。对于任意有理函数 $f \in K^*(X)$，Poincar´é-Lelong 方程

$$\delta_{[\mathrm{div}(f)]} = d'd''[\log|f|]$$

在 $E^{1,1}(X^{\mathrm{an}})$中成立。

请注意，我们的方法不同于 [6] 和 [10], ，我们使用 [6, 命题 4.6.6] 以及热带 Poincar´e-Lelong 公式。该定理使我们能够定义赋范线丛 $\overline{L}$（其度量为分段光滑度量 $||\cdot||$）的第一陈 δ-形式 $c_1(\overline{L})$；这推广了 δ-度量在 [10,第 9]节中的相同概念。

记号与术语

关于凸几何的术语，我们参阅 [10, 附录] 和 [15]。我们用 N、N'、$\cdots$ 表示有限生成自由阿贝尔群，用 N^*、$(N')^*\cdots$ 表示它们的对偶群。 N 的秩记为 $\mathrm{rk}(N)$。为避免混淆，我们对 $\mathbb{R}$-线性空间及相应的仿射空间均使用记号 $N_{\mathbb{R}} := N_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。我们用 σ、τ、$\cdots$ 表示 $N_{\mathbb{R}}$ 上的整 $\mathbb{R}$-仿射多面体。对于给定的整 $\mathbb{R}$-仿射多面体 σ，我们用 $\mathbb{A}_\sigma$ 表示由多面体 σ 生成的仿射子空间，并用 $N_{\sigma,\,\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{A}_\sigma$ 的底层向量空间。我们令 $N_\sigma = N \cap N_{\sigma,\,\mathbb{R}}$。我们还用 $\mathrm{relint}(\sigma)$ 表示 σ 在 $\mathbb{A}_\sigma$ 中的内部点集，并记为 $\partial\sigma = \sigma \setminus \mathrm{relint}(\sigma)$。

给定一个在 $N_{\mathbb{R}}$ 中的整 $\mathbb{R}$-仿射多面体复形 $\mathcal{C}$ 以及 σ 和 $\tau \in \mathcal{C}$，若 τ 是 σ 的一个面，我们记作 $\tau \le \sigma$；若此外还有 $\tau \neq \sigma$，则记作 $\tau < \sigma$。若 $\tau < \sigma$ 且 $\dim(\sigma) - \dim(\tau) = 1$，我们称 τ 为 σ 的一个面。我们将相对于 $N_{\mathbb{R}}$ 而言，$\mathcal{C}$ 中余维为 l（分别为维数 n）的多面体记为 $\mathcal{C}^l$（分别为 $\mathcal{C}_n$）。$\mathcal{C}$ 上的一个光滑权重是由函数 $\{m_\sigma\}_\sigma$ 组成的族，其中 σ 遍历 $\mathcal{C}$ 中的顶维多面体，且 m_σ 是 $\mathrm{relint}(\sigma) \subset \mathbb{A}_\sigma$ 上的光滑函数。细化关系是具有常权重的整 $\mathbb{R}$-仿射复形集合上的一个等价关系。我们将等价类记为 $C = \sum m_\sigma[\sigma]$，并记 $|C| = \bigcup \mathrm{Supp}(\sigma)$。此外，我们将纯维数为 n 的 σ 等价类集合记为 $F_n(N_{\mathbb{R}})$，并令 $F^l(N_{\mathbb{R}}) := F_{\mathrm{rk}(N)-l}(N_{\mathbb{R}})$。

对于仿射映射 $F\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$，我们将相应的线性映射记为 $dF\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$。为方便起见，我们令 $\widetilde{\mathcal{AF}op}_{\mathbb{Z},\,\mathbb{R}}$ 为仿射空间开子集范畴，即对象为 (N, Ω)，其中 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$，态射为整 $\mathbb{R}$-仿射映射 $F\colon (N', \Omega') \to (N, \Omega)$，满足 $\widetilde{F}(\Omega') \subset \Omega$。

在本文中，K 是一个赋有非平凡赋值的完备非阿基米德域。代数簇 X 在 K 上的意思是指有限型 K 上的分离概形。我们将 X^{an} X 在 Berkovich 意义下的解析化记为 [3]。

2 $N_{\mathbb{R}}$ 上的超形式与超流

本节将回顾仿射空间上的超形式与超流。这一概念最初由 Lagerberg [11] 引入。参考文献 [6, 第 1] 节和 [8, 第 2] 节也对超形式与超流作了完整的讨论。

在本节中，N 和 N' 表示秩分别为 r 和 r' 的有限秩自由阿贝尔群。由于本节的大多数结果都不难证明，若此处不予证明，我们便将其留给读者。

2.1 超形式

定义 2.1. 对于开子集 $U \subset N_{\mathbb{R}}$，U 上的一个 (p, q)-超形式是

$$A^{p,q}(U) := C^\infty(U) \otimes \wedge^p (N_{\mathbb{R}})^* \otimes \wedge^q (N_{\mathbb{R}})^*.$$

形式上，一个 (p, q)-超形式可写为

$$\alpha = \sum_{|I|=p,|J|=q} \alpha_{IJ} d'x_I \wedge d''x_J,$$

其中 I（分别地，J）由 $0 < i_1 < \cdots < i_p \le r$（分别地，$0 < j_1 < \cdots < j_q \le r$）、$\alpha_{IJ} \in C^\infty(U)$ 和

$$d'x_I \wedge d''x_J := d'x_{i_1} \wedge \cdots \wedge d'x_{i_p} \otimes d''x_{j_1} \wedge \cdots \wedge d''x_{j_p}.$$

我们记

$$A(U) := \bigoplus_{p,q=1}^{n} A^{p,q}(U),$$

它可以视为一个 $C^\infty(U)$-模。楔积按通常方式在 $A(U)$ 中定义。

存在一个微分算子 $d'\colon A^{p,q}(U) \to A^{p+1,q}(U)$，定义如下

$$d'\alpha = \sum_{|I|=p,|J|=q} \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial x_i} d'x_i \wedge d'x_I \wedge d''x_J.$$

类似地，我们定义 $d''\colon A^{p,q}(U) \to A^{p,q+1}(U)$ 为

$$\begin{aligned} d''\alpha &= \sum_{|I|=p,|J|=q} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial x_j} d''x_j \wedge d'x_I \wedge d''x_J \\ &= \sum_{|I|=p,|J|=q} \sum_{j=1}^{r} (-1)^p \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial x_j} d'x_I \wedge d''x_j \wedge d''x_J. \end{aligned}$$

此外，我们令 $d = d' + d''$。

我们将运算 $J\colon A^{p,q}(U) \to A^{q,p}(U)$ 定义为

$$J\alpha = (-1)^{pq} \sum_{|I|=p,|J|=q} \alpha_{IJ} \wedge d'x_J \wedge d''x_I.$$

超形式 $\alpha \in A^{p,p}(U)$ 称为对称的，如果 $\alpha = (-1)^p J\alpha$。

显然，$A^{p,q}(U)$ 定义了关于一般拓扑的一个层 $A^{p,q}$，其定义在 $N_{\mathbb{R}}$ 上。我们用 $A^{p,q}_c(U)$ 表示 U 上具有紧支撑的 (p,q)-超形式空间。

注 2.2. (1) 我们有显然的性质：$d'd' = d''d'' = 0$。对于 $\alpha \in A^{p,q}(U)$ $\beta \in A^{p',q'}(U)$，我们有

$$d'(\alpha \wedge \beta) = d'\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge d'\beta.$$

(2) 对于仿射映射 $F\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 以及任意开子集 $U \subset N_{\mathbb{R}}$，我们有一个拉回

$$\begin{aligned} &F^* : A^{p,q}(U) \to A^{p,q}(F^{-1}(U)), \\ &d'x_I \wedge d''x_J \mapsto \sum_{|\widetilde{I}|=p,|\widetilde{J}|=q} F_{I\widetilde{I}} F_{J\widetilde{J}} d'x'_{\widetilde{I}} \wedge d''x'_{\widetilde{J}}, \end{aligned}$$

$\sim$ $\sim$，它与 d'、d'' 交换，其中 $F_{I\widetilde{I}} = \det(F(I,I)) \in \mathbb{Z}$ 是线性映射 $dF\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 的第 (I,I) 个子式。

(3) 按照惯例，对于光滑函数 $f \in C^\infty(U)$ 和 $v = \sum a_i e_i \in N_{\mathbb{R}}$，其中 $e_1, \cdots, e_r$ 是 $\sum_{i=1}^{r}$ 与线性函数 $x_1, \cdots, x_r$ 对应的基 N，我们记

$$\frac{\partial f}{\partial v} := \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

2.2 积分

定义 2.3。设 $x_1, \cdots, x_r \in N^*$ 是 N 中某个基的坐标。对于任意开子集 $U \subset N_{\mathbb{R}}$ 和 $\alpha = \alpha_{LL} d'x_L \wedge d''x_L \in A^{r,r}_c(U)$，其中 $L = \{1, \cdots, r\}$，我们定义

$$\int_U \alpha := (-1)^{r(r-1)/2} \int_U \alpha_{LL} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r = (-1)^{r(r-1)/2} \int_U \alpha_{LL} dx_1 \cdots dx_r$$

其中右侧是在 $\mathbb{R}^r$ 上的积分。

对于一个维数为 r 的多面体 $\sigma \subset U$，我们定义

$$\int_\sigma \alpha := (-1)^{r(r-1)/2} \int_\sigma \alpha_{LL} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r = (-1)^{r(r-1)/2} \int_\sigma \alpha_{LL} dx_1 \cdots dx_r.$$

注 2.4. (1) 这个定义与定向的选择无关。

下面的命题表明，积分的定义与 N 的基的选择无关。

命题 2.5. 假设 N, N' 的秩都为 r。设 F: $N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性同构。那么对于任意开子集 $U \subset N_{\mathbb{R}}$ 和 $\alpha \in A^{r,\ c}{}^{r}(U)$

$$\int_{F^{-1}(U)} F^*\alpha = |\det(dF)| \int_U \alpha.$$

其中 dF: $N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 是切空间上的线性映射。

可以在具有纯最高维权重的多面体复形上定义积分。

定义 2.6. 设 $C = \sum m_\sigma[\sigma] \in F^0(N_{\mathbb{R}})$ 是一个纯维数为 $r\sigma\in\mathcal{C}^0$ 且具有常权重的多面体复形。对于定义在 $|\mathcal{C}|$ 的某个邻域上且具有紧支撑的 (r, r)-超形式 α，定义

$$\int_C \alpha := \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} m_\sigma \int_\sigma \alpha,$$

这里我们在右侧使用定义 2.3 中的积分。显然，这与 C 的代表元的选择无关。

为进一步定义更一般的积分，我们使用缩并。

定义 **2 7** $U \subset N_{\mathbb{R}}$ $\alpha \in A^{p\ q}$ U $v_i\ {}_{i\in I}$ $w_j\ {}_{j\in J}$ $I \subset$. . 对任意开子集 ,,( ), 以及 (( ) , ( ))，其中 , 和 , , 缩并 ; (( ) , ( )),(U) 定义为在相应位置插入 v_i, $i \in I$ 和 w_j, $j \in J$。

$\{1, \cdots, p\}$ $J \subset \{1, \cdots, q\}$ v_i $w_j \in N_{\mathbb{R}}$ $\langle\alpha$ $v_i\ {}_{i\in I}$ $w_j\ {}_{j\in J}$ $\rangle \in A^{p-|I|\ q-|J|}$

$\alpha : N_{\mathbb{R}}^{p+q} \to C^\infty(U).$

引理 2.8. 沿用定义 2.7 中的概念。

(1)（莱布尼茨法则）对于任意 $\alpha \in A^{p,q}(U)$ $\beta \in A^{p',q'}(U)$ 和 $v \in N_{\mathbb{R}}$，有

$$\langle\alpha \wedge \beta; ((v)_{\{1\}}, \emptyset)\rangle = \langle\alpha; ((v)_{\{1\}}, \emptyset)\rangle \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \langle\beta; ((v)_{\{1\}}, \emptyset)\rangle,$$

$$\langle\alpha \wedge \beta; (\emptyset, (v)_{\{1\}})\rangle = \langle\alpha; (\emptyset, (v)_{\{1\}})\rangle \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \langle\beta; (\emptyset, (v)_{\{1\}})\rangle.$$

(2) 对任意 $f \in C^\infty(U)$ 和 $v \in N_{\mathbb{R}}$，有

$$\langle d'f; ((v)_{\{1\}}, \emptyset)\rangle = \langle d''f; (\emptyset, (v)_{\{1\}})\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

证明。（1）由线性性，我们可以假设 $\alpha = d'x_{I'} \wedge d''x_{J'}$、 $\beta = d'x_{I''} \wedge d''x_{J''}$ 和 $v = e_i \in N_{\mathbb{R}}$ 对应于函数 x_i。那么结论基于以下事实

$$\langle d'x_I \wedge d''x_J; ((e_i)_{\{1\}}, \emptyset)\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } i \notin I, \\ (-1)^{l-1} d'x_{I\setminus i} \wedge d''x_J & \text{if } i = i_l \in I. \end{cases}$$

我们检查 $i \in I'$ 和 $i \in I''$ 的情形。在这种情况下，在（1）的第一个等式中，左边为 0，右边为

$$\begin{aligned}
&(-1)^{l'-1} d'x_{I'\setminus i;} \wedge d''x_{J'} \wedge dx_{I''} \wedge d''x_{J''} + (-1)^{p+q} d'x_{I'} \wedge d''x_{J'} \wedge (-1)^{l''-1} d'x_{I''\setminus i} \wedge d''x_{J''} \\
=&((-1)^{l'+qp'-1} d'x_{I'\setminus i;} \wedge dx_{I''} + (-1)^{p+qp'+l''-1} d'x_{I'} \wedge d'x_{I''\setminus i}) \wedge d''x_{J'} \wedge d''x_{J''} \\
=&((-1)^{l'+qp'-1} + (-1)^{p+qp'+l''-1+(p-l'+l''-1)}) d'x_{I'\setminus i;} \wedge dx_{I''} \wedge d''x_{J'} \wedge d''x_{J''} \\
=&0.
\end{aligned}$$

(2) 根据定义和线性性，我们可以假设 $v = e_j$。那么结论显然成立。 □

2.3 斯托克斯公式与格林公式

回顾一下，对于一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体 σ 及其一个面 τ，我们选择一维格 N_σ/N_τ 的一个生成元的代表元$\omega_{\sigma,\tau}\in N_\sigma$，使其指向 σ的方向。这样的向量 $\omega_{\sigma,\tau}$ 称为 σ/τ的法向量。

定义 2.9. 设 σ 是 $N_{\mathbb{R}}$中的一个 r维积分 $\mathbb{R}$仿射多面体。对于 σ的任意闭面 τ，设$\omega_{\sigma,\tau}\in N_\sigma = N$是 σ/τ的一个法向量。对于在 σ的某个开邻域上具有紧支撑的任意$(r-1,r)$超形式 η，有缩并 $\langle\eta;(\emptyset,(\omega_{\sigma,\tau})^{\{r\}})\rangle=(-1)^{r-1}\langle\eta;(\emptyset,(\omega_{\sigma,\tau})^{\{1\}})\rangle$，它是一个$(r-1,r-1)$形式。于是我们定义

$$\int_{\partial\sigma}\eta:=(-1)^r\sum_{\tau\le\sigma\ a\ facet}\int_\tau\langle\eta;(\emptyset,(\omega_{\sigma,\tau})_{\{1\}})\rangle,$$

其中右侧按定义 2.3 在$N_{\tau,\mathbb{R}}$上定义。积分与$\omega_{\sigma,\tau}$的选择无关。

类似地，对于在 σ的某个开邻域上具有紧支撑的任意$(r,r-1)$超形式 η，我们定义

$$\int_{\partial\sigma}\eta:=\sum_{\tau\le\sigma\ a\ facet}\int_\tau\langle\eta;((\omega_{\sigma,\tau})_{\{1\}},\emptyset)\rangle.$$

对于一个具有常权重的积分 $\mathbb{R}$-仿射多面体复形 $C=\sum m_\sigma[\sigma]\in\in F^0(N_{\mathbb{R}})$，我们可以通过线性性定义 $\int_{\partial C}\eta$。这与 C 的代表元选择无关。

注 2.10. (1) 注意，对于 σ 附近的任意 $(r-1,r)$-超形式 η 和一个面 $\tau\le\sigma$，形式$\langle\eta;(\emptyset,(\omega_{\sigma,\tau})^{\{r\}})\rangle|_\tau$ 与 $\omega_{\sigma,\tau}$ 的选择无关。对于 σ 附近的一个 $(r,r-1)$-超形式 η，$\langle\eta;((\omega_{\sigma,\tau})^{\{r\}},\emptyset)\rangle|_\tau$ 也类似。

证明。这是由如下事实得出的：对于任意 $v_1,\cdots,v_r\in N_\tau$，我们有

$$\langle\eta;(\emptyset,(v_j)_{j\in\{1,\cdots,r\}})\rangle|_\tau=0.$$

□

命题 2.11（斯托克斯公式）。设 $C=\sum m_\sigma[\sigma]\in F^0(N_{\mathbb{R}})$ 是一个具有常权重的积分 $\mathbb{R}$-仿射多面体复形。对于在 $|C|$ 上具有紧支撑的任意 $(r-1,r)$-超形式 η'（分别地，$(r,r-1)$-超形式 η''），我们有

$$\int_C d'\eta'=\int_{\partial C}\eta',$$
$$\int_C d''\eta''=\int_{\partial C}\eta''.$$

证明。只考虑 $C=[\sigma]$ 是一个维数为 r的多面体的情形。为了对多面体（p-链）应用经典斯托克斯公式，我们固定 $N_{\mathbb{R}}$的坐标函数 x_1、$\cdots$、x_r，并假设 σ 是一个 r-单纯复形；这可以通过三角剖分实现（新边界上的积分可以相互抵消）。我们有一个同构 φ: $N_{\mathbb{R}}\simeq\mathbb{R}^r$,

$$\eta'=\sum_{i=1}^r\eta'_i d'x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{d'x_i}\wedge\cdots\wedge d'x_r\wedge d''x_1\wedge\cdots\wedge d''x_r,$$

$$d'\eta'=\left(\sum_{i=1}^r(-1)^{i-1}\frac{\partial\eta'_i}{\partial x_i}\right)d'x_1\wedge\cdots\wedge d'x_r\wedge d''x_1\wedge\cdots\wedge d''x_r,$$

$$\int_\sigma d'\eta'=(-1)^{r(r-1)/2}\int_{\varphi(\sigma)}\sum_{i=1}^r(-1)^{i-1}\frac{\partial\eta'_i}{\partial x_i}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r=(-1)^{r(r-1)/2}\int_{\varphi(\sigma)}d\omega,$$

^{r} ⌒其中 $\omega = \sum \eta'_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_r$ 和 dx_i 被视为 $\mathbb{R}^r$ 上的光滑形式。对于每个 $_{i=1}$面 $\tau \le \sigma$，我们取 N_τ 的一组基 e'_1、$\cdots$、e'_{r-1}，使得 $\{e'_1, \cdots, e'_{r-1}, \omega_{\sigma,\tau}\}$ 构成 N 的一组基。此外，我们假设 x_1、$\cdots$、x_r 是相应的坐标函数。于是我们有

$$\begin{aligned}(-1)^r \int_\tau \langle \eta'; (\emptyset, (\omega_{\sigma,\tau})_{\{1\}})\rangle &= -\int_\tau \eta'_r d'x_1 \wedge \cdots \wedge d'x_{r-1} \wedge d''x_1 \wedge \cdots \wedge d''x_{r-1} \\ &= -(-1)^{(r-1)(r-2)/2} \int_{\varphi(\tau)} \eta'_r dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \\ &= (-1)^{r(r-1)/2} \cdot (-1)^r \int_{\varphi(\tau)} \omega,\end{aligned}$$

注意，这里 $(-1)^r \int_{\varphi(\tau)} \omega$ 是对带边界定向的 $\varphi(\tau)$ 上的 ω 进行积分，参见 [16,例 22.13]。尽管我们的边界 $\partial\sigma$ 并不光滑，但它是分段光滑的，因此我们可以对单形使用斯托克斯公式，参见 [17, 4.7]。所以这些等式成立。 □

命题 2.12（[6] 引理 1.3.8 格林公式）。沿用命题 2.11 中的概念。对于任意对称的 (p,p)-超形式 α、对称的 (q,q)-超形式 β，在 $|C|$ 附近满足 $p+q = r-1$ 且 $\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \mathrm{Supp}(\beta)$ 紧，我们有

$$\int_C \alpha \wedge d'd''\beta - d'd''\alpha \wedge \beta = \int_{\partial C} \alpha \wedge d''\beta - d''\alpha \wedge \beta.$$

2.4 超流

~ ~定义 2.13. 设 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$ 为一个开子集。Ω 上一个类型为 (p,q) 的超流是一个连续的 $\mathbb{R}$-线性映射 $T: A^{d-p}{}_{,c}{}^{d-q}(\tilde{\Omega}) \to \mathbb{R}$。所有类型为 (p,q) 的超流构成的空间记为 $D^{p,q}(\Omega)$，并且 $D^n(\Omega) := \bigoplus_{p+q=n} D^{p,q}(\Omega)$，$D(\Omega) := \bigoplus_{n=1} D^n(\Omega)$。

~空间 $D(\Omega)$ 构成了 $N_{\mathbb{R}}$ 上的分次双重 $\mathbb{R}$-向量空间层。

~ ~ ~ ~注 2.14. (1) 若 $\Omega' \subset \Omega$，则 $A^{p}{}_{,c}{}^{q}(\Omega') \subset A^{p}{}_{,c}{}^{q}(\Omega)$。因此我们有如下限制映射 ~$D^{p,q}(\Omega) \to D^{p,q}(\Omega')$。众所周知，$D^{p,q}(\Omega)$ 在 $N_{\mathbb{R}}$ 上构成一个精细层。
~ ~

~(2) 根据定义，对于任意 $T \in D^{p,q}(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega} \setminus \mathrm{Supp}(T) &= \{x \in \widetilde{\Omega} \mid T|_{U_x} = 0 \text{ for some open neighborhood } U_x \text{ of } x \text{ in } \widetilde{\Omega}\} \\ &= \left\{ x \in \widetilde{\Omega} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{there is an open neighborhood } U_x \text{ of } x \text{ in } \widetilde{\Omega} \text{ such that} \\ T(\eta) = 0 \text{ for any } \eta \in A_c^{r-p,r-q}(U_x) \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

~这意味着 $\mathrm{Supp}(T)$ 是 Ω 的最小闭子集 V，使得在 V 的某个开邻域内，$\eta|_V = 0$ 蕴含 $T(\eta) = 0$。特别地，若 $\eta|_{\mathrm{Supp}(T)} = \eta'|_{\mathrm{Supp}(T)}$，则 $T(\eta) = T(\eta')$。~利用这一事实，我们可以将 $T(\eta)$ 推广到那些满足 $\mathrm{Supp}(T) \cap \mathrm{Supp}(\eta)$~ 紧的 $\eta \in A^{r-p,r-q}(\Omega)$，定义 $T(\eta) = T(\eta')$；对任意满足 $\eta|_{\mathrm{Supp}(T)} = \eta'|_{\mathrm{Supp}(T)}$ 的 $\eta' \in A^{r-p}{}_{,c}{}^{r-q}(\Omega)$，此值与 η' 的选择无关。

证明。根据 $\mathrm{Supp}(T)$ 的定义，这些等式成立。我们将证明该蕴含。~假设 $\eta \in A^{r-p,\,r-q}(\Omega)$，使得 $\eta|_U = 0$ 在 $\mathrm{Supp}(T)$ 的某个开邻域 U 上成立。∞ ~根据单位分解，我们可以写成 $\eta = \sum \eta_i$，使得对任意 i，存在 $x \in \Omega \setminus \mathrm{Supp}(T)_{i=0}$，满足 $\mathrm{Supp}(\eta_i) \subset U_x$，其中 U_x 是 x 的一个开邻域，且满足
~ ~对 $\Omega \setminus \mathrm{Supp}(T)$ 的描述中给出的性质。因此 $T(\eta_i) = 0$ 且 $T(\eta) = 0$。另一方面，如果 $V \subset \Omega$~ ~是具有此性质的闭子集，那么由集合相等可知 $\Omega \setminus V \subset \Omega \setminus \mathrm{Supp}(T)$。 □

定义 2.15。设 $\widetilde{\Omega} \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个开子集。对于 $T \in D^{p,q}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\alpha \in A^{p',q'}(\widetilde{\Omega})$，楔积 $T \wedge \alpha \in D^{p+p',q+q'}(\widetilde{\Omega})$ 定义为

$$(T \wedge \alpha)(\gamma) := T(\alpha \wedge \gamma)$$

对任意 $\gamma \in A_c^{r-p-p',r-q-q'}(\widetilde{\Omega})$。我们记作 $\alpha \wedge T := (-1)^{(p+q)(p'+q')} T \wedge \alpha$。

我们有以下关于超流的重要例子。

例 2.16。设 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个开子集。

(1) 对任意 $\omega \in L^{p,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，即一个局部可积的 (p,q)-形式，我们有映射

$$\begin{aligned}[\omega] : A_c^{d-p,d-q}(\widetilde{\Omega}) &\to \mathbb{R}, \\ \eta &\mapsto \int_{\widetilde{\Omega}} \omega \wedge \eta\end{aligned}$$

是一个类型为 (p,q) 的超流。因此我们定义一个 $\mathbb{R}$-线性映射

$$[\cdot] : L^{p,q}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\Omega}) \to D^{p,q}(\widetilde{\Omega}).$$

此外，限制映射 $[\cdot] : A^{p,q}(\Omega) \to D^{p,q}(\Omega)$ 是单射，并且对任意 $\alpha, \beta \in A(\Omega)$，我们有

$$[\alpha] \wedge \beta = [\alpha \wedge \beta] = \alpha \wedge [\beta].$$

(2) 设 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 是余维为 l（即维数为 $r-l$）的整 $\mathbb{R}$-仿射多面体。由 σ 产生的狄拉克型超流 $\delta_\sigma \in D^{l,l}(\widetilde{\Omega})$ 定义为

$$\begin{aligned}\delta_\sigma : A_c^{r-l,r-l}(\widetilde{\Omega}) &\to \mathbb{R}, \\ \alpha &\mapsto \int_\sigma \alpha := \int_\sigma i^* \alpha,\end{aligned}$$

其中 $i : N_{\sigma,\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 是自然嵌入，右端项见定义 2.3。

注 2.17。（1）为方便起见且不致引起混淆，我们可以将 $\omega \in L^{p,q}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\Omega})$ 在 $D^{p,q}(\widetilde{\Omega})$ 中的像记作 ω 或 $[\omega]$，并将 $C \in F^l(N_{\mathbb{R}})$ 在 $D^{l,l}(\widetilde{\Omega})$ 中的像记作 C、$[C]$ 或 δ_C。

类似地，我们有以下算子。

引理 2.18。设 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个开子集。我们可以定义超流之间的以下映射。这些映射

$$\begin{aligned}d' &: D^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \to D^{p+1,q}(\widetilde{\Omega}), \\ d'' &: D^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \to D^{p,q+1}(\widetilde{\Omega}), \\ J &: D^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \to D^{q,p}(\widetilde{\Omega}),\end{aligned}$$

定义如下：对于任意 $T \in D^{p,q}(\Omega)$，

$$\begin{aligned}d'(T) : A_c^{r-p-1,r-q}(\widetilde{\Omega}) &\to \mathbb{R}, \\ \gamma &\mapsto (-1)^{p+q+1} T(d'\gamma); \\ d''(T) : A_c^{r-p,r-q-1}(\widetilde{\Omega}) &\to \mathbb{R}, \\ \gamma &\mapsto (-1)^{p+q+1} T(d''\gamma); \\ J(T) : A_c^{r-q,r-p}(\widetilde{\Omega}) &\to \mathbb{R}, \\ \gamma &\mapsto (-1)^r T(J\gamma).\end{aligned}$$

于是，以下结论成立。

(1) 对于任意超形式 $\alpha, \beta \in A(\Omega)$，有

$$d'[\alpha] = [d'\alpha], \quad d''[\alpha] = [d''\alpha], \quad J[\alpha] = [J\alpha].$$

(2) 对于任意 $T \in D^{p,\,q}(\Omega)$ 和 $\alpha \in A^{p',\,q'}(\Omega)$,

$$J(T \wedge \alpha) = JT \wedge J\alpha,$$

$$d'(T \wedge \alpha) = d'T \wedge \alpha + (-1)^{p+q} T \wedge d'\alpha,$$

对于 d''，情况类似。

(3) 我们有

$$d'd' = d''d'' = 0,$$
$$d'd'' = -d''d'.$$

(4) 我们有

$$JJ = \mathrm{id},$$
$$d' = Jd''J, \quad Jd' = d''J,$$
$$d'' = Jd'J, \quad Jd'' = d'J.$$

如果超流 $T \in D^{p,\,p}(\Omega)$ 满足 $JT = (-1)^p T$，则称其为对称的。

例 2.19。设 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$ 为一个开子集。设 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 为一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体。则 $\delta_\sigma \in D^{l,\,l}(\Omega)$ 是对称的。

定义 2.20. 设 $F\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射映射，且 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$、$\Omega' \subset N'_{\mathbb{R}}$ 为开子集，满足 $F(\Omega') \subset \Omega$。设 $T \in D^{p,q}(\Omega')$。假设对于任意紧子集 $K \subset \Omega$，$\mathrm{Supp}(T) \cap F^{-1}(K)$ 是紧的（即 $F|_{\mathrm{Supp}(T)}\colon \mathrm{Supp}(T) \to \Omega$ 是紧的）。T 在 F 下的直接像 $F_*T \in D^{r-r'+p,\,r-r'+q}(\Omega)$ 定义为

$$F_*T(\eta) := T(F^*\eta)$$

对于任意 $\eta \in A^{r'-p,\,r'-q}_c(\Omega)$。根据注 2.14 (3)，这是良定义的。

注 2.21. (1) 若 $\mathrm{Supp}(T)$ 是紧的，则 F_*T 总是有定义。

(2) 对于适当的超流，映射 F_* 是 $\mathbb{R}$-线性的，并且

$$d'F_* = F_*d', \quad d''F_* = F_*d''.$$

例 2.22. 保持定义 2.20 中的概念。设 σ' 是 $N'_{\mathbb{R}}$ 中的一个多面体。假设 $\dim \sigma' = \dim F(\sigma')$，则有

$$F_*\delta_{\sigma'} = \delta_{\widehat{F_*\sigma'}},$$

其中 F_* 是热带几何中多面体的经典推前。

Proof。这由命题 2.5 和 F_* 的定义得出，即 $F_*([\sigma]) = [N\colon dF(N')][F(\sigma)]$. □

注 2.23. (1) 对于一般情形，这并不成立，因为 $F_*\sigma' = 0 \text{ if } \dim \sigma' < \dim F(\sigma')$；一般情形请参见推论 5.3。

3 $N_{\mathbb{R}}$ 上的多面体超流

本节将回顾 [10, Section 2]，中给出的多面体超流；它们是带有光滑超形式的整 $\mathbb{R}$-仿射多面体复形的等价类。我们将研究多面体超流的积分。与前文一样，在本节中，N 表示秩为 r 的有限生成自由阿贝尔群。

3.1 多面体超流

设 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体。对于任意开子集 $\Omega \subset N_{\sigma,\mathbb{R}}$，我们用 $A^{p,q}_{N_{\sigma,\mathbb{R}}}(\Omega)$ 表示 Ω 上 (p,q)-超形式的集合。对于一个开子集 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$，我们定义

$$A^{p,q}_{\sigma}(\widetilde{\Omega} \cap \sigma) := i^* A^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \subset A^{p,q}_{N_{\sigma,\mathbb{R}}}(\widetilde{\Omega} \cap \mathrm{relint}(\sigma)),$$

其中 $i: \Omega \cap \mathrm{relint}(\sigma) \hookrightarrow \Omega$。等价地，$A^{p,q}_{\sigma}(\Omega \cap \sigma)$ 是 Ω 上的 (p,q)-超形式的限制。

注 3.1。（1）注意，$\alpha \in A^{p,q}_{N_{\sigma,\mathbb{R}}}(\Omega \cap \mathrm{relint}(\sigma))$ 中的元素不一定由 $A(\Omega)$ 诱导，除非映射 $\Omega \cap \mathrm{relint}(\sigma) \hookrightarrow \Omega$ 是真嵌入，参见 [12, 引理 5.34]。另一方面，根据单位分解，$A^{p,q}_{\sigma}(\Omega \cap \sigma)$ 是 $\Omega \cap \mathrm{relint}(\sigma)$ 上的 (p,q)-形式在 $A^{p,q}_{N_{\sigma,\mathbb{R}}}(N_{\sigma,\mathbb{R}})$ 中的限制。

（2）如果 $\tau \leq \sigma$，则我们有如下限制映射

$$A^{p,q}_{\sigma}(\widetilde{\Omega} \cap \sigma) \to A^{p,q}_{\tau}(\widetilde{\Omega} \cap \tau),$$
$$\alpha \mapsto \alpha|_{\tau},$$

其中 $\alpha|_{\tau} = \beta|_{\widetilde{\Omega} \cap \mathrm{relint}(\tau)}$ 若 $\alpha = \beta|_{\widetilde{\Omega} \cap \mathrm{relint}(\sigma)}$ 且 $\beta \in A^{p,q}(\Omega)$。这只取决于 α、$\widetilde{\Omega} \cap \sigma$，而与 Ω 或 β 的选择无关。

例 3.2。设 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个开子集。设 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个余维为 l 的整 $\mathbb{R}$-仿射多面体，即维数为 $r-l$。对于任意 $\alpha \in A^{p,q}_{\sigma}(\widetilde{\Omega} \cap \sigma)$，我们定义 $\alpha \wedge \delta_{\sigma} \in D^{p+l,q+l}(\widetilde{\Omega})$ 如下：

$$\alpha \wedge \delta_{\sigma} : A^{r-p-l,r-q-l}_{c}(\widetilde{\Omega}) \to \mathbb{R},$$
$$\beta \mapsto \langle \delta_{\sigma}, \alpha \wedge i^* \beta \rangle = \int_{\sigma} \alpha \wedge i^* \beta,$$

其中 $i: N_{\sigma,\mathbb{R}} \hookrightarrow N_{\mathbb{R}}$ 是自然嵌入。

定义 3.3。设 Ω 是 $N_{\mathbb{R}}$ 的一个开子集。若存在 $N_{\mathbb{R}}$ 的一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体分解 $\mathcal{C}$，以及一族 $(\alpha_{\sigma})_{\sigma \in \mathcal{C}}$ 的超形式 $\alpha_{\sigma} \in A_{\sigma}(\Omega \cap \sigma)$，使得超流 $\alpha \in D(\Omega)$ 满足

$$\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}} \alpha_{\sigma} \wedge \delta_{\sigma}$$

属于 $D(\Omega)$。在此情况下，我们称 $\mathcal{C}$ 与 α 相适配。

我们记 $P^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \subset D^{p,q}(\widetilde{\Omega})$ 为由 $\sum_{\sigma \in \mathcal{C}} \alpha_{\sigma} \wedge \delta_{\sigma}$ 形式的多面体超流空间

且 $\alpha_{\sigma} \in A^{p,q}_{\sigma}(\Omega \cap \sigma)$。这样的元素称为 (p,q,l)-多面体超流。我们设

$$P^{p,q}(\widetilde{\Omega}) := \bigoplus_{l \geq 0} P^{p-l,q-l,l}(\widetilde{\Omega}), \quad P^{n}(\widetilde{\Omega}) := \bigoplus_{p+q=n} P^{p,q}(\widetilde{\Omega}), \quad P(\widetilde{\Omega}) := \bigoplus_{n \geq 0} P^{n}(\widetilde{\Omega}).$$

显然，我们有 $A^{p,q}(\Omega) \subset P^{p,q}(\Omega)$。我们令 $P^{p,q}_{n}(\Omega) := P^{p,q,r-n}(\Omega)$。

注记 3.4. (1) 为简单起见，我们假设 $\mathcal{C}$ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 的多面体分解；但即使 $\mathcal{C}$ 遍历所有多面体复形，定义也相同。

(2) 我们看到，$(\alpha_{\sigma})_{\sigma \in \mathcal{C}}$ 由 α 和 $\mathcal{C}$ 唯一确定，并且

$$\mathrm{Supp}(\alpha) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}} \mathrm{Supp}(\alpha_{\sigma}).$$

证明。为证明唯一性，我们应证明，对于任意 $\sigma \in \mathcal{C}^l$ ，若 $\sum \alpha_\sigma \wedge \delta_\sigma = \sigma \in \mathcal{C}^l$ $\sum \beta_\sigma \wedge \delta_\sigma \in P^{p,\ q,\ l}(\widetilde{\Omega})$，则 $\alpha_\sigma = \beta_\sigma$。这是由映射$\sigma \in \mathcal{C}^l$这一事实得出的

$$[\cdot] : A^{p,q}_{N_{\sigma,\mathbb{R}}}(\widetilde{\Omega} \cap \mathrm{relint}(\sigma)) \to D^{p,q}(\widetilde{\Omega} \cap \mathrm{relint}(\sigma))$$

是单射。 □

$\widetilde{}$(3) 对任意开子集 $U \subset \Omega \subset N_{\mathbb{R}}$，以及 $\alpha = \sum \alpha_\sigma \wedge \delta_\sigma \in D(\Omega)$，我们有$\sigma \in \mathcal{C}$

$$\alpha|_U = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}} \alpha_\sigma|_{U \cap \mathrm{relint}(\sigma)} \wedge \delta_\sigma \in D(U),$$

其中 $\alpha_\sigma|_{U \cap \mathrm{relint}(\sigma)} \in A_\sigma(U \cap \sigma)$ 由 $A(U)$ 中的一个元素诱导。注意， $P^{p,\ q,\ l}$是一个分离预层，而 d', d'' 是局部的。它不是一个层。然而，对于任意有限开$\sim$ $_n$ $\sim$覆盖 $\Omega = \bigcup \Omega_i$，序列$_{i=1}$

$$0 \longrightarrow P^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} P^{p,q}(\widetilde{\Omega}_i) \longrightarrow \prod_{i,j=1}^{n} P^{p,q}(\widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j)$$

是正合的。

3.2 带有光滑超形式的多面体复形

为进一步讨论，我们给出一种描述多面体超流的热带方法。

$\widetilde{}$定义 3.5. 设 Ω 是 $N_{\mathbb{R}}$ 的一个开子集。若每个多面体 $\sigma \in \mathcal{C}_n$ 都赋予了一个光滑 (p,q)-超形式 $\alpha_\sigma \in A^{p,\ _\sigma\ q}(\Omega \cap \sigma)$，则称纯 $\widetilde{}$ 维数 n 的整 $\mathbb{R}$- 仿射多面体复形 $\mathcal{C}$ 在 Ω 上带有光滑 (p,q)- 超形式。这样的复形记为 $(\mathcal{C}_n, \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}_n})$。$(\mathcal{C}_n, \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}_n})$ 的支集定义为

$$|(\mathcal{C}_n, \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}_n})| := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \mathrm{Supp}(\alpha_\sigma)$$

若两个纯维数为 n 的整 $\mathbb{R}$-仿射多面体复形带有光滑超形式 $(\mathcal{C}_n, \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}_n})$、$(\mathcal{C}'_n, \{\alpha'_{\sigma'}\}'_{\sigma' \in \mathcal{C}_n})$，并且对于所有 $\sigma \in \mathcal{C}$ 和 $\sigma' \in \mathcal{C}'$，当 $\sigma \cap \sigma'$ 的维数为 n 时， $|(\mathcal{C}_n, \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}_n})| = |(\mathcal{C}'_n, \{\alpha'_{\sigma'}\}_{\sigma' \in \mathcal{C}'_n})|$ 且 $\sim \alpha_\sigma = \alpha'_{\sigma'}$ 位于 $\Omega \cap \mathrm{relint}(\sigma \cap \sigma')$ 中，则称它们等价。等价类的集合记为 $F^{p,\ _n\ q}(\Omega)$，这是一个阿贝尔群，而 $(\mathcal{C}_n, \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}_n})$ 的像记为 $\sum \alpha_\sigma[\sigma]$。令 $F^{p,\ q,\ l}(\widetilde{\Omega}) := F^{p,\ _{r-l}\ q}(\widetilde{\Omega})$。$_{\sigma \in \mathcal{C}_n}$

$\widetilde{}$注记 3.6。(1) 受 *[5, 第6节.1]* 启发，我们可以将 $F^{p,\ _n\ q}(\Omega)$视为由 $\alpha_\sigma[\sigma]$ 生成的 $\mathbb{R}$-向量空间，其中 $\dim \sigma \leq n$ ，并且 $\alpha_\sigma \in A^{p,\ _\sigma\ q}(\Omega \cap \sigma)$满足以下关系：

- $a \cdot (\alpha_\sigma[\sigma]) = (a\alpha_\sigma)[\sigma]$ 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 以及 $\alpha_\sigma \in A^{p,\ _\sigma\ q}(\Omega \cap \sigma)$均成立。
- $\alpha_\sigma[\sigma] = 0$ 对每个满足 $\dim \sigma < n$ 的多面体 σ；
- $\alpha_\sigma[\sigma] + \alpha_\sigma|_{\sigma \cap H}[\sigma \cap H] = \alpha_\sigma|_{\sigma \cap V_+}[\sigma \cap V_+] + \alpha_\sigma|_{\sigma \cap V_-}[\sigma \cap V_-]$ 其中 σ是 n-多面体，位于$\sim N_{\mathbb{R}}$，$\alpha_\sigma \in A^{p,\ _\sigma\ q}(\Omega \cap \sigma)$，且 V_+、V_- 是半空间，满足 $V_+ \cap V_- = H$是一个超平面，并且 $N_{\mathbb{R}} = V_+ \cup V_-$。

对于最后一个关系，若 $\sigma \subset H$，则等式显然成立；若 $\sigma \not\subset H$，则 $\alpha_\sigma|_{\sigma \cap H}[\sigma \cap H] = 0$。

$\widetilde{}$(2) 从 $F^{p,\ _n\ q}(\Omega)$ 到给定的 $\mathbb{R}$-向量空间 W 的 $\mathbb{R}$-线性映射由一个映射给出

$$\lambda : \{\alpha_\sigma[\sigma] \mid \dim \sigma \leq n \ and \ \alpha_\sigma \in A^{p,q}_\sigma(\widetilde{\Omega} \cap \sigma)\} \to W$$

满足以下关系

- $\lambda((a\cdot\alpha_\sigma)[\sigma])=a\lambda(\alpha_\sigma[\sigma])$ 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 和 $\alpha_\sigma\in A^{p,q}(\widetilde{\Omega}\cap\sigma)$。
- $\lambda(\alpha_\sigma[\sigma])=0$ 对每个满足 $\dim\sigma<n$ 的多面体 σ；
- $\lambda(\alpha_\sigma[\sigma])+\lambda(\alpha_\sigma|_{\sigma\cap H}[\sigma\cap H])=\lambda(\alpha_\sigma|_{\sigma\cap V_+}[\sigma\cap V_+])+\lambda(\alpha_\sigma|_{\sigma\cap V_-}[\sigma\cap V_-])$ 对每个将 $N_\mathbb{R}$ 分成两个闭半空间 V_+、V_- 的 $N_\mathbb{R}$ 上的超平面 H。

(3) 注意，$F^{p,q}(\Omega)$ 具有自然的 $C^\infty(\Omega)$-模结构：对于任意 $f\in C^\infty(\Omega)$ 和 $\alpha_\sigma\in A^{p,q}(\Omega\cap\sigma)$,

$$f\cdot(\alpha_\sigma[\sigma]):=(f|_{\widetilde{\Omega}\cap\mathrm{relint}(\sigma)}\cdot\alpha_\sigma)[\sigma].$$

Pro 命题 3.7. 设 $\Omega\subset N_\mathbb{R}$ 是一个开子集。我们有一个 $C^\infty(\Omega)$-模的同构

$$F^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})\xrightarrow{\sim}P^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}),$$
$$\alpha_\sigma[\sigma]\mapsto\alpha_\sigma\wedge\delta_\sigma.$$

证明。该映射定义良好，因为它满足注记 3.6 (2) 中的关系。还需证明它是单射，这由注记 3.4 (2) 给出。□

我们总是将 $F^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 与 $P^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 视为相同。对于$\bigoplus_p$，我们不会使用记号 $F^l(\widetilde{\Omega})$

我们不会使用记号 $F^{p-l,q-l,l}(\widetilde{\Omega})$，因为根据我们的记号，$F^l(\widetilde{\Omega})=F^{0,0,l}(\widetilde{\Omega})$。

定义 3.8. 设 Ω 是实数集 $N_\mathbb{R}$ 的一个开子集，且 $\alpha=\sum\alpha_\sigma[\sigma]$ 是一个多面体超流。多面体导数 $d'_P(\alpha)$ 和 $d''_P(\alpha)$ 定义为

$$d'_P(\alpha):=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}}d'(\alpha_\sigma)[\sigma],$$
$$d''_P(\alpha):=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}}d''(\alpha_\sigma)[\sigma],$$

它们与定义 $\mathcal{C}$ 所用的多面体复形的选择无关。

注记 3.9. (1) d'_P 和 d''_P 是良定义的，因为它们满足注记 3.6 (2) 中列出的关系。

(2) 多面体超流 α 的多面体导数与作为超流的 α 的导数并不一致。(3) 多面体导数 d'_P、d''_P 满足莱布尼茨法则。

3.3 多面体超流的积分

我们将定义多面体超流的积分，它推广了超形式的积分，即定义 2.3。

定义 3.10。设 Ω 是 $N_\mathbb{R}$的一个开子集。对于任意 $\alpha=\sum\alpha_\sigma[\sigma]\in P^{r,r}_c(\Omega)$，记$\sigma\in\mathcal{C}$

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\alpha:=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}}\int_{\sigma\cap\widetilde{\Omega}}\alpha_\sigma.$$

这定义了一个 $\mathbb{R}$-线性映射 $P^{r,r}_c(\Omega)\to\mathbb{R}$。

对于任意整 $\mathbb{R}$-仿射多面体集合 $P\subset\Omega$（可以是任意维数），记

$$\int_P\alpha:=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}}\int_{P\cap\sigma\cap\widetilde{\Omega}}\alpha_\sigma,$$

称为 P 上 α 的积分。这与 $\mathcal{C}$ 的选择无关。

~注记 3.11. (1) 这个定义推广了多面体上的 $A^{r,}{}_{c}{}^{r}(\Omega)$ 积分。

（2）我们有如下观察：对于任意 $\alpha \in P^{r,}{}_{c}{}^{r}(\tilde{\Omega})$，可以取任意满足 $f|_{\mathrm{Supp}(\alpha)} \equiv 1$ 的函数 $f \in A^{0,}{}_{c}{}^{0}(\tilde{\Omega})$。于是

$$\alpha(f) = \int_{\tilde{\Omega}} \alpha.$$

这个等式可以看作一般超流的积分。

~（3）注意，对于任意支集 Supp(α) $\cap P$ 紧的 $\alpha \in F^{r,r}(\Omega)$， $\int_P \alpha$ 都是良定义的。

（4）我们可以假设 α 有一个定义多面体复形 $\mathcal{C}$，使得 P 有一个多面体分解 $\mathcal{D}$，且它是 $\mathcal{C}$的子复形。在这种情况下，我们记

$$\int_P \alpha := \sum_{\sigma \in \mathcal{D}} \int_\sigma \alpha_\sigma.$$

~ ~定义 3.12. 设 Ω 是 $N_{\mathbb{R}}$的开子集， $P \subset \Omega$ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体集合，且 $\eta = \sum \eta_\sigma[\sigma] \in P^{r-1,r}(\tilde{\Omega})$ 是一个支集 Supp(η) $\cap P$ 紧的多面体超流。如上所述， $\eta_{\sigma \in \mathcal{C}}$有一个定义多面体复形 $\mathcal{C}$，使得 P 有一个多面体分解 $\mathcal{D}$，且它是 $\mathcal{C}$的子复形。我们将 η 在边界 P 上的积分定义为

$$\int_{\partial P} \eta := \sum_{\sigma \in \mathcal{D}} \int_{\partial \sigma} \eta_\sigma,$$

右侧由定义 2.9 给出。对于多面体超流 $\eta \in P^{r,\ r-1}(\tilde{\Omega})$，其定义 $\int_{\partial P} \eta$ 类似。

由斯托克斯公式（即命题 2.11），我们可以轻易推出多面体集合的斯托克斯公式。

~命题 3.13（多面体超流的斯托克斯公式）。设 Ω 是 $N_{\mathbb{R}}$、~ 的开子集，且 $P \subset \Omega$ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体集合。则有

$$\int_P d'_P \alpha = \int_{\partial P} \alpha, \quad \int_P d''_P \beta = \int_{\partial P} \beta,$$

对于所有满足 Supp(α)$\cap P$ 且 Supp(β)$\cap P$ 紧的多面体超流 $\alpha \in P^{r-1,\ r}(\tilde{\Omega})$ 和 $\beta \in P^{r,\ r-1}(\tilde{\Omega})$，均有

4 δ 上的形式

Mihatsch [14] 定义并研究了 δ-形式。他的定义很自然，且包含定义 2.9] 中定义的 δ-预形式。在本节中，我们首先回顾他的主要结果，[14], 然后定义角轨迹并证明热带 Poincar´e-Lelong 公式。

与前文一样，本节中始终假设 N, N' r r' 分别是秩为 的有限生成自由阿贝尔群，并固定一个~开子集 $\Omega \subset N_{\mathbb{R}}$。

4.1 分片线性与分段光滑超形式

~定义 4.1. Ω 上的分段光滑超形式是一个集合 $\alpha = \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}}$，其中 $\mathcal{C}$ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 的~ ~整 $\mathbb{R}$-仿射多面体分解，且 $\alpha_\sigma \in A_\sigma(\Omega \cap \sigma) \subset A_{N_{\sigma,\mathbb{R}}}(\Omega \cap \mathrm{relint}(\sigma))$, 满足 $\alpha_\tau = \alpha_\sigma|_\tau$ 对任意 $\tau \leq \sigma \in \mathcal{C}$。$\Omega$ 上的分片线性超形式是满足以下条件的分段光滑超形式 $\alpha = \{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{C}}$：每个 α_σ 均具有形式 $\sum \alpha_{\sigma,IJ} d'x_I \wedge d''x_J$，其中 $\alpha_{\sigma,IJI,J}$

线性函数 $N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$的限制。

我们将两个相同的交集，且对于所有多面体 $\sigma \in \mathcal{C}$ 和 $\sigma' \in \mathcal{C}'$，$\alpha_\sigma = \alpha'_{\sigma'}$ on ~$\Omega \cap$ relint(σ) $\cap$ relint(σ') 时。

$\widetilde{\Omega}$ 上的分段光滑超形式（分别为分段线性超形式）的空间记作 $\widetilde{PS}(\Omega)$（分别为 $PL(\Omega)$）。它具有自然的双分次 $C^\infty(\Omega)$-代数结构，并带有 $\wedge$乘积。我们用 $\widetilde{PS}_c(\Omega) \subset PS(\Omega)$ 表示具有紧支撑的分段光滑超形式的子空间。

我们将 d'_P、d''_P 上的微分定义为 $PS(\Omega)$

$$d'_P\alpha = \{d'\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}}, \quad d''_P\alpha = \{d''\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}},$$

对于任意 $\alpha = \{\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}}$。

显然，$\{\phi_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}} \in PS^0,\ ^0(\widetilde{\Omega})$（分别为 $PL^0,\ ^0(\widetilde{\Omega})$）中的元素给出了一个函数 $\widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$，称为分片光滑函数（分别称为分段线性函数）。

注 4.2。（1）对于开子集 $\Omega \subset N_\mathbb{R}$，我们有 $A(\Omega) \hookrightarrow \widetilde{PS}(\Omega)$，并且

$$PS^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \hookrightarrow P^{p,q,0}(\widetilde{\Omega}), \quad (\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{C}} \mapsto \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} \alpha_\sigma[\sigma].$$

（2）通常，对于 $\alpha \in PS^k(\widetilde{\Omega})$ 和 $\beta \in PS(\widetilde{\Omega})$，我们有

$$d'_P(\alpha\wedge\beta) = d'_P\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d'_P\beta.$$

d''_P有一个类似的公式成立。

4.2 δ-形式与平衡条件

定义 4.3. 若多面体超流 $\alpha \in B(\Omega)$ 满足 $d'\alpha$ 和 $d''\alpha$ 仍为多面体超流，则称其为 δ-形式。δ-形式的支集就是其底层超流的支集。

δ $P^{p,q,l}$(中 δ-形式的子空间 $\widetilde{\Omega}$) 记为 $B^{p,q,l}$($\widetilde{\Omega}$)。我们设

$$B^{p,q}(\widetilde{\Omega}) := \bigoplus_{l\geq 0} B^{p-l,q-l,l}(\widetilde{\Omega}), \quad B^n(\widetilde{\Omega}) := \bigoplus_{p+q=n} B^{p,q}(\widetilde{\Omega}), \quad B(\widetilde{\Omega}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B^n(\widetilde{\Omega}).$$

$\widetilde{B}_c(\Omega)$ 我们用 $B_c(\Omega)$ 表示 $B(\Omega)$ 中由具有紧支撑的 δ-形式构成的子空间。

注 4.4. (1) 请注意，与定义 3.3 中的例 2 相比，我们的多面体复形是整仿射的，因此我们可以为其中的每个多面体赋予自然的标定或定义 2 中的权重。

(2) $\mathbb{R}$-向量空间 $B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 在 $N_\mathbb{R}$ 上构成一个分离预层，因为 $P^{p,q,l}$ 是分离预层，且 d', d'' 是局部的。它不是层。不过，对于有限开覆盖 $\Omega = \bigcup \Omega_i{}_{i=1}$，下面的序列

$$0 \longrightarrow B^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \longrightarrow \prod_{i=1}^n B^{p,q}(\widetilde{\Omega}_i) \longrightarrow \prod_{i,j=1}^n B^{p,q}(\widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j)$$

是正合的。

由于 $P^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}) \simeq F^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$，我们引入平衡条件，以便为 δ-形式提供另一种描述。

定义 4.5. 若多面体超流 $\alpha = \sum \alpha_\sigma[\sigma] \in P^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}) \simeq F^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 对任意 $\tau \in \mathcal{C}^{l+1}$ 都满足平衡条件，即称其为平衡的，或称其满足平衡条件，其中的和

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l \\ \tau\leq\sigma \ a\ facet}} \alpha_\sigma|_\tau \otimes \omega_{\sigma,\tau} \in A^{p,q}_\tau(\widetilde{\Omega}\cap\tau)\otimes_\mathbb{R} N_\mathbb{R}$$

$\widetilde{}$属于子空间 $A^{p,\ q}(\Omega\cap\tau)\otimes_{\mathbb{R}}N_{\tau,\mathbb{R}}$，其中 $\omega_{\sigma,\tau}\in N_\sigma$ 是法向量（显然与法向量的选取无关）。多面体超流 $\alpha=\sum\alpha^{p,q,l}\in P(\widetilde{\Omega})=\bigoplus_{p,q,l}P^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 称为平衡的，如果每个分量 $\alpha^{p,\ q,\ l}$ 都是平衡的。

注意，同构 $F^l(N_{\mathbb{R}})\simeq P^{0,\ 0,\ l}(N_{\mathbb{R}})$ 将 $TZ^l(N_{\mathbb{R}})$ 在 *[10,*定义 1.1（v）*]*中与 $N_{\mathbb{R}}$ 上的平衡 $(0,0,l)$-多面体超流集合相对应，因此我们将 Ω 上的平衡 $(0,0,l)$-多面体超流集合记为 $TZ^l(\widetilde{\Omega})$。

注 4.6。（1）定义与 α 的代表元选择无关，即如果$\alpha=\sum\alpha_\sigma[\sigma]=\sum\beta_\sigma[\sigma]$，那么 $(\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{C}^l}$ 满足平衡条件，当且仅当$(\beta_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{D}^l}$ 满足平衡条件。

证明。我们可以假设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的细化，并且 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 的余维为 l。若 $\rho\in\mathcal{D}^{l+1}$，取 $\tau\in\mathcal{C}$ 使得 $\rho\subset\tau$。若 $\dim\tau=\dim\rho$，则存在一个双射

$$\{\varrho\in\mathcal{D}^l\mid\rho\subset\varrho\}\longleftrightarrow\{\sigma\in\mathcal{C}_n\mid\tau\subset\sigma\}.$$

于是，τ处的平衡条件蕴含了 ρ处的平衡条件。如果 $\dim\tau=\dim\rho+1$，那么由 ρ 给出的平面 H 将 N_τ 分成两个半空间 V_+、V_-，且满足 $H=V_+\cap V_-$。在这种情况下，$\{\varrho\in\mathcal{D}^l\mid\rho\subset\varrho\}$ 由分别位于 V_+ 和 V_- 中的两个多面体 ϱ_+、ϱ_- 组成。我们可以取 $\omega_{\varrho_+,\ \rho}=-\omega_{\varrho_-,\ \rho}$，于是 $\beta_{\varrho_+}|_\rho\otimes\omega_{\varrho_+,\ \rho}+\beta_{\varrho_-}|_\rho\otimes\omega_{\varrho_-,\ \rho}=0$。因此，关于（$\alpha_\sigma$）$_{\sigma\in\mathcal{C}}$ 的平衡条件蕴含关于（β_σ）$_{\sigma\in\mathcal{D}}$的平衡条件。

逆命题源于这样一个事实：$\tau\in\mathcal{C}^{l+1}$ 是$\mathcal{D}^{l+1}$中某些元素的并，因此我们应用上述结论。 □

(2) 该定义与 *[14,* 定义 3.*2],* 等价，即多面体超流 $\alpha=\sum_\sim\alpha_\sigma[\sigma]\in P(\Omega)$ 当且仅当对任意 $\tau\in\mathcal{C}$，总和$\sum_{\sigma\in\mathcal{C}^l}$

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}\\ \tau\le\sigma\ a\ facet}}\alpha_\sigma|_\tau\otimes\omega_{\sigma,\tau}\in A_\tau(\widetilde{\Omega}\cap\tau)\otimes_{\mathbb{R}}N_{\mathbb{R}}$$

$\widetilde{}$属于子空间 $A^{p,\ q}(\Omega\cap\tau)\otimes_{\mathbb{R}}N_{\tau,\mathbb{R}}$。

[14] 中的一个主要结果是以下定理。

定理 4.7（[14] 定理 3.3）。那么，多面体超流 α 是一个 δ-形式，当且仅当它是平衡的。特别地，α 是一个 δ-形式，当且仅当对所有 (p,q,l)，其 (p,q,l)-分量 $\alpha^{p,q,\ l}$ 是一个 δ-形式。

此外，如果 $d'\alpha,\ d''\alpha$ 中有一个是多面体的，那么 α 是一个 δ-形式。

推论 4.8。导数

$$d':B^{p,q}(\widetilde{\Omega})\to B^{p+1,q}(\widetilde{\Omega}),\quad d':B^{p,q}(\widetilde{\Omega})\to B^{p,q+1}(\widetilde{\Omega}),$$

以及多面体导数

$$d'_P:B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})\to B^{p+1,q,l}(\widetilde{\Omega}),\quad d'_P:B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})\to B^{p,q+1,l}(\widetilde{\Omega}),$$

是良定义的。

证明。若 $\alpha\in B^{p,q}(\widetilde{\Omega})$，则 $d'd'\alpha=0$，它是多面体的，因此根据定理 4.7，$d'\alpha\in B^{p+1,q}(\widetilde{\Omega})$。类似地，$d''\alpha\in B^{p,q+1}(\widetilde{\Omega})$。

至于 $d'_P\alpha$ 和 $d''_P\alpha$，容易验证，若 α 是平衡的，则满足平衡条件。 □

命题 4.9. 我们有一个自然的 $\mathbb{R}$-线性同构 $PS^{p,q}(\widetilde{\Omega})\simeq B^{p,q,0}(\widetilde{\Omega})$。此外，此映射分别将 $PS^{p,q}(\widetilde{\Omega})$ 上的 d',d'' 与 $B^{p,q,0}(\widetilde{\Omega})$ 上的 d'_P,d''_P 对应起来。

证明. 对任意 $\alpha = \{\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}} \in PS^{p,q}(\widetilde{\Omega})$，多面体超流 $\sum \alpha_\sigma[\sigma] \in P^{p,q,0}(\widetilde{\Omega})_{\sigma\in\mathcal{C}^0}$满足平衡条件。事实上，对任意 $\tau \in \mathcal{C}^1$，只有两个余维为 0 的多面体 σ_1, σ_2 包含 τ 作为面。设 $\omega \in N$ 是指向 σ_1 的 N/N_τ 生成元的一个代表元，则 $-\omega$ 指向 σ_2。于是有

$$\alpha_{\sigma_1}|_\tau \otimes \omega + \alpha_{\sigma_2}|_\tau \otimes (-\omega) = 0 \in A^{p,q}_\tau(\tau \cap \widetilde{\Omega}) \otimes N_{\tau,\mathbb{R}}.$$

反过来，给定上述 ω，注意到 $\mathbb{R}\omega \cap N_{\tau,\ \mathbb{R}} = 0$，那么对于任意 $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$，必有 $\alpha_{\sigma_1}|_\tau = \alpha_{\sigma_2}|_\tau$。因此，对 $\sigma \in \mathcal{C}^0$ 的任意一个面，我们可以令 $\alpha_\rho := \alpha_\sigma|_\rho$，这与 σ 的选择无关。于是 $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}} \in PS^{p,q}(\Omega)$。 □

定义 4.10. 由定理 4.7 的证明可知，我们可以定义边界导数 $\partial' := d' - d'_P$ 和 $\partial'' := d'' - d''_P$,

$$\partial' : B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}) \to B^{p,q-1,l+1}(\widetilde{\Omega}), \quad \partial'' : B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}) \to B^{p-1,q,l+1}(\widetilde{\Omega})$$

注 4.11. (1) 由于对于一个形式 $\alpha \wedge \beta$，若有 $\alpha \in A(\Omega)$ $\beta \in B(\Omega)$，那么相对于 d'、d''、d'_P、d''_P，我们有莱布尼茨法则，因此相对于 ∂'、∂''，也有莱布尼茨法则。给出 $\wedge$-积的定义后，我们将得到关于所有导数的莱布尼茨法则。

推论 4.12（[10] 命题 2.18）。我们有 $d' = d'_P$： $B^{0,0,l}(\widetilde{\Omega}) \to B^{1,0,l}(\widetilde{\Omega})$，即 $\partial' = \partial'' = 0$。对于 d''、d''_P 和 ∂''，情况类似。此外，这些性质对 δ-预形式也成立： $A^{p,q}(\Omega) \wedge B^{0,0,l}(\widetilde{\Omega})$，另见 *[10,* 定义 2.*9]*。

证明。这由 ∂'、∂'' 的定义以及莱布尼茨法则得出。 □

引理 4.13。边界导数满足

$$\begin{aligned}
0 &= \partial'\partial' = \partial''\partial'', \\
0 &= \partial'\partial'' + \partial''\partial', \\
0 &= \partial' d'_P + d'_P\partial' = \partial'' d''_P + d''_P\partial'', \\
0 &= \partial' d''_P + d'_P\partial'' + \partial'' d'_P + d''_P\partial'.
\end{aligned}$$

Mihatsch 计算 $\partial'\alpha$ 为方便读者并便于后续应用，我们在此给出他的结果。

命题 4.14（[14] 第 3 节）。设 $\alpha = \sum \alpha_\sigma[\sigma] \in B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$。那么 $\partial'\alpha = (-1)^{r+p+q+1} \sum \beta_\tau[\tau] \in B^{p,q-1,l+1}(\widetilde{\Omega})$，其中 β_τ 可按如下方式给出：令

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l \\ \tau<\sigma \text{ a facet}}} \alpha_\sigma|_\tau \otimes \omega_{\sigma,\tau} = \sum_{i\in I} \beta_i \otimes v_i \in A^{p,q}_\tau(\widetilde{\Omega} \cap \tau) \otimes_{\mathbb{R}} N_{\tau,\mathbb{R}}.$$

Then

$$\beta_\tau = \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l \\ \tau<\sigma \text{ a facet}}} \langle \alpha_\sigma; (\emptyset, (\omega_{\sigma,\tau})_{\{1\}})\rangle|_\tau - \sum_{i\in I} \langle \beta_i; (\emptyset, (v_i)_{\{1\}})\rangle.$$

4.3 $\wedge$-积与热带 Poincar´e-Lelong 公式

为了定义一般的交或 $\wedge$in $B(\Omega)$，我们考虑最简单的情况，即定义一个双线性映射 $PS^{p,q} \times B^{p',q',l'} \to B^{p+p',q+q',l'}$。

定义 4.15. 设 $\alpha \in PS(\Omega)$ 和 $\beta \in B(\Omega)$。设 $\mathcal{C}$ 是一个适配 α 和 β的 $N_{\mathbb{R}}$ 的多面体分解，即

$$\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{C}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} \alpha_\sigma[\sigma], \quad \beta = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}} \beta_\sigma[\sigma].$$

我们将它们的乘积定义为

$$\alpha \wedge \beta := \sum_{\sigma\in\mathcal{C}} \alpha_\sigma \wedge \beta_\sigma[\sigma].$$

注 4.16. (1) 我们可以看到，该定义与 $\mathcal{C}$ 的选择无关，并且根据平衡条件，有 $\sim\alpha \wedge \beta \in B(\Omega)$。此外，它定义了一个双线性映射

$$PS^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \times B^{p',q',l'}(\widetilde{\Omega}) \to B^{p+p',q+q',l'}(\widetilde{\Omega}).$$

(2) 对任意 $\alpha \in PS^{p,q}(\widetilde{\Omega})$ $\beta \in B^{p',q'}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\gamma \in A^{r-p-p',r-q-q'}_c(\widetilde{\Omega})$，我们有

$$(\alpha \wedge \beta)(\gamma) = \sum_\sigma \int_{\widetilde{\Omega}\cap\sigma} \alpha_\sigma \wedge \beta_\sigma \wedge \gamma = (-1)^{(p+q)(p'+q')}\beta(\alpha \wedge \gamma),$$

因此，该定义推广了定义 2.15。

定义 4.17. 设 $\alpha = \sum \alpha_\sigma[\sigma] \in B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\phi = (\phi_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{C}} \in PS^{0,0}(\widetilde{\Omega})$ 带有定义 $\mathcal{C}$ 的多面体复形$_{\sigma\in\mathcal{C}^l}$。对于任意 $\tau \in \mathcal{C}^{l+1}$，记

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l \\ \tau<\sigma \text{ a facet}}} \alpha_\sigma|_\tau \otimes \omega_{\sigma,\tau} = \sum_{i\in I} \beta_i \otimes v_i \in A^{p,q}_\tau(\widetilde{\Omega}\cap\tau) \otimes_{\mathbb{R}} N_{\tau,\mathbb{R}},$$

其中 $\omega_{\sigma,\tau}$ 是 σ/τ 的法向量，而 α_σ 在 τ 上的取值由连续延拓给出。注意， ω_τ 取决于 $\omega_{\sigma,\tau}$ 的选择。我们设

$$\alpha_\tau := \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l \\ \tau<\sigma \text{ a facet}}} \frac{\partial\phi_\sigma}{\partial\omega_{\sigma,\tau}}\alpha_\sigma|_\tau - \sum_{i\in I}\frac{\partial\phi_\tau}{\partial v_i}\beta_i.$$

ϕ 关于 α 的角轨迹定义为 $\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha := \sum \alpha_\tau[\tau] \in P^{p,q,l+1}(\widetilde{\Omega})$，其为$_{\tau\in\mathcal{C}^{l+1}}$

$\mathbb{R}$-双线性于 ϕ 和 α。我们将证明 $\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha \in B^{p,q,l+1}(\widetilde{\Omega})$，见定理 4.25。

注 4.18. (1) $\phi \in PL^{0,0}(N_{\mathbb{R}})$、 $C \in TZ^l(N_{\mathbb{R}})$ 中带整数权重的角轨迹 $\mathrm{div}(\phi)\cdot C$，在 *[2]* 和 *[10,* 定义 1.*10],* 中定义，称为 C上 ϕ 的魏尔除子。我们使用记号 $\mathrm{div}(\phi)\cdot C$，而非 $\phi\cdot C$。

(2) 不难看出，$\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha$ 与 $\mathcal{C}$的选择无关；对于给定的 $\alpha \in B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$，它仅取决于函数 $\phi|_{\mathrm{Supp}(\alpha)}$。

例 4.19. 设 $H \subset N_{\mathbb{R}}$ 为一个整 $\mathbb{R}$-仿射空间。设 $\phi = \max\{\phi_1,\phi_2\}: N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 为一个分段线性函数，即 ϕ_1、$\phi_2: N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 为整 $\mathbb{R}$-仿射函数。令 $V_\phi := \{x \in N_{\mathbb{R}} \mid \phi_1(x) = \phi_2(x)\}$。那么

$$\mathrm{div}(\phi)\cdot[H] = \begin{cases} 0 & \text{if } H \subset V_\phi; \\ \dfrac{\partial(\phi_1-\phi_2)}{\partial\omega_{V_1,V_\phi}}[N : N_H + N_\phi]\cdot[V_\phi \cap H] & \text{if } H \not\subset V_\phi, \end{cases}$$

其中 $V_1 = \{x \in N_{\mathbb{R}} \mid \phi_1(x) \geq \phi_2(x)\}$, $N_\phi = N \cap V_\phi$ 且 ω_{V_1,V_ϕ} 是 V_1/V_ϕ上的法向量。此外，令 $\psi = \min\{\phi_1,\phi_2\}$，则 $\mathrm{div}(\psi)\cdot[H] = -\mathrm{div}(\phi)\cdot[H]$。

证明。注意，对于给定的 H，角轨迹 $\mathrm{div}(\phi)\cdot[H]$ 仅取决于 $\phi|_H$： $H \to \mathbb{R}$，因此我们可以假设 $H = N_{\mathbb{R}}$。若 $H \subset V_\phi$，即 $N_{\mathbb{R}} = V_\phi$，则 ϕ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射函数。我们取 $\mathcal{C} = \{N_{\mathbb{R}}\}$，它不由较低的面组成，则 $\mathrm{div}(\phi) = 0$。若 $H \not\subset V_\phi$，我们考虑由 V_ϕ 划分的半空间 V_1, V_2，使得 $\phi|_{V_1} = \phi_1$ 且 $\phi|_{V_2} = \phi_2$。我们可以取 $\omega_{V_2,V_\phi} = -\omega_{V_1,V_\phi}$，则 $\mathrm{div}(\phi)\cdot[N_{\mathbb{R}}] = m[V_\phi]$，其中

$$m = \frac{\partial(\phi_1-\phi_2)}{\partial\omega_{V_1,V_\phi}}.$$

对于第二种情形，一般而言 $H \subset N_{\mathbb{R}}$，我们有 除子$(\phi)\cdot[H] = \underline{(\phi_1-\phi_2)}\,\partial\omega_{H_1,H_\phi}{}^{[H_\phi]}$，其中 $H_1 = V_\cap H_\phi$和 $H_\phi = V_\phi \cap H$。我们考察 ω_{H_1,H_ϕ} 与 ω_{V_1,V_ϕ}之间的关系。事实上，

$$\mathbb{Z}\overline{\omega_{H_1,H_\phi}} \simeq N_H/(N_H \cap N_\phi) \hookrightarrow N/N_\phi \simeq \mathbb{Z}\overline{\omega_{V_1,V_\phi}}$$

两边的秩均为 1，因此 $\omega_{H_1,\ H_\phi} = [N : N_H + N_\phi]\omega_{V_1,\ V_\phi}$，这就证明了第一个结论。对于第二个结论，假设 $H \not\subset V_\phi$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\psi)\cdot[H] &= -\mathrm{div}(-\psi)\cdot[H]\\ &= -\frac{\partial(-\phi_1-(-\phi_2))}{\partial(-\omega_{V_1,V_\phi})}[N:N_H+N_\phi]\cdot[V_\phi\cap H]\\ &= -\mathrm{div}(\phi)\cdot[H].\end{aligned}$$

□

注记 4.20. (1) 设 ϕ,ψ 如例中所示。那么对于任意 $\alpha\in B^{p,\ q,\ l}(\tilde{\Omega})$，由我们稍后将证明的推论 4.27，可得 $\mathrm{div}(\psi)\cdot\alpha = -\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha$。这是因为 $\mathrm{div}(\psi)\cdot\alpha = \mathrm{div}(\psi)\cdot([N_{\mathbb{R}}]\wedge\alpha) = (\mathrm{div}(\psi)\cdot[N_{\mathbb{R}}])\wedge\alpha$。

利用上述结果，我们给出一个整 $\mathbb{R}$-仿射映射之图的表示。

例 4.21. 设 $F\colon N'_R\to N_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{AT}op_{\mathbb{Z},\ \mathbb{R}}$ 中的一个态射，且 $(x'_1,\cdots,x'_{r'})$、$(x_1,\cdots,x_r)$ 分别是 $N'_{\mathbb{R}}$ 和 $N_{\mathbb{R}}$ 的坐标函数。设 $\Delta_F\subset N'_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}$ 是 F 的图。那么我们有

$$[\Delta_F] = \mathrm{div}(\phi_1)\cdots\mathrm{div}(\phi_r)\cdot[N'_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}],$$

其中 $\phi_i = \max\{f_i(x'_1,\cdots,x'_{r'})\ x_i\}$ 和 $F=(f_1,\cdots,f_r)\colon\ N'_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}}$。

证明。令

$$\begin{aligned}V_i &= \{(x',x)\in N_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}\mid f_i(x')\geq x_i\},\\ V_{\phi_i} &= \{(x',x)\in N_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}\mid f_i(x')=x_i\}.\end{aligned}$$

在 V_{ϕ_i} 上，唯一的非自由变量是 x_i，因此 $(0,e_i)$ 是 V_i/V_{ϕ_i} 的法向量，其中 $e_i\in N_{\mathbb{R}}$ 是对应于 x_i 的向量。注意，对于任何包含 $(0,e_i)$ 的子群 $M\subset N'\times N$，$M+(N'\times N)\cap V_{\phi_i} = N'\times N$。由于对于任意 $1\leq i\leq r$，$(0,e_i)\in V_{\phi_{i-1}}\cap\cdots\cap V_{\phi_r}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\phi_1)\cdots\mathrm{div}(\phi_r)\cdot[N'_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}] &= \mathrm{div}(\phi_1)\cdots\mathrm{div}(\phi_{r-1})\cdot[V_{\phi_r}]\\ &\cdots\\ &= [V_{\phi_1}\cap\cdots\cap V_{\phi_r}]\\ &= [\Delta_F].\end{aligned}$$

□

命题 4.22. 设 N、N' 为有限生成阿贝尔群，且 $\Omega\subset N_{\mathbb{R}}$、$\Omega'\subset N'_{\mathbb{R}}$ 为开子集。对于齐次超流 $T\in D^n(\tilde{\Omega})$ $T'\in D^{n'}(\tilde{\Omega}')$，存在唯一的超流 $T\times T'\in D^{n+n'}(\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}')$，使得

$$(T\times T')(p_1^*\eta\wedge p_2^*\eta') = (-1)^{nn'}T(\eta)T'(\eta')$$

对于任意 $\eta\in A(\Omega)$ 和 $\eta'\in A(\Omega')$，其中 $p_1\colon N_{\mathbb{R}}\times N'_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}}$，$p_2\colon N_{\mathbb{R}}\times N'_{\mathbb{R}}\to N'_{\mathbb{R}}$ 是投影。此外，以下结论成立。

(1) $d'(T\times T') = d'T\times T' + (-1)^n T\times d'T'$, *and it is similar for* d''.

(2) 若 $T=\alpha_\sigma[\sigma]$ 且 $T'=\alpha'_{\sigma'}[\sigma']$，则

$$T\times T' = (p_1^*\alpha_\sigma\wedge p_2^*\alpha_{\sigma'})[\sigma\times\sigma'].$$

(3) 若 $T\in B^{p,\ q,\ l}(\tilde{\Omega})$ 且 $T'\in B^{p',\ q',\ l'}(\tilde{\Omega}')$，则 $T\times T'\in B^{p+p',\ q+q',\ l+l'}(\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega})$，并且

$$d'_P(T\times T') = d'_PT\times T' + (-1)^nT\times d'_PT',$$

对于 d''_P、∂'、∂''，情况类似。

~ ~ ~ ~证明。证明基于这样一个事实：集合 $p_1^*A(\Omega)\wedge p_2^*A(\Omega')$ 在 $A(\Omega\times\Omega')$ 中稠密。见 [7, 第 1 节，2],其性质见 [14, 第 4] 节。 □

定理 4.23（[14] 定理4.1）。存在唯一一种定义结合双线性积~ ~ ~∧：$B(\Omega)\times B(\Omega)\to B(\Omega)$的方式，使其满足以下性质：

~ ~(1) 关于 d' 和 d''满足莱布尼茨法则：对于任意 $\alpha\in B(\Omega')$和 $\beta\in B(\Omega)$，有

$$d'(\alpha\wedge\beta)=d'\alpha\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge d'\beta,$$

对于 d''也类似；

~ ~(2) 对于任意 $\alpha\in PS(\Omega)$和 $\beta\in B(\Omega)$，∧-积 $\alpha\wedge\beta$ 由定义 4.15 给出；

~(3) 对于任意 $\alpha,\beta\in B(\Omega)$，有 $\mathrm{Supp}([\Delta]\wedge(\alpha\times\beta))\subset\Delta$ 且

$$\alpha\wedge\beta=p_{1,*}([\Delta]\wedge(\alpha\times\beta)),$$

其中 $\Delta\subset N_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}$ 是对角线，$p_1\colon N_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}}$ 是第一投影。

证明。我们给出证明的概要。

唯一性。若这样的映射存在，那么对于任意的 $\phi\in PS^{0,0}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\beta\in B(\widetilde{\Omega})$，我们有 $d'\phi=d'_P\phi$,$d''\phi=d''_P\phi$，它们属于 $PS^1(\widetilde{\Omega})$，并且有以下重要等式

$$(d'd''\phi)\wedge\beta=\partial' d''_P\phi\wedge\beta+d'_Pd''_P\phi\wedge\beta=\partial'(d''_P\phi\wedge\beta)+d''_P\phi\wedge\partial'\beta+d'_Pd''_P\phi\wedge\beta. \tag{1}$$

~ ~最后一个等式成立，是因为对于 $PS^{p,q}(\Omega)\wedge B^{p,q}(\Omega)$，关于 d' 和 d''_P 的莱布尼茨法则成立，因而关于 ∂' 也成立。这意味着 $(d'd''\phi)\wedge\beta$ 由性质 (1) 和 (2) 唯一确定。

我们在 $N_{\mathbb{R}}\times N_{\mathbb{R}}$ 上固定整坐标函数 $x_1,\cdots,x_r$ 和 $y_1,\cdots,y_r$。于是有

$$[\Delta]=d'd''\phi_1\wedge\cdots\wedge d'd''\phi_r,$$

其中 $\phi_i=\max\{x_i,y_i\}$。这来自热带 Poincar´e-Lelong 公式，即定理 4.25。我们将在下文证明这一点，并注意到证明只用到了等式 (1)。

由于支集$([\Delta]\wedge(\alpha\times\beta))\subset\Delta$，我们知道 $p_{1,*}([\Delta]\wedge(\alpha\times\beta))$ 是良定义的。这意味着 $\alpha\wedge\beta$ 由 (3) 唯一确定。

对于存在性，根据上述讨论，我们可由等式 (1) 和性质 (2) 定义 $[\Delta]\wedge(\alpha\times\beta)=d'd''\phi_1\wedge\cdots\wedge d'd''\phi_r\wedge(\alpha\times\beta)$，然后一般情形可由 (3) 给出。 □

注 4.24. (1) 显然，∧-积将 $F(N_{\mathbb{R}})$ 中的稳定交以及 $A(\Omega)$ 中的 ∧-
~ ~ ~积推广到了 $B(\Omega)$。对于任意 $\alpha,\beta\in B(\Omega)$，我们有

$$\mathrm{Supp}(\alpha\wedge\beta)\subset\mathrm{Supp}(\alpha)\cap\mathrm{Supp}(\beta).$$

以下结果称为热带 Poincar´e-Lelong 公式，它推广了 [10, 推论 3.19]。

定理 4.25（热带 Poincaré-Lelong 公式）。对于 $\alpha\in B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 以及 $\phi\in PS^{0,0}(\widetilde{\Omega})$，我们有

$$\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha=d'd''\phi\wedge\alpha-d'_Pd''_P\phi\wedge\alpha=\partial'(d''_P\phi\wedge\alpha)+d''_P\phi\wedge\partial'\alpha$$

在 $P(\widetilde{\Omega})$ 中。特别地，除子$(\phi)\cdot\alpha\in B^{p,q,l+1}(\widetilde{\Omega})$。

证明。由等式 (1)，只需证明

$$\mathrm{div}(\phi)\cdot\alpha=\partial'(d''_P\phi\wedge\alpha)+d''_P\phi\wedge\partial'\alpha.$$

假设 $\phi = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} \phi_\sigma[\sigma]$ 和 $\alpha = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^l} \alpha_\sigma[\sigma] \in B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$。那么 $d''_P\phi\wedge\alpha = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^l}(d''\phi_\sigma\wedge\alpha_\sigma)[\sigma]$.记

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l\\ \tau<\sigma \text{ a facet}}} \alpha_\sigma|_\tau\otimes\omega_{\sigma,\tau} = \sum_{i\in I}\beta_i\otimes v_i \in A^{p,q}_\tau(\widetilde{\Omega}\cap\tau)\otimes_{\mathbb{R}} N_{\tau,\mathbb{R}},$$

那么由命题 4.14 可得

$$\partial'(d''_P\phi\wedge\alpha) = \sum_{\tau\in\mathcal{C}^{l+1}}\Big(\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l\\ \tau<\sigma \text{ a facet}}}\langle d''\phi_\sigma\wedge\alpha_\sigma;(\emptyset,(\omega_{\sigma,\tau})_{\{1\}})\rangle|_\tau - \sum_{i\in I}\langle d''\phi_\tau\wedge\beta_i;(\emptyset,(v_i)_{\{1\}})\rangle\Big)[\tau],$$

$$d''_P\phi\wedge\partial'\alpha = \sum_{\tau\in\mathcal{C}^{l+1}}\Big(d''\phi_\tau\wedge\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l\\ \tau<\sigma \text{ a facet}}}\langle\alpha_\sigma;(\emptyset,(\omega_{\sigma,\tau})_{\{1\}})\rangle|_\tau - \sum_{i\in I}\langle\beta_i;(\emptyset,(v_i)_{\{1\}})\rangle\Big)[\tau].$$

由引理 2.8 可得

$$\partial'(d''_P\phi\wedge\alpha)+d''_P\phi\wedge\partial'\alpha = \sum_{\tau\in\mathcal{C}^{l+1}}\Big(\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{C}^l\\ \tau<\sigma \text{ a facet}}}\frac{\partial\phi_\sigma}{\partial\omega_{\sigma,\tau}}\alpha_\sigma|_\tau - \sum_{i\in I}\frac{\partial\phi_\tau}{\partial v_i}\beta_i\Big)[\tau] = \operatorname{div}(\phi)\cdot\alpha.$$

□

注 4.26. (1) 特别地，如果 $\phi\in PL^{0,0}(\widetilde{\Omega})$，或者更一般地，$\phi$ 在支集(α)上是分片线性的，那么

$$\operatorname{div}(\phi)\cdot\alpha = d'd''\phi\wedge\alpha.$$

由热带庞加莱–勒隆公式，我们有如下推论。

推论 4.27. 对于 $\alpha\in B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\phi\in PS^{0,0}(\widetilde{\Omega})$。

(1) (结合律) 对任意 $\beta\in B^{p',q',l'}(\widetilde{\Omega})$，我们有

$$\operatorname{div}(\phi)\cdot(\alpha\wedge\beta) = (\operatorname{div}(\phi)\cdot\alpha)\wedge\beta.$$

(2)（交换律）对于任意$\psi\in PS^{0,\ 0}(\widetilde{\Omega})$，我们有

$$\operatorname{div}(\psi)\cdot(\operatorname{div}(\phi)\cdot\alpha) = \operatorname{div}(\phi)\cdot(\operatorname{div}(\psi)\cdot\alpha).$$

如 [14], 所示，我们还有另一种定义 $\wedge$-积的方法。回顾一下，两个多面体 σ_1、σ_2横截相交，当且仅当

$$\operatorname{relint}(\sigma_1)\cap\operatorname{relint}(\sigma_2)\neq\emptyset \quad\text{and}\quad N_{\sigma_1,\mathbb{R}}+N_{\sigma_2,\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}.$$

我们称两个分别具有纯维数 p和q的多面体复形 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 横截相交，当且仅当 $|\mathcal{C}_1|\cap|\mathcal{C}_2|\neq\emptyset$，并且对于任意 $\sigma_1\in(\mathcal{C}_1)_p$、$\sigma_2\in(\mathcal{C}_2)_q$，都有 $\sigma_1\cap\sigma_2=\emptyset$ 或 σ_1，且σ_2 横截相交。

引理 4.28. 设$\alpha = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}_1^{l_1}}\alpha_\sigma[\sigma]$、$\beta = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}_2^{l_2}}\beta_\sigma[\sigma]\in B(\widetilde{\Omega})$满足$\mathcal{C}_1^{\geq l_1}$、$\mathcal{C}_2^{\geq l_2}$横截相-
交。于是

$$\alpha\wedge\beta = \sum_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathcal{C}_1^{l_1}\times\mathcal{C}_2^{l_2}\\ \sigma_1\cap\sigma_2\neq\emptyset}}(\alpha_{\sigma_1}\wedge\beta_{\sigma_2})[\sigma_1\cap\sigma_2].$$

证明。这是 [14, 引理 4.15]。 □

对于 $T\in D(N_{\mathbb{R}})$ 和 $v\in N_{\mathbb{R}}$，我们记 $\lambda_v\colon\ N_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}},\ x\mapsto x+v$，并将 $v+T=\lambda_{v,\ *}T$ 称为 v-平移超流。

~ ~命题 4.29。设 $\alpha,\beta\in B(\Omega)$ 且 $v\in N_{\mathbb{R}}$。假设存在 $\beta\in B(N_{\mathbb{R}})$ 使得$\sim\beta|_{\widetilde{\Omega}}=\beta$。那么我们有弱收敛

$$\alpha\wedge\beta=\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha\wedge(\varepsilon v+\widetilde{\beta})|_{\widetilde{\Omega}}.$$

证明。由于 $\Delta=d'd''\phi_1\wedge\cdots\wedge d'd''\phi_r$ with $\phi_i=\max\{x_i,y_i\}$，且超流关于所谓的 C^∞-拓扑连续，根据等式 (1)，只需证明 $\alpha\times\beta=\widetilde{\lim}_{\varepsilon\to 0}\alpha\times(\varepsilon v+\beta)|_{\widetilde{\Omega}}$，即

$$\alpha(\eta)\beta(\eta')=\alpha(\eta)\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{\beta}(\lambda_{\varepsilon v}^*\eta')$$

~ ~对于任意 $\eta,\eta'\in A_c(\Omega)$，其中 $\lambda_{\varepsilon v}:N_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}},\ x\mapsto x+\varepsilon v$。这是显然的，因为当 ε 足够小时，$\mathrm{Supp}(\lambda_{\varepsilon v}^*\eta')\subset\Omega$，且 $\eta'=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{\varepsilon v}^*\eta'$ 关于 C^∞-拓扑成立。□

~推论 4.30. 设 $\alpha=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_1^{l_1}}\alpha_\sigma[\sigma],\beta=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_2^{l_2}}\beta_\sigma[\sigma]\in B(\Omega)$，且 $v\in N_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ 的一般向量。那么对于任意充分小的 $\varepsilon>0$，有

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathcal{C}_1^{l_1}\times\mathcal{C}_2^{l_2}\\ \sigma_1\cap(\varepsilon v+\sigma_2)\neq\emptyset}}(\alpha_{\sigma_1}\wedge\beta_{\sigma_2})[\sigma_1\cap\sigma_2].$$

证明。由于多面体超流预层是分离的，只需局部地证明该结果。对于任意 $x\in\Omega$ 及其一个小邻域 U_x，我们可以找到 $\beta\in B(N_{\mathbb{R}})$，使得 $\beta|_{U_x}=\beta|_{U_x}$。~ ~这源于以下事实： B 是一个 C^∞-模。因此，我们可以假设存在 $\beta=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_2^{l_2}}\beta_\sigma[\sigma]\in B(N_{\mathbb{R}})$

~使得 $\beta|_{\widetilde{\Omega}}=\beta$。那么引理 4.28 和命题 4.29 蕴含

$$\alpha\wedge(\varepsilon v+\widetilde{\beta})|_{\widetilde{\Omega}}=\sum_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathcal{C}_1^{l_1}\times\mathcal{C}_2^{l_2}\\ \sigma_1\cap(\varepsilon v+\sigma_2)\neq\emptyset}}(\alpha_{\sigma_1}\wedge(\varepsilon v+\widetilde{\beta}_{\sigma_2})|_{\widetilde{\Omega}})[\sigma_1\cap(\varepsilon v+\sigma_2)]$$

弱收敛到 $\alpha\wedge\beta$。此外，我们有弱收敛

$$(\alpha_{\sigma_1}\wedge(\varepsilon v+\widetilde{\beta}_{\sigma_2})|_{\widetilde{\Omega}})[\sigma_1\cap(\varepsilon v+\sigma_2)]\to(\alpha_{\sigma_1}\wedge\beta_{\sigma_2})[\sigma_1\cap(\sigma_2)],\quad\varepsilon\to 0.$$

因此推论成立。 □

4.4 在热带循环上对 δ-形式进行积分

我们已在定义 3.10 中定义了多面体流的积分。在此，我们将研究 δ-形式积分的一些基本性质。

~ ~定义 4.31. 设 $\alpha\in B(\Omega)$，且 $C\in P_n(\Omega)$ 是一个赋予常权重的多面体复形。我们称 C 关于 α 是平衡的，若存在一个适配于 C 的多面体复形 $\mathcal{C}$，满足以下性质：若 τ是 $\mathcal{C}$中某个极大多面体的一个面，且 $\mathrm{Supp}\tilde{\alpha}(\alpha)\cap\tau\neq\emptyset$，则平衡~条件在 τ处成立。这里，$\mathrm{Supp}\tilde{\alpha}(\alpha)$ 是 α 在 Ω 中的支集。

~注释 4.32. (1) 尽管 C 在 Ω 上可能不是平衡的，但若它关于 α是平衡的，我们可以取一个开子集 $U\subset\Omega$，使得 $\mathrm{Supp}\tilde{\alpha}(\alpha)\subset U$，且 C 在 U上是平衡的。在这种情况下，我们可以取 $\alpha|_U\wedge C\in B(U)$。我们将省略 U，因为其为零这一性质与 U的选取无关。

~此外，若 $\alpha\in B^{n,n}(\Omega)$ 和 $\mathrm{Supp}\tilde{\alpha}(\alpha)\cap|C|$ 是紧的，则我们定义

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\alpha\wedge C=\int_U\alpha|_U\wedge C,$$

这与 U 的选择无关。

我们已经看到，当取多面体导数时，斯托克斯公式（即命题 3.13）对多面体流成立。然而，当我们考虑 δ-形式上的导数时，该公式并不成立，因为

$$\int_P d'\alpha = \int_P d'_P\alpha + \int_P \partial'\alpha = \int_{\partial P} \alpha + \int_P \partial'\alpha.$$

根据导数的定义，我们有如下观察。

命题 4.33. 设 $C \in P_n(N_{\mathbb{R}})$是一个带有常权重的多面体复形，并且 $\alpha \in B^{n-1,}{}_c{}^n(\widetilde{\Omega})$（分别为 $\alpha \in B^{n,}{}_c{}^{n-1}(\widetilde{\Omega})$）。假设存在一个适配于 C的多面体复形 $\mathcal{C}$，满足以下性质：若 $\tau \in \mathcal{C}_{n-1}$ 满足 $\mathrm{Supp}\tilde{\omega}(\alpha) \cap \tau \neq \emptyset$，则平衡条件在 τ处成立。那么我们有

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (d'\alpha) \wedge C = \int_{\widetilde{\Omega}} d'_P\alpha \wedge C = \int_{\widetilde{\Omega}} \partial'\alpha \wedge C = 0,$$

$$(resp. \int_{\widetilde{\Omega}} d''\alpha \wedge C = \int_{\widetilde{\Omega}} d''_P\alpha \wedge C = \int_{\widetilde{\Omega}} \partial''\alpha \wedge C = 0).$$

证明。我们取 $\mathrm{Supp}(\alpha)$ 的一个开邻域 $U \subset \Omega$，使得 $\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \tau = \emptyset$ 蕴含$\tau \cap U = \emptyset$。因此，根据我们的假设，$C \in B^{0,0}(U)$。设 $f \in A^{0,0}(U)$ 满足 $f|_{\mathrm{Supp}(\alpha)} \equiv 1$。注意到 $d'C = 0$ 在 U上成立，于是

$$\int_C d'\alpha = \int_U C \wedge d'\alpha = \int_U d'(C \wedge \alpha) = (d'(C \wedge \alpha))(f) = (C \wedge \alpha)(d'f) = (C \wedge \alpha)(0) = 0.$$

For $\int_C d'_P\alpha$，我们取一个多面体集合 $P \subset U$，使得 $\mathrm{Supp}(\alpha) \subset \mathrm{Int}(P)$。于是根据斯托克斯公式 a, i.e. 命题 3.13，我们有

$$\int_C d'_P\alpha = \int_U C \wedge d'_P\alpha = \int_P d'_P(C \wedge \alpha) = \int_{\partial P} C \wedge \alpha = 0.$$

这两者蕴含 $\int_C \partial'\alpha = 0$。

□

根据命题 3.13，对于关于 d_P、d'_P的 δ-形式，我们有格林公式；证明与命题 2.12 类似。我们需要以下引理。

引理 4.34。对于任意 $\alpha \in B^{p,}{}^q(\widetilde{\Omega})$ $\beta \in B^{p',}{}^{q'}(\widetilde{\Omega})$，我们有

$$J(\alpha \wedge \beta) = J\alpha \wedge J\beta.$$

证明。注意到 $J(\sum \alpha_\sigma[\sigma]) = (-1)^l \sum J(\alpha_\sigma)[\sigma]$，于是结论由引理??和推论 4.30 得出。

□

命题 4.35（δ-形式的格林公式）。设 $C \in F_r(N_{\mathbb{R}})$，其中 $|C| \subset \Omega$ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体集合。那么，对于任意对称的 (p,p)-δ-形式 α，以及在 $|C|$ 周围的对称 (q,q)-δ-形式 β，其中 $p+q = r-1$ 且 $\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \mathrm{Supp}(\beta)$ 紧，

$$\int_C \alpha \wedge d'_P d''_P\beta - d'_P d''_P\alpha \wedge \beta = \int_{\partial C} \alpha \wedge d''_P\beta - d''_P\alpha \wedge \beta,$$

5 δ-形式的推前与拉回

本节将研究 δ-形式的函子性。我们已在定义 2.20 中将 δ-形式的推前定义为超流。事实上，在热带几何中，我们还可以将 δ-形式的推前定义为热带循环。这两种定义略有不同。我们还将定义 δ-形式的拉回，并证明投影公式。

5.1 作为超流的推前

引理 5.1. 设 $F\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 为一个整 $\mathbb{R}$-仿射映射，$\sigma' \subset N'_{\mathbb{R}}$ 为一个整 $\mathbb{R}$-仿射多面体。令 $k = \dim \sigma' - \dim F(\sigma')$。对于任意 $\alpha' \in A^{p,}{}_{,\sigma'}{}^{q}{}_{,c}(\sigma')$。则我们可以如下构造
$\widetilde{F}_* \alpha' \in A^{p-k}_{F}{}_{\sigma'}{}^{q-k}_{c} F\ \sigma'$ $x \in N_{F(\sigma'}{}_{\mathbb{R}}$ $v'_1 \cdots v'_{p-k}\ v''_1 \cdots v''_{q-k} \in (),{}_{()}(())$: 对于任意),
$N_{F\ \sigma'}{}_{\mathbb{R}}$
以及 , , , , ,(),

$$\widetilde{F}_*(\alpha')(x)(v'_1, \cdots, v'_{p-k}, v''_1, \cdots v''_{q-k}) := \int_{\sigma' \cap F^{-1}(x)} \beta,$$

其中

$$\beta := (-1)^{k^2+kp} \langle \alpha'; ((u'_1, \cdots, u'_{p-k})_{\{k+1,\cdots,p\}}, (u''_1, \cdots, u''_{q-k})_{\{k+1,\cdots,q\}}) \rangle|_{\sigma' \cap F^{-1}(x)}$$

a且 $u'_1, \cdots, u'_{p-k}, u''_1, \cdots, u''_{q-k}$ 是 $N_{\sigma',\mathbb{R}'}$ 中 $v'_1, \cdots, v'_{p-k}, v''_1, \cdots, v''_{q-k}$ 在 dF 下的原像。此外，
F_* 是 $\mathbb{R}$-线性的，并且对于任意 $\eta \in A^{\dim \sigma' - p}{}_{,\text{维数}\, F\ \sigma'}{}_{()}(F(\sigma'))$，有

$$[N_{F(\sigma')} : dF(N'_{\sigma'})] \int_{F(\sigma')} \widetilde{F}_* \alpha' \wedge \eta = \int_{\sigma'} \alpha' \wedge F^* \eta.$$

证明。我们可以假设 $N' = N'_{\sigma'}$ 且 $N = N_{F(\sigma')}$。根据定义，我们知道 $\tau' := \sigma' \cap F^{-1}(x)$ 是一个整仿射多面体。我们首先证明 $\beta \in A^{k}{}_{,\tau'}{}^{k}{}_{,c}(\tau')$ 定义良好。这是因为作为向量空间的 $N'_{F^{-1}(x)\ \mathbb{R}}$ 与 x 的选取无关，并且恰好等于 $\mathrm{Ker}(dF)$。因此，该积分定义良好。由于 α' 光滑，该取值也是光滑的。此外，$\mathrm{Supp}(F_*(\alpha')) \subset F(\mathrm{Supp}(\alpha'))$，因此 $F_*(\alpha')$ 具有紧支撑。

最后一个陈述是关于光滑流形的 Fubini定理，见 [7, 2.15]。我们详细推导以验证符号。我们有 $N' = M \times dF(N')$，且 $F\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 是投影。注意，对 $dF(N')$ 的积分，等于对 N 积分后乘以 $[N\colon dF(N')],$，见命题 2.5，因此我们可以假设 $N' = M \times N$。此外，假设 $\sigma' = N'_{\mathbb{R}}$，因为$A^{p}{}_{,\sigma'}{}^{q}{}_{,c}(\sigma') \subset A^{p}{}_{,c}{}^{q}(\text{相对内部}(\sigma')) \subset A^{p}{}_{,c}{}^{q}(N'_{\mathbb{R}})$。令 $x_1, \cdots x_k$（分别为 $x_{k+1}, \cdots, x_{k+r}$）是 $M_{\mathbb{R}}$（分别为 $N_{\mathbb{R}}$）的坐标函数。令 $\alpha' = \sum \alpha'_{IJ} d'x_I d''x_J$。设 $T = \{1, \cdots, k\}$。根据定义$_{I,J}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_* \alpha' &= (-1)^{k^2+kp} \sum_{\widetilde{I},\widetilde{J}} \Big(\int_{M_{\mathbb{R}}} \alpha_{IJ}(x_1, \cdots, x_{k+r}) d'x_T \wedge d''x_T \Big) dx_{\widetilde{I}} \wedge d'x_{\widetilde{J}} \\
&= (-1)^{k^2+kp+k(k-1)/2} \sum_{\widetilde{I},\widetilde{J}} \Big(\int_{M_{\mathbb{R}}} \alpha'_{IJ}(x_1, \cdots, x_{k+r}) dx_T \Big) dx_{\widetilde{I}} \wedge d'x_{\widetilde{J}}
\end{aligned}$$

~ ~ ~ ~ ~其中 I, J遍历 $\{r+1, \cdots, r+k\}$ 的子集，满足 $|I| = p-k, |J| = q-k$，且 $I = I \cup T, J = \widetilde{J} \cup T$。假设 $\eta = \sum \eta_{\overline{IJ}} d'x_{\overline{I}} d''x_{\overline{J}} \in A^{k+r-p}_{\sigma'}{}_{,\ F}{}_{()}(F(\sigma'))$，则 $\overline{I},\ \overline{J}$

$$\begin{aligned}
\int_{N'_{\mathbb{R}}} \alpha' \wedge F^* \eta &= \sum_{\widetilde{I},\widetilde{J}} \int_{N'_{\mathbb{R}}} \alpha'_{IJ} \eta_{\widetilde{I}^c \widetilde{J}^c} d'x_I \wedge d''x_J \wedge d'x_{\widetilde{I}^c} \wedge d''x_{\widetilde{J}^c} \\
&= a \cdot \sum_{\widetilde{I},\widetilde{J}} c_{\widetilde{I}} c_{\widetilde{J}} \int_{N'_{\mathbb{R}}} \alpha'_{IJ} \eta_{\widetilde{I}^c \widetilde{J}^c} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r+k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{N_{\mathbb{R}}} \widetilde{F}_* \alpha' \wedge \eta &= (-1)^{k^2+kp+k(k-1)/2} \int_{N_{\mathbb{R}}} \sum_{\widetilde{I},\widetilde{J}} \Big(\int \alpha'_{IJ} dx_T \Big) \eta_{\widetilde{I}^c \widetilde{J}^c} d'x_{\widetilde{I}} \wedge d''x_{\widetilde{J}} \wedge d'x_{\widetilde{I}^c} \wedge d''x_{\widetilde{J}^c} \\
&= b \cdot \sum_{\widetilde{I},\widetilde{J}} c_{\widetilde{I}} c_{\widetilde{J}} \int_{N_{\mathbb{R}}} \Big(\int_{M_{\mathbb{R}}} \alpha'_{IJ} \eta_{\widetilde{I}^c \widetilde{J}^c} dx_T \Big) dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_{r+k}
\end{aligned}$$

~ ~其中 $I^c=\{r+1,\cdots,r+k\}\setminus I$, $c_{\tilde{I}}$是置换的符号

$$(r+1,\cdots,r+k)\to(\widetilde{I},\widetilde{I^c}),$$

~对于 J^c、$c_{\tilde{J}}$，情况也类似，且

$$a=(-1)^{q(k+r-p)+(k+r)(k+r-1)/2},\quad b=(-1)^{k^2+kp+k(k-1)/2}\cdot(-1)^{(q-k)(k+r-p)+r(r-1)/2}.$$

根据富比尼定理，只需证明 $a=b$，这可通过简单计算得出。 □

注释 5.2. (1) 若 $\dim F(\sigma')=\dim\sigma'$，则有 $\widetilde{F}_*=((F|_\sigma)^{-1})^*$，另见命题 2.5。

~ ~推论 5.3. 设 $F\colon N'_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}}$ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射映射。设 $\Omega\subset N_{\mathbb{R}}$、$\Omega'\subset N'_{\mathbb{R}}$ 是开子集，且 $F(\widetilde{\Omega'})\subset\widetilde{\Omega}$。则对于任意多面体超流 $\alpha'[\sigma']\in P^{p,}{}_{c}{}^{q\,l,}(\widetilde{\Omega'})$，有

$$F_*(\alpha'[\sigma'])=[N_{F(\sigma')}:dF(N'_{\sigma'})]\widetilde{F}_*\alpha'[F(\sigma')]\in P_c^{p-k,q-k,l+\mathrm{rk}N-\mathrm{rk}N'+k}(\widetilde{\Omega}),$$

其中，左边的 F_*（分别为右边的 F_*）在定义 2.20（分别为引理 5.1）中定义，且 $k=\dim\sigma'-\dim F(\sigma')$。特别地，$F_*\colon P^{p,}{}_{c}{}^{q\,l,}(\widetilde{\Omega'})\to P^{p-k,}{}_{c}{}^{q-k\;l+r-r'-k,}(\widetilde{\Omega})$ 诱导出

$$F_*:B_c^{p,q,l}(\widetilde{\Omega'})\to B_c^{p-k,q-k,l+r-r'+k}(\widetilde{\Omega})$$

并且与 d'、d''、d'_P、d''_P、∂' 和 ∂'' 交换。

证明。注意，由引理 5.1，$\alpha'\in A^{p,}{}_{\sigma'}{}^{q,}{}_{c}(\widetilde{\Omega'}\cap\sigma')\subset A^{p,}{}_{\sigma'}{}^{q,}{}_{c}(\sigma')$，$\widetilde{F}_*\alpha'\in A^{p-k,}{}_{F\,\sigma'}{}^{q-k}{}_{c}{}^{()}(F(\sigma'))$ 满足

$$\mathrm{Supp}(\widetilde{F}_*\alpha')\subset F(\mathrm{Supp}(\alpha'))\subset F(\widetilde{\Omega'}\cap\mathrm{relint}(\sigma))\subset\widetilde{\Omega}\cap\mathrm{relint}(F(\sigma')),$$

因此 $\widetilde{F}_*\alpha'\in A^{p,}{}_{F}{}^{q}{}_{(\sigma')\,c}(\widetilde{\Omega}\cap F(\sigma'))$。此外，对于任意 $\eta\in A^{r'-l-p,}{}_{c}{}^{r'-l-q}(\widetilde{\Omega})\subset A^{r'-l-p,}{}_{c}{}^{r'-l-q}(N_{\mathbb{R}})$，我们有

$$[N_{F(\sigma')}:dF(N'_{\sigma'})]\int_{F(\sigma')}\widetilde{F}_*\alpha'\wedge\eta=\int_{\sigma'}\alpha'\wedge F^*\eta,$$

i.e.

$$[N_{F(\sigma')}:dF(N'_{\sigma'})]\widetilde{F}_*\alpha'[F(\sigma')]=F_*(\alpha'[\sigma']).$$

由于 $d'F_*=F_*d'$、$d''F_*=F_*d''$，我们可以看到 F_* 将 δ-形式映射为 δ-形式。此外，不难看出 $F_*d'_P=d'_PF_*$、$F_*d''_P=d''_PF_*$。 □

5.2 热带几何中的推前

由上面的推论可见，推前 F_* 与热带几何中的经典定义略有不同：在热带几何中，若 $\dim F(\sigma)<\dim\sigma$，则 $F_*([\sigma])=0$。因此，我们还有另一种推前的定义。

命题 5.4. 设 $F\colon N'_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}}$ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射映射。则以下结论成立 .

^(1) $F_*\colon P^{p,}{}_{n}{}^{q}(N'_{\mathbb{R}})\to P^{p,}{}_{n}{}^{q}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个良定义的线性映射（与代表元 $(\mathcal{C},\alpha_\sigma)$ 的选择无关），并满足以下性质：对于任意满足 $\alpha_\sigma\in A^{p,}{}_{\sigma}{}^{q}(\sigma)$ 的 $\alpha_\sigma[\sigma]$，

- 若 $\dim F(\sigma)<n$，则 $\widehat{F}_*(\alpha_\sigma[\sigma])=0$;
- 若 $\dim F(\sigma)=n$，则 $\widehat{F}_*(\alpha_\sigma[\sigma])=[N_{F(\sigma)}:(dF)(N'_\sigma)][((F|_\sigma)^{-1})^*(\alpha_\sigma)[F(\sigma)]$（注意，$(dF)(N_\sigma)\subset N'_{F(\sigma)}$的秩为 n），其中 $F|_\sigma\colon N'_{\sigma,\mathbb{R}}\to N_{\sigma,\mathbb{R}}$ 是双射。

^显然，F_* 是唯一满足这些性质的线性映射。特别地，对于任意 $\alpha\in P^{p,}{}_{n}{}^{q}(N_{\mathbb{R}})$，都有 $\mathrm{Supp}(F_*(\alpha))\subset F(\mathrm{Supp}(\alpha))$。

^(2) 若 $\alpha\in B(N'_{\mathbb{R}})$，则 $F_*(\alpha)\in B(N_{\mathbb{R}})$。因此，我们有一个自然同态

$$\widehat{F}_*:B_n^{p,q}(N'_{\mathbb{R}})\to B_n^{p,q}(N_{\mathbb{R}}),$$

它与 d'、d''、d'_P、d''_P、∂' 和 ∂'' 交换。

证明。（1）由注记 3.6 显然可得。

(2) 在 $B^{p,q}(N'_{\mathbb{R}})$ 上，局部有 $F_* = \mathrm{pr} \circ F_*$，其中 $\mathrm{pr}: B(N_{\mathbb{R}}) \to B^{p,q}(N_{\mathbb{R}})$。于是结论由推论 5.3 得出。 □

注记 5.5. (1) F_* 的定义将热带循环上的经典推前推广到了δ-形式。若 α 是一个多面体超流，且存在一个多面体分解，使得 $F|_\sigma$ 是单射，则 $F_*\alpha = F_*\alpha$。

5.3 δ-形式的拉回

定义 5.6. 设 $F: (N', \Omega') \to (N, \Omega)$ 是 $\mathcal{ATop}_{\mathbb{Z},\mathbb{R}}$ 中的一个态射。则我们定义一个双线性映射

$$\begin{aligned}(\cdot) \wedge F^*(\cdot) : B(\widetilde{\Omega}') \times B(\widetilde{\Omega}) &\to B(\widetilde{\Omega}'),\\ (\alpha', \alpha) &\mapsto p_{1,*}([\Delta_F] \wedge (\alpha' \times \alpha)),\end{aligned}$$

其中 $\Delta_F \subset N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$是 F的图，而 p_1: $N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N'_{\mathbb{R}}$是投影。特别地，我们有一个 δ-形式的拉回

$$\begin{aligned}F^* : B(\widetilde{\Omega}) &\to B(\widetilde{\Omega}'),\\ \alpha &\mapsto [N'_{\mathbb{R}}] \wedge F^*\alpha.\end{aligned}$$

注记 5.7. (1) 我们分别固定 $N'_{\mathbb{R}}$ 和 $N_{\mathbb{R}}$ 的整坐标 $(x'_1, \cdots, x'_{r'})$、$(x_1, \cdots, x_r)$。根据定理 4.25，我们有

$$[\Delta_F] = d'd''\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d'd''\varphi_r,$$

其中 $\varphi_i = \max\{f_i(x'_1, \cdots, x'_{r'}) - x_i\}$，且 $F = (f_1, \cdots, f_r): N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$。

(2) 由命题 4.22 不难看出，F^* 与 d'、d''、d'_P、d''_P、∂' 和 ∂'' 可交换。

引理 5.8. 沿用定义 5.6 中的概念。

(1) 若 $\alpha = \{\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}} \in PS^{p,q}(\widetilde{\Omega})$，则 $F^*\alpha = \{F^*\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}}$；若 $\alpha \in B^{0,0,l}(\widetilde{\Omega})$，则 $F^*\alpha$ 是热带循环 α 的拉回。

(2) 若对于某些 $\phi_1, \cdots, \phi_n \in PS^{0,0}(\widetilde{\Omega})$，有 $\alpha = \mathrm{div}(\phi_1) \cdots \mathrm{div}(\phi_n) \cdot [N_{\mathbb{R}}]$，则 $F^*\alpha = \mathrm{div}(F^*\phi_1) \cdots \mathrm{div}(F^*\phi_n) \cdot [N'_{\mathbb{R}}]$。

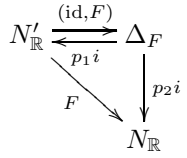
(3) 对任意 $\phi \in PS^{0,0}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\alpha' \in B_c(\widetilde{\Omega}')$，有

$$F_*(\mathrm{div}(F^*\phi) \cdot \alpha') = \mathrm{div}(\phi) \cdot F_*\alpha'.$$

证明。（1）根据定义，如果 α 是一个热带循环，那么 $F^*\alpha$ 是一个热带循环的拉回。如果 $\alpha = \{\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}} \in PS^{p,q}(\Omega)$，那么对于任意 $\gamma \in A^{r-p,r-q}_c(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned}(F^*\alpha)(\gamma) &= (\Delta_F \wedge ([N_{\mathbb{R}}] \times \alpha))(p_1^*\gamma)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} (p_2^*\alpha_\sigma[\Delta_F \cap (N'_{\mathbb{R}} \times \sigma)])(p_1^*\gamma)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} \int_{\Delta_F\cap(N'_{\mathbb{R}}\times\sigma)} (p_2 i)^*\alpha_\sigma \wedge (p_1 i)^*\gamma\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} \int_{F^{-1}(\sigma)} (\widetilde{p_1 i})_*(p_2 i)^*\alpha_\sigma \wedge \gamma\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{C}^0} \int_{F^{-1}(\sigma)} F^*\alpha_\sigma \wedge \gamma,\end{aligned}$$

其中 $i\colon \Delta_F \to N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ 是自然嵌入。第二个等式由 Δ_F 和 $N'_{\mathbb{R}} \times \sigma$ 横截相交这一事实以及推论 4.30 得出。第四个等式由引理 5.1 得出，第五个等式则由交换图得出



(2) 我们按照 [1, 定理 3.3 (c)] 的证明进行

$$\begin{aligned} F^*\alpha &= p_{1,*}([\Delta_F] \wedge ([N_{\mathbb{R}}] \times (\operatorname{div}(\phi_1) \cdots \operatorname{div}(\phi_n) \cdot [N_{\mathbb{R}}]))) \\ &= p_{1,*}(\operatorname{div}(p_2^*\phi_1) \cdots \operatorname{div}(p_2^*\phi_n) \cdot ([\Delta_F] \wedge [N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}])) \\ &= p_{1,*}(\operatorname{div}(p_2^*\phi_1) \cdots \operatorname{div}(p_2^*\phi_n) \cdot [\Delta_F]) \\ &= \operatorname{div}(F^*\phi_1) \cdots \operatorname{div}(F^*\phi_n) \cdot [N'_{\mathbb{R}}]. \end{aligned}$$

最后一个等式来自上面的交换图。

(3) 对任意 $\alpha \in PS^{p,q}(\widetilde{\Omega})$ 和 $\alpha' \in B_c(\widetilde{\Omega}')$，我们有

$$F_*(F^*\alpha \wedge \alpha') = \alpha \wedge F_*\alpha'. \tag{2}$$

事实上，经过细化后，我们可以写成 $\alpha = \{\alpha_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}}, \alpha' = \sum_{\sigma'\in\mathcal{C}'} \alpha'_{\sigma'}[\sigma']$，使得 $F(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$。对于任意 $\gamma \in A_c(\widetilde{\Omega}')$，由定义 4.15 和 (1)，我们有

$$\begin{aligned} F_*(F^*\alpha \wedge \alpha')(\gamma) &= (F^*\alpha \wedge \alpha')(F^*\gamma) = \sum_{\sigma'\in\mathcal{C}'} \int_{\sigma'} F^*\alpha_\sigma \wedge \alpha'_{\sigma'} \wedge F^*\gamma \\ (\alpha \wedge F_*\alpha')(\gamma) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{C}} \sum_{\substack{\sigma'\in\mathcal{C}' \\ F(\sigma')=\sigma}} \alpha_\sigma \wedge F_*(\alpha'_{\sigma'}[\sigma'])(\gamma) = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}} \sum_{\substack{\sigma'\in\mathcal{C}' \\ F(\sigma')=\sigma}} \int_{\sigma'} F^*\alpha_\sigma \wedge \alpha'_{\sigma'} \wedge F^*\gamma. \end{aligned}$$

设 $\phi \in PS^0, {}^0(\widetilde{\Omega})$。回忆一下，$\operatorname{div}(\phi) \cdot \alpha = \partial'(d''_P\phi \wedge \alpha) + d''_P\phi \wedge \partial'\alpha$。由于 F_* 与 ∂' 交换，且 F^* 与 d'_P, d''_P 交换，我们有

$$\begin{aligned} F_*(\operatorname{div}(F^*\phi) \cdot \alpha') &= F_*(\partial'(d''_P F^*\phi \wedge \alpha') + d''_P(F^*\phi) \wedge \partial'\alpha') \\ &= \partial'(F_*(F^* d''_P\phi \wedge \alpha')) + F_*(F^*(d''_P\phi) \wedge \partial'\alpha') \\ &= \partial'(d''_P\phi \wedge F_*\alpha') + d''_P\phi \wedge \partial' F_*\alpha' \\ &= \operatorname{div}(\phi) \cdot F_*\alpha'. \end{aligned}$$

第三个等式由等式 (2) 得出。 □

注 5.9. (1) 由单位分解可知，只要等式两边都有意义，性质 (3) 就成立。

引理 5.10. 设 $F\colon (N', \Omega') \to (N, \Omega)$，$G\colon (N'', \Omega'') \to (N', \Omega')$ 是 $\mathcal{AT}op_{\mathbb{Z},\,\mathbb{R}}$ 中的态射。那么对于任意 $\alpha \in B(\widetilde{\Omega})$，$\alpha' \in B(\widetilde{\Omega}')$，$\alpha'' \in B(\widetilde{\Omega}'')$，我们有 $\alpha'' \wedge G^*(\alpha' \wedge F^*\alpha) = (\alpha'' \wedge G^*\alpha') \wedge (FG)^*\alpha$。

证明。我们给出一些将在证明过程中用到的性质。

- 对于任意 $(\alpha', \alpha) \in B(\widetilde{\Omega}') \times B(\widetilde{\Omega})$，以及任意合理的映射 F_1, F_2，我们有
$$(F_1 \times F_2)_*(\alpha' \times \alpha) = F_{1,*}\alpha' \times F_{2,*}\alpha.$$
- 对于任意的 $\alpha' \in B(\widetilde{\Omega}')$ 和 $\alpha_1, \alpha_2 \in B(\widetilde{\Omega})$，有
$$\alpha' \times (\alpha_1 \wedge \alpha_2) = ([N'_{\mathbb{R}}] \times \alpha_1) \wedge (\alpha' \times \alpha_2).$$

• 设 $\widetilde{\Delta} =$ 除子$(\phi_1) \cdots$ 除子$(\phi_n) \cdot [N_{\mathbb{R}}]$，其中 $\phi_1, \cdots, \phi_n \in PS^0, {}^0(\widetilde{\ }\Omega)$ 和 $\alpha' \in B_c(\widetilde{\ }\Omega')$，有

$$F_*(F^*\widetilde{\Delta} \wedge \alpha') = \widetilde{\Delta} \wedge F_*\alpha'$$

第一条显然，第二条由推论 4.30 得出。对于第三条，由引理 5.8 (2) (3)，我们有

$$\begin{aligned} F_*(F^*\widetilde{\Delta} \wedge \alpha') &= F_*(\operatorname{div}(F^*\phi_1) \cdots \operatorname{div}(F^*\phi_n) \cdot ([N_{\mathbb{R}}] \wedge \alpha')) \\ &= \operatorname{div}(\phi_1) \cdots \operatorname{div}(\phi_n) \cdot F_*([N_{\mathbb{R}}] \wedge \alpha') \\ &= \widetilde{\Delta} \wedge F_*\alpha' \end{aligned}$$

设 $\Delta_F \subset N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ 和 $\Delta_G \subset N''_{\mathbb{R}} \times N'_{\mathbb{R}}$ 分别是 F 和 G 的图像。我们考虑 $N''_{\mathbb{R}} \times N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ 的以下子集:

$$\begin{aligned} \Delta' &:= \{(w'', G(w''), F(G(w''))) \mid w'' \in N''_{\mathbb{R}}\}, \\ \Delta_{12} &:= \{(w'', G(w''), w) \mid w \in N_{\mathbb{R}}, w'' \in N''_{\mathbb{R}}\}, \\ \Delta_{23} &:= \{(w'', w', F(w')) \mid w' \in N_{\mathbb{R}}, w'' \in N''_{\mathbb{R}}\}, \\ \Delta_{13} &:= \{(w'', w', F(G(w''))) \mid w' \in N_{\mathbb{R}}, w'' \in N''_{\mathbb{R}}\}. \end{aligned}$$

我们还记

$$\begin{aligned} p_1 &: N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N'_{\mathbb{R}}, \\ p'_1 &: N''_{\mathbb{R}} \times N'_{\mathbb{R}} \to N''_{\mathbb{R}}, \\ p''_1 &: N''_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N''_{\mathbb{R}}, \\ q_1 &: N''_{\mathbb{R}} \times N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N''_{\mathbb{R}}, \\ q_{12} &: N''_{\mathbb{R}} \times N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N''_{\mathbb{R}} \times N'_{\mathbb{R}}, \\ q_{13} &: N''_{\mathbb{R}} \times N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N''_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

为典范投影。于是我们有

$$\begin{aligned} \alpha'' \wedge G^*(\alpha' \wedge F^*\alpha) &= p'_{1,*}(\Delta_G \wedge (\alpha'' \times (\alpha' \wedge F^*\alpha))) \\ &= p'_{1,*}(\Delta_G \wedge (\alpha'' \times p_{1,*}(\Delta_F \wedge (\alpha' \times \alpha)))) \\ &= p'_{1,*}(\Delta_G \wedge q_{12,*}((N''_{\mathbb{R}} \times \Delta_F) \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha))) \\ &= p'_{1,*}q_{12,*}(q_{12}^*\Delta_G \wedge (\Delta_{23} \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha))) \\ &= q_{1,*}(\Delta_{12} \wedge \Delta_{23} \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha)) \\ &= q_{1,*}(\Delta' \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha'' \wedge G^*\alpha') \wedge (FG)^*\alpha'' &= p''_{1,*}(\Delta_{FG} \wedge ((\alpha'' \wedge G^*\alpha') \times \alpha)) \\ &= p''_{1,*}(\Delta_{FG} \wedge (p'_{1,*}(\Delta_G \wedge (\alpha'' \times \alpha')) \times \alpha)) \\ &= p''_{1,*}(\Delta_{FG} \wedge q_{13,*}((\Delta_G \times N_{\mathbb{R}}) \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha)) \\ &= p''_{1,*}q_{13,*}(q_{13}^*\Delta_{FG} \wedge (\Delta_{12} \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha)) \\ &= q_{1,*}(\Delta_{13} \wedge \Delta_{12} \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha)) \\ &= q_{1,*}(\Delta' \wedge (\alpha'' \times \alpha' \times \alpha)), \end{aligned}$$

因此等式成立。 □

事实上，我们还有另一种基于以下命题定义拉回的方法。~ ~命题 5.11. 设 F: (N', Ω') $\to$ (N, Ω) 是 $\mathcal{AT}op_{\mathbb{Z},\mathbb{R}}$ 中的一个态射，且 $\alpha = \sum \alpha_\sigma[\sigma] \in_{\sigma \in C^l B^{p,q},} {}^l(\widetilde{\ }\Omega)$。

(1) 若 $F = i$: $N'_{\mathbb{R}} \hookrightarrow N_{\mathbb{R}}$是一个嵌入，且 $i(N'_{\mathbb{R}})$ 是 $N_{\mathbb{R}}$的仿射子空间，并且$\widetilde{N'} = N \cap i(N'_{\mathbb{R}})$，那么对于任意 $\gamma \in A^{p,q}_{c}(\Omega)$，我们有

$$i^*\alpha(i^*\gamma) = ([i(N'_{\mathbb{R}})] \wedge \alpha)(\gamma),$$

i.e.

$$i^*\alpha = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{C}^l \\ N'_{\mathbb{R}} \cap (\varepsilon v + \sigma) \neq \emptyset}} \alpha_\sigma|_{\widetilde{\Omega}'}[i(N'_{\mathbb{R}}) \cap \sigma],$$

其中 $v \in N_{\mathbb{R}}$ $\varepsilon > 0$ $\alpha_\sigma|_{\widetilde{\Omega}'} \in A_{\sigma \cap i(N'_{\mathbb{R}})}$ $\cap \sigma \cap$ 是一般向量，足够小，并且$i(\Omega(N'_{\mathbb{R}}))$ 是 α_σ的限制。

(2) 如果 F: $N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 是满射，那么

$$F^*\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}^l} F^*\alpha_\sigma[F^{-1}(\sigma)].$$

此外，对于任意 $\gamma \in A^{\mathrm{rk}N'-p-l,\ \mathrm{rk}_c N'-q-l}(\widetilde{\Omega}')$，我们有

$$(F^*\alpha)(\gamma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}^l} ([N_\sigma : dF(N_{F^{-1}(\sigma)})]\alpha_\sigma[\sigma])(F_*\gamma).$$

证明。(1) 为简便起见，我们将 $N'_{\mathbb{R}}$与 $i(N'_{\mathbb{R}})$ 等同。假设 $\Omega' = N'_{\mathbb{R}} \cap \Omega$ 且 $\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}^l} \alpha_\sigma[\sigma]$。令 $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ 为对角线，且 $\Delta' = \Delta \cap (N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}})$。对于任意 $\gamma \in A^{p,q}_{c}(\Omega)$，我们有

$$(i^*\alpha)(i^*\gamma) = (\Delta' \wedge ([N'_{\mathbb{R}}] \times \alpha))(j^*p_1^*\gamma),$$

$$(N'_{\mathbb{R}} \wedge \alpha)(\gamma) = (\Delta \wedge ([N'_{\mathbb{R}}] \times \alpha))(p_1^*\gamma),$$

其中

$$\begin{tikzcd} N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "j"'] & N'_{\mathbb{R}} \arrow[d, hook, "i"] \\ N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \arrow[r, "p_1"'] & N_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}.$$

由推论 4.30，对于一般向量 $v \in N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ 以及足够小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\Delta \wedge ([N'_{\mathbb{R}}] \times \alpha) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{C}^l \\ (N'_{\mathbb{R}} \times \sigma) \cap (\Delta + \varepsilon v) \neq \emptyset}} \alpha_\sigma[(N'_{\mathbb{R}} \times \sigma) \cap \Delta].$$

注意，由于 Δ是对角线，我们可以假设 $v \in \{0\} \times N_{\mathbb{R}}$，因此可以在上面的等式中用 Δ'替换 Δ。于是，(1) 成立。

(2) 由命题 4.22 和推论 4.30，我们有

$$\begin{aligned} F^*\alpha &= p_{1,*}([\Delta_F] \wedge ([N'_{\mathbb{R}}] \times \alpha)) \\ &= p_{1,*}([\Delta_F] \wedge (\sum_{\sigma \in \mathcal{C}^l} p_2^*\alpha_\sigma[N'_{\mathbb{R}} \times \sigma])) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{C}^l} p_{1,*}(p_2^*\alpha_\sigma[\Delta_F \cap (N'_{\mathbb{R}} \times \sigma)]). \end{aligned}$$

这里我们用到如下事实：Δ_F与 $N'_{\mathbb{R}} \times \sigma$横截相交：relint($\Delta_F$) $\cap$relint($N'_{\mathbb{R}} \times \sigma$) $\neq$，因为 F是满射，F^{-1}(relint(σ)) $\neq \emptyset$，并且

$$\dim \Delta_F + \dim(N'_{\mathbb{R}} \times \sigma) - \dim(\Delta_F \cap (N'_{\mathbb{R}} \times \sigma)) = \dim N'_{\mathbb{R}} + \dim N_{\mathbb{R}}.$$

不难验证，$p_{1,*}(p_2^*\alpha_\sigma[\Delta_F \cap (N'_{\mathbb{R}} \times \sigma)]) = F^*\alpha_\sigma[F^{-1}(\sigma)]$ 作为流成立：对于任意 $\gamma \in A_c(\Omega')$，我们有

$$\begin{aligned} p_{1,*}(p_2^*\alpha_\sigma[\Delta_F \cap (N'_{\mathbb{R}} \times \sigma)])(\gamma) &= \int_{\Delta_F \cap (N'_{\mathbb{R}} \times \sigma)} p_2^*\alpha_\sigma \wedge p_1^*\gamma = \int_{F^{-1}(\sigma)} F^*\alpha_\sigma \wedge \gamma \\ &= (F^*\alpha_\sigma[F^{-1}(\sigma)])(\gamma) \\ &= [N_\sigma : dF(N_{F^{-1}(\sigma)})] \int_\sigma \alpha_\sigma \wedge \widetilde{F}_*\gamma \\ &= (\alpha_\sigma[\sigma])(F_*\gamma). \end{aligned}$$

第二个等式由观察 $N' \simeq \Delta_F \cap (N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}})$ 得出。 □

Re引理 5.12。(1) 根据 (2)，我们知道，我们的拉回恰好是 *[14,* Se 中定义的那个 *c-*
tion 2.5] ，用于满射映射。

~ ~定理 5.13。预层 $B : \mathcal{AT}op_{\mathbb{Z},\mathbb{R}} \to \mathcal{R}ing$, $(N, \Omega) \mapsto B(\Omega)$ 是一个 C^∞-模。此外，
~ ~对于态射 F: $(N', \Omega') \to (N, \Omega)$，有如下结论。

~(1) $B(\Omega)$ 上的 $\wedge$-乘积满足关于 $d', d'', d'_P, d''_P, \partial'$ 和 ∂'' 的莱布尼茨法则。

(2) F^* 与 $d', d'', d_P, d''_P, \partial', \partial''$ 可交换，并且它是分次的，即 $F^*(B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega})) \subset B^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}')$,.
~ ~(3)（ F_*的投影公式）对于任意 $\alpha \in B_c(\Omega')$ $\beta \in B(\Omega)$，我们有

$$F_*(\alpha \wedge F^*\beta) = F_*\alpha \wedge \beta \in B(\widetilde{\Omega}).$$

^(4)（ F_*的投影公式）对于任意 $\alpha \in B(N'_{\mathbb{R}})$ $\beta \in B(N_{\mathbb{R}})$，我们有

$$\widehat{F}_*(\alpha \wedge F^*\beta) = \widehat{F}_*\alpha \wedge \beta \in B(N_{\mathbb{R}}).$$

证明。（1）只需证明关于 d'_P、 d''_P 的莱布尼茨法则，这可由直接计算和推论 4.30 得出。

（2）这由定义可得。

（3）我们遵循 [1, 定理 3.3（d）] 的证明思路。设 p_1： $N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N'_{\mathbb{R}}$（分别地，$q_1$： $N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$）为到第一因子的投影，并设 $\Delta_F \subset N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ （分别地， $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$）为 F （分别地，对角线）的图。注意，对于任意整 $\mathbb{R}$-仿射态射G： $M_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ 和 $\gamma \in B_c$（$M_{\mathbb{R}}$），我们有

$$G_*(G^*\Delta \wedge \gamma) = \Delta \wedge G_*\gamma$$

~由引理 5.8 可得。此外，容易验证 $(F \times \mathrm{id})^*\Delta = \Delta_F$。利用单位分解，我们可以假设 $\beta \in B_c(\Omega)$~ ~，于是 $\alpha \times \beta \in B_c(\Omega' \times \Omega) \subset B_c(N'_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}})$。因此我们得到

$$\begin{aligned} F_*\alpha \wedge \beta = q_{1,*}(\Delta \wedge (F_*\alpha \times \beta)) &= q_{1,*}(\Delta \wedge (F \times \mathrm{id})_*(\alpha \times \beta)) \\ &= q_{1,*}(F \times \mathrm{id})_*((F \times \mathrm{id})^*\Delta \wedge (\alpha \times \beta)) \\ &= F_*p_{1,*}(\Delta_F \wedge (\alpha \times \beta)) \\ &= F_*(\alpha \wedge F^*\beta). \end{aligned}$$

(4) 这可以用与 [1, 定理 3.3], 类似的方法证明，也可以利用单位分解，并在 (3) 的两边应用投影 pr : $B(N_{\mathbb{R}}) \to B^{p+p',n+n'-q-q'}\,\mathrm{rk}_{N'}(N_{\mathbb{R}})$，其中 $\alpha \in B^{p',q'}{}_{,n'}(N'_{\mathbb{R}})$， $\beta \in B^{p}{}_{,n}{}^{q}(N_{\mathbb{R}})$。 □

6 Xan 上的图表和 δ-形式

在 [8] 和 [10], 中，Gubler 与 Gubler-K¨unnemann 考虑了由代数矩映射诱导的热带图表，而非一般的光滑图表，并证明这两类图表是等价的，参见 [8, 命题 7.2]。本节将回顾他们的定义，并利用我们的结果来定义更一般的 δ-形式。本节中的大多数结果都可以用与 [10], 类似的方法证明；在这种情况下，我们将省略证明或给出证明概要。

在本节中， X 表示定义在完备非阿基米德域K上的代数簇，即定义在 K上的有限型分离概形。

6.1 代数的热带图表

回顾一下，代数（分裂）环面 T 是定义在 K 上的代数簇，满足 $T \simeq \mathbb{G}_m^r$，其中 $r \in \mathbb{N}^+$。不致混淆时，环面 T 的解析化也记作 T。T 的特征群定义为

$$N := \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}\mathcal{G}p_{/K}}(T, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}p\mathcal{S}ch_{/K}}(\mathbb{G}_m^r, \mathbb{G}_m),$$

T 的余特征群定义为

$$M := \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}\mathcal{G}p_{/K}}(\mathbb{G}_m, T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}p\mathcal{S}ch_{/K}}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m^r).$$

其中，$\mathcal{G}p\mathcal{S}ch_{/K}$（分别为 $\mathcal{G}p\mathcal{S}ch_{/K}$）是 K上的解析群空间（分别为群概形）范畴。我们有 $N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$，即 M 作为 $\mathbb{Z}$-模的对偶。T 的热带化映射为

$$\mathrm{trop} : T \to N_{\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}), \quad x \mapsto (\varphi \mapsto -\log |\varphi^{\#}(z)|_x)$$

其中 $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(K[z^{\pm}])$，且 $\varphi^{\#} : K[z^{\pm}] \to \mathcal{O}_T(T)$ 由 φ给出。

环面之间的仿射同态 $\psi : T \to T'$ 是由群同态与 T上的平移复合而成。对于这样的群同态，我们在特征群上有一个映射 $M' \to M$，它诱导出一个仿射映射 $N_{\mathbb{R}} \to N'_{\mathbb{R}}$。

定义 6.1. 动量映射是一个 K上的解析态射 $\varphi : X^{\mathrm{an}} \to T \simeq \mathbb{G}_m^r$。$\varphi$的热带化为

$$\varphi_{\mathrm{trop}} : X \xrightarrow{\varphi} T^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\mathrm{trop}} N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^r.$$

我们称动量映射 $\varphi' : X \to T'$ 细化 $\varphi : X \to T$，如果存在一个仿射同态$\psi : T' \to T$，使得 $\varphi = \psi \circ \varphi'$。

注 6.2. (1) 固定 T 的坐标 $z_1, \cdots, z_r$ 后，我们有

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}} &\simeq \mathbb{R}^r \\ f &\mapsto (f(\varphi_1), \cdots, f(\varphi_r)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{trop} : T^{\mathrm{an}} &\to \mathbb{R}^r, \\ x &\mapsto (-\log |z_1|_x, \cdots, -\log |z_r|_x), \end{aligned}$$

其中 $\varphi_i^{\#} : K[z^{\pm 1}] \mapsto \mathcal{O}_T(T) \simeq K[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_r^{\pm 1}]$，$z \mapsto z_i$。

(2) 显然，$\mathrm{Trop}(\cdot) : T \mapsto \mathrm{Trop}(T) := N_{\mathbb{R}}$ 是分裂环面范畴上的一个函子。热带化具有函子性，即对任意分裂环面的态射 $f : T \to T'$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\mathrm{trop}} & N_{\mathbb{R}} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Trop}(f)} \\ T' & \xrightarrow[\mathrm{trop}]{} & N'_{\mathbb{R}} \end{array},$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{Trop}(f) : N_{\mathbb{R}} &\to N'_{\mathbb{R}} \\ \varphi &\mapsto f^* \circ \varphi. \end{aligned}$$

$f^* : M' \to M$ 由 f 诱导。

定义 6.3. 动量映射 $\varphi : X^{\mathrm{an}} \to T$ 若由 K上的代数簇之间的态射$X \to T$ 诱导，则称其为代数的。

注 6.4. (1) 对于满足 $U:=\bigcap U_i\neq\emptyset$ 的有限非空开子集 $U_i\subset X$，如果 $\varphi_i\colon\ U_i^{\mathrm{an}}\to T_i$ 是代数动量映射，那么

$$\varphi=(\varphi_i)_i:U^{\mathrm{an}}\to\prod_i T_i$$

是代数的，并且细化了任意 i 的 $U_i^{\mathrm{an}}\to T_i$。对于这个动量映射，我们有泛性质，即它是所有 φ_i 的共同细化中极大的动量映射。

(2) 若 X 是整的，则对于任意开子集 $U'\subset U$，有 $\varphi_{\mathrm{trop}}((U')^{\mathrm{an}})=\varphi_{\mathrm{trop}}(U^{\mathrm{an}})$。参见引理 4.9[8]。

以下引理很容易证明。

引理 6.5（[8] 4.12）。对于任意仿射开子集 $U\subset X$，我们有一个代数矩态射

$$\varphi_U:U\to T_U=\mathrm{Spec}(K[M_U]),$$

由 M_U 的一组基的代表元 φ_1、$\cdots$、$\varphi_r\in\mathcal{O}_X(U)^\times$ 诱导，其中 $M_U:=\mathcal{O}_X(U)^\times/K^\times$ 是秩为 r 的自由模。于是，φ_U 在相差一个 $T_U(K)$ 中元素的平移意义下是典范的，并且 φ_U 细化了 U 上的任何其他代数矩映射。

特别地，热带化

$$\varphi_{U,\mathrm{trop}}:U^{\mathrm{an}}\xrightarrow{\varphi_U}T_U\xrightarrow{\mathrm{trop}}(N_U)_{\mathbb{R}}$$

在整 $v(K^\times)$-仿射同构意义下是典范的，即与 φ_1、$\cdots$、φ_r 的选择无关，其中 $N_U=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_U,\mathbb{Z})$。

注 6.6. (1) 我们称这样的态射 φ_U 为典范矩映射。

(2) 映射 trop 是函子性的：设 $f\colon U'\to U$是一个 K 上的概形态射，并设 φ_U、$\varphi_{U'}$如引理中所给，则存在唯一的仿射态射

回忆一下，代数簇 X 的开子集 U 称为非常仿射开子集，若 U 可闭嵌入到一个乘法环面中。

定义 6.7. 设 $U\subset X$ 是一个非常仿射开子集，$V\subset U^{\mathrm{an}}$ 是一个开子集。典范图表 (V,U,h) 是一个三元组，满足存在 φ_1、$\cdots$、$\varphi_r\in\mathcal{O}_X(U)^\times$，并具有以下性质：

- φ_1、$\cdots$、φ_r的像构成 M_U的一组基；
- $h=(-\log|\varphi_1|,\ \cdots,\ -\log|\varphi_r|)$ 在 V（即$h=\varphi_{\text{热带}}|_V$）上，并且h（$U_{\text{解析}}$）存在一个开子集 Ω，使得$V=\varphi^{-1}{}_{\text{热带}}(\Omega)$，其中 $\varphi=(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_r)\colon\ U\to T_U$。

在这种情况下，我们称 h 由典范动量映射 φ诱导。

对于两个典范图表（V、U、h）和（V'、U'、h'），其中 $V'\subset V$、$U'\subset U$，如果存在一个整 $\mathbb{R}$-线性映射 $F\colon\ \mathbb{R}^{r'}\to\mathbb{R}^r$，使得 $h=F\circ h'$，则称（V'、U'、h'）是（V、U、h）的细化。

注 6.8. (1) 由引理 6.5 可知，若 (V,U,h) 和 (V,U,h') 是典范图表，则存在一个整 $|K^\times|$-仿射双射 $F\colon\ \mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^r$，使得 $h'=F\circ h$。反过来也成立，即对于任意整 $|K^\times|$-仿射双射 F，$(V,U,F\circ h)$ 都是一个典范图表。特别地，$h(U^{\mathrm{an}})\overset{F}{\simeq}h'(U\text{一个})$，$h(V)\overset{F}{\simeq}h'(V\ )$。

(2) 设 (V,U,h)、(V',U',h') 为典范图表，且 $f\colon\ U'\to U$ 是 K 上满足 $f(V')\subset V$ 的概形态射，则存在唯一的仿射映射 F，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{h'} & \mathbb{R}^{r'} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ V & \xrightarrow[h]{} & \mathbb{R}^r \end{array}.$$

命题 6.9（[8] 命题 4.16）。典范图表具有以下性质。

(1) 典范图表构成 X^{an} 的一个拓扑基，即对于任意开子集 W of X^{an} and$x \in W$，存在一个典范图表 (V, U, h)，满足 $x \in V \subset W$。特别地， X 可由典范图表覆盖。(2) 对于任意两个典范图表 (V, U, h)、(V', U', h')，存在一个映射 $h''\colon V' \cap V \to \mathbb{R}^r$，使得 $(V \cap V', U' \cap U'', h'')$ 是一个典范图表。此外，任意这样的典范图表都是 $V \cap V'$ 上这两个图表的共同细化。(3) 设 (V, U, h)、(V', U', h') 是两个典范图表，且 $V' \subset V$, $U' \subset U$，则 (V', U', h') 是 (V, U, h) 的一个细化。

给定一个热带图 (V, U, h)，我们在 $h(U^{\mathrm{an}})$ 上有一个典范的热带循环结构，该循环记作 $h_*(\mathrm{cyc}(U))$。

~ ~6.2 B

(Ω)

为了将 δ-形式应用于非阿基米德 Arakelov 理论，并运用 [10], 中的思路，出于技术原因（即命题 6.16），我们不取 Ω 上的所有 ~ ~δ-形式。相反，对于仿射空间 $N_{\mathbb{R}}$ 中的任意开子集 Ω，我们考虑以下子空间

$$\widetilde{B}^{p,q,l}(\widetilde{\Omega}) := \{\sum_i \alpha_i \wedge \beta_i \in B^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \mid \alpha_i \in A^{p_i,q_i}(\widetilde{\Omega}), \beta_i \in B^{p-p_i,q-q_i,l}(N_{\mathbb{R}})\},$$

~ ~B ~ ~B(Ω)。我们注意到以下性质成立：q

(Ω) = $\bigoplus^p$,

~ ~(1) 微分 $d', d'', d'_P, d''_P, \partial', \partial''$ 在 B(Ω) 上由莱布尼茨法则定义。(2) 对于 $\mathcal{AT}op_{\mathbb{Z}}$ 中的任意态射 : (,Ω) (,Ω), $\mathbb{R}$，我们有 $F^*(\widetilde{B}^{p,q,l}(\widetilde{\ }\Omega')) \subset B^{p,q,l}(\widetilde{\ }\Omega)$。以下结果可用与命题 2.14] 类似的方法证明。

命题 6.10. 设 $F\colon N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ 是一个整 $\mathbb{R}$-仿射映射，且 $C' = \sum m_{\sigma'}[\sigma'] \in \sigma' \in C'_n B^{0,0}(N_{\mathbb{R}})$。设 $\alpha \in \widetilde{B}(\widetilde{\ }\Omega)$，且 $P \subset \widetilde{\ }\Omega$ 是一个多面体集合。假设 Supp($F^*(\alpha) \wedge C'$) $\cap F^{-1}(P)$ 是$\widehat{\ }$紧的，则 Supp($\alpha \wedge F_* C'$) $\cap P$ 是紧的，并且满足以下结论。

~ ~(1) 若 $\alpha \in B^{n,n}$(Ω)，则

$$\int_P \alpha \wedge \widehat{F}_* C' = \int_{F^{-1}(P)} F^*(\alpha) \wedge C'.$$

(2) 若 $\alpha \in \widetilde{B}^{n-1,n}(\widetilde{\ }\Omega)$（分别地，若 $\widetilde{B}^{n,n-1}(\widetilde{\ }\Omega)$），则

$$\int_{\partial P} \alpha \wedge \widehat{F}_* C' = \int_{\partial F^{-1}(P)} F^*(\alpha) \wedge C'.$$

6.3 δ-形式在 X^{an}上

定义 6.11. 设 $f\colon X' \to X$ 是定义在 K 上的代数簇之间的态射。若 X和 X'的图表 (V, U, h) 和 (V', U', h') 分别关于 f 相容，即满足 $f(U') \subset U$且 $f(V') \subset V$，则称它们关于 f 相容。在此情况下，假设 $h = \varphi_{U,\,\mathrm{trop}}, h' = \varphi_{U',\,\mathrm{trop}}$，则存在唯一的态射 $g\colon T_{U'} \to T_U$，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} (U')^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\varphi_{U'}} & (T_{U'})^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\mathrm{trop}} & (N_{U'})_{\mathbb{R}} \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow F \\ U^{\mathrm{an}} & \xrightarrow[\varphi_U]{} & (T_U)^{\mathrm{an}} & \xrightarrow[\mathrm{trop}]{} & (N_U)_{\mathbb{R}} \end{array}.$$

可交换，其中 F 是由 g 给出的整 $\mathbb{R}$-仿射映射。

定义 6.12. 设 (V,U,h) 是 X 上的典范图表。令

$$B^{p,q}(V,U,h) := \widetilde{B}^{p,q}(\widetilde{\Omega})/N^{p,q}(V,U,h),$$

其中

$$N^{p,q}(V,U,h) := \left\{ \widetilde{\alpha} \in \widetilde{B}^{p,q}(\widetilde{\Omega}) \,\middle|\, \begin{array}{l} F^*\widetilde{\alpha} \wedge h_*(\mathrm{cyc}(U')) = 0 \in D^{r-n+p,r-n+q}(\widetilde{\Omega}') \textit{ for any com-} \\ \textit{patible tropical chart } f : (V',U',h') \to (V,U,h) \end{array} \right\},$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ F 由满足 $h \circ f = F \circ h'$ 的 f 给出，而 $\Omega \subset N_{U,\ \mathbb{R}}$（分别地，$\Omega' \subset N'_{U,\ \mathbb{R}}$）是一个开子集，使得 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $h(V) = \Omega \cap h(U$一个$)$（分别地，$h'(V') = \Omega' \cap h((U')^{\mathrm{an}})$），且 $F(\Omega') \subset \Omega$。类似地，我们有 $B^{p,q}(V,U,h)$ 和 $B(V,U,h)$ 的概念 $= \prod_{p,q}$

由定理 5.13 和推论 4.12 可知，$d', d'', d'_P, d''_P, \partial', \partial''$ 在$B(V,U,h)$上定义良好。

$\widetilde{\ }$注6.13. (1) 根据单位分解，定义与 Ω 和 $\widetilde{\ }$ Ω'的选取无关。

与 [10, 4.6], 不同，我们在 $B^{p,q}(V,U,h)$ 上有微分，因此无需定义 $Z(V,U,h)$ 和 $AZ(V,U,h)$。

给定典范图表 (V,U,h)、(V',U',h')，以及 $s \in B(V,U,h)$ $s' \in B(V',U',h')$，如果存在一个与二者都相容的典范图表 $(V \cap V', U \cap U', h'')$，使得 s, s' 的像在 $B(V \cap V', U \cap U', h'')$ 中重合，我们记作 $s|_{V\cap V'} = s'|_{V\cap V'}$。显然，这与 h'' 的选择无关。

定义 6.14。设 $W \subset X^{\mathrm{an}}$ 是一个开子集。我们定义

$$B^{p,q}(W) = \left\{ (s_i)_i \in \prod_i B^{p,q}(V_i,U_i,h_i) \,\middle|\, \begin{array}{l} W = \bigcup_i V_i \textit{ is an open covering of } W,\ (V_i,U_i,h_i) \\ \textit{are canonical charts, and } s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j} \end{array} \right\} / \sim,$$

其中 $(s_i)_i \sim (s'_j)_j$ 若对于任意 i,j，均有 $s_i|_{V_{ijk}} = s'_j|_{V_{ijk}}$，则存在一个覆盖 $V_i \cap V'_j = \bigcup_k V_{ijk}$ 以及图表 $(V_{ijk}, U_{ijk}, h_{ijk})$。

注 6.15. (1) 设 $f: X' \to X$ 是定义在 K 上的代数簇之间的态射，且 $V \subset X^{\mathrm{an}}, V' \subset (X')^{\mathrm{an}}$ 是满足 $f(V') \subset V$ 的开子集。设 $s = (s_i)_i \in \mathcal{F}(V)$，其中对于某些典范图表 (V_i, U_i, h_i)，有 $s_i \in B(V_i)$。那么 $f^*s \in B(V')$ 如下给出：选取典范图表 $\{(V'_{ij}, U'_{ij}, h'_{ij})\}_{i\in I,\ j\in J_i}$，使得 $f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j\in J_i} U'_{ij}$, $f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j\in J_i} V'_{ij}$，则存在

一个唯一的整 $\mathbb{R}$-仿射映射，使得

$$\begin{tikzcd} (U'_{ij})^{\mathrm{an}} \arrow[r, "h'_{ij}"] \arrow[d, "f"'] & (N'_{U_{ij}})_{\mathbb{R}} \arrow[d, "F_{ij}"] \\ U_i^{\mathrm{an}} \arrow[r, "h_i"'] & (N_{U_i})_{\mathbb{R}} \end{tikzcd},$$

并且 f^*s 由 $(F^*_{ij}s_i)_{i,\ j} \in \prod_{i,\ j} B(V'_{ij}, U'_{ij}, h_{ij})$ 给出。

(2) 可以证明，当 $\dim_K W < \max\{p,q\}$ 时，$B^{p,\ q}(W) = 0$，参见 *[10,* 推论 5.*6]*

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$下述命题是我们采用 $B(\Omega)$ 来定义 δ-形式，而非 $B(\Omega)$ 的主要原因，证明参见 [10, 命题 4.21] 。

命题 6.16. 假设 X 是整的。给定 X 上的一个典范图表 (V,U,h)，自然代数同态

$$B^{p,q}(V,U,h) \to B^{p,q}(V)$$

是单射。

6.4 δ-形式的积分

I在本节余下部分，我们假设 X 是一个纯维数为 n 的整代数簇 .

定义 6.17. 设 W 是 X^{an} 的一个开子集。设 $\alpha \in B^{n}{}_{,c}{}^{n}(W) \subset B^{n}{}_{,c}{}^{n}(X^{\mathrm{an}})$。称 X 的一个非空非常仿射开子集 U 为 α 的非常仿射积分图表，若存在某个 $\alpha_U \in B^{n,n}(U^{\mathrm{an}}, U, h)$，使得 $\alpha|_{U^{\mathrm{an}}}$ 由 α_U 给出，其中 $(U$ 一个$U, h)$ 是典范图表。这样的图表存在，并且根据与命题 5.7*]* 类似的命题，我们有 $\mathrm{Supp}(\alpha) \subset U^{\mathrm{an}}$ 。

我们知道积分图表总是存在，并且 α_U 是唯一的。我们定义积分 **f** α o通过 W

$$\int_W \alpha := \int_{N_{U,\mathbb{R}}} \widetilde{\alpha}_U \wedge h_*(\mathrm{cyc}(U)),$$

where $\alpha_U \in B^{n,n}(N_{U,\mathbb{R}})$，右侧由定义 3.10 给出。 $\widetilde{\alpha}_U \wedge h_*(\mathrm{cyc}(U))$ h 作为复
紧支集，由命题 4.*21]* 得出。

根据定义，我们可以由命题 3.13 和命题 4.35 推出 d'_P, d''_P 的斯托克斯公式和格林公式。命题 4.33 蕴含以下定理。

定理 6.18。对于任意 $\omega \in B_c^{2n-1}(X)$，有

$$\int_X d'\omega = \int_X d''\omega = 0.$$

d'_P、d''_P、∂' 和 ∂'' 的情形类似。

6.5 δ-流

我们在 $B^{p}{}_{,c}{}^{q}{}^{l,}(W)$ 上有施瓦茨拓扑，见 $[10, 6.1]$。

定义 6.19. 设 $W \subset X^{\mathrm{an}}$ 是一个开子集。 W 上的 δ-流是一个实连续线性泛函 $T\colon B_c(W) \to \mathbb{R}$。我们用 $E(X)$ 表示 W 上的 δ-流空间。

注释 6.20. (1) 我们有自然的双分次 $E(W) = \bigoplus (E)^{p,q}(X)$，其中 $E^{p,q}(W)$ 是 $B^{n-p}{}_{,c}{}^{n-q}(W)$ 上连续线性泛函的$_{p,q}$集合。

(2) 设 $D(W)$ 为 W 上按 *[6, 4.2]* 或 *[8, 6.2]* 定义的流的集合。我们有一个线性映射$E(W) \to D(W)$。我们可以类似于 $E^{p+p'}{}_{q+q'}\ W$ *[10, 6 9]* $T \in E^{p}{}^{q}\ W$ $\alpha \in B^{p'}{}^{q'}\ W$ $T \wedge \alpha \in$. 中的定义微分 $d', d'', d'_P, d''_P, \partial', \partial''\colon E(W) \to E(W)$。对于 $,(\ )$ 和 $,(\ )$，我们有楔积 $,(\ )$，定义如下

$$(T \wedge \alpha)(\gamma) := T(\alpha \wedge \gamma)$$

对任意 $\gamma \in B^{n-p-p'}{}_{,c}{}^{n-q-q'}(W)$。

(3) 我们有一个 $\mathbb{R}$-线性映射 $[\cdot]\colon B^{p,q}(W) \to E^{p,q}(W)$，定义如下：对任意 $\omega \in B^{p,q}(W)$，我们有

$$[\omega] : B_c^{n-p,n-q}(W) \to \mathbb{R},$$
$$\gamma \mapsto \int_W \omega \wedge \gamma.$$

由定理 6.18 可知， $[\cdot]$ 与 d'、 d''、 d'_P、d''_P、∂' 和 ∂''可交换。

每个 δ-形式

命题 6.21. 设 $W \subset X^{\mathrm{an}}$ 是一个开子集。对于每个 $\alpha \in B^{n,n}(W)$，存在唯一的带符号拉东测度 μ_α ，其定义在 W 上，使得

$$\int_W f \cdot \alpha = \int_W f\mu_\alpha$$

对所有 $f \in C_c^\infty(W)$。

命题 6.22。设 $W \subset X^{\mathrm{an}}$ 为一个开子集。设 $f \in C(W)$。则映射

$$[f] : B_c^{n,n}(W) \to \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \int_W f\mu_\eta$$

是一个 δ-流。

我们可以给出 $\alpha \in B^{0,0,n}(X)$ 的 μ_α 形式。以下结果将命题 6.9.2]推广到真代数簇的情形。

命题 6.23. 设 $W \subset X^{\mathrm{an}}$ 为一个开子集，且 $\alpha \in B^{0,0,c}{}^{n}(W)$。则对每个 $x \in \mathrm{Supp}(\alpha)$，存在 $c_x \in \mathbb{R}$，使得对于除有限多个 x 之外的所有情形，以及任意 $f \in B^{0,}{}_{c}{}^{0}(X)$，我们有

$$\int_X f\alpha = \sum_{x \in \mathrm{Supp}(\alpha)} c_x f(x),$$

即 $\mu_\alpha = \sum c_x \delta_x$，其中 μ_α 是与命题 6.21 中给出的 ω 相关联的带符号拉东测度。

证明. 我们可以取一个用于对 α积分的非常仿射图表 U。假设 $\alpha_U \in B^{n,n}(U^{\mathrm{an}}, U, h)$，使得 $\alpha|_{U^{\mathrm{an}}}$ 由 α_U给出，其中（$U_{\mathrm{an}} U, h$）是一个典范图表。于是，对于有限集 $S \subset N_{U,\mathbb{R}}$，有 $\alpha_U \wedge h_*(\mathrm{cyc}(U)) = \sum c_s[s] \in N_{\mathbb{R}}$。令 $S_h(U)$ 为 h 的骨架。注意，$\mathrm{Supp}(\alpha) \subset_{s \in S} S_h(U)$ 和 $h^{-1}(S)$ 的 $\subset \mathrm{Supp}(\alpha)$ 由 [10, 命题 4.21] 给出。根据 [9, 推论 3.16], ，我们知道 $h^{-1}(S)$ 是有限的。考虑 $h^{-1}(S)$ 中每个点周围的隆起函数后，即得所需结果。 □

7 庞加莱-勒隆公式

本节将重新证明庞加莱-勒隆公式，随后，我们对 δ-形式的定义使我们能够定义赋范线丛在分段光滑度量下的第一陈形式。固定一个完备非阿基米德域 K。

为方便读者，我们回顾一下 [6, 命题4.6.6]。

命题 7.1（[6] 命题4.6.6）。设 X 是一个纯维数为 n 的 K-仿射域空间。令 $g\colon X \to \mathbb{R}^r$ 为光滑热带化，且 $f \in \mathcal{O}_X(X)$。则存在一个实数 $r_0 > 0$ 和 $C = \sum m_\sigma[\sigma] \in F_{n-1}(\mathbb{R}^r)$，使得 $\mathcal{C}$ 中的所有多面体都是多胞体，并具有以下 $\sigma \in \mathcal{C}_{n-1}$ 性质：

(a) 对于以 0 为中心、半径为 r_0 的 $(\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$ 中闭球内的每个 t，赋予典范热带权重的 $(\mathrm{cyc}(X_t))$ 的 $(n-1)$-骨架等于 $C = \sum m_\sigma[\sigma]$；$\sigma \in \mathcal{C}_{n-1}$

(b) 对于每个闭区间 $I \subset (0, r_0]$，赋予典范热带权重的 n-骨架 $h_*(\mathrm{cyc}(X_I))$ 等于 $C \times [-\log(I)]$，这是带权重的多面体复形的乘积，

其中 X_t 是 X 在 $t \in (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$ 上关于 $f\colon X \to (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$ 的纤维，并且 $h := (g, -\log|f|) : X_I \to \mathbb{R}^{r+1}$，其中 $X_I := |f|^{-1}(I)$。

一般而言，给定两个带有光滑形式的多面体复形 $\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_1^{l_1}} \alpha_\sigma[\sigma], \beta = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_2^{l_2}} \beta_\sigma[\sigma] \in P(\widetilde{\Omega})$，楔积 $\alpha \wedge \beta$没有定义。但如果 $\mathcal{C}_1^{l_1}$、$\mathcal{C}_2^{l_2}$横截相交，那么我们可以令

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_1^{l_1} \times \mathcal{C}_2^{l_2} \\ \sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset}} (\alpha_{\sigma_1} \wedge \beta_{\sigma_2})[\sigma_1 \cap \sigma_2].$$

这个定义与横截相交的 $\mathcal{C}_1^{l_1}$、$\mathcal{C}_2^{l_2}$的选择无关。

采用上述记号，命题 7.1 推出以下推论。

推论 7.2。沿用命题 7.1 中的假设。令 $V(f) \subset X$ 为由 f给出的扎里斯基闭子空间。那么对于任意充分小的 $s > 0$ 以及任意满足 $s \in \mathrm{Int}(I)$ 的闭区间 $I \subset (0,\infty)$，我们有 $H_{-\log(s)}$， $h_*(\mathrm{cyc}(X_I))$ 横截相交，并且

$$g_*(\mathrm{cyc}(V(f))) = p_*(H_{-\log(s)} \wedge h_*(\mathrm{cyc}(X_I))),$$

在 $\mathbb{R}^r$ 上，其中 $H_{-\log(s)}$ 是 $\mathbb{R}^{r+1}$ 中由 $x_{r+1} = -\log(s)$ 给出的超平面，并且 $p\colon \mathbb{R}^{r+1} \to \mathbb{R}^r$，$(x_1,\cdots,x_{r+1}) \mapsto (x_1,\cdots,x_r)$。

显然，若 X 是仿射簇，则上述推论成立。

The理 7.3（Poincar´e-Lelong 公式）。设 X 是 K 上的整代数簇。F *or any* 有理函数 $f \in K^*(X)$，Poincar´e-Lelong 方程

$$\delta_{[\mathrm{div}(f)]} = d'd''[\log|f|]$$

在 $E^{1,1}(X^{\mathrm{an}})$ 中成立。

证明。对于任意 $\gamma \in B^{n-1,n-1}_c(X)$，由 [10, 命题 5.7], ，我们可以取一个典范图表 (U^{an}, U, g)，使得 γ 由 $\gamma_U \in B^{n-1,n-1}(N_{U,\mathbb{R}})$ 给出，且 $\mathrm{Supp}(d''\gamma) \subset U^{\mathrm{an}}$；对于 $V(f)$ 的任意不可约分支 Z，我们有 $\mathrm{Supp}(\gamma|_Z) \subset (Z \cap U)^{\mathrm{an}}$。此外，由于 γ 具有紧支撑，我们可以取开子集 $\widetilde{\Omega} \subset N_{U,\mathbb{R}}$，使得 $\mathrm{Supp}(d''\gamma)$、$\mathrm{Supp}(\gamma|_Z) \subset g^{-1}(\widetilde{\Omega})$，且 $W := g^{-1}(\overline{\widetilde{\Omega}})^{\sim}$ $\widetilde{}$ 是仿射域。我们知道 $g_*(\mathrm{cyc}(V(f) \cap W)) \in B(\Omega)$，即 $C \in B(\Omega)$，其中 C 是将 X 替换为 W 时命题 7.1 中给出的。

由于 $\dim V(f) < n$，我们有 $\mathrm{Supp}(d''\gamma) \cap V(f) = 0$。因此，存在足够小的 $s > 0$，使得$|f(x)| > s$对任意 $x \in \mathrm{Supp}(d''\gamma)$ 都成立。令 $H_{-\log(s)}$ 是 $\mathbb{R}^{r+1}$ 中由 $x_{r+1} = -\log(s)$ 定义的超平面，$\phi = \max\{x_{r+1}, -\log(s)\}$，$\psi = \min\{x_{r+1}, -\log(s)\}\colon \mathbb{R}^{r+1} \to \mathbb{R}$，且 $I = (s', \infty)$，其中某个 $s' < s$。$\widetilde{}$ $\widetilde{}$我们采用命题 7.1 中的记号。取 $\Omega' = \Omega \times (s'', \infty)$，其中 $s' < s'' < s$，则$\widetilde{}h_*(\mathrm{cyc}(W_I)) = C \times I \in B(\Omega)$。由定理 4.25，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{V(f)} \gamma &= \int_{\widetilde{\Omega}} \gamma_U \wedge g_*(\mathrm{cyc}(V(f) \cap W)) \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} \gamma_U \wedge p_*(\mathrm{div}(\phi) \cdot h_*(\mathrm{cyc}(W_I))) \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}'} p^*\gamma_U \wedge (\mathrm{div}(\phi) \cdot h_*(\mathrm{cyc}(W_I))) \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}'} (\mathrm{div}(\phi) \cdot p^*\gamma_U) \wedge h_*(\mathrm{cyc}(W_I)) \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}'} (-\mathrm{div}(\psi) \cdot p^*\gamma_U) \wedge h_*(\mathrm{cyc}(W_I)) \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}'} (-d'd''\psi \wedge p^*\gamma_U) \wedge h_*(\mathrm{cyc}(W_I)) \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}'} (-\psi \wedge d'd''p^*\gamma_U) \wedge h_*(\mathrm{cyc}(W_I)) \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}'} -p_*\psi \wedge d'd''\gamma_U \wedge p_*h_*(\mathrm{cyc}(W_I)) \\
&= \int_{X \setminus V(f)} -\min\{-\log|f|, -\log(s)\} \wedge d'd''\gamma \\
&= \int_{X \setminus V(f)} \log|f| \wedge d'd''\gamma,
\end{aligned}$$

$\widetilde{}$第三个等式成立是因为 $p\colon H_{-\log(s)} \to \mathbb{R}^r$ 是单射，且 $\mathrm{Supp}(p^*\gamma_U) \cap H_{-\log(s)} \subset \Omega'$ 是紧的。 □

借助这一 δ定理，可以为线丛上的任意连续度量定义第一陈 δ流，见 [10, 7。7]特别地，当度量为分段光滑度量时，它是一个 δ形式，见 [10,定义 8。5] 关于分段光滑度量的定义。

致谢

作者谨向我的导师 Yigeng Zhao 教授致以谢意，感谢他给予我的鼓励、支持和宝贵建议。他还要感谢 Antoine Ducros、Walter Gubler 和 Michael Temkin，在他研究这一问题期间，他们耐心地解答了他提出的问题。本研究得到博士后研究资助的支持。

参考文献

[1] Allermann, L.（2012）。光滑簇上的热带交乘积。《欧洲数学会杂志》（JEMS），14(1)：107–126。

[2] Allermann, L. 和 Rau, J.（2010）。热带交理论初探。《数学杂志》，264(3)：633–670。

[3] Berkovich, V. G.（1990）。非阿基米德域上的谱理论与解析几何，数学调查与专著第33卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。

[4] Chambert-Loir, A.（2006）。Berkovich空间上的测度与 ´等分布。《纯粹与应用数学杂志》，595：215–235。

[5] Chambert-Loir, A.（2021）。热带几何专题。

[6] Chambert-Loir, A. 和 Ducros, A.（2012）。Berkovich 空间上的实微分形式与流。arXiv 预印本 arXiv:1204.6277。

[7]Demailly, J.-P.（2012）。复解析与微分几何。https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf。

[8] Gubler, W.（2016）。代数簇解析化上的形式与流（据 Chambert-Loir 和 Ducros）。载于《非阿基米德几何与热带几何》，西蒙斯专题研讨会，第 1–30 页。施普林格， [Cham]。

[9] Gubler, W.、Jell, P. 和 Rabinoff, J.（2021）。基于调和热带化的 Berkovich 空间上的形式。arXiv 预印本 arXiv:2111.05741。

[10] Gubler, W. 和 K¨unnemann, K.（2017）。非阿基米德阿拉克洛夫几何的热带方法。《代数与数论》，11(1)：77–180。

[11] Lagerberg, A.（2012）。超流与热带几何。《数学杂志》，270(3-4)：1011–1050。

[12] Lee, J.（2012）。《光滑流形导论》，《数学研究生教材》第218卷。施普林格出版社，纽约，第2版。

[13] Mihatsch, A.（2021a）。Lubin–Tate 空间上的 δ-形式。arXiv 预印本 arXiv:2112.10018 .[14] Mihatsch, A.（2021b）。论热带交理论。arXiv 预印本 arXiv:2107.12067。[15] Mikhalkin, G. 和 Rau, J.（2018）。热带几何。.https://math.uniandes.edu.co/~j.rau/downloads/main.pdf。

[16] Tu, L. W.（2008）。《流形导论》。Universitext。施普林格，纽约。

[17] Warner, F. W.（1983）。《可微流形与李群基础》，《数学研究生教材》第94卷。施普林格出版社，纽约—柏林。1971年版的修订重印本。

Y. Cai, Westlake University、 SanDun Road 600、 Xihu District 310024、 Hangzhou、 China*E-mail address*: caiyulin@westlake.edu.cn