arXiv:2303.04981v1 [math.PR] 9 Mar 2023

纯跳噪声下随机 Camassa-Holm 方程的调制分析

YONG CHEN[1], JINQIAO DUAN[2], HONGJUN GAO[3], 和 XINGYU GUO[1]

Abstract. 我们研究带有纯跳噪声的随机 Camassa-Holm 方程。我们证明，若解的初始条件是未扰动方程的一个孤立波解，则该解可分解为一个随机调制孤立波与一个小余项之和。此外，我们推导出调制参数所满足的方程，并证明当跳噪声的振幅趋于零时，余项收敛到一个随机线性方程的解。

1. Introduction

1.1. 背景。Camassa-Holm（CH）方程

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x + 2ku_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

其中 $k \geq 0$，由 Camassa 和 Holm 于 [13] 推导得出，作为浅水波的一个模型。这里 u 表示 x 方向上的流体速度，或者等价地，表示平坦海底上方水的自由表面高度[13, 61]。方程（1.1）最初由 Fuchssteiner 和 Fokas [48, 49] 推导得出，作为 KdV 方程的双哈密顿推广。近期，Constantin 和 Lannes [35]严格论证了将方程（1.1）作为水波控制方程的一种近似方法的推导。方程（1.1）还被视为 H^1 Bott-Virasoro 群上的右不变度量所对应的测地流方程（若 $k > 0$）[69]，以及微分同胚群上的右不变度量所对应的测地流方程（若 $k = 0$） [33, 34]。

CH方程（1.1）是完全可积的 [13, 27], 其具有双哈密顿结构 [13, 48]

$$m_t = \mathcal{J}_1 \frac{\delta H_1[m]}{\delta m} = \mathcal{J}_2 \frac{\delta H_2[m]}{\delta m}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{J}_1 = -(\partial_x m + m\partial_x + 2k\partial_x),\ \ \mathcal{J}_2 = -(\partial_x - \partial_x^3) \tag{1.3}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 60H15,60F05, 35R60.*Key words and phrases.* 随机 Camassa-Holm 方程、纯跳噪声、随机调制、孤立波。电子邮箱：youngchen329@126.com, duan@iit.edu, gaohj@hotmail.com。

其动量密度为 $m := u - u_{xx}$ 以及两个哈密顿量

$$H_1[m] = H_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x) + u_x^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} umdx, \tag{1.4}$$

$$H_2[m] = H_2(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^3(x) + u(x)u_x^2(x) + 2ku^2(x)dx. \tag{1.5}$$

CH方程（1.1）可写成哈密顿形式:

$$\partial_t \frac{\delta H_1(u)}{\delta u} = -\partial_x \frac{\delta H_2(u)}{\delta u}. \tag{1.6}$$

CH方程（1.1）的柯西问题已得到广泛研究。对于初始数据 $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ $s > 3/2$, 方程（1.1）是局部适定的 [28, 40, 65]。此外，方程（1.1）存在整体强解 [28, 26] ，也存在有限时爆破解[28, 29, 26, 31, 40, 65]。另一方面，它在 $H^1(\mathbb{R})$ [7, 8, 23, 30, 36, 53, 54, 55, 78] 中存在整体弱解。CH方程在 $H^{3/2}$ 中的不适定性以及在临界空间 $B_{2r}^{3/2}$,$1 < r < \infty$ 中的不适定性已在 [51] 中得到证明。

CH方程（1.1）在满足 $k > 0$[14] 时具有光滑的孤立波解，称为孤子；若满足 $k = 0$ [13]，则具有尖峰孤子。特别地，当 $k > 0$时，方程（1.1）具有如下表达式的光滑孤子 $u(t, x) = \varphi_c(x - ct + x_0)$ $c > 2k$, $x_0 \in \mathbb{R}$其参数形式如下 [62, 66]

$$u(t, x) = \frac{c - 2k}{1 + (2k/c)\sinh^2\theta},$$

其中

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{k}}\sqrt{1 - \frac{2k}{c}}(y - c\sqrt{k}t),\ x = \frac{y}{\sqrt{k}} + \ln\frac{\cosh(\theta - \theta_0)}{\cosh(\theta + \theta_0)},\ \theta_0 = \tanh^{-1}\sqrt{1 - \frac{2k}{c}}.$$

孤子 φ_c 满足以下方程

$$-c\varphi_c + c\varphi_{cxx} + \frac{3}{2}\varphi_c^2 + 2k\varphi_c = \varphi\varphi_{cxx} + \frac{1}{2}\varphi_{cx}^2, x \in \mathbb{R}.$$

文献 [14, 38] 证明了 CH方程（1.1）存在光滑且为正的孤立波解 φ_c，其波形关于峰值高度 $c - 2k$. 偶对称且递减。$|\varphi_c'| \le \varphi_c$ 并且，当 $|x| \to \infty$时，

$$\varphi_c(x) = O(\exp(-\sqrt{1 - \frac{2k}{c}}|x|)). \tag{1.7}$$

CH方程（1.1）还有更为复杂的解，例如多孤子，它们也可以像单孤子一样用参数形式表示 [12, 32, 66, 68]。

文献 [38, 46, 76]研究了 CH 方程孤子的若干种稳定性。在[38], 中，通过应用一般谱方法证明了单孤子的非线性稳定性。在[46], 中，研究了能量空间 H^1 中 CH 方程的 N 个孤立波列的轨道稳定性。在 [76], 中，证明了 Sobole夫空间 H^N 中 CH 方程的光滑 N 孤子的动力学稳定性，以及空间 H^2 中光滑双孤子的轨道稳定性对所有时间均成立。文献 [37, 47]确立了 CH 方程峰子和多峰子的稳定性。

1.2. 随机 Camassa-Holm 方程。由于地球物理和气候动力学中存在一些不确定性 [4, 57, 45], ，人们普遍认为应在数学模型中考虑随机效应。通过随机变分方法[57, 58], , 文献 [39],推导出了以下含布朗运动的随机 CH 方程

$$dm + (\partial_x m + m\partial_x)v = 0, \tag{1.8}$$

其中 $m = u - u_{xx}$ ，随机向量场 v定义为

$$v(x,t) = u(x,t)dt + \sum_{i=1}^{N} \xi_i(x) \circ dW_t^i.$$

向量 $v(t,x)$表示速度中的随机空间相关位移，函数 $\xi_i(x)$ $i = 1, 2, \ldots, N$为空间相关性，$W_t^i, i = 1, 2, \ldots, N$为相互独立的布朗运动，$\circ$ 为 Stratonovich 乘积。方程 (1.8) 存在峰子解并具有等谱性[39]。通过有限元离散，文献[6] 的作者发现，即使存在随机扰动，仍然可以形成峰子。文献 [2]证明了方程 (1.8) 的强解的局部存在性和唯一性。文献 [16, 74]证明了初值为 $u_0 \in H^s, s > 3/2$ 的随机 CH 方程的适定性。文献 [18] 在 $m_0 = u_0 - u_{0xx}$ 为正则正博雷尔测度的条件下建立了文献 H^1 中的鞅解；文献 [50]在 $u_0 \in H^1$的条件下改进了这一结果。文献 [56]建立了带梯度噪声的黏性 Camassa-Holm 方程的整体适定性。

对 L´evy 噪声的分析与 [57, 58] 不同，其动机是要求噪声必须保持随机哈密顿结构的某些不变性。因此，需要找到一种针对补偿泊松随机测度的 Stratonovich 积分类比形式

。Marcus [67], 后来由 Applebaum [3], Kunita [64], Chechkin 和 Pavlyukevich [15], 的工作提供了一个解决这一技术问题的框架。利用随机变分方法 [57, 58], 我们推导出以下含纯跳噪声的随机 CH 方程 [19],

$$dm + (um_x + 2mu_x)dt + m \diamond dL(t) = 0, \tag{1.9}$$

其中 $\diamond$是 Marcus 乘积，且 $L(t)$ 是具有纯跳跃的莱维´运动。文献 1.9给出了方程 (1.9) 在初值 $u_0 \in H^s, s > 3/2$ 下的局部适定性和大偏差，并将其作为一个例子。文献 [17] 证明了方程 (1.9) 在 $u_0 \in H^s, s > 3/2$ 下的整体存在性、波破碎现象和中偏差 [19]。

考虑如下随机哈密顿量

$$\tilde{H}_1[m]dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)m(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} m(t,x)\sigma(x) \diamond dL(t),$$

其中 $\sigma = \sigma(x)$ 依赖于 $x \in \mathbb{R}$，”$\diamond$” 是 Marcus 乘积， $L(t)$ 是具有纯跳跃的莱维 ´ 运动，定义为

$$L(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} z\tilde{\mathcal{N}}(dt, dz). \tag{1.10}$$

˜这里， $\mathbb{Z} = \{z : \ |z| \leq 1\}$ 是一个局部紧波兰空间， $\mathcal{N}$ 是补偿泊松随机测度。设 $\mathcal{N}$为定义在 $[0,T] \times \mathbb{Z}$ 上的泊松随机测度，其强度测度 $\lambda_T \otimes \vartheta$是 σ-有限的，其中 λ_T是 $[0,T]$ 上的勒贝格测度， ϑ 是 $\mathbb{Z}$上的 σ-有限测度，满足

$$\int_{\mathbb{Z}} e^{2\|\sigma_x\|_{L^\infty}|z|}\vartheta(dz) < \infty, \quad \int_{\mathbb{Z}} z^2\vartheta(dz) < \infty. \tag{1.11}$$

那么，对于具有 $\vartheta(A) < \infty$ 的 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{Z})$,

$$\tilde{\mathcal{N}}([0,t] \times A) = \mathcal{N}([0,t] \times A) - t\vartheta(A).$$

我们推导随机 CH 方程

$$\begin{aligned} dm =& \mathcal{J}_1 \frac{\delta \tilde{H}_1[m]}{\delta m}dt = \mathcal{J}_1(udt + \sigma \diamond dL(t)) \\ =& -(um_x + 2mu_x + 2ku_x)dt - (\sigma m_x + 2m\sigma_x + 2k\sigma_x) \diamond dL(t). \end{aligned} \tag{1.12}$$

根据对流形式 u 与矩 m之间的关系，对 $(1 - \partial_x^2)^{-1}$的两边应用 (1.12) 可得

$$du + (uu_x + P_x)dt + \zeta(u) \diamond dL(t) = 0, \tag{1.13}$$

$$(1-\partial_x^2)P = u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + 2ku, \tag{1.14}$$

其中

$$\zeta(u) = 3\sigma u_x - 2\sigma_x u + (1-\partial_x^2)^{-1}(2\sigma_x u - u\partial_x^3\sigma + \sigma_{xx}u_x) + 2k(1-\partial_x^2)^{-1}\sigma_x. \tag{1.15}$$

P 的椭圆方程可以通过求解得到

$$P = K * (u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + 2ku),\ K(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

从数学上讲，正如备注 2.1 中所解释的，与 $2u\sigma_x$ 中的噪声项的非局部部分及其部分相比，1.15没有新的（本质上的）困难。因此，为了清晰起见，我们将重点讨论以下带有梯度纯跳噪声的随机 CH 方程

$$du + (uu_x + P_x)dt + \sigma u_x \diamond dL(t) = 0, \tag{1.16}$$

其中 P由 1.14 给出。对于固定的 $z \in \mathbb{Z}$，$w \in L^2$，令 $\Phi(t, z, w)$ 为以下偏微分方程的解

$$dy(t) = -z\sigma y_x(t)dt,\ y(0) = w.$$

于是 $\Phi(t, x, w) = w(x - \sigma zt)$。因此，方程 1.16 中采用 Marcus 形式的随机积分可以用 $\Phi(1, z, u)$ 写成如下形式 [3]

$$\begin{aligned} du + (uu_x + P_x)dt = &\int_{\mathbb{Z}} [u(t-, x-\sigma z) - u(t-, x)]\tilde{\mathcal{N}}(dt, dz) \\ &+ \int_{\mathbb{Z}} [u(t, x-\sigma z) - u(t, x) + z\sigma u_x]\vartheta(dz)dt. \end{aligned} \tag{1.17}$$

关于由采用“Marcus”规范形式的 L´évy 噪声驱动的随机偏微分方程，相关文献非常有限，此类研究最近才由 Brze´zniak 等人在 [10, 11] 中开启。噪声强度 σ 是 [20]中的一个常数。[10, 11] 中的 Murcus 积分算子是有界的，而在这里则是无界的。此外，在这种噪声形式下，它可以保持不变量 $H_1(u)$和 $H_2(u)$。

1.3. 研究目标。 我们的目标是研究式（1.17）所给形式的随机扰动对 CH 方程光滑孤立波的影响。更确切地说，我们研究随机 CH 方程

$$du + (uu_x + P_x)dt + \epsilon\sigma u_x \diamond dL(t) = 0, \tag{1.18}$$

其中 P 由式（1.14）给出，且 $\epsilon > 0$ 是一个小参数。方程（1.16）中采用 Marcus 形式的随机积分可写为 [3]

$$du + (uu_x + P_x)dt = \int_{\mathbb{Z}} [u(t-, x - \epsilon\sigma z) - u(t-, x)]\tilde{\mathcal{N}}(dt, dz) + \int_{\mathbb{Z}} [u(t, x - \epsilon\sigma z) - u(t, x) + \epsilon z\sigma u_x]\vartheta(dz)dt. \tag{1.19}$$

我们将采用集体坐标方法，研究随机扰动对确定性驻波（例如 [42, 43, 75]）传播的影响。这种方法是将解的主要部分表示为调制孤子，然后求出孤子参数的调制方程。一般而言，调制理论能够近似且构造性地回答有关驻波位置及其相位行为的问题，适用于 $t > 0.$。布朗运动影响下，随机 Korteweg-de Vries 方程和随机 Schr¨odinger 方程中的孤子随机调制已在 [42, 43, 75] 中得到研究。据我们所知，这是首篇研究纯跳噪声对孤子影响的论文。

令 $\varphi_{c_0}(x)$ 为 $c_0 > 0$ 固定的光滑孤立波解，它是方程（1.18）的解，其中 $\epsilon = 0$。定义泛函

$$H_c(u) = cH_1(u) - H_2(u), u \in H^1, \tag{1.20}$$

其中 H_1 和 H_2 分别见（1.4）和（1.5）。注意，φ_{c_0} 是 H_{c_0}的一个临界点，即

$$H'_{c_0}(\varphi_{c_0}) = c_0 H'_1(\varphi_{c_0}) - H'_2(\varphi_{c_0}) = 0, \tag{1.21}$$

其中，H'_1 和 H'_2 分别是 H_1 和 H_2 在 $H^1(\mathbb{R})$中的 Fr´echet 导数。$cH'_1 + H'_2$ 在 φ 附近的 $\mathcal{L}_c$ 线性化哈密顿算子定义为

$$\mathcal{L}_c = -\partial_x((2c - 2\varphi_c)\partial_x) - 6\varphi_c + 2\partial_x^2\varphi_c + 2(c - 2k). \tag{1.22}$$

记 $u^\epsilon(t, x)$ 为方程（1.18）在初值 $u^\epsilon(0, x) = \varphi_{c_0}(x)$ 下的解。我们证明，$u^\epsilon(t, x)$ 可以分解为一个随机调制孤立波$\varphi_{c^\epsilon(t)}(x^\epsilon(t))$与一个小余项 $\epsilon\eta^\epsilon(t)$ 之和；该孤立波的相位$x^\epsilon(t)$和频率 $c^\epsilon(t)$受到随机调制。随后，我们更精确地研究前述分解中余项 η^ϵ 在 ϵ 中的一阶行为，考察 ϵ 趋于零时的情形。

1.4. 主要结果。 现在，我们给出本文的主要结果。首先，方程（1.18）的解的主要部分是一个孤立波，其相位 $x^\epsilon(t)$ 和频率 $c^\epsilon(t)$ 如下受到随机调制。

定理 1.1（随机调制孤立波）。对于 $\epsilon > 0$，令 $u^\epsilon(t,x)$ 为满足 $u_0(x) = \varphi_{c_0}(x)$ 和 $c_0 > k$ 的方程 (1.18) 的解。则存在 $\alpha_0 > 0$，使得对于 $0 < \alpha \le \alpha_0$，几乎必然存在一个停时 τ_α^ϵ，且存在半鞅过程 $c^\epsilon(t)$ 和 $x^\epsilon(t)$，它们几乎必然定义于 $t \le \tau_\alpha^\epsilon$，其取值分别属于 $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}$。解 $u^\epsilon(t,x)$ 可分解为

$$u^\epsilon(t,x) = \varphi_{c^\epsilon(t)}(x - x^\epsilon(t)) + \epsilon\eta^\epsilon(t, x - x^\epsilon(t)).$$

令 $\eta^\epsilon(t,x) = \frac{1}{\epsilon}[u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t)) - \varphi_{c^\epsilon(t)}(x)]$。则其满足正交条件

$$(\eta^\epsilon, (1-\partial_x^2)\varphi_{c_0}) = 0, \ \ and \ \ (\eta^\epsilon, (1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}) = 0. \tag{1.23}$$

此外，对于 $t \le \tau_\alpha^\epsilon$,

$$\|\epsilon\eta^\epsilon(t)\|_{H^1} \le \alpha, \ \ and \ \ |c^\epsilon(t) - c_0| \le \alpha, \ \ a.s.$$

此外，对于任意 $T > 0$ 和 $\alpha \le \alpha_0$，存在一个 $\epsilon_0 > 0$，对于 $\epsilon < \epsilon_0$,

$$\mathbb{P}(\tau_\alpha^\epsilon \le T) \le C\frac{T}{\alpha^4} b(\epsilon), \tag{1.24}$$

其中 $b(\epsilon) = \int_{\mathbb{Z}}((e^{\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)^2 + (e^{\frac{3}{2}\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)^2)\vartheta(dz)$。

第二个是 η^ϵ 随着 ϵ 趋于零时的收敛。

定理 1.2。 设 η^ϵ，c^ϵ 和 x^ϵ 由定理 1.1给出，且 $\alpha \le \alpha_0$ 固定。那么，对于任意 $T > 0$, 过程 η^ϵ 在空间 $\mathbb{D}([0, T \wedge \tau_\alpha^\epsilon]; \ L^2)$中依概率$\epsilon$ 趋于 0 时收敛到过程 η，该过程满足线性方程

$$\begin{aligned} d\eta =& \frac{1}{2}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}\eta dt + (y(t)\partial_x\varphi_{c_0} - a(t)\partial_c\varphi_{c_0})dt \\ &+ (\sigma(x)\partial_x\varphi_{c_0} + \partial_x\varphi_{c_0}\mu(t) - \partial_c\varphi_{c_0}b(t)) \diamond dL(t), \end{aligned} \tag{1.25}$$

其中 $\eta(0) = 0$,

$$y(t) = -\frac{1}{2}(\partial_x\varphi_{c_0}, (1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})^{-1}(\partial_x\mathcal{L}_{c_0}\eta, \partial_x\varphi_{c_0}), \tag{1.26}$$

$$\mu(t) = -(\partial_x\varphi_{c_0}, (1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})^{-1}(\sigma\partial_x\varphi_{c_0}, (1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}), \tag{1.27}$$

$$a(t) = -\frac{1}{2}(\partial_c \varphi_{c_0}, (1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})^{-1}(\partial_x \mathcal{L}_{c_0}\eta, \varphi_{c_0}), \tag{1.28}$$

$$b(t) = (\partial_c \varphi_{c_0}, (1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})^{-1}(\sigma\partial_x \varphi_{c_0}, (1-\partial_x^2)\varphi_{c_0}). \tag{1.29}$$

此外，调制参数可写为

$$dx^\epsilon(t) = c^\epsilon(t)dt + \epsilon y^\epsilon(t)dt + \epsilon\mu^\epsilon(t) \diamond dL(t), \tag{1.30}$$

$$dc^\epsilon(t) = \epsilon a^\epsilon(t)dt + \epsilon b^\epsilon(t) \diamond dL(t), \tag{1.31}$$

对于某些取值于 $\mathbb{R}$ 的适应过程 y^ϵ、μ^ϵ、a^ϵ、b^ϵ，满足：$(y^\epsilon, a^\epsilon, b^\epsilon, \mu^\epsilon) \to (y, a, b, \mu)$ 在 $\mathbb{D}([0,T])$ 中依概率收敛，当 $\epsilon \to 0$。

本文的结构安排如下。在第 2 节中，我们论证调制参数的存在性，并给出调制过程可用时间的估计。在第 3 节中，我们给出调制参数的方程。在第 4 节中，我们证明当 ϵ 趋于零时，余项收敛。

2. Modulation and estimates on the exit time

本节中，我们证明调制参数的存在性，并给出退出时间的估计。首先，我们给出以下伊藤公式。

引理 2.1 (伊藤公式，[10], 定理B.2)。假设 U 是一个希尔伯特空间。设Y 为一个 U值过程，定义如下：

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t a(Y(s))ds + \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} f(Y(s-)) \diamond dL(s), \quad t \geq 0,$$

其中 $a, f: U \to U$ 是 $\mathcal{F}_t$-适应随机映射。设 V 为可分希尔伯特空间。设 $\phi: U \to V$ 是 C^1 类函数，且其一阶导数 $\phi': U \to L(U; V)$ 是 $(p-1)$-H¨older 连续的。则对任意 $t > 0$，我们有 $\mathbb{P}$- 几乎处处成立。

$$\begin{aligned}\phi(Y(t)) =& \phi(Y_0) + \int_0^t \phi'(Y(s))(a(Y(s)))ds + \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [\phi(\Phi(1, z, Y(s-))) - \phi(Y(s-))]\tilde{\mathcal{N}}(ds, dz) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [\phi(\Phi(1, z, Y(s))) - \phi(Y(s)) - z\phi'(Y(s))f(Y(s))]\vartheta(dz)ds,\end{aligned}$$

其中 $y(t) := \Phi(t, z, y_0)$ 满足

$$\frac{dy}{dt} = zf(y),$$

具有初始条件 $y(0) = y_0$.

下面的引理给出了 H_1 和 H_2 的演化过程，其中根据（1.18）。

引理 2.2. 设 $u^\epsilon(t,x)$ 为方程 (1.18)的解。那么，对于 $H_1(u^\epsilon)$ $H_2(u^\epsilon)$中给出的 (1.4) 和 (1.5)，有

$$\begin{aligned} H_1(u^\epsilon) =&\|\varphi_{c_0}\|_{H^1}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [H_1(\Phi(1,z,u(s-))) - H_1(u^\epsilon(s-,x))]\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [H_1(\Phi(1,z,u(s-))) - H_1(u^\epsilon(s-,x)) + \epsilon z(\sigma_x, u^{\epsilon 2} - u_x^{\epsilon 2})]\vartheta(dz)ds, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} H_2(u^\epsilon) =&H_2(\varphi_{c_0}) + \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [H_2(\Phi(1,z,u(s-))) - H_2(u^\epsilon(s-,x))]\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [H_2(\Phi(1,z,u(s))) - H_2(u^\epsilon(s-,x)) - \epsilon z H_2'(u^\epsilon)\sigma u_x^\epsilon]\vartheta(dz)ds, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\Phi(1,z,u(s)) = u(s, x-\epsilon\sigma z)$ $H_1'(u^\epsilon) = u^\epsilon - u_{xx}^\epsilon$ 和

$$H_2'(u^\epsilon) = 3u^{\epsilon 2} - u_x^{\epsilon 2} - 2u^\epsilon u_{xx}^\epsilon + 4ku^\epsilon.$$

证明。 由于初值 φ_c 是光滑的，我们可以对 $H_1(u^\epsilon)$ 和 $H_2(u^\epsilon)$ 使用伊藤公式。由于 $H_1(u^\epsilon)$ 和 $H_2(u^\epsilon)$ 是 CH 方程（1.1）的不变量，对 引理 2.1 使用伊藤公式，作用于 $H_1(u^\epsilon)$ 和 $H_2(u^\epsilon)$，可得（ 2.1 ）和（ 2.2 ）。

□

引理 2.3. 设 $u^\epsilon(t,x)$ 是方程 (1.18) 在 $u^\epsilon(0,x) = \varphi_{c_0}(x)$的解。则，

$$H_1(\Phi(1,z,u^\epsilon)) - H_1(u^\epsilon) \leq (e^{|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)\|u^\epsilon\|_{H^1}^2, \tag{2.3}$$

$$H_2(\Phi(1,z,u^\epsilon)) - H_2(u^\epsilon) \leq C(e^{|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)\|u^\epsilon\|_{H^1}^2 + C(e^{\frac{3}{2}|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)\|u^\epsilon\|_{H^1}^3, \tag{2.4}$$

其中 $\Phi(1,z,u(s)) = u(s, x-\epsilon\sigma z)$。此外，

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} \|u^\epsilon\|_{H^1}^2 \leq C\|\varphi_{c_0}(x)\|_{H^1}^2. \tag{2.5}$$

证明。固定 $z \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{R}$，令 $y(t,x) = \Phi(t,z,u(s,x))$ 为下列方程的解

$$dy(t,x) = -z\sigma(x)y_x(t,x)dt, \quad y(0,x) = u(s,x).$$

那么 $y(t,x) = u(s, x-\sigma z t)$ 且

$$\|y(t,x)\|_{H^1}^2 \leq \|u(s,x)\|_{H^1}^2 e^{|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty} t}. \tag{2.6}$$

根据中值定理和 $H_1'(y) = y - y_{xx}$,

$$
\begin{aligned}
&H_1(\Phi(1,z,u)) - H_1(u) = H_1(y(1,x)) - H_1(y(0,x)) \\
=&\int_0^1 \frac{d}{dr}[H_1 \circ y](r)dr = \int_0^1 (H_1 \circ y)'(r)dr \\
=&\int_0^1 H_1'(y(r))y'(r)dr = -z\int_0^1 H_1'(y(r))\sigma y_x(r)dr \\
=&-z\int_0^1 (y - y_{xx}, \sigma y_x)(r)dr \le |z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}\int_0^1 \|y(r)\|_{H^1}^2 dr \\
\le&|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}\|u(s,x)\|_{H^1}^2 \int_0^1 e^{|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty} r}dr \\
\le&(e^{|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)\|u(s,x)\|_{H^1}^2. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

由于 $H_2' = 3y^2 - y_x^2 - 2yy_{xx} + 4ky$，我们还有

$$
\begin{aligned}
&H_2(\Phi(1,z,u)) - H_2(u) = -z\int_0^1 H_2'(y(r))\sigma y_x(r)dr \\
=&-z\int_0^1 (3y^2 - y_x^2 - 2yy_{xx} + 4ky, \sigma y_x)(r)dr \\
=&z\int_0^1 (\sigma_x, y^3 - yy_x^2 + 4ky^2)(r)dr \\
\le&|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}\int_0^1 (\|y\|_{L^\infty}\|y\|_{H^1}^2 + 4k\|y\|_{L^2}^2)dr \\
\le&C|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}\int_0^1 (\|y\|_{H^1}^2 + \|y\|_{H^1}^3)dr \\
\le&C(e^{|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)\|u(s,x)\|_{H^1}^2 + C(e^{\frac{3}{2}|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)\|u(s,x)\|_{H^1}^3. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

接下来，我们证明（2.5）。利用 Burkh¨older-Davis-Gundy（BDG）不等式、H¨older 不等式和（2.3），可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[H_1(\Phi(1,z,u^\epsilon)) - H_1(u^\epsilon)]\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)| \\
\le&C\mathbb{E}(\int_0^T\int_{\mathbb{Z}}(e^{|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)^2\|u^\epsilon(s,x)\|_{H^1}^4\vartheta(dz)ds)^{1/2} \\
\le&C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\|u^\epsilon\|_{H^1}(\int_0^T\int_{\mathbb{Z}}\|u^\epsilon\|_{H^1}^2(e^{|z|\|\sigma_x^n\|_{L^\infty}} - 1)^2\vartheta(dz)ds)^{1/2} \\
\le&\frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\|u^\epsilon\|_{H^1}^2 + C\mathbb{E}\int_0^T\|u^\epsilon\|_{H^1}^2 ds, \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

于是，由（2.1）和（2.9）可知

$$
\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\|u^\epsilon(t)\|_{H^1}^2 \le 2\|\varphi_{c_0}(x)\|_{H^1}^2 + C\mathbb{E}\int_0^T\|u^\epsilon(r)\|_{H^1}^2 dr,
$$

由此，Gronwall 不等式给出（2.5）。证明完毕。 □

注 2.1 （完整的 Euler-Poincar´é 噪声结构）。 可以验证，在 ´ 型的完整 Euler-Poincarζ（u） $\diamond dL$（t） 噪声替代 （1.16） 用于 $\sigma u_x \diamond dL$（t） 的 （1.13）时，不会带来额外困难。

我们利用完整的 Euler-Poincar´é 噪声对其进行估计。固定 $z \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{R}$, 令 $y(t,x) = \Phi(t,z,u(s,x))$ 为下列方程的解

$$dy(t,x) = -z\zeta(y)(t,x)dt, \quad y(0,x) = u(s,x).$$

然后，利用分部积分和 H¨older 不等式,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|y(t,x)\|_{H^1}^2 = -2z((1-\partial_x^2)y, \zeta(y)) \\
=& -2z((1-\partial_x^2)y, 3\sigma y_x - 2\sigma_x y + (1-\partial_x^2)^{-1}(2\sigma_x y - y\partial_x^3\sigma + \sigma_{xx}y_x) \\
&+ 2k(1-\partial_x^2)^{-1}\sigma_x) \\
\leq& C|z|(\|\sigma_x\|_{L^\infty} + \|\sigma_{xx}\|_{L^\infty} + \|\sigma_{xxx}\|_{L^\infty})\|y\|_{H^1}^2 + C|z|\|\sigma_x\|_{L^2}\|y\|_{L^2} \\
\leq& C|z|(1 + \|\sigma_x\|_{L^\infty} + \|\sigma_{xx}\|_{L^\infty} + \|\sigma_{xxx}\|_{L^\infty})\|y\|_{H^1}^2 + C|z|\|\sigma_x\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

由此，根据 Gronwall 不等式可得

$$\|y(t,x)\|_{H^1}^2 \leq \|u(s,x)\|_{H^1}^2 e^{C_1|z|t} + C(e^{C_1|z|t} - 1), \tag{2.10}$$

其中

$$C_1 = C(1 + \|\sigma_x\|_{L^\infty} + \|\sigma_{xx}\|_{L^\infty} + \|\sigma_{xxx}\|_{L^\infty}).$$

由中值定理和 $H_1'(y) = y - y_{xx}$,

$$\begin{aligned}
&H_1(\Phi(1,z,u)) - H_1(u) = H_1(y(1,x)) - H_1(y(0,x)) \\
=& \int_0^1 H_1'(y(r))y'(r)dr = -z\int_0^1 H_1'(y(r))\zeta(y)(r)dr \\
=& -z\int_0^1 (y - y_{xx}, \zeta(y))(r)dr \\
\leq& C_1|z|\int_0^1 \|y(r)\|_{H^1}^2 dr + C|z|\int_0^1 \|\sigma_x\|_{L^2}^2 dr \\
\leq& C_1|z|\|u(s,x)\|_{H^1}^2 \int_0^1 e^{C_1|z|r}dr + C_1C|z|\int_0^1 (e^{C_1|z|r} - 1)dr + C|z|\|\sigma_x\|_{L^2}^2 \\
\leq& (e^{C_1|z|} - 1)\|u(s,x)\|_{H^1}^2 + C(e^{C_1|z|} - 1) + C|z|.
\end{aligned}$$

因此，唯一额外的要求是 $\sigma \in W^{3,\infty}$，而不是 $\sigma \in W^{2,\infty}$。

现在，我们给出定理 1.1的证明。

定理 1.1的证明。 记 $B(\varphi_{c_0}(x)\ 2\alpha) = \{v \in H^1, \|v(x) - \varphi_{c_0}(x)\|_{H^1} \leq 2\alpha\}$ 对于$\alpha > 0$。然后，考虑一个 C^2 映射

$$Y : (c_0 - 2\alpha, c_0 + 2\alpha) \times (-2\alpha, 2\alpha) \times B(\varphi_{c_0}(x), 2\alpha) \to \mathbb{R}^2,$$
$$(c, x_1, u) \to (Y_1, Y_2)$$

定义为

$$Y_1(c, x_1, u) = \int_{\mathbb{R}} (u(x + x_1) - \varphi_c(x))(1 - \partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}(x)dx,$$
$$Y_2(c, x_1, u) = \int_{\mathbb{R}} (u(x + x_1) - \varphi_c(x))(1 - \partial_x^2)\varphi_{c_0}(x)dx.$$

下面我们验证函数 Y 满足以下性质：

(i) $Y(c_0, 0, \varphi_{c_0}(x)) = (0, 0)$.

(ii) 根据控制收敛定理以及 φ_c 的光滑性，偏导数 $\frac{\partial Y_1}{\partial c}, \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial Y_2}{\partial c}, \frac{\partial Y_2}{\partial x_1}$ 连续。事实上，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_1}{\partial c}(c_0, 0, \varphi_{c_0}(x)) &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_c\varphi_c(x)(1 - \partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}(x)dx|_{(c_0,0,\varphi_{c_0}(x))}, \\
\frac{\partial Y_2}{\partial c}(c_0, 0, \varphi_{c_0}(x)) &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_c\varphi_c(x)(1 - \partial_x^2)\varphi_{c_0}(x)dx|_{(c_0,0,\varphi_{c_0}(x))} \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \partial_c((\varphi_{c_0}(x))^2 + (\partial_x\varphi_{c_0}(x))^2)dx \neq 0, \\
\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}(c_0, 0, \varphi_{c_0}(x)) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x\varphi_{c_0}(x)(1 - \partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}(x)dx > 0,
\end{aligned}$$

and

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x_1}(c_0, 0, \varphi_{c_0}(x)) = \int_{\mathbb{R}} \partial_x\varphi_{c_0}(x)(1 - \partial_x^2)\varphi_{c_0}(x)dx = 0.$$

因此，矩阵 $Y'_{(c,x_1)}(c_0, 0, \varphi_{c_0}(x))$ 的行列式为 $\neq 0.$。于是，根据隐函数定理，我们得到存在 $\alpha_0 > 0$ ，以及唯一确定的 C^2- 函数 $(c(u)\ x_1(u))$，其定义域为 $u \in B(\varphi_{c_0}(x)\ 2\alpha)$，使得

$$Y(c(u), x_1(u), u) = 0.$$

此外，如有必要，我们可以再次缩小 α ，从而在满足下列条件的点（$c, 0, u_0$）附近一致地应用隐函数定理：

$$Y(c, 0, u_0) = 0, \ \ |c - c_0| < \alpha, \ \text{ and } \ \|u_0 - \varphi_{c_0}\|_{H^1} < \alpha.$$

将此应用于 $u = u^\epsilon(t)$，可得 $c^\epsilon(t) = c(u^\epsilon(t))$ 和 $x^\epsilon(t) = x_1(u^\epsilon(t))$ 存在，使得正交条件（1.23）成立，其中 $\epsilon\eta^\epsilon(t) = u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t)) - \varphi_{c^\epsilon(t)}(x)$。

由于 $u^\epsilon(t)$ 是一个 H^1 值过程，因此 $u^\epsilon(t)$ 是 H^{-1} 中的半鞅过程。注意到 Y 是 H^{-1} 上关于 u 的 C^1 泛函，过程 $c^\epsilon(t)$ 和 $x^\epsilon(t)$ 在局部可表示为 $u^\epsilon(t) \in H^{-1}$ 的确定性 C^2 函数。于是，伊藤公式表明 $c^\epsilon(t)$ 和 $x^\epsilon(t)$ 是半鞅过程。此外，由于显然有 $Y(c^\epsilon(t)\ x^\epsilon(t)\ u^\epsilon(t)) = 0$，只要满足以下条件，$c^\epsilon(t)$ 和 $x^\epsilon(t)$ 就存在

$$|c^\epsilon(t) - c_0| < \alpha \ \text{ and } \ \|u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t)) - \varphi_{c^\epsilon(t)}(x)\|_{H^1} < \alpha. \tag{2.11}$$

现在我们定义两个停时

$$\tilde{\tau}^\epsilon_\alpha = \inf\{t \geq 0, |c^\epsilon(t) - c_0| \geq \alpha \ \text{ or } \ \|u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t)) - \varphi_{c_0}(x)\|_{H^1} \geq \alpha\},$$

$$\tau^\epsilon_\beta = \inf\{t \geq 0, |c^\epsilon(t) - c_0| \geq \beta \ \text{ or } \ \|u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t)) - \varphi_{c^\epsilon(t)}(x)\|_{H^1} \geq \beta\}.$$

由于只要 $|c^\epsilon(t) - c_0| \leq \alpha \leq \alpha_0$，不等式 $\|\varphi_{c^\epsilon(t)} - \varphi_{c_0}\|_{H^1} \leq C\alpha$ 就成立，且常数 C 仅依赖于 α_0 和 c_0，因此显然有

$$\tau^\epsilon_\alpha \leq \tilde{\tau}^\epsilon_{(C+1)\alpha} \leq \tau^\epsilon_{(C+1)^2\alpha}.$$

再次取 α_0 充分小，则过程 $c^\epsilon(t)$ 和 $x^\epsilon(t)$ 对所有 $t \leq \tau^\epsilon_{\alpha_0}$ 均有定义，并且在正交条件（1.23）下，对所有 $t \leq \tau^\epsilon_\alpha$，$\alpha \leq \alpha_0$ 均满足（2.11）。

为证明任意 $T > 0$下的（1.24），令 $H_c = cH_1 - H_2$。由泰勒公式可得

$$\begin{aligned} &H_{c_0}(u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t))) - H_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)}) \\ =&(H'_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)}), \epsilon\eta^\epsilon(t)) + (H''_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)})\epsilon\eta^\epsilon(t), \epsilon\eta^\epsilon(t)) + o(\|\epsilon\eta^\epsilon(t)\|^2_{H^1}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

注意，$o(\|\epsilon\eta^\epsilon(t)\|^2_{H^1})$ 关于 ω、ϵ 和 t 一致，因为 $H'_{c_0}(\varphi_c)$ 和 $H''_{c_0}(\varphi_c)$ 关于 c 连续依赖，并且对所有 $t \leq \tau^\epsilon_\alpha$，$|c^\epsilon(t) - c_0| \leq \alpha$ 和 $\|u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t)) - \varphi_{c^\epsilon(t)}\|_{H^1} \leq \alpha$。因此，我们假设 α_0 足够小，使得对所有 $t \leq \tau^\epsilon_\alpha$，最后一项小于 $\frac{C}{4}\|\epsilon\eta^\epsilon(t)\|^2_{H^1}$。

根据关于 $\mathcal{L}_{c_0} = H''_{c_0}(\varphi_{c_0})$ 的谱的结果，这些结果推导于 [38] (另见 [46] 中的引理 4.3 的式 (4.26))，存在 $\delta > 0$ 和 $C_\delta > 0$，使得若 $c_0 \geq k$，

$$|(w, (1 - \partial_x^2)\varphi_{c_0})| + |(w, (1 - \partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})| \leq \delta\|w\|_{H^1},$$

then

$$(\mathcal{L}_{c_0} w, w) \geq C_\delta \|w\|_{H^1}^2.$$

于是可得

$$\begin{aligned}
&(H''_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)})\epsilon\eta^\epsilon(t), \epsilon\eta^\epsilon(t)) \\
=&(H''_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)})\epsilon\eta^\epsilon(t) - H''_{c_0}(\varphi_{c_0})\epsilon\eta^\epsilon(t), \epsilon\eta^\epsilon(t)) + (H''_{c_0}(\varphi_{c_0})\epsilon\eta^\epsilon(t), \epsilon\eta^\epsilon(t)) \\
\geq& C_\delta \|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 - \|H''_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)}) - H''_{c_0}(\varphi_{c_0})\|_{\mathcal{L}(H^1, H^{-2})} \|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 \\
\geq& C_\delta \|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 - C|c^\epsilon(t) - c_0| \|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

由于 $H'_{c^\epsilon}(\varphi_{c^\epsilon}) = 0$ 由 (1.21)，H¨older 和 Young不等式可得

$$\begin{aligned}
|(H'_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)}), \epsilon\eta^\epsilon(t))| =& |(H'_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon}) - H'_{c^\epsilon}(\varphi_{c^\epsilon}), \epsilon\eta^\epsilon(t)) \\
=& 2((c^\epsilon - c_0)\varphi_{c^\epsilon}, \epsilon\eta^\epsilon)| \\
\leq& C|c^\epsilon(t) - c_0|^2 + \frac{C_\delta}{2}\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

由 (2.12)-(2.14) 可知，对所有 $\alpha \leq \alpha_0 \leq \frac{C_\delta}{2}$，以及所有 $t \leq \tau_\alpha^\epsilon$，都有

$$H_{c_0}(u^\epsilon(t, x + x^\epsilon(t))) - H_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)}) \geq \frac{C_\delta}{4}\|\epsilon\eta^\epsilon(t)\|_{H^1}^2 - C|c^\epsilon(t) - c_0|^2,$$

其中常数 C 仅依赖于 α_0 和 c_0.。因此，对 $H_{c_0}(u^\epsilon(t,x))$ 应用伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}
&\|\epsilon\eta^\epsilon(t, x - x^\epsilon(t))\|_{H^1}^2 \leq C[H_{c_0}(u^\epsilon(t,x)) - H_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)}(x - x^\epsilon(t)))] + C|c^\epsilon(t) - c_0|^2 \\
=& C\{H_{c_0}(\varphi_{c_0}) - H_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)}(x - x^\epsilon)) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [H_{c_0}(\Phi(1, z, u^\epsilon(s-, x)) - H_{c_0}(u^\epsilon(s-, x))]\tilde{\mathcal{N}}(ds, dz) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [H_{c_0}(\Phi(1, z, u^\epsilon(s, x)) - H_{c_0}(u^\epsilon(s, x)) - \epsilon z H'_{c_0}(u^\epsilon)\sigma u_x^\epsilon]\vartheta(dz)ds\} \\
&+ C|c^\epsilon(t) - c_0|^2, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

其中

$$H'_{c_0}(u) = c_0 H'_1(u) - H'_2(u) = c_0(u - u_{xx}) - (3u^2 - u_x^2 - 2uu_{xx} + 4ku).$$

现在我们估计 $|c^\epsilon(t) - c_0|^2$。正交条件 (1.23) 意味着

$$\begin{aligned}
\|u^\epsilon(t)\|_{H^1}^2 =& \|\epsilon\eta^\epsilon + \varphi_{c^\epsilon(t)}\|_{H^1}^2 \\
=& \|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 + \|\varphi_{c^\epsilon(t)}\|_{H^1}^2 + 2(\epsilon\eta^\epsilon, (1 - \partial_x^2)(\varphi_{c^\epsilon(t)} - \varphi_{c_0})) \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

并且由 (2.1),

$$\begin{aligned}\|u^\epsilon(t)\|_{H^1}^2 =&\|\varphi_{c_0}\|_{H^1}^2+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}G_1(u^\epsilon(s-,x))\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[G_1(u^\epsilon(s,x))+\epsilon z(\sigma_x,u^{\epsilon 2}-u_x^{\epsilon 2})]\vartheta(dz)ds,\end{aligned}\tag{2.17}$$

其中

$$G_1(u^\epsilon(s,x))=\|\Phi(1,z,u^\epsilon(s,x)\|_{H^1}^2-\|u^\epsilon(s,x)\|_{H^1}^2.$$

因此，由（2.16）-（2.17）可知，存在一些常数 C 和 μ，它们仅依赖于α_0 和 c_0,

$$\begin{aligned}&\mu|c^\epsilon(t)-c_0|\\\leq&|\|\varphi_{c^\epsilon(t)}\|_{H^1}^2-\|\varphi_{c_0}\|_{H^1}^2|\\\leq&\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2+2\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}(\|\varphi_{c^\epsilon(t)}-\varphi_{c_0}\|_{H^1})+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}G_1(u^\epsilon(s-,x))\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[G_1(u^\epsilon(s,x))+\epsilon z(\sigma_x,u^{\epsilon 2}-u_x^{\epsilon 2})]\vartheta(dz)ds\\\leq&\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^2+C\alpha|c^\epsilon(t)-c_0|+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}G_1(u^\epsilon(s-,x))\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[G_1(u^\epsilon(s,x))+\epsilon z(\sigma_x,u^{\epsilon 2}-u_x^{\epsilon 2})]\vartheta(dz)ds.\end{aligned}\tag{2.18}$$

因此，取 α_0 足够小，可得

$$\begin{aligned}|c^\epsilon(t)-c_0|^2\leq&C[\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^4+|\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}G_1(u^\epsilon(s-,x))\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)|^2\\&+|\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[G_1(u^\epsilon(s,x))+\epsilon z(\sigma_x,u^{\epsilon 2}-u_x^{\epsilon 2})]\vartheta(dz)ds|^2].\end{aligned}\tag{2.19}$$

由于 $H'_{c_0}(\varphi_{c_0})=0$，我们有

$$|H_{c_0}(\varphi_{c_0})-H_{c_0}(\varphi_{c^\epsilon(t)})|\leq C\|\varphi_{c_0}-\varphi_{c^\epsilon(t)}\|_{H^1}^2\leq C|c^\epsilon(t)-c_0|^2.\tag{2.20}$$

然后，将（2.19）-（2.20）代入（2.15）的右端，得到

$$\begin{aligned}&\|\epsilon\eta^\epsilon(t)\|_{H^1}^2\leq C\{\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}^4+|\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}G_1(u^\epsilon(s-,x))\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)|^2\\&+|\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[G_1(u^\epsilon(s,x))+\epsilon z(\sigma_x,u^{\epsilon 2}-u_x^{\epsilon 2})]\vartheta(dz)ds|^2\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[H_{c_0}(\Phi(1,z,u^\epsilon(s-,x))-H_{c_0}(u^\epsilon(s-,x))]\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[H_{c_0}(\Phi(1,z,u^\epsilon(s,x))-H_{c_0}(u^\epsilon(s,x))-\epsilon zH'_{c_0}(u^\epsilon)\sigma u_x^\epsilon]\vartheta(dz)ds\}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

现在，固定 $T>0$ 并令

$$\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha}=\{\omega\in\Omega,\tau_\alpha^\epsilon\le T,\|\epsilon\eta^\epsilon(\tau_\alpha^\epsilon)\|_{H^1}=\alpha\},$$
$$\Omega_2^{T,\epsilon,\alpha}=\{\omega\in\Omega,\tau_\alpha^\epsilon\le T,|c^\epsilon(\tau_\alpha^\epsilon)-c_0|=\alpha\}$$

因此

$$\mathbb{P}(\tau_\alpha^\epsilon\le T)\le\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})+\mathbb{P}(\Omega_2^{T,\epsilon,\alpha}).$$

令 $\alpha_0>0$ 足够小，使得 $C\alpha_0^2\le 1/2$。将两边乘以 (2.21)$1_{\Omega^{T,1^{\epsilon\alpha}}}$，对于 $\alpha\le\alpha_0$，并取关于 $t=\tau_\alpha^\epsilon\wedge T$ 的期望，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{2}\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})\\
\le&C\{\mathbb{E}|\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}G_1(u^\epsilon(s-,x))\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)1_{\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha}}|^2\\
&+\mathbb{E}|\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[G_1(u^\epsilon(s,x))+\epsilon z(\sigma_x,u^{\epsilon 2}-u_x^{\epsilon 2})]\vartheta(dz)ds1_{\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha}}|^2\\
&+\mathbb{E}[\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[H_{c_0}(\Phi(1,z,u^\epsilon(s-,x))-H_{c_0}(u^\epsilon(s-,x))]\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)1_{\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha}}]\\
&+\mathbb{E}[\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[H_{c_0}(\Phi(1,z,u^\epsilon(s,x))-H_{c_0}(u^\epsilon(s,x))-\epsilon zH'_{c_0}(u^\epsilon)\sigma u_x^\epsilon]\vartheta(dz)ds1_{\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha}}]\}.
\end{aligned}$$

利用引理2.3,

$$\begin{aligned}
&G_1(u^\epsilon(s,x))\le C(e^{\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}}-1)\|u(s,x)\|_{H^1}^2,\\
&H_{c_0}(\Phi(1,z,u^\epsilon(s,x))-H_{c_0}(u^\epsilon(s,x))\\
\le&C(e^{\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}}-1)\|u^\epsilon(s,x)\|_{H^1}^2+C(e^{\frac{3}{2}\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}}-1)\|u^\epsilon(s,x)\|_{H^1}^3,\\
&H'_{c_0}(u^\epsilon)\sigma u_x\le C(\|u^\epsilon\|_{H^1}^2+\|u^\epsilon\|_{H^1}^3),
\end{aligned}$$

于是，根据柯西不等式、BDG 不等式以及 $\|u^\epsilon\|_{H^1}^2\le C$ 几乎处处成立，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{2}\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})\\
\le&CT\int_{\mathbb{Z}}(e^{\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}}-1)^2\vartheta(dz)\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})\\
&+CT^2[|\int_{\mathbb{Z}}(e^{\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}}-1)\vartheta(dz)|+\epsilon^2\|\sigma_x\|_{L^\infty}^2|\int_{\mathbb{Z}}z\vartheta(dz)|]^2\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})\\
&+C\sqrt{T}(\int_{\mathbb{Z}}(e^{\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}}-1)^2+(e^{\frac{3}{2}\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}}-1)^2\vartheta(dz))^{1/2}\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})^{1/2},
\end{aligned}$$

从而，对于 ϵ 足够小的情形

$$\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})\le C\frac{\sqrt{T}}{\alpha^2}b^{1/2}(\epsilon)\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha})^{1/2},$$

其中 $b(\epsilon) = \int_{\mathbb{Z}}((e^{\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)^2 + (e^{\frac{3}{2}\epsilon|z|\|\sigma_x\|_{L^\infty}} - 1)^2)\vartheta(dz)$，这意味着

$$\mathbb{P}(\Omega_1^{T,\epsilon,\alpha}) \leq C\frac{T}{\alpha^4}b(\epsilon). \tag{2.22}$$

回到（2.19），并采用与上文相同的论证，可得

$$\alpha^2\mathbb{P}(\Omega_2^{T,\epsilon,\alpha}) \leq C(\epsilon)\mathbb{P}(\Omega_2^{T,\epsilon,\alpha}) + C\sqrt{T}b^{1/2}(\epsilon)\mathbb{P}(\Omega_2^{T,\epsilon,\alpha})^{1/2},$$

那么，当 ϵ 充分小时，有

$$\mathbb{P}(\Omega_2^{T,\epsilon,\alpha}) \leq C\frac{T}{\alpha^4}b(\epsilon). \tag{2.23}$$

因此，1.24）由2.22）-（2.23）可得，其中 α 和 ϵ 充分小。 □

3. Modulation equations

本节推导将调制参数 x^ϵ, c^ϵ 与剩余项 η^ϵ. 耦合起来的方程

引理 3.1。 在定理1.2的假设下， η^ϵ 满足方程

$$\begin{aligned} d\eta^\epsilon =& \frac{1}{2}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon dt + (y^\epsilon\partial_x\varphi_{c^\epsilon} - \partial_c\varphi_{c^\epsilon}a^\epsilon)dt + \epsilon y^\epsilon\eta_x^\epsilon dt + \epsilon f(\eta^\epsilon)dt \\ &+ [(\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon} + \partial_x\varphi_{c^\epsilon}\mu^\epsilon) - \partial_c\varphi_{c^\epsilon}b^\epsilon + \epsilon(\sigma\eta_x^\epsilon + \eta_x^\epsilon\mu^\epsilon)] \diamond dL(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$f(\eta^\epsilon) = -\eta^\epsilon\eta_x^\epsilon - (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(\eta^{\epsilon 2} + \frac{1}{2}\eta_x^{\epsilon 2}). \tag{3.2}$$

证明。 我们将（1.18）写成哈密顿形式

$$du + (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x H_2'(u)dt + \epsilon\sigma u_x \diamond dL(t).$$

然后，利用（1.30）-（1.31），可得

$$\begin{aligned} du(t,x+x^\epsilon) =& -(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x H_2'(u)(t,x+x^\epsilon)dt + \epsilon\sigma u_x(t,x+x^\epsilon)\diamond dL(t) \\ &+ u_x(t,x+x^\epsilon)c^\epsilon dt + \epsilon u_x(t,x+x^\epsilon)y^\epsilon dt + \epsilon u_x(t,x+x^\epsilon)\mu^\epsilon \diamond dL(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$d\varphi_{c^\epsilon} = \epsilon\partial_c\varphi_{c^\epsilon}a^\epsilon dt + \epsilon\partial_c\varphi_{c^\epsilon}b^\epsilon \diamond dL(t). \tag{3.4}$$

将 $u(t,\ x+x^\epsilon)$ 替换为 $\varphi_{c^\epsilon}(x) + \epsilon\eta^\epsilon(t,\ x)$，并使用 (1.21)-(1.22)，

$$H_2'(\varphi_{c^\epsilon}) = c^\epsilon H_1'(\varphi_{c^\epsilon}) = c^\epsilon(\varphi_{c^\epsilon} - \partial_x^2\varphi_{c^\epsilon}),$$

我们得到

$$\begin{aligned}&H_2'(u)(t,x+x^\epsilon)=(\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}u_x^2-uu_{xx}+2ku)(t,x+x^\epsilon)\\=&H_2'(\varphi_{c^\epsilon})+H_2'(\eta^\epsilon)+3\epsilon\eta^\epsilon\varphi_{c^\epsilon}-\epsilon\eta^\epsilon\partial_x^2\varphi_{c^\epsilon}-\epsilon\eta_x^\epsilon\partial_x\varphi_{c^\epsilon}-\eta_{xx}^\epsilon\varphi_{c^\epsilon}\\=&c^\epsilon(\varphi_{c^\epsilon}-\partial_x^2\varphi_{c^\epsilon})-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{c^\epsilon}(\epsilon\eta^\epsilon)-\epsilon c^\epsilon\eta_{xx}^\epsilon+\epsilon c^\epsilon\eta^\epsilon+\frac{3}{2}\epsilon^2\eta^{\epsilon 2}-\frac{1}{2}\epsilon^2\eta_x^{\epsilon 2}-\epsilon^2\eta^\epsilon\eta_{xx}^\epsilon.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&-(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_xH_2'(u)(t,x+x^\epsilon)\\=&\frac{\epsilon}{2}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}(\eta^\epsilon)-c^\epsilon\partial_x\varphi_{c^\epsilon}-\epsilon c^\epsilon\eta_x^\epsilon+\epsilon^2f(\eta^\epsilon),\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中 $f(\eta^\epsilon)$ 由 (3.2) 给出。将 $(1-\partial_x^2)^{-1}$ 应用于 (3.3) 两边，然后将$u(t,x+x^\epsilon)$ 替换为 $\varphi_{c^\epsilon}(x)+\epsilon\eta^\epsilon(t,x)$，并将 (3.4)-(3.5) 代入 (3.3)，即可得到 (3.1)。 □

引理 3.2. 在定理1.2的假设下，调制参数满足以下方程组

$$A^\epsilon(t)B^\epsilon(t)=D^\epsilon(t),\tag{3.6}$$

$$A^\epsilon(t)Y^\epsilon(t)=E^\epsilon(t),\tag{3.7}$$

其中

$$A^\epsilon(t)=\begin{pmatrix}(\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\epsilon\eta_x^\epsilon,(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}) & -(\partial_c\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})\\(\partial_x\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0}) & -(\partial_c\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\end{pmatrix},\tag{3.8}$$

$$B^\epsilon(t)=\begin{pmatrix}\mu^\epsilon(t)\\b^\epsilon(t)\end{pmatrix},\quad Y^\epsilon(t)=\begin{pmatrix}y^\epsilon(t)\\a^\epsilon(t)\end{pmatrix},\tag{3.9}$$

$$D^\epsilon(t)=\begin{pmatrix}-(\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\epsilon\sigma\eta_x^\epsilon,(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}))\\-(\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\epsilon\sigma\eta_x^\epsilon,(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\end{pmatrix},\tag{3.10}$$

and

$$E^\epsilon(t)=\begin{pmatrix}(-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon,\partial_x\varphi_{c_0})-\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})\\(-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon,\varphi_{c_0})-\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\end{pmatrix}.\tag{3.11}$$

证明。将方程（3.1）分别与 $(1-\partial_x^2)\ \varphi_{c_0}$ 和 $(1-\partial_x^2)\ \partial_x\varphi_{c_0}$ 作内积，并利用正交条件（1.23），可得

$$\begin{aligned}&0=d(\eta^\epsilon,(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})=(d\eta^\epsilon,(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\\=&(\partial_x\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})y^\epsilon dt-(\partial_c\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})a^\epsilon dt+(\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon,\varphi_{c_0})dt\end{aligned}$$

$$+\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})dt-(\partial_c\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})b^\epsilon\diamond dL(t)$$
$$+[\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\epsilon\sigma\eta_x^\epsilon,(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})+(\partial_x\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\mu^\epsilon]\diamond dL(t),$$

and

$$\begin{aligned}0=&d(\eta^\epsilon,(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})=(d\eta^\epsilon,(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})\\=&(\partial_x\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})y^\epsilon dt-(\partial_c\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})a^\epsilon dt+(\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon,\partial_x\varphi_{c_0})\\&+\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})dt+[\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\epsilon\sigma\eta_x^\epsilon,(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})\\&+(\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\epsilon\eta_x^\epsilon,(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})\mu^\epsilon]\diamond dL(t)-(\partial_c\varphi_{c^\epsilon},(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})b^\epsilon\diamond dL(t).\end{aligned}$$

接着，令上述方程的漂移项和鞅部分恒等于零，得到（3.6）-（3.7）。

□

引理 3.3. 在定理1.2的假设下，存在 α_1 使得对于 $\alpha\le\alpha_1$和 $t\le\tau_\alpha^\epsilon$,

$$|\mu^\epsilon(t)|+|b^\epsilon(t)|\le C(c_0,\alpha),\tag{3.12}$$
$$|y^\epsilon(t)|+|a^\epsilon(t)|\le C(c_0,\alpha)\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2,\ a.s.\tag{3.13}$$

证明。我们可以几乎必然地将 $t\le\tau_\alpha^\epsilon$写为 $A^\epsilon(t)=A_0+O(|c^\epsilon-c_0|+\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1})$，其中

$$A_0=\begin{pmatrix}(\partial_x\varphi_{c_0},(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}) & 0\\ 0 & (\partial_c\varphi_{c_0},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\end{pmatrix}$$

并且只要 $t\le\tau^\epsilon$， $O(|c^\epsilon-c_0|+\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1})$ 在 ϵ、 t和 ω上是一致的。因此，取较小的 $\alpha\le\alpha_1$ ，可得令

$$\tilde{A^\epsilon}(t)=A_0+1_{[0,\tau^\epsilon)}(t)(A^\epsilon(t)-A_0),$$

˜矩阵 $A^\epsilon(t)$ 可逆，且

$$\|(\tilde{A^\epsilon}(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}\le C(c_0,\alpha),\ a.s.$$

于是，方程（3.6）可解为

$$B^\epsilon(t)=(\tilde{A^\epsilon}(t))^{-1}D^\epsilon(t),$$

对于 $t\le\tau^\epsilon$，这意味着

$$|\mu^\epsilon(t)|+|b^\epsilon(t)|\le C(c_0,\alpha)|D^\epsilon(t)|\le C(c_0,\alpha)(\|\varphi_{c^\epsilon}\|_{H^1}+\|\varphi_{c_0}\|_{H^3})\le C(c_0,\alpha).$$

因此，得到（3.12）。由（1.22）和（3.2），对于 $t \le \tau^\epsilon$

$$|E^\epsilon(t)| \le C\|\eta^\epsilon\|_{L^2}\|\mathcal{L}_{c^\epsilon}(\partial_x\varphi_{c_0})\|_{L^2} + C\epsilon\|f(\eta^\epsilon)\|_{L^1}\|(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}\|_{L^\infty}$$
$$(1+|c^\epsilon| + \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2),\ a.s.$$

利用（1.31）和（3.12），可得

$$|y^\epsilon(t)| + |a^\epsilon(t)| \le C(c_0,\alpha)(1 + \int_0^t |a^\epsilon(s)|ds + \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2),\ \ a.s.$$

于是，Gronwall 不等式推出（3.13）。 □

推论 3.1. 在定理 *1.2* 的假设下，对于 $t \le \tau_\alpha^\epsilon$，有

$$|c^\epsilon - c_0| \le C\epsilon(\int_0^T \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 ds + 1),\ \ a.s. \tag{3.14}$$

证明. 由于

$$c^\epsilon - c_0 = \epsilon\int_0^t a^\epsilon(s)ds + \epsilon\int_0^t b^\epsilon(t)\diamond dL(t),$$

（3.14）由引理 3.3 得到。 □

4. Estimates on the remainder term and convergence

在本节中，我们证明 η^ϵ的收敛。首先，我们给出以下引理中η^ϵ、 y^ϵ、 μ^ϵ、 a^ϵ 和 b^ϵ 的一些估计：4.1-4.2。

引理 4.1。设 $T > 0$ 为定值。在定理*1.2*的假设下，有

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^{2r} \le C,\ \ r = 1,2. \tag{4.1}$$

证明。设 $y(t,x) = \Phi_1(t,z,v)$ 是下列偏微分方程的解

$$\frac{dy}{dt} = z(\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon} + \partial_x\varphi_{c^\epsilon}\mu^\epsilon) - z\partial_c\varphi_{c^\epsilon}b^\epsilon + \epsilon z(\sigma+\mu^\epsilon)y_x,$$

初值为 $y(0,\ x) = v(x)$。 然后，利用分部积分、H¨older 不等式和 (3.12)，可得

$$\|y(t,x)\|_{H^1}^2 = \|y(0,x)\|_{H^1}^2 + 2z\int_0^t((\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon} + \partial_x\varphi_{c^\epsilon}\mu^\epsilon) - \partial_c\varphi_{c^\epsilon}b^\epsilon, (1-\partial_x^2)y)ds$$
$$+ 2\epsilon z\int_0^t((\sigma+\mu^\epsilon)y_x, (1-\partial_x^2)y)ds$$
$$\le\|v(x)\|_{H^1}^2 + C|z|\int_0^t(\|\sigma_x\|_{L^\infty}\|\partial_x\varphi_{c^\epsilon}\|_{H^1} + \|\partial_x\varphi_{c^\epsilon}\|_{H^1}|\mu^\epsilon| + \|\partial_c\varphi_{c^\epsilon}\|_{H^1}|b^\epsilon|)\|y\|_{H^1}ds$$

$$
\begin{aligned}
&+C\epsilon|z|\int_0^t \|\sigma_x\|_{L^\infty}\|y(t,x)\|_{H^1}^2 ds\\
\leq&\|v(x)\|_{H^1}^2+C|z|\int_0^t(1+\|y\|_{H^1}^2)ds.
\end{aligned}
$$

由 Gronwall 不等式可得

$$
\|y(t,x)\|_{H^1}^2 \leq (\|v(x)\|_{H^1}^2+C|z|t)e^{C|z|t}.
$$

与估计式（2.7类似，利用分部积分、H¨older 不等式以及（3.12），可得

$$
\begin{aligned}
&H_1(\Phi_1(1,z,\eta^\epsilon))-H_1(\eta^\epsilon)=\int_0^1 H_1'(y(r))y'(r)dr\\
=&z\int_0^1(y-y_{xx},\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\partial_x\varphi_{c^\epsilon}\mu^\epsilon-\partial_c\varphi_{c^\epsilon}b^\epsilon+\epsilon(\sigma+\mu^\epsilon)y_x)(r)dr\\
\leq&C|z|\int_0^1(\|y(r)\|_{H^1}+\|y(r)\|_{H^1}^2)dr\\
\leq&C|z|\|\eta^\epsilon(s,x)\|_{H^1}^2\int_0^1 e^{C|z|r}dr+C|z|^2\int_0^1 re^{C|z|r}dr\\
\leq&C|z|(\|\eta^\epsilon(s,x)\|_{H^1}^2+1).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

对2.1 中的 $\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2$ （3.1）应用伊藤公式引理，可得

$$
\begin{aligned}
\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2=&\int_0^t((1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon,(1-\partial_x^2)\eta^\epsilon)ds\\
&+2\int_0^t((y^\epsilon\partial_x\varphi_{c^\epsilon}-\partial_c\varphi_{c^\epsilon}a^\epsilon),(1-\partial_x^2)\eta^\epsilon)ds\\
&+2\int_0^t(\epsilon y^\epsilon\partial_x\eta^\epsilon+\epsilon f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\eta^\epsilon)ds\\
&+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[\|\Phi_1(1,z,\eta^\epsilon(s-))\|_{H^1}^2-\|\eta^\epsilon(s-)\|_{H^1}^2]\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz)\\
&+\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}[\|\Phi_1(1,z,\eta^\epsilon(s))\|_{H^1}^2-\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2\\
&-2z((1-\partial_x^2)\eta^\epsilon,(\sigma\partial_x\varphi_{c^\epsilon}+\partial_x\varphi_{c^\epsilon}\mu^\epsilon)-\partial_c\varphi_{c^\epsilon}b^\epsilon+\epsilon(\sigma\eta_x^\epsilon+\eta_x^\epsilon\mu^\epsilon))]\vartheta(dz)ds\\
=:&\sum_{i=1}^5 J_i.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

利用（1.22）、分部积分、柯西不等式和嵌入定理，可得

$$
\begin{aligned}
J_1=&\int_0^t(\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon,\eta^\epsilon)ds\\
=&2\int_0^t(\partial_x^2((c^\epsilon-\varphi_{c^\epsilon})\partial_x\eta^\epsilon),\eta^\epsilon)ds+2\int_0^t(\partial_x((-3\varphi_{c^\epsilon}+\partial_x^2\varphi_{c^\epsilon}+(c^\epsilon-2k))\eta^\epsilon),\eta^\epsilon)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t (\partial_x \varphi_{c^\epsilon}, (\partial_x \eta^\epsilon)^2) ds - 2 \int_0^t ((-3\varphi_{c^\epsilon} + \partial_x^2 \varphi_{c^\epsilon}) \eta^\epsilon, \partial_x \eta^\epsilon) ds \\
&\leq C \int_0^t \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 ds. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

引理 3.3 和柯西不等式可得

$$
J_2 \leq C \int_0^t \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 ds. \qquad (4.5)
$$

利用分部积分，得到

$$
\begin{aligned}
J_3 =& 2\epsilon \int_0^t ((1 - \partial_x^2) f(\eta^\epsilon), \eta^\epsilon) ds \\
=& 2\epsilon \int_0^t (3\eta^\epsilon \partial_x \eta^\epsilon - 2\partial_x \eta^\epsilon \partial_x^2 \eta^\epsilon - \eta^\epsilon \partial_x^3 \eta^\epsilon, \eta^\epsilon) ds = 0. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

根据 BDG 不等式和（4.2），可得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_\alpha^\epsilon]} J_4 \leq & C \mathbb{E} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{Z}} |z|^2 (\|\eta^\epsilon(s, x)\|_{H^1}^2 + 1)^2 \vartheta(dz) \right)^{1/2} ds \\
\leq & \frac{1}{2} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 + C \mathbb{E} \int_0^T (\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 + 1) ds. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

同理，可得

$$
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_\alpha^\epsilon]} J_5 \leq C(1 + \mathbb{E} \int_0^T \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 ds). \qquad (4.8)
$$

由（4.3）-（4.8）可得

$$
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_\alpha^\epsilon]} \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 \leq C(1 + \mathbb{E} \int_0^T \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 ds),
$$

由此结合 Gronwall 不等式可得

$$
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_\alpha^\epsilon]} \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2 \leq C.
$$

由（4.3），可得

$$
\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4 \leq \sum_{i=1}^5 |J_i|^2. \qquad (4.9)
$$

然后，利用 H¨older 不等式以及（4.4）-（4.8）的估计，可得

$$
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_\alpha^\epsilon]} \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4 \leq C(1 + \mathbb{E} \int_0^{T \wedge \tau_\alpha^\epsilon} \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4 ds),
$$

由此结合 Gronwall 不等式可推出

$$
\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_\alpha^\epsilon]} \|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4 \leq C.
$$

证明完毕。 □

引理 4.2. 设适应过程 y^ϵ, μ^ϵ, a^ϵ, b^ϵ, y, μ, a 和 b 给定于 (1.30)-(1.31) 和 (1.26)-(1.29)。那么，对于任意正的 T 和 $t \le \tau_\alpha^\epsilon$

$$\begin{aligned}&|y^\epsilon(t)-y(t)|+|\mu^\epsilon(t)-\mu(t)|+|a^\epsilon(t)-a(t)|+|b^\epsilon(t)-b(t)|\\ \le& C\|\eta^\epsilon(t)-\eta(t)\|_{L^2}+C\epsilon(1+\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|\eta^\epsilon(t)\|_{H^1}^4).\end{aligned} \tag{4.10}$$

证明。记

$$A_0^{-1}=\begin{pmatrix}(\partial_x\varphi_{c_0},(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})^{-1} & 0\\ 0 & (\partial_c\varphi_{c_0},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})^{-1}\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$D=\begin{pmatrix}-(\sigma\partial_x\varphi_{c_0},(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}))\\ -(\sigma\partial_x\varphi_{c_0},(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

and

$$E=\begin{pmatrix}(-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}\eta,\partial_x\varphi_{c_0})\\ (-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}\eta,\varphi_{c_0})\end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Then

$$A_0^{-1}E=\begin{pmatrix}y(t)\\ a(t)\end{pmatrix}:=Y(t)\ \text{ and }\ A_0^{-1}D=\begin{pmatrix}\mu(t)\\ b(t)\end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

由（3.7）和（4.14）可得

$$\begin{aligned}Y^\epsilon-Y=&\begin{pmatrix}y^\epsilon-y\\ a^\epsilon-a\end{pmatrix}=(\tilde{A}^\epsilon)^{-1}E^\epsilon-A_0^{-1}E\\ =&((\tilde{A}^\epsilon)^{-1}-A_0^{-1})E^\epsilon+A_0^{-1}(E^\epsilon-E)\\ =&(\tilde{A}^\epsilon)^{-1}(A_0-\tilde{A}^\epsilon)A_0^{-1}E^\epsilon+A_0^{-1}(E^\epsilon-E).\end{aligned} \tag{4.15}$$

令 $v^\epsilon=\eta^\epsilon-\eta$. 则利用（4.21）-（4.22），可得

$$\begin{aligned}E^\epsilon-E=&\begin{pmatrix}(-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon+\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}\eta,\partial_x\varphi_{c_0})-\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})\\ (-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon+\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}\eta,\varphi_{c_0})-\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}(-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}v^\epsilon-\frac{1}{2}\partial_x g(\eta^\epsilon),\partial_x\varphi_{c_0})-\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0})\\ (-\frac{1}{2}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}v^\epsilon-\frac{1}{2}\partial_x g(\eta^\epsilon),\varphi_{c_0})-\epsilon(f(\eta^\epsilon),(1-\partial_x^2)\varphi_{c_0})\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.16}$$

与（4.27）、（4.28）和（4.29）类似，可得

$$|E^\epsilon-E|\le C\epsilon(1+\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4)+C\|v^\epsilon\|_{L^2}^2. \tag{4.17}$$

˜由于 $A_0-A^\epsilon=O\left(|c^\epsilon-c_0|+\|\epsilon\eta^\epsilon\|_{H^1}\right)=\epsilon O\left(\|\eta^\epsilon\|_{H^1}\right)$，由（4.15）-（4.17）可得

$$|y^\epsilon-y|+|a^\epsilon-a|\le C\|v^\epsilon\|_{L^2}^2+C\epsilon(1+\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4). \tag{4.18}$$

现在，我们估计（4.1）。与（4.15）类似，

$$\begin{pmatrix}\mu^\epsilon-\mu\\ b^\epsilon-b\end{pmatrix}=(\tilde{A}^\epsilon)^{-1}(A_0-\tilde{A}^\epsilon)A_0^{-1}D^\epsilon+A_0^{-1}(D^\epsilon-D).$$

由于

$$D^\epsilon - D = \begin{pmatrix} -(\sigma\partial_x(\varphi_{c^\epsilon} - \varphi_{c_0}) + \epsilon\sigma\eta_x^\epsilon, (1-\partial_x^2)\partial_x\varphi_{c_0}) \\ -(\sigma\partial_x(\varphi_{c^\epsilon} - \varphi_{c_0}) + \epsilon\sigma\eta_x^\epsilon, (1-\partial_x^2)\varphi_{c_0}) \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

由（3.14）及 H¨older 不等式可得,

$$|D^\epsilon - D| \le C\epsilon\|\eta^\epsilon\|_{H^1}. \tag{4.20}$$

因此，我们可以像（4.10）那样得到（4.1）。证明完毕。 □

定理 *1.2* 的证明。 由（1.22），可得

$$\partial_x\mathcal{L}_{c^\epsilon}\eta^\epsilon = \partial_x\mathcal{L}_{c_0}\eta^\epsilon + g(\eta^\epsilon), \tag{4.21}$$

其中

$$\begin{aligned} g(\eta^\epsilon) =& -2\partial_x[(c^\epsilon - c_0 - \varphi_{c^\epsilon} + \varphi_{c_0})\partial_x]\eta^\epsilon - 6\partial_x((\varphi_{c^\epsilon} - \varphi_{c_0})\eta^\epsilon) \\ &+ 2\partial_x(\partial_x^2(\varphi_{c^\epsilon} - \varphi_{c_0})\eta^\epsilon). \end{aligned} \tag{4.22}$$

设 $v^\epsilon = \eta^\epsilon - \eta$. 则由（3.1）、（1.25）和（4.21）

$$\begin{aligned} dv^\epsilon =& \frac{1}{2}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x\mathcal{L}_{c_0}v^\epsilon dt + \frac{1}{2}(1-\partial_x^2)^{-1}g(\eta^\epsilon)dt + (y^\epsilon\partial_x\varphi_{c^\epsilon} - y\partial_x\varphi_{c_0})dt \\ &- (a^\epsilon\partial_c\varphi_{c^\epsilon} - a\partial_c\varphi_{c_0})dt + \epsilon y^\epsilon\eta_x^\epsilon dt + \epsilon f(\eta^\epsilon)dt + h^\epsilon \diamond dL(t), \end{aligned} \tag{4.23}$$

其中

$$h^\epsilon = \sigma\partial_x(\varphi_{c^\epsilon} - \varphi_{c_0}) + \partial_x\varphi_{c^\epsilon}\mu^\epsilon - \partial_x\varphi_{c_0}\mu - \partial_c\varphi_{c^\epsilon}b^\epsilon + \partial_c\varphi_{c_0}b + \epsilon(\sigma\eta_x^\epsilon + \eta_x^\epsilon\mu^\epsilon).$$

由 H¨older 不等式,

$$\|h^\epsilon\|_{L^2} \le C(|c^\epsilon - c_0| + |b^\epsilon - b| + |\mu^\epsilon - \mu| + \epsilon\|\eta^\epsilon\|_{H^1}) := \gamma^\epsilon. \tag{4.24}$$

设 $\beta(t,x) = \Phi_2(t,z,v)$ 满足以下微分方程

$$\frac{d\beta}{dt} = zh^\epsilon, \quad \beta(0,x) = v(x).$$

然后 $\Phi_2(t, z, v) = v + z\int_0^t h^\epsilon(r)dr$。利用 H¨older 不等式和 (4.24)，可得

$$\begin{aligned} \|\beta(t,x)\|_{L^2}^2 =& \|\beta(0,x)\|_{L^2}^2 + 2z\int_0^t(\beta, h^\epsilon)ds \\ \le& \|v(x)\|_{L^2}^2 + C|z|\int_0^t \|\beta\|_{L^2}\|h^\epsilon\|_{L^2}ds \\ \le& \|v(x)\|_{L^2}^2 + C|z|\int_0^t \|\beta\|_{L^2}^2 + \|h^\epsilon\|_{L^2}^2 ds \\ \le& \|v(x)\|_{L^2}^2 + C|z|\gamma^{\epsilon 2} + C|z|\int_0^t \|\beta\|_{L^2}^2 ds. \end{aligned}$$

Gronwall 不等式表明

$$\|\beta(t,x)\|_{L^2}^2 = \|\Phi_2(t,z,v)\|_{L^2}^2 \leq (\|v(x)\|_{L^2}^2 + C|z|\gamma^{\epsilon 2})e^{C|z|t}. \tag{4.25}$$

应用伊藤公式引理2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\|v^\epsilon\|_{L^2}^2 =& \int_0^t (\frac{1}{2}(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x \mathcal{L}_{c_0} v^\epsilon, v^\epsilon)ds + \int_0^t (\frac{1}{2}(1-\partial_x^2)^{-1} g(\eta^\epsilon), v^\epsilon)ds \\
&+ \int_0^t ((y^\epsilon \partial_x \varphi_{c^\epsilon} - y\partial_x \varphi_{c_0}), v^\epsilon)ds - \int_0^t ((a^\epsilon \partial_c \varphi_{c^\epsilon} - a\partial_c \varphi_{c_0}), v^\epsilon)ds \\
&- \int_0^t (\epsilon y^\epsilon \partial_x \eta^\epsilon + \epsilon f(\eta^\epsilon), v^\epsilon)ds + \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [\|\Phi_2(1,z,v^\epsilon(s-))\|_{L^2}^2 - \|v^\epsilon(s-)\|_{L^2}^2]\tilde{\mathcal{N}}(ds,dz) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} [\|\Phi_2(1,z,v^\epsilon(s))\|_{L^2}^2 - \|v^\epsilon\|_{L^2}^2 - 2z(v^\epsilon, h^\epsilon)]\vartheta(dz)ds \\
=:& \sum_{i=1}^7 K_i.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

利用（1.22），可写为 $K_1 = K_{11} + K_{12}$其中

$$\begin{aligned}
K_{11} =& \int_0^t (-(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2((c_0 - \varphi_{c_0})\partial_x v^\epsilon), v^\epsilon)ds, \\
K_{12} =& \int_0^t (-3(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(\varphi_{c_0} v^\epsilon) + (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(\partial_x^2 \varphi_{c_0} v^\epsilon) \\
&+ (c_0 - 2k)(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x v^\epsilon, v^\epsilon)ds.
\end{aligned}$$

由于 $-(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2 = I - (1-\partial_x^2)^{-1}$，利用分部积分、柯西不等式和嵌入定理，我们有

$$\begin{aligned}
K_{11} =& \int_0^t ((c_0 - \varphi_{c_0})\partial_x v^\epsilon, v^\epsilon)ds - \int_0^t ((1-\partial_x^2)^{-1}((c_0 - \varphi_{c_0})\partial_x v^\epsilon), v^\epsilon)ds \\
=& -\frac{1}{2}\int_0^t ((c_0 - \partial_x \varphi_{c_0})v^\epsilon, v^\epsilon)ds - \int_0^t ((1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x((c_0 - \varphi_{c_0})v^\epsilon), v^\epsilon)ds \\
&+ \int_0^t ((1-\partial_x^2)^{-1}((c_0 - \partial_x \varphi_{c_0})v^\epsilon), v^\epsilon)ds \\
\leq& C(1 + \|\varphi_{c_0}\|_{H^2}) \int_0^t \|v^\epsilon\|_{L^2}^2 ds \\
\leq& C \int_0^t \|v^\epsilon\|_{L^2}^2 ds,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

and

$$K_{12} \leq C \int_0^t \|v^\epsilon\|_{L^2}^2 ds. \tag{4.28}$$

由（4.22）、分部积分、推论 3.1、H¨lder 不等式和 Young不等式，

$$K_2 \leq \int_0^t \|(c^\epsilon - c_0 - \varphi_{c^\epsilon} + \varphi_{c_0})\|_{L^\infty} \|\partial_x \eta^\epsilon\|_{L^2} \|v^\epsilon\|_{L^2} ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \|\varphi_{c^\epsilon}-\varphi_{c_0}\|_{L^\infty}\|\eta^\epsilon\|_{L^2}\|v^\epsilon\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|\partial_x^2\varphi_{c^\epsilon}-\partial_x^2\varphi_{c_0}\|_{L^\infty}\|\eta^\epsilon\|_{L^2}\|v^\epsilon\|_{L^2}ds\\
\leq& C\int_0^t |c^\epsilon-c_0|^2\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^2+\|v^\epsilon\|_{L^2}^2ds\\
\leq& C\epsilon(1+\sup_{t\in[0,T]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^6)+C\int_0^t\|v^\epsilon\|_{L^2}^2ds. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

由（4.10）可得

$$
K_3+K_4\leq C\int_0^t\|v^\epsilon\|_{L^2}^2ds+C\epsilon(1+\sup_{t\in[0,T]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4). \qquad (4.30)
$$

根据引理 3.3，H¨older 不等式和 Young不等式，

$$
\begin{aligned}
K_5\leq& C\epsilon^2\int_0^t(|y^\epsilon|^2\|\partial_x\eta^\epsilon\|_{L^2}^2+\|f(\eta^\epsilon)\|_{L^2}^2)ds+C\int_0^t\|v^\epsilon\|_{L^2}^2ds\\
\leq& C\epsilon^2\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4+C\int_0^t\|v^\epsilon\|_{L^2}^2ds. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

根据 BDG 不等式，式（4.1）和式（4.25），可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}K_6\\
\leq& C\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_\alpha^\epsilon}\left(\int_{\mathbb{Z}}[(\|v^\epsilon\|_{L^2}^2+C|z|\gamma^{\epsilon 2})e^{C|z|t}+\|v^\epsilon(s)\|_{L^2}^2]^2\vartheta(dz)\right)^{1/2}ds\\
\leq& C\mathbb{E}\gamma^{\epsilon 2}+C\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_\alpha^\epsilon}\|v^\epsilon(s)\|_{L^2}^2ds. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

同理，可得

$$
\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}K_7\leq C\mathbb{E}\gamma^{\epsilon 2}+C\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_\alpha^\epsilon}\|v^\epsilon(s)\|_{L^2}^2ds. \qquad (4.33)
$$

由式（4.26）–（4.33）可知

$$
\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|v^\epsilon\|_{L^2}^2\leq C\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_\alpha^\epsilon}\|v^\epsilon\|_{L^2}^2ds+C\epsilon(1+\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4)+C\mathbb{E}\gamma^{\epsilon 2},
$$

由此结合 Gronwall 不等式可得

$$
\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|v^\epsilon\|_{L^2}^2\leq C\epsilon(1+\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon]}\|\eta^\epsilon\|_{H^1}^4)e^{CT}+C\mathbb{E}\gamma^{\epsilon 2}. \qquad (4.34)
$$

然后，根据引理 4.1，可得 $v^\epsilon\to 0$ 当 $\epsilon\to 0$ 在空间$\mathbb{D}([0,T\wedge\tau_\alpha^\epsilon];\ L^2)$中依概率收敛。

□

致谢。我们感谢审稿人认真审阅稿件并提出宝贵意见，这些意见改进了本文。本研究

获得了中国国家自然科学基金项目（批准号：12171084、12071434、12071435）、浙江省自然科学基金项目（批准号：LZJWY22E060002）以及中央高校基本科研业务费项目（编号：2242022R10013）的部分资助。

References

[1] D. Applebaum，《L´évy 过程与随机微积分》，《高等数学剑桥研究》，第93卷，剑桥大学出版社，2004年。[2] S. Albeverio、Z. Brze´zniak、A. Daletskii，含对流型噪声的随机 Camassa-Holm 方程，《微分方程杂志》276（2021），404-432。[3] D. Applebaum，《L´évy 过程与随机微积分》，剑桥大学出版社，2009年。[4] L. Arnold，Hasselmann 计划再探：确定性气候模型中的随机性分析，载于：P. Imkeller、J. von Stroch（编），《随机气候模型》，载于：《概率进展》，第49卷，Birkh¨äuser，巴塞尔，2001年。[5] S. Attanasio、F. Flandoli，随机输运方程的重整化解与双线性乘性噪声正则化，《偏微分方程通讯》36（2011）1455-1474。[6] T. Bendall、C. J. Cotter、D. D. Holm，随机 Camassa-Holm 方程中峰子形成的观点，《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》477（2250）：20210224。[7] A. Bressan、A. Constantin，Camassa-Holm 方程的整体保守解，Arch. Ration. Mech. Anal. 183（2007）215-239。[8] A. Bressan、A. Constantin，Camassa-Holm 方程的整体耗散解，《分析与应用》5（2007）1-27。[9] Z. Brze´zniak、E. Hausenblas、P. A. Razafimandimby，由跳跃过程驱动的随机反应扩散方程。《势分析》49（1）（2018）131-201。[10] Z. Brze´zniak、U. Manna，由纯跳噪声驱动的随机 Landau-Lifshitz-Gilbert 方程的弱解，《数学物理通讯》（2019）https://doi.org/10.1007/s00220-019-03359-x。[11] Z. Brze´zniak、U. Manna、A. Panda，Marcus 典范形式下由纯跳噪声驱动的向列液晶鞅解，《微分方程杂志》266（10）（2019）6204-6283。[12] C. S. Cao、D.D. Holm、E.S. Titi，一类一维非线性浅水波模型的行波解，J. Dyn. Differ. Equ. 16（2004）167-178。[13] R. Camassa、D. D. Holm，具有尖峰孤子的可积浅水方程，

Phys. Rev. ( ) - 。

Lett. **71** 1993 1661 1664
[14] R. Camassa、D. D. Holm、J. Hyman，一种新的可积浅水方程，

Adv. Appl. Mech. ( ) - 。

31 1994 1 33
[15] A. Chechkin、I. Pavlyukevich，Marcus 与 Stratonovich 之比较：含跳跃噪声系统，《物理学杂志A：数学与理论》47（34）（2014）：342001。[16] Y. Chen、H. Gao、B. Guo，随机 Camassa-Holm 方程的适定性，

J. Differ. Eqns. ( ) - 。

253 2012 2353 2379
[17] Y. Chen、H. Gao，一类具有 L´évy 噪声的随机偏微分方程的适定性与大偏差，《微分方程杂志》263（2017）5216-5252。[18] Y. Chen、J. Duan、H. Gao，随机 Camassa-Holm 方程的整体适定性，《数学科学通讯》19（3）（2021）607-627。[19] Y. Chen、J. Duan、H. Gao，含纯跳噪声的随机 Camassa-Holm 方程的波破裂与中偏差，Physica D 424（2021）132944。[20] Y. Chen、X. Li，由纯跳噪声驱动的随机双分量 Camassa-Holm 系统，《微分方程杂志》339（2022）476-508。[21] R. Chen、D. Wang、H. Wang，由 L´évy 过程驱动的三维随机非齐次不可压 Navier-Stokes 方程的鞅解，《泛函分析杂志》，即将刊载，https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.01.004。[22] P. L. Chow，《随机偏微分方程》，Chapman and Hall/CRC，2007年。[23] G. Coclite、H. Holden、K. Karlsen，广义超弹性杆波动方程的整体弱解，《工业与应用数学学会数学分析杂志》37（2006）1044-1069。[24] G. M. Coclite 和 K. H. Karlsen，关于 Camassa-Holm 方程的一则注记，《微分方程杂志》259（6）2015，2158-2166。

[25] A. Constantin，Camassa-Holm 方程的哈密顿结构，Exposition. Math. 15（1）（1997）53-85。[26] A. Constantin，浅水方程的永久波与破碎波的存在性：一种几何方法，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50（2000）321-362。[27] A. Constantin，Camassa-Holm 方程的散射问题，Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 457（2001）953-970。[28] A. Constantin、J. Escher，周期拟线性双曲方程的适定性、整体存在性与爆破现象，《纯粹与应用数学通讯》51（1998）475-504。[29] A. Constantin、J. Escher，非线性非局部浅水方程的波破碎，Acta. Math. 181（1998）229-243。[30] A. Constantin、J. Escher，浅水方程的整体弱解，Indiana University Mathematics Journal，47（4）1998 1527-1545。[31] A. Constantin、J. Escher，浅水方程的爆破速率与破碎波爆破，Math. Z. 233（2000）75-91。[32] A. Constantin、V. Gerdjikov、R. Ivanov，Camassa-Holm 方程的逆散射变换，Inv. Probl. 22（2006）2197-2207。[33] A. Constantin、B. Kolev，惯性力学系统运动的几何方法，J. Phys. A Math. Gen. 35（2002）R51-R79。[34] A. Constantin、B. Kolev，圆的微分同胚群上的测地流，Comment. Math. Helv. 78（2003）787-804。[35] A. Constantin、D. Lannes，Camassa-Holm 方程与 Degasperis-Procesi 方程的流体动力学相关性，Arch. Ration. Mech. Anal. 192（2009）165-186。[36] A. Constantin、L. Molinet，浅水方程的整体弱解，《数学物理通讯》211（2000）45-61。[37] A. Constantin、W. Strauss，峰子的稳定性，《纯粹与应用数学通讯》53（2000）603-610。[38] A. Constantin、W. Strauss，Camassa-Holm孤子的稳定性，《非线性科学杂志》12（2002）415-422。[39] D. Crisan、D. D. Holm，随机 Camassa-Holm 方程的波破碎，Physica D 376- 377 2018 138 143 ( ) - R. Danchin，关于 Camassa-Holm 方程的几点注记，[40] Differential Integral Equations 14（2001）953-988。[41] G. Da Prato、J. Zabczyk，无限维空间中的随机方程，剑桥大学出版社，剑桥，1992年。[42] A. de Bouard、A. Debussche，随机 Korteweg-de Vries 方程中孤子的随机调制，Ann. I. H. Poincar´é-AN 24（2007）251-278。[43] A. de Bouard、R. Fukuizumi，玻色-爱因斯坦凝聚中产生的随机非线性薛定谔方程的调制分析，Asymptot. Anal. 63（2009）189-235。[44] R.J. DiPerna、P.L. Lions，常微分方程、输运理论与 Sobole夫空间，Invent. Math. 98（1989）511-547。[45] J. Duan、W. Wang，随机偏微分方程的有效动力学，爱思唯尔，2014年。[46] K. El Dika、L. Molinet，Camassa-Holm 方程中 H^1-局部化解的指数衰减与孤立波列的稳定性，Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 365（2007）2313-2331。 N K. El Dika、L. Molinet，多峰子的稳定性，Ann. Inst. H. Poincar[47] é Anal. Non Lin´éaire，18（2009），1517-1532。´B. Fuchssteiner、A. Fokas，辛结构、其 B[48] äklund 变换与遗传对称性，$\ddot{a}$(1)(1981) 47-66。 $Phys.\ D$ **4** B. Fuchssteiner，非线性方程对称性工具箱中的一些技巧：Camassa-Holm 方程的推广，Phys. D 95（1996），296-343。[49] L. Galimberti、H. Karlsen 和 P.H.C. Pang，含输运噪声的 Camassa-Holm 方程耗散解的整体存在性，arXiv: 2211.07046v1。[50] Z. Guo、X. Liu、L. Molinet、Z. Yin，临界空间中 Camassa-Holm 方程及相关方程的不适定性。《微分方程杂志》266（2019），1698-1707。[51] I. Gy[52] ongy、N.V. Krylov，关于半鞅随机方程。II. 巴拿赫空间中的伊藤公式，Stochastics 6（3-4）（1981/1982）153-173。¨H. Holden、X. Raynaud，Camassa-Holm 方程的整体保守多峰子解，J. Hyperbolic Differ. Equ. 4（2007）39-64。[53] H. Holden、X. Raynaud，Camassa-Holm 方程的整体保守解——拉格朗日视角，《偏微分方程通讯》32（2007）1511-1549。

[55] H. Holden, X. Raynaud，Camassa-Holm 方程的耗散解，《离散连续动力系统》24 (2009) 1047-1112。[56] H. Holden、K. H. Karlsen 和 P. H. Pang，具有梯度噪声的黏性 Camassa-Holm 方程的整体适定性，《离散连续动力系统》，即将出版。[57]D. D. Holm，随机流体动力学的变分原理，《英国皇家学会会刊 A 辑》471(2015) 20140963。[58] D. D. Holm、T. Tyranowski，随机孤子动力学的变分原理，Proc Roy Soc A 472(2016) 20150827。[59] K. Holly、M. Wiciak，紧致性方法在抽象非线性抛物方程中的应用，《数学选题》，克拉科夫理工大学，1995。[60] A. Jakubowski，非度量空间中子序列的几乎处处 Skorokhod 表示，Teor. Veroyatn. Primen. 42 (1) (1997) 209-216。[61] R. Johnson，Camassa-Holm、Korteweg-de Vries 及相关水波模型，J. Fluid Mech. 455 (2002) 63-82。[62] R.S. Johnson，关于 Camassa-Holm 方程的解，《英国皇家学会伦敦会刊 A 辑》459 (2003) 1687-1708。[63] O. Kallenberg，《现代概率论基础》，载于：《概率论及其应用》，Springer-Verlag，纽约，1997。[64] H. Kunita，基于 L´evy 过程的随机微分方程与微分同胚随机流，载于：《实分析与随机分析》，《数学趋势》，Birkh¨auser，波士顿，MA，2004，第 305-373 页。[65] Y. Li、P. Oliver，可积非线性色散模型波动方程的适定性与爆破解，J. Differential Equations 162 (2000) 27-63。[66] Y. Li、J. Zhang，Camassa-Holm 方程的多孤子解。《英国皇家学会伦敦会刊 A 辑》460 (2004) 2617-2627。[67] S. I. Marcus，由半鞅驱动的随机微分方程的建模与逼近，《随机学：概率与随机过程国际期刊》，4 245, 1981 3 223( ): - 。[68] Y. Matsuno，Camassa-Holm 方程多孤子解的参数表示，《日本物理学会杂志》74 (2005) 1983-1987。[69] G. Misiolek，作为 Bott-Virasoro 群上测地流的浅水方程，《几何物理杂志》24 (1998) 203-208。[70] E. Motyl，由补偿泊松随机测度驱动的二维和三维随机 Navier-Stokes 方程的鞅解，预印本 13。数学与计算机科学系，罗兹大学，2011。[71] E. Motyl，由 L´evy 噪声驱动的无界三维区域中的随机 Navier-Stokes 方程，《势分析》(2013) 38:863-912。[72] K. R. Parthasarathy，度量空间上的概率测度。载于：《概率与数理统计》，第 3 卷。Academic 出版社，纽约，1967。[73] M. Scheutzow，随机 Gronwall 引理，Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 16(2): 1350019, 4, 2013。[74] H. Tang，具有乘性噪声的 Camassa-Holm 方程的路径解，《工业与应用数学学会数学分析杂志》50(1), (2018) 1322-1366。[75] M. Wadati、Y. Akutsu，有阻尼和无阻尼的随机 Korteweg-de Vries 方程，《日本物理学会杂志》53 (1984) 3342-3350。[76] Z. Wang、Y. Liu，Camassa-Holm 方程光滑多孤子的稳定性，《变分法与偏微分方程》61 (2022) 第 2 期，36 页。[77] L. Xie 和 X. Zhang，具有跳跃和奇异系数的随机微分方程的遍历性。Ann. Inst. Henri Poincar'e Probab. Stat., 56(1): 175-229, 2020。[78] Z. Xin、P. Zhang，浅水方程弱解，Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000) 1411-1433。

1. Department of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, PR China

2. Department of Applied Mathematics and Department of Physics, Illinois Institute of Technology, Chicago, IL 60616, USA

3. School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211189, PR China