不规则区域上的三维 Stokes 和纳维方程无核边界积分方法

Zhongshu Zhao[a]、Haixia Dong[b,*]、WenjunYing[c]

[a]*School of Mathematical Sciences and Institute of Natural Sciences、 Shanghai Jiao Tong University、 Minhang、 Shanghai、200240、 P. R. China.*

[b]*Corresponding author. MOE-LCSM、 School of Mathematics and Statistics、 Hunan Normal University、 Changsha、 Hunan 410081、 P. R. China.*

[c]*School of Mathematical Sciences、 MOE-LSC and Institute of Natural Sciences、 Shanghai Jiao Tong University、 Minhang、 Shanghai 200240、 P. R. China.*

arXiv:2303.04992v1 [math.NA] 9 Mar 2023

摘要

针对三维不规则区域上的斯托克斯和纳维边值问题，提出了一种具有二阶精度的无核边界积分法。该方法在边界积分方程的框架下求解方程，其相应的离散形式具有良好的条件性，并采用广义最小残量法求解。该方法的一个显著特点是：边界积分方程中涉及的边界积分或体积分通过基于笛卡尔网格的方法间接计算，该方法包括采用 MAC 格式对相应的简单界面问题进行离散、修正离散线性系统以减小界面附近较大的局部截断误差，以及结合基于快速傅里叶变换的泊松求解器，利用共轭梯度法求解修正后的系统。对于奇异或超奇异边界积分，无需进行额外处理或使用特殊求积公式，并且完全消除了对积分核的格林函数解析表达式的依赖。数值结果表明，该基于笛卡尔网格的方法具有良好的效率和精度。

关键词：
斯托克斯问题，纳维问题，无核边界积分方法，不规则区域，标记元胞格式。

1. 引言

斯托克斯问题和纳维问题是不可压缩流体力学和固体力学中的两个重要模型，在工程和科学领域有着广泛应用，例如润滑理论 [32], 多孔介质流 [23], 组织工程 [40], 生物医学科学 [41] 等。因此，寻找简单、有效且稳健的数值格式来求解这些模型始终备受关注。

F对于定义在不规则或复杂几何上的此类问题，传统数值方法 hod

*通讯作者*Email address:* hxdong@hunnu.edu.cn (Haixia Dong)

例如采用贴体网格的有限元法（FEM），在高效网格生成以及准确求解相应方程组方面面临着重大挑战。尤其是在三维情形下或涉及移动边界时，网格生成和重新网格划分会变得困难且耗时。此外，另一个难点是如何为所得离散方程设计稳健且快速的求解器。尽管多重网格或区域分解等多层技术已拓展至非结构化网格，但它们尚未广泛应用于向量偏微分方程或斯托克斯方程这类不定算子问题。

此外，许多数值方法（如有限差分法）并不天然适用于非结构化网格。为避免这些缺点，基于笛卡尔网格的方法已得到广泛应用。这类方法中具有代表性的数值方法包括浸入边界法（IBM） [29], 浸入界面方法（IIM） [24], CutFEM [15], 扩展有限元法（XFEM）[7], Nitsche 扩展有限元法 [38], 浸入有限元法（IFEM） [16],匹配界面与边界法（MIB） [50] 等。为保持所需的精度，通常会采用平滑或正则化间断、修正离散格式以及修改逼近函数或基函数等技术。大多数基于笛卡尔网格的方法允许使用简单得多的网格，但在某些情况下，快速方法并不容易直接应用。

边界积分法（BIM）在椭圆问题中应用最为广泛，因为它们具有显著优势：能够处理复杂或不规则区域，并可利用快速算法大幅降低计算成本。其主要思想是将复杂或不规则区域嵌入一个更大的规则区域中，然后将边值问题重新表述为第二类 Fredholm 边界积分方程，从而只需对区域边界或曲面进行剖分，避免在不规则区域上生成高质量的贴体网格，并大幅降低解中未知量的维数。Youngren 和 Acrivos 于 [48], 首次报告了斯托克斯流边界积分表述的数值实现，此后，边界积分法在流体力学、弹性力学及其他应用领域发挥了重要作用 [12, 19, 30, 1, 49, 14, 4]。然而，这类方法在实际应用中仍存在若干潜在问题，阻碍了其广泛应用。例如，基本解的奇异性会增加计算近场相互作用时的计算成本和实现复杂度。尽管已有多种快速技术用于加速奇异积分的计算（例如，参见 [18, 3,21, 35] 及其中的参考文献），这仍是一个活跃的研究课题。此外，缺乏核函数的解析表达式，也使传统边界积分法仅适用于自由空间中满足远场辐射条件的常系数边值问题，或满足周期边界条件的矩形区域中的此类问题。

基于这些原因，一种不同的方法应运而生。这种方法称为无核边界积分法（KFBI），是传统边界积分方法的推广，尤其是 Mayo 等人 [26, 27, 28] 和 J.T.Beale 等人提出的基于网格的边界积分方法 [2]。该方法通过基于笛卡尔网格的方法间接计算边界积分和体积分，因此具有以下两个显著特点：i）无需格林函数的显式表达式或特殊求积公式来直接计算积分，尤其是近奇异或超奇异边界积分，从而在实践中彻底摆脱对核函数的依赖；ii）将边值问题重新表述为第二类弗雷德霍姆边界积分方程，有助于消除原问题的病态性，使克ry洛夫子空间迭代次数基本不受离散化参数或系统维数的影响。KFBI方法已发展成为一种适用于二维椭圆型偏微分方程的通用方法

[45, 46, 47, 44, 42, 43, 6], 但对于三维问题，目前仍在深入发展中。

本文将 KFBI 方法扩展到三维不规则区域中的斯托克斯方程和纳维方程求解。基于位势理论，狄利克雷问题的解可表示为体积分与含有未知密度的双层边界积分之和。这些积分通过一种基于笛卡尔网格的方法间接计算，主要包含两个步骤：（1）在扩展的立方区域内求解相应的等价但简单的界面问题；（2）通过多项式插值过程提取积分的边界值。在计算过程中，等价的斯托克斯和纳维界面问题采用修正 MAC 格式，在统一的混合形式下离散，并略作推广，允许连续性方程中含有压力项。所得线性方程组通过共轭梯度法结合基于快速傅里叶变换的泊松求解器高效求解。基于笛卡尔网格的间接计算技术具有诸多优势：处理奇异或超奇异边界积分时无需额外工作或专门的求积方法，也不需要积分核格林函数的解析表达式。

此外，KFBI方法不需要对曲面进行非结构化三角剖分。它只使用一些准均匀控制点来离散密度和边界积分方程；这些控制点由曲面与底层笛卡尔网格的交点表示。在三维空间中，这种控制点的选取使积分求值中的插值模板易于选择，并且在坐标平面上局部均匀。由于在三维空间中可以直接找到隐式曲面与笛卡尔网格线的交点，因此算法很容易实现。这些特性对于具有移动边界的时变问题尤为重要。数值结果表明，KFBI方法能够高效、准确地处理不规则区域上的不可压缩流体和固体力学问题。

本文其余部分安排如下。第2节分别介绍斯托克斯问题和纳维问题。第3节阐述KFBI算法的主要思想。第4节介绍积分求值的关键实现细节。第5节给出数值结果，以验证所提方法的有效性。第6节总结全文并作进一步讨论。

2. 边值问题

设 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，该区域通常不规则且复杂。本文研究的稳态不可压缩斯托克斯方程为

$$-\mu_s \Delta \mathbf{u}_s + \nabla p_s = \mathbf{f}_s, \quad \text{in } \Omega, \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0, \quad \text{in } \Omega, \tag{1b}$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{g}_s, \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{1c}$$

其中，$\mathbf{u}_s = (u_s^{(1)}, u_s^{(2)}, u_s^{(3)})^T$ 表示速度向量，p_s 表示压力，μ_s 表示流体黏度系数，$\mathbf{f}_s = (f_{(1)s}, f_s^{(2)}, f_{(3)s})^T$表示外力，$\mathbf{g}_s = (g_s^{(1)}, g_s^{(2)}, g_s^{(3)})^T$是边界 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{u}_s$ 的狄利克雷型边界条件。假设 μ_s 是 Ω 上的常函数，且$\mathbf{g}_s$ 满足相容条件

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

其中，$\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。这里也考虑三维纳维方程，其控制方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_e) + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, \tag{2a}$$
$$\mathbf{u}_e = \mathbf{g}_e, \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{2b}$$

其中 $\mathbf{u}_e = (u_e^{(1)}, u_e^{(2)}, u_e^{(3)})^T$为位移场，$\mathbf{f}_e = (f_{(1)e}, f_{(2)e}, f_e^{(3)})^T$为给定的体力，$\mathbf{g}_e = (g_e^{(1)}, g_e^{(2)}, g_e^{(3)})^T$表示边界上的位移。应力张量为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_e) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}_e \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_e), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_e) = \frac{1}{2}\big(\nabla \mathbf{u}_e + (\nabla \mathbf{u}_e)^T\big)$ 为线性应变，$\mathbf{I}$为单位矩阵。此外，λ 和 μ 表示 Lam´e 系数，满足

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \text{and} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

其中 E 为杨氏模量， ν 为泊松比。将应变张量 (3) 代入平衡方程 (2a)，三维纳维问题可重新表述为一个偏微分方程组，其中未知函数为位移场 $\mathbf{u}_e$:

$$-\mu \Delta \mathbf{u}_e - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_e) = \mathbf{f}_e, \ \text{in } \Omega. \tag{4}$$

3. 无核边界积分方法

本节详细介绍基于笛卡尔网格的KFBI方法，该方法用于求解三维不规则区域中的斯托克斯问题和纳维问题。

为此，将不规则区域 Ω 嵌入较大的立方体 $\mathcal{B}$ 中，从而使区域边界成为一个界面，将该立方体分成两个不连通的子域 Ω 和 Ω^c。¯这里，$\Omega^c = \mathcal{B} \backslash \Omega$ 是 $\mathcal{B}$ 中 Ω 的补集。在本文余下部分，将边界 $\partial\Omega$ 重新定义为 Γ。接下来，分别将问题 (1) 和 (2) 改写为边界积分方程。令 $(\mathbf{G_v}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ G_q(\mathbf{x},\mathbf{y}))$ 为与斯托克斯方程 (1) 相关且满足以下条件的格林函数对:

$$\begin{aligned} -\mu_s \Delta \mathbf{G}_\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \nabla G_q(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \mathbf{I}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \text{in } \mathcal{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{G}_\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0, \quad \text{in } \mathcal{B}, \\ \mathbf{G}_\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \mathbf{0}, \quad \text{on } \partial\mathcal{B}, \end{aligned} \tag{5}$$

对每个固定的 $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$。令 $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为与纳维系统 (2) 相关且满足以下条件的格林函数:

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - (\lambda+\mu)\nabla\big(\nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big) &= \mathbf{I}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \text{in } \mathcal{B}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \mathbf{0}, \quad \text{on } \partial\mathcal{B}, \end{aligned} \tag{6}$$

对于每个固定的 $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$。这里，矩阵 $\mathbf{I}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的单位矩阵， $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 是三维狄拉克δ函数。所有微分均相对于变量 $\mathbf{x}$进行。需要特别指出的是，在有界区域 中定义的格林函数对 $(\mathbf{G_v}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ G_q(\mathbf{x},\mathbf{y}))$ 和格林函数 $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$

与自由空间 [17] 中的基本解不同。它们的表达式通常无法通过解析方式得知，但其存在性是有保证的。

根据格林函数对（$\mathbf{G_v}$，G_q），斯托克斯问题（1）的解 $\mathbf{u}_s(\mathbf{x})$ 和 $p_s(\mathbf{x})$ 可表示为双层势与体积分之和

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}_s(\mathbf{x}) - \mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{7}$$

$$p_s(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_q\mathbf{f}_s(\mathbf{x}) - \mathcal{M}_q\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{8}$$

其中密度 $\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x})$ 满足边界积分方程

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}) - \mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_s(\mathbf{x}) - \mathcal{G}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}_s(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{9}$$

这里，双层边界积分 $\mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_s$, $\mathcal{M}_q\boldsymbol{\varphi}_s$ 以及体积分 $\mathcal{G}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}_s$, $\mathcal{G}_q\mathbf{f}_s$ 分别定义为

$$(\mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_s)(\mathbf{x}) = \int_\Gamma T_s(\mathbf{G_v}, G_q)\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}}, \qquad (\mathcal{G}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}_s)(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{G_v}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{f}_s(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

$$(\mathcal{M}_q\boldsymbol{\varphi}_s)(\mathbf{x}) = 2\int_\Gamma \frac{\partial G_q(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n_y}}\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}}, \quad (\mathcal{G}_q\mathbf{f}_s)(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_q(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{f}_s(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

其中牵引力 $\mathbf{T}_s(\mathbf{u}_s, p_s) = -p_s\mathbf{n} + \mu(\nabla\mathbf{u}_s + \nabla\mathbf{u}_s^T)\mathbf{n}$。类似地，根据格林函数$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，纳维方程（2）的解 $\mathbf{u}_e$ 也可表示为双层势与体积分之和

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{x}) = \mathcal{G}\mathbf{f}_e(\mathbf{x}) - \mathcal{M}\boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{10}$$

其中密度 $\boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{x})$ 满足边界积分方程

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{x}) - \mathcal{M}\boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_e(\mathbf{x}) - \mathcal{G}\mathbf{f}_e(\mathbf{x}). \tag{11}$$

这里, 双层边界积分 $\mathcal{M}\boldsymbol{\varphi}_e$ 和体积分 $\mathcal{G}\mathbf{f}_e$ 分别定义如下 by

$$(\mathcal{M}\boldsymbol{\varphi}_e)(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \mathbf{T}_{\mathbf{y}}\boldsymbol{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}}, \qquad (\mathcal{G}\mathbf{f}_e)(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{f}_e(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \tag{12}$$

其中牵引力定义为

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_e) = \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}_e)\mathbf{n} + 2\mu\frac{\partial\mathbf{u}_e}{\partial\mathbf{n}} + \mu\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{u}_e).$$

需要指出的是，$\mathbf{y}$ 这个下标在 $\mathbf{T_yG(x,y)}$ 中表示式 (12) 中相对于变量 $\mathbf{y}$ 的求导。注意，边界积分方程 (9) 和 (11) 是第二类弗雷德霍姆积分方程[22], ，这意味着对于每组 $\mathbf{g}_s/\mathbf{g}_e$ 和初始数据 $\boldsymbol{\varphi}_s^0/\boldsymbol{\varphi}_e^0$，广义最小残量（GMRES）方法[31], 等迭代方法，甚至简单的理查森迭代，都能收敛到方程 (9) 或 (11) 的唯一解。

迭代收敛后，根据表示公式（7）和（10），可以分别得到$\mathbf{u}_s$ 或$\mathbf{u}_e$ 的近似值。由于格林函数对（$\mathbf{G_v}$，G_q）和格林函数$\mathbf{G}$ 定义在有界区域 $\mathcal{B}$内，其解析表达式无法获得，因此

不可能直接计算边界积分方程（9）和（11）中涉及的边界积分和体积分。

因此，这里采用一种基于笛卡尔网格的 KFBI 方法，通过间接计算积分来避免求知格林函数的解析表达式。KFBI 的主要思路包括三个步骤：1）将不规则区域 Ω 嵌入更大的长方体区域 $\mathcal{B}$中，这样便于生成均匀笛卡尔网格，从而有效避免为复杂区域生成非结构化网格。随后，将边值问题 (1)-(2) 重新表述为第二类 Fredholm 边界积分方程 (9) 和 (11)。2）采用基于笛卡尔网格的方法间接计算边界积分方程中出现的积分，包括：用 MAC 格式离散相应的界面问题；修正已建立的线性方程组，以减小界面附近较大的局部截断误差；结合基于快速傅里叶变换的泊松求解器，使用共轭梯度法求解修正后的系统；通过二次多项式插值近似界面上的积分值或其法向通量。3）边界积分方程具有良好的条件数，其相应的离散形式可通过 Krylov 子空间方法（例如 GMRES 方法）高效求解，且迭代次数与网格尺寸无关。最后，算法总结如下：

算法 1 KFBI方法：三维 Stokes 与纳维方程。

1: 寻找准均匀控制点，以离散边界积分方程。

- 设置五个大小为 h 、覆盖更大长方体区域 $\mathcal{B}$ 的不同均匀交错网格。
- 根据界面将每个网格点标记为内部点或外部点。
- 识别均匀网格中的规则网格节点和非规则网格节点。
- 找出边界与网格线的交点，并计算边界曲线在这些交点处的切向和法向单位方向。

2: 在边界处计算边界积分或体积分 Γ。

- 通过引入辅助未知压力，将纳维方程和斯托克斯方程的等价界面问题写成统一形式。
- 采用基于有限差分的 MAC 格式离散等价界面问题。
- 计算交点处解及其偏导数的跳跃。
- 修正非规则网格节点处 MAC 格式的右端项。
- 结合共轭梯度法和基于快速傅里叶变换的泊松求解器，求解修正线性系统。
- 通过二次多项式插值提取交点处的边界数据。

3: 使用 *KFBI*方法进行 *GMRES* 迭代。

- 按照步骤 2 计算体积分边界数据。
- 以平凡的零初始猜测开始 GMRES 迭代，并设置容差。
- 按照步骤 2 计算双层积分边界数据。
- 通过 GMRES 迭代更新未知密度 φ_s ，直到某个范数下的残差小于规定的容差。

需要指出的是，用于表示边界并离散化边界积分方程的点选取为

边界曲面与底层交错网格网格线的交点。这种方法最初由 Wenjun Ying 和 Wei-Cheng Wang 在 [46] 中提出。采用这种技术，离散点易于定位。此外，这些点分为主点和次点，在求解边界积分方程时，每个点都与一项边界数据相关联，因此易于为边界插值找到紧凑且局部均匀的插值模板。此外，额外的均衡过程进一步确保了计算边界切向导数时数值微分的稳定性和效率。详细介绍请参阅文献 [46]。

上述算法的主要挑战在于计算边界积分方程中的积分，因为格林函数可能没有解析表达式。为此，每个边界积分和体积分都通过插值基于结构网格的解来计算，从而避免直接采用数值求积对积分进行离散化，并在实现中彻底消除对格林函数解析表达式的依赖。后续章节将介绍计算细节。

4. 边界积分或体积分的计算

本节介绍一种基于笛卡尔网格的方法，用于间接计算边界积分和体积分。在此方法中，不再需要格林函数的解析表达式，而是通过以下步骤间接计算积分：

1). 将边界积分或体积分转化为等价界面问题；2). 在笛卡尔网格上求解该等价的简单界面问题；
3). 对笛卡尔网格上的离散解进行插值，从而提取界面离散点处的积分值。

4.1. 等价的简单界面问题

下面分别说明体积分和双层边界积分所对应的等价简单界面问题。令$\mathbf{v}^+(\mathbf{x})$和$\mathbf{v}^-(\mathbf{x})$分别为$\mathbf{v}(\mathbf{x})$在子域 Ω 和 Ω^c上的限制。对于$\mathbf{x}\in\Gamma$，$\mathbf{v}^+(\mathbf{x})$和$\mathbf{v}^-(\mathbf{s})$分别表示$\mathbf{v}(\mathbf{x})$从区域边界相应一侧趋近时的极限值。界面 Γ 两侧的跳跃记为

$$[\![\mathbf{v}(\mathbf{x})]\!] = \mathbf{v}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^-(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Gamma.$$

命题4.1. 对于定义在 Ω 上的给定函数$\mathbf{f}_s$，体积分$\mathbf{u} = (\mathcal{G}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}_s)(\mathbf{x})$和$p = (\mathcal{G}_q\mathbf{f}_s)(\mathbf{x})$是下列简单界面问题的广义解对

$$\begin{aligned} -\mu_s\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \widetilde{\mathbf{f}_s} = \begin{cases} \mathbf{f}_s, & \mathbf{x}\in\Omega, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x}\in\Omega^c, \end{cases} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x}\in\Omega\cup\Omega^c, \\ [\![\mathbf{u}]\!] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\in\Gamma, \\ [\![\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u},p)\mathbf{n}]\!] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\in\Gamma, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\in\partial\mathcal{B}. \end{aligned} \tag{13}$$

上述界面条件意味着体势$\mathbf{u}$ 及其应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}\ p)\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + \mu_s(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T))\mathbf{n}$具有连续性。

命题 4.2. 对于给定的定义在 Γ 上的密度函数 $\boldsymbol{\varphi}_s$，双层边界积分$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -(\mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_s)(\mathbf{x})$ 和 $q = -(\mathcal{M}_q\boldsymbol{\varphi}_s)(\mathbf{x})$ 是以下简单界面问题的广义解对

$$\begin{aligned} -\mu_s\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c, \\ [\![\mathbf{u}]\!] &= \boldsymbol{\varphi}_s, \ \mathbf{x} \in \Gamma, \\ [\![\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}]\!] &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}. \end{aligned} \tag{14}$$

应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}\ p)\mathbf{n}$ 在界面 Γ 两侧连续，而双层势 $\mathbf{u}$ 存在跳跃 $\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x})$，即

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_s - \mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathbf{u}^- &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_s - \mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned}$$

命题 4.3. 对于定义在 Ω 上的给定函数 $\mathbf{f}_e$，体积分 $\mathbf{u} = (\mathcal{G}\mathbf{f}_e)(\mathbf{x})$ 是以下简单界面问题的广义解

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = \widetilde{\mathbf{f}}_e &:= \begin{cases} \mathbf{f}_e(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega^c, \end{cases} \\ [\![\mathbf{u}]\!] &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ [\![\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}]\!] &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}. \end{aligned} \tag{15}$$

上述界面条件意味着体势$\mathbf{u}$ 及其牵引力 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}$具有连续性。

命题 4.4. 对于定义在 Γ 上的给定密度函数 $\boldsymbol{\varphi}_e$，双层边界积分$\mathbf{u} = -\mathcal{M}\boldsymbol{\varphi}_e$ 是以下简单界面问题的解

$$-\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c, \tag{16a}$$
$$[\![\mathbf{u}]\!] = \boldsymbol{\varphi}_e, \ \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{16b}$$
$$[\![\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}]\!] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{16c}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}. \tag{16d}$$

双层势$\mathbf{u}$ 的间断性质意味着

$$\mathbf{u}^+ = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_e - \mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_e, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{17a}$$
$$\mathbf{u}^- = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_e - \mathcal{M}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\varphi}_e, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{17b}$$

注 4.1. 要计算(9)中的体积分或边界积分，可以转而求解界面问题(13) 或(14)，并将其改写为如下统一形式:

$$-\mu_s\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \widetilde{\mathbf{f}}_s, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c, \tag{18a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c, \tag{18b}$$
$$[\![\mathbf{u}]\!] = \boldsymbol{\varphi}_s, \ \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{18c}$$
$$[\![\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}]\!] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{18d}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}. \tag{18e}$$

根据问题的线性性，界面问题(18) 的解是前两个界面问题(13) 和(14)的解之和。同理，要计算(11) 中的体积分或边界积分，可以转而求解界面问题(15) 或(16)，并将其改写为如下统一形式:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) &= \tilde{\mathbf{f}}_e, \ \ \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega_c, \\ [\![\mathbf{u}]\!] &= \boldsymbol{\varphi}_e, \ \mathbf{x} \in \Gamma, \\ [\![\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}]\!] &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}. \end{aligned} \tag{19}$$

通过引入一个额外的未知量 $p = -(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}$，上述界面问题 (19) 可改写为以下方程组，

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \tilde{\mathbf{f}}_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} + cp &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c, \\ [\![\mathbf{u}]\!] &= \boldsymbol{\varphi}_e, \ \mathbf{x} \in \Gamma, \\ [\![\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}]\!] &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}, \end{aligned} \tag{20}$$

其中 $c = 1/(\lambda+\mu)$。注意，方程组 (20) 对应于斯托克斯系统 (18)。因此，下一小节将主要讨论问题 (18)的数值求解。

4.2. 改进的标记与单元法

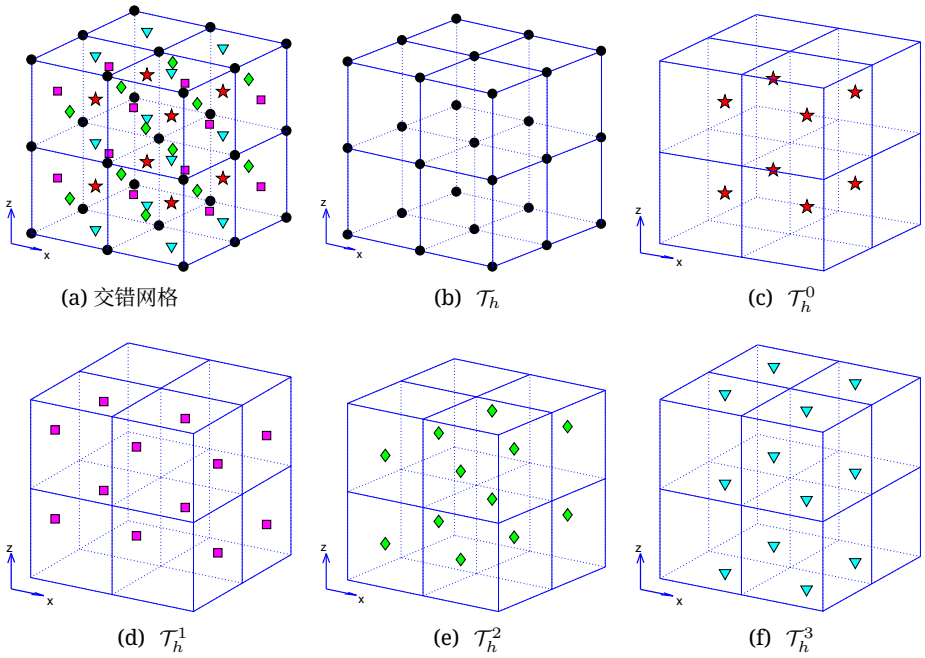
由于界面问题 (18) 中不存在不连续系数，文献中已有求解该问题的数值方法 [20, 34, 39]。本文将考虑一种基于交错网格、结合精细修正技术的有限差分法，可视为将 [9]推广至三维情形。为简化表述，在不致混淆的情况下，省略 (18) 中的下标“s”。计算区域 $\mathcal{B}$ 取为单位立方体，即 $\mathcal{B} \equiv [0,1]^3$。假设定义域 $\mathcal{B}$ 被划分为 $N \times N \times N$ 个均匀笛卡尔网格，网格参数为 $h = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = z_{k+1} - z_k = 1/N$。对于整数 $i, j, k, 0 \le i \le N, 0 \le j \le N, 0 \le k \le N$, 定义

$$x_{i-1/2} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \qquad y_{j-1/2} = \frac{y_j + y_{j-1}}{2}, \qquad z_{k-1/2} = \frac{z_k + z_{k-1}}{2}.$$

此外，引入五种不同的网格集（示意见图 1）：顶点中心网格集$\mathcal{T}_h$、单元中心网格集 $\mathcal{T}_h^0$、YZ平面中心网格集 $\mathcal{T}_h^1$、XZ平面中心网格集 $\mathcal{T}_h^2$

以及 XY 平面中心网格集 $\mathcal{T}_h^3$，它们分别定义为

$$\mathcal{T}_h \equiv \left\{ (x_i, y_j, z_k) \,|\, i = 0, \cdots, N,\ j = 0, \cdots, N,\ k = 0, \cdots, N \right\},$$
$$\mathcal{T}_h^0 \equiv \left\{ (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}) \,|\, i = 1, \cdots, N,\ j = 1, \cdots, N,\ k = 1, \cdots, N \right\},$$
$$\mathcal{T}_h^1 \equiv \left\{ (x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}) \,|\, i = 0, \cdots, N,\ j = 0, \cdots, N+1,\ k = 0, \cdots, N+1 \right\},$$
$$\mathcal{T}_h^2 \equiv \left\{ (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j, z_{k-\frac{1}{2}}) \,|\, i = 0, \cdots, N+1,\ j = 0, \cdots, N,\ k = 0, \cdots, N+1 \right\},$$
$$\mathcal{T}_h^3 \equiv \left\{ (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k) \,|\, i = 0, \cdots, N+1,\ j = 0, \cdots, N+1,\ k = 0, \cdots, N \right\}.$$



(a) 交错网格　(b) $\mathcal{T}_h$　(c) $\mathcal{T}_h^0$

(d) $\mathcal{T}_h^1$　(e) $\mathcal{T}_h^2$　(f) $\mathcal{T}_h^3$

图1：五种不同网格集合的示意图。

如果某个网格点 $(x_l,\ y_m,\ z_n) \in \mathcal{T}_h^I,\ I = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$ 在该点处对应的有限差分模板跨越界面 Γ, 则称其为非规则点；否则称其为规则点。此处$l,\ m$和 n可取值为 $i,\ i-\frac{1}{2},\ j,\ j-\frac{1}{2}$以及 $k,\ k-\frac{1}{2}$。

对于函数 $v(x,\ y,\ z)$，定义微分算子

$$\delta_{h,1}^+ v_{l,m,n} = h^{-1}(v_{l+1,m,n} - v_{l,m,n}), \qquad \delta_{h,1}^- v_{l,m,n} = h^{-1}(v_{l,m,n} - v_{l-1,m,n}),$$
$$\delta_{h,2}^+ v_{l,m,n} = h^{-1}(v_{l,m+1,n} - v_{l,m,n}), \qquad \delta_{h,2}^- v_{l,m,n} = h^{-1}(v_{l,m,n} - v_{l,m-1,n}),$$
$$\delta_{h,3}^+ v_{l,m,n} = h^{-1}(v_{l,m,n+1} - v_{l,m,n}), \qquad \delta_{h,3}^- v_{l,m,n} = h^{-1}(v_{l,m,n} - v_{l,m,n-1}),$$

以及离散拉普拉斯算子

$$\Delta_h v_{l,m,n} = \delta_{h,1}^+ \delta_{h,1}^- v_{l,m,n} + \delta_{h,2}^+ \delta_{h,2}^- v_{l,m,n} + \delta_{h,3}^+ \delta_{h,3}^- v_{l,m,n},$$

其中 $v_{l,\ m,\ n}$ 表示 $v(x_l,\ \ y_m,\ \ z_n)$。

将界面问题 (18) 的精确解记为

$$(\mathbf{u},p)=\Big(u^{(1)}(x_i,y_{j-\frac{1}{2}},z_{k-\frac{1}{2}}),u^{(2)}(x_{i-\frac{1}{2}},y_j,z_{k-\frac{1}{2}}),u^{(3)}(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}},z_k),\\ p(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}},z_{k-\frac{1}{2}})\Big),$$

其有限差分近似记为

$$(\mathbf{u}_h,p_h)=\big(u^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}},u^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}},u^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k},p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}\big).$$

为简化表述，将 $I^{(1)}$、 $I^{(2)}$、 $I^{(3)}$、 $I^{(4)}$ 记为计算网格节点的指标集合，其定义如下:

$$\begin{aligned}
I^{(1)}&=\{(i,j,k)|\,i=0,1,...,N-1,\ j=1,2,...,N,\ k=1,2,...,N\},\\
I^{(2)}&=\{(i,j,k)|\,i=1,2,...,N,\ j=0,1,...,N-1,\ k=1,2,...,N\},\\
I^{(3)}&=\{(i,j,k)|\,i=1,2,...,N,\ j=1,2,...,N,\ k=0,1,...,N-1\},\\
I^{(4)}&=\{(i,j,k)|\,i=1,2,...,N,\ j=1,2,...,N,\ k=1,2,...,N\}.
\end{aligned}$$

在规则网格点处，斯托克斯方程的二阶 MAC 格式离散化如下:

$$\begin{aligned}
-\mu\Delta_h u^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+\delta^+_{h,1}\,p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}&=\tilde f^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}},\qquad (i,j,k)\in I^{(1)},\\
-\mu\Delta_h u^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}+\delta^+_{h,2}\,p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}&=\tilde f^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}},\qquad (i,j,k)\in I^{(2)},\\
-\mu\Delta_h u^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}+\delta^+_{h,3}\,p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}&=\tilde f^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k},\qquad (i,j,k)\in I^{(3)},\\
\delta^-_{h,1}u^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+\delta^-_{h,2}u^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}+\delta^-_{h,3}u^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}&=0,\qquad (i,j,k)\in I^{(4)}.
\end{aligned}$$

然而，由于界面 Γ的存在，上述 MAC 格式在非规则点处具有较大的局部截断误差。为了将全局精度提高到二阶，需要在方程组的右端项中添加适当的修正项，从而不改变系数矩阵。修正 MAC 格式的形式为

$$\begin{aligned}
-\mu\Delta_h u^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+\delta^+_{h,1}\,p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}&=f^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}},\qquad (i,j,k)\in I^{(1)},\\
-\mu\Delta_h u^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}+\delta^+_{h,2}\,p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}&=f^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}},\qquad (i,j,k)\in I^{(2)},\\
-\mu\Delta_h u^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}+\delta^+_{h,3}\,p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}&=f^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k},\qquad (i,j,k)\in I^{(3)},\\
\delta^-_{h,1}u^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+\delta^-_{h,2}u^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}+\delta^-_{h,3}u^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}&=g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}\qquad (i,j,k)\in I^{(4)},
\end{aligned}\tag{21}$$

with

$$f^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = \tilde{f}^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + C\{\mu\Delta u^{(1)}\}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + C\{p_x\}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}},$$

$$f^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} = \tilde{f}^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + C\{\mu\Delta u^{(2)}\}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + C\{p_y\}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}},$$

$$f^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \tilde{f}^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + C\{\mu\Delta u^{(3)}\}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + C\{p_z\}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k},$$

$$g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = C\{u^{(1)}_x\}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + C\{u^{(2)}_y\}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + C\{u^{(3)}_z\}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}.$$

需要指出的是，修正项是泰勒展开中若干个低阶项之和，且仅在非规则点处非零。它们可以将界面附近的局部截断误差改善到至少一阶精度。正如下一节将要看到的，这些修正项可以根据解的跳跃及其偏导数计算得出。事实上，对界面条件求导并结合不可压缩条件，也可以计算出所有跳跃条件。

令 $\mathbf{\Delta}_h = \mathrm{diag}(\Delta_h,\ \Delta_h,\ \Delta_h)$ 表示标准中心差分算子，$G_h^{\mathrm{MAC}} = (\delta^+_{h,1},\ \delta^+_{h,2},\ \delta^+_{h,3})^T$，$D_h^{\mathrm{MAC}} = (\delta^-_{h,1},\ \delta^-_{h,2},\ \delta^-_{h,3})$ 表示 MAC 梯度或散度算子，则 MAC 格式可改写为如下形式的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} -\mu\mathbf{\Delta}_h & G_h^{\mathrm{MAC}} \\ D_h^{\mathrm{MAC}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{pmatrix}. \tag{22}$$

众所周知，所得系统是一个鞍点问题，必须使用迭代方法求解，通常采用广义最小残量法等 Krylov 子空间方法 [31]。针对这类系统，人们提出了多种预条件子，主要包括区域分解方法 [25, 8], 块预条件子 [10, 13, 5] 和多重网格方法 [36, 11, 37]。本文将我们先前工作 [9]中引入的共轭梯度（CG）方法与基于快速傅里叶变换的泊松求解器扩展到当前三维情形，可将其写为

i) 由于问题在于压力的唯一性 p_h，因此引入一个辅助变量 λ_h 和一个参数α ，使 λ_h 等于压力变量在定义域上的平均值，以确保该系统的可解性。于是，线性方程组可写为

$$\begin{pmatrix} -\mu\mathbf{\Delta}_h & G_h^{\mathrm{MAC}} & 0 \\ D_h^{\mathrm{MAC}} & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

ii) 将$\mathbf{u}_h = (-\Delta_h^{-1}\,\mathbf{f}\, + \Delta_h^{-1} G_h^{\mathrm{MAC}} p_h)/\mu$ 代入（23），得到该系统

$$(\frac{1}{\mu} D_h^{\mathrm{MAC}} \mathbf{\Delta}_h^{-1} G_h^{\mathrm{MAC}} + \frac{1}{\alpha}\gamma\gamma^T) p_h = \frac{1}{\mu} D_h^{\mathrm{MAC}} \Delta_h^{-1}\mathbf{f} + g,$$

该系统可通过共轭梯度法高效求解。此外，Δ_h^{-1} 的计算可转化为求解泊松方程。因此，每次迭代均可使用基于 FFT 的泊松快速求解器。

iii) 此外，利用上述系统计算得到的 p_h ，可由下式求解速度$\mathbf{u}_h$

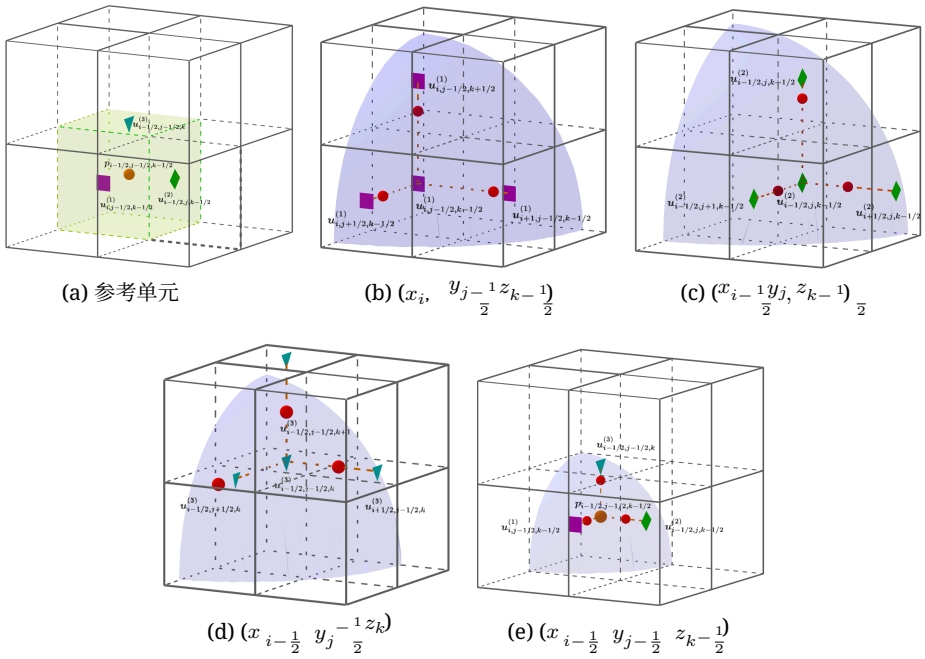
$$-\mu\mathbf{\Delta}_h\mathbf{u}_h = \mathbf{f} - G_h^{\mathrm{MAC}} p_h,$$

再次使用基于快速傅里叶变换的泊松求解器。

值得注意的是，当前方法未涉及迭代方法的预条件子。鼓励将结合预条件子的高效算法应用于时变问题，这将在未来的工作中报告。

4.3. MAC 格式的修正

再次说明，速度及其应力张量在界面 Γ 处的不连续，导致有限差分MAC格式 (21) 在非规则网格节点处的局部截断误差过大；若不作任何修正，离散Stokes界面问题的解将不准确。为达到所需的二阶精度，我们在离散系统 (21) 的右端添加了一些修正项。本小节将详细推导这些修正项。这里采用的修正技术与 [46]中所述的方法类似，不同之处在于所用网格为交错网格，且压力项 p 也需要修正。为简单起见，本文仅示意 x 轴右侧的情况，对侧的修正项可利用对称性得到。此外，y 或 z 方向的修正项也可用同样的方法得到。假设图 2(a) 的网格单元上有一个非规则点，则修正项计算如下：



(a) 参考单元　(b) $(x_i,\ y_{j-\frac{1}{2}}z_{k-\frac{1}{2}})$　(c) $(x_{i-\frac{1}{2}}y_j, z_{k-\frac{1}{2}})$

(d) $(x_{i-\frac{1}{2}}\ y_j^{-\frac{1}{2}}z_k)$　(e) $(x_{i-\frac{1}{2}}\ y_{j-\frac{1}{2}}\ z_{k-\frac{1}{2}})$

图 2：非规则点示意图。

1. 假设$(x_i,\ y_{j-\frac{1}{2}},\ z_{k-\frac{1}{2}})$ 是一个非规则点，示意见图2(b)。在 x 方向上，记为 $\xi_{u^{(1)}} = x_{i+1} - r$。若 Γ 在 $(x_i,\ y_{j-\frac{1}{2}},\ z_{k-\frac{1}{2}})$ 和 $(x_{i+1},\ y_{j-\frac{1}{2}},\ z_{k-\frac{1}{2}})$ 两点组成的网格线段上与该线段相交于 $(r,\ y_{j-\frac{1}{2}},\ z_{k-\frac{1}{2}})$，且 $x_i < r < x_{i+1}$，则修正项可由泰勒展开计算为

$$C\{\mu\Delta u^{(1)}\}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{h^2}\left(\llbracket u^{(1)}\rrbracket + \xi_{u^{(1)}}\llbracket u_x^{(1)}\rrbracket + \frac{1}{2}\xi_{u^{(1)}}^2\llbracket u_{xx}^{(1)}\rrbracket\right),\quad \text{if } (x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}) \in \Omega.$$

2. 假设($x_{i-\frac{1}{2}}$, y_j, $z_{k-\frac{1}{2}}$) 是一个非规则点，示意见图2(*c*)。在 x 方向上，记为 $\xi_{u^{(2)}} = x_{i+\frac{1}{2}} - r$。若 Γ 在 ($x_{i-\frac{1}{2}}$, y_j, $z_{k-\frac{1}{2}}$) 和 ($x_{i+\frac{1}{2}}$, y_j, $z_{k-\frac{1}{2}}$) 两点组成的网格线段上与该线段相交于 (r, y_j, $z_{k-\frac{1}{2}}$)，且 $x_{i-\frac{1}{2}} < r < x_{i+\frac{1}{2}}$，则修正项可由泰勒展开计算为

$$C\{\mu\Delta u^{(2)}\}_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{h^2}\Big(\llbracket u^{(2)}\rrbracket + \xi_{u^{(2)}}\llbracket u_x^{(2)}\rrbracket + \frac{1}{2}\xi_{u^{(2)}}^2\llbracket u_{xx}^{(2)}\rrbracket\Big), \quad \text{if } (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j, z_{k-\frac{1}{2}}) \in \Omega.$$

3. 假设 ($x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k$) 是一个非规则点，示意见图 2(*d*)。在 x 方向上，记为 $\xi_{u^{(3)}} = x_{i+\frac{1}{2}} - r$。$\Gamma$ 与由点 ($x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k$) 和 ($x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k$) 构成的网格线段相交于 ($r, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k$)，且 $x_{i-\frac{1}{2}} < r < x_{i+\frac{1}{2}}$，修正项可由泰勒展开计算为

$$C\{\mu\Delta u^{(3)}\}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{\mu}{h^2}\Big(\llbracket u^{(3)}\rrbracket + \xi_{u^{(3)}}\llbracket u_x^{(3)}\rrbracket + \frac{1}{2}\xi_{u^{(3)}}^2\llbracket u_{xx}^{(3)}\rrbracket\Big), \quad \text{if } (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k) \in \Omega.$$

4. 假设 ($x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}$) 是一个非规则点，示意见图2(*e*)。在 x 方向上，记为 $\xi_{u^{(1)}} = x_i - r$ 和 $\xi_p = x_{i-\frac{1}{2}} - r$。若 Γ 与由点 ($x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}$) 和 ($x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}$) 构成的网格线段相交于 ($r, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}$)，且 $x_{i-\frac{1}{2}} < r < x_i$，修正项可由泰勒展开计算为

$$C\{u_x^{(1)}\}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\Big(\llbracket u^{(1)}\rrbracket + \xi_{u^{(1)}}\llbracket u_x^{(1)}\rrbracket + \frac{1}{2}\xi_{u^{(1)}}^2\llbracket u_{xx}^{(1)}\rrbracket\Big), \quad \text{if } (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}) \in \Omega,$$

and

$$C\{p_x\}_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\Big(\llbracket p\rrbracket + \xi_p\llbracket p_x\rrbracket\Big), \quad \text{if } (x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}) \in \Omega.$$

计算出界面两侧的跳跃后，即可显式推导修正项，并将其加到非规则网格节点处离散线性系统（21）的右端。因此，修正后的系统的系数矩阵与无界面的标准斯托克斯问题相同，现有的快速求解器仍然适用。此外，修正项的推导表明，它们将界面附近的局部截断误差提高到至少一阶精度，这足以恢复底层数值格式的形式二阶精度。第5节的数值结果说明了这一点，详细分析请参阅[9]。

此外，修正项中涉及的跳跃条件可由原方程（18a）—（18d）计算得出；由于篇幅限制，此处不再详述。

4.4. 界面积分的插值 *ace*

可以看出，界面问题 (18) 的近似解是在交错网格节点上计算的，而式 (9) 中所需的相应边界积分或体积分的近似值则应在界面 Γ的离散点处计算。为此，利用 MAC 格式 (21) 计算得到的 ($\mathbf{u}_h, p_h$)，应设计一种二次多项式插值，以提取界面上任意给定离散点 $\mathbf{x}$ 处$\mathbf{u}_h$ 及其通量 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}\ p)$ 的极限值。

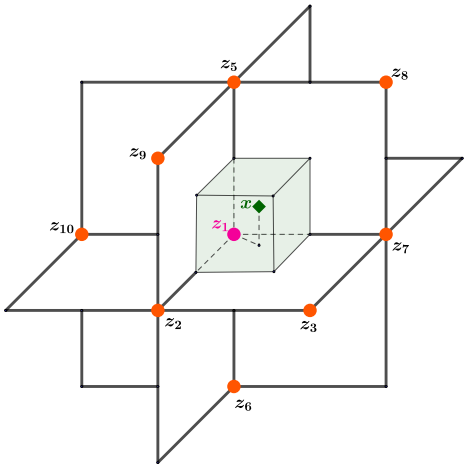


图 3：位于一个象限分布中的界面点 $\mathbf{x}$ 及其对应的十个插值网格节点 $\mathbf{z}_i$ （其中九个以圆圈标出，另一个$\mathbf{z}_4$ 被遮挡在后方），用于计算近似解及其牵引力的极限值。

对于界面上的控制点 $\mathbf{x}$，选取距离最近的十个网格节点 $\mathbf{z}_i(i = 0, 1, 2, ..., 9)$，以构造插值模板（示意见图 3 ）。

对于每个插值点$\mathbf{z}_i \in \Omega(i = 1,\ 2,\ ....,\ 10)$，以点$\mathbf{x} \in \Gamma$ 为中心的泰勒展开为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h(\mathbf{z}_i) =& \mathbf{u}_h^+(\mathbf{x}) + \xi_i \mathbf{u}_{h,x}^+(\mathbf{x}) + \eta_i \mathbf{u}_{h,y}^+(\mathbf{x}) + \gamma_i \mathbf{u}_{h,z}^+(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{2}\xi_i^2 \mathbf{u}_{h,xx}^+(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\eta_i^2 \mathbf{u}_{h,yy}^+(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\gamma_i^2 \mathbf{u}_{h,zz}^+(\mathbf{x}) \\ &+ \eta_i\gamma_i \mathbf{u}_{h,yz}^+(\mathbf{x}) + \xi_i\gamma_i \mathbf{u}_{h,xz}^+(\mathbf{x}) + \xi_i\eta_i \mathbf{u}_{h,xy}^+(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{z}_i - \mathbf{x}|^3),\end{aligned} \tag{24}$$

其中，$\mathbf{z}_i - \mathbf{x} \equiv (\xi_i, \eta_i, \gamma_i)^T$、$\mathbf{u}_{h,x}$、$\mathbf{u}_{h,y}$、$\mathbf{u}_{h,z}$ 分别用于表示 $\partial \mathbf{u}_h/\partial x$、 $\partial \mathbf{u}_h/\partial y$ 和$\partial \mathbf{u}_h/\partial z$，二阶导数的定义方式类似。需要注意的是，对于不同分量 $u^{(j)}$，$\mathbf{z}_i$ 属于不同的网格集 $\mathcal{T}_h^j (j = 1, 2, 3)$。对于每个插值点$\mathbf{z}_i \in \Omega^c$，以$\mathbf{x}$为中心的泰勒展开为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h(\mathbf{z}_i) =& \mathbf{u}_h^-(\mathbf{x}) + \xi_i \mathbf{u}_{h,x}^-(\mathbf{x}) + \eta_i \mathbf{u}_{h,y}^-(\mathbf{x}) + \gamma_i \mathbf{u}_{h,z}^-(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{2}\xi_i^2 \mathbf{u}_{h,xx}^-(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\eta_i^2 \mathbf{u}_{h,yy}^-(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\gamma_i^2 \mathbf{u}_{h,zz}^-(\mathbf{x}) \\ &+ \eta_i\gamma_i \mathbf{u}_{h,yz}^-(\mathbf{x}) + \xi_i\gamma_i \mathbf{u}_{h,xz}^-(\mathbf{x}) + \xi_i\eta_i \mathbf{u}_{h,xy}^-(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{z}_i - \mathbf{x}|^3),\end{aligned} \tag{25}$$

为简洁起见，分别用以下符号表示近似值$\mathbf{u}_h$ 及其导数

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}^{\pm} = \mathbf{u}_h^{\pm}(\mathbf{x}), && \mathbf{v}_x^{\pm} = \mathbf{u}_{h,x}^{\pm}(\mathbf{x}), && \mathbf{v}_y^{\pm} = \mathbf{u}_{h,y}^{\pm}(\mathbf{x}), \\ &\mathbf{v}_{xx}^{\pm} = \mathbf{u}_{h,xx}^{\pm}(\mathbf{x}), && \mathbf{v}_{yy}^{\pm} = \mathbf{u}_{h,yy}^{\pm}(\mathbf{x}), && \mathbf{v}_{zz}^{\pm} = \mathbf{u}_{h,zz}^{\pm}(\mathbf{x}), \\ &\mathbf{v}_{yz}^{\pm} = \mathbf{u}_{h,yz}^{\pm}(\mathbf{x}), && \mathbf{v}_{xz}^{\pm} = \mathbf{u}_{h,xz}^{\pm}(\mathbf{x}), && \mathbf{v}_{xy}^{\pm} = \mathbf{u}_{h,xy}^{\pm}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

由于$\mathbf{v(x)}$及其牵引力在界面 Γ 处不连续，因此应引入以下跳跃函数

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_i =&[\![\mathbf{v}]\!] + \xi_i[\![\mathbf{v}_x]\!] + \eta_i[\![\mathbf{v}_y]\!] + \gamma_i[\![\mathbf{v}_z]\!] + \frac{1}{2}\xi_i^2[\![\mathbf{v}_{xx}]\!] + \frac{1}{2}\eta_i^2[\![\mathbf{v}_{yy}]\!] + \frac{1}{2}\gamma_i^2[\![\mathbf{v}_{zz}]\!] \\ &+ \eta_i\gamma_i[\![\mathbf{v}_{yz}]\!] + \xi_i\gamma_i[\![\mathbf{v}_{xz}]\!] + \xi_i\eta_i[\![\mathbf{v}_{xy}]\!].\end{aligned}$$

因此，泰勒展开（24）和（25）可改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i =&\mathbf{v}^+ + \xi_i\mathbf{v}_x^+ + \eta_i\mathbf{v}_y^+ + \gamma_i\mathbf{v}_z^+ + \frac{1}{2}\xi_i^2\mathbf{v}_{xx}^+ + \frac{1}{2}\eta_i^2\mathbf{v}_{yy}^+ + \frac{1}{2}\gamma_i^2\mathbf{v}_{zz}^+ \\ &+ \eta_i\gamma_i\mathbf{v}_{yz}^+ + \xi_i\gamma_i\mathbf{v}_{xz}^+ + \xi_i\eta_i\mathbf{v}_{xy}^+, \quad \text{if } \mathbf{z}_i \in \Omega,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i + \mathbf{J}_i =&\mathbf{v}^+ + \xi_i\mathbf{v}_x^+ + \eta_i\mathbf{v}_y^+ + \gamma_i\mathbf{v}_z^+ + \frac{1}{2}\xi_i^2\mathbf{v}_{xx}^+ + \frac{1}{2}\eta_i^2\mathbf{v}_{yy}^+ + \frac{1}{2}\gamma_i^2\mathbf{v}_{zz}^+ \\ &+ \eta_i\gamma_i\mathbf{v}_{yz}^+ + \xi_i\gamma_i\mathbf{v}_{xz}^+ + \xi_i\eta_i\mathbf{v}_{xy}^+, \quad \text{if } \mathbf{z}_i \in \Omega^c.\end{aligned}$$

此处省略三阶项 $O(|\mathbf{z}_i - \mathbf{x}|^3)$。

求解上述线性方程组，即可得到界面 Γ 上$\mathbf{u}_h$ 的极限值。由于应力张量 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h)$ 不涉及 p_h 的导数，因此在计算边界值 p_h时，线性插值已足够。该计算可用类似的方法完成，此处从略。

5. 数值结果

本节设计了数值测试，以考察所提出方法求解三维 Stokes 和纳维边值问题的准确性、效率和稳健性。为此，定义归一化最大范数和 ℓ^2-范数如下:

$$\|e_p\|_\infty = \frac{\|p - p_h\|_\infty}{\|p\|_\infty}, \qquad \|e_{u^{(i)}}\|_\infty = \frac{\|u^{(i)} - u_h^{(i)}\|_\infty}{\|u^{(i)}\|_\infty}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

and

$$\|e_p\|_2 = \frac{\|p - p_h\|_2}{\|p\|_2}, \qquad \|e_{u^{(i)}}\|_2 = \frac{\|u^{(i)} - u_h^{(i)}\|_2}{\|u^{(i)}\|_2}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

在所有算例中，采用 GMRES 迭代法求解离散边界积分方程。GMRES 迭代以零初始猜测开始；当离散 ℓ^2-范数下的迭代残差与初始残差之比小于预设容差 $\epsilon = 10^{-9}$ 时，迭代停止。此外，界面问题对应的包围立方体设为 $\mathcal{B} = [-1.2, 1.2]^3$。

5.1. 斯托克斯问题示例

本小节考虑了定义在不同三维不规则区域上的三个斯托克斯问题。数值结果列于表 1–6。第一列列出网格尺寸，第二列记录 GMRES 迭代次数。第三列至最后一列展示

数值解在离散最大范数和 ℓ^2-范数下的误差，以及收敛率。映射了颜色的数值解 $\mathbf{u}_h$ 和 p_h 在 256×256 网格上的结果见图 4-6。值得注意的是，本节所有图均使用细网格，以便更清晰地呈现不规则边界。

例 5.1。 本例求解坐标原点处半径为 $r = 1$ 的球面上的斯托克斯狄利克雷问题。精确解为

$$\begin{cases} u^{(1)} = x^2(2 - x^2) + 4xy(x^2 + y^2 - 1) + z^2(3z^2 - 6x^2 - 2), \\ u^{(2)} = x^2(3x^2 - 6y^2 - 1) + y^2(1 - y^2), \\ u^{(3)} = 4zx(z^2 + x^2 - 1), \\ \quad p = 8y(3x^2 - y^2) + 8x(3z^2 - x^2). \end{cases}$$

外部强迫项 $\mathbf{f}$ 和边界条件 $\mathbf{g}$ 可由精确解确定。表 1 和表 2 分别给出了最大范数和 ℓ^2 范数下的误差及收敛率，结果表明，速度在离散最大范数和 ℓ^2 范数下均具有二阶精度，压力在 ℓ^2 范数下也具有二阶精度。文中还给出了广义最小残量法的迭代次数，结果显示，该迭代次数与网格大小无关。

表 1： *Exam* 的最大误差和收敛率 *ple* 1

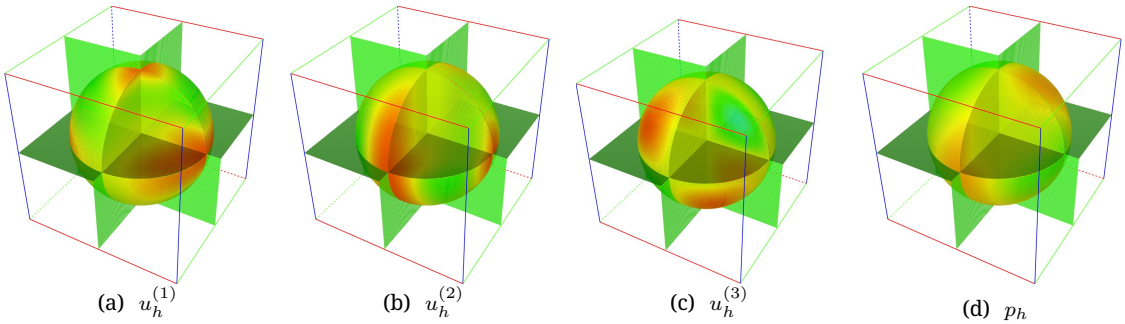
N	步数	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_\infty$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_\infty$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_\infty$	rate	$\|e_p\|_\infty$	rate
64	12	4.80e-3	-	3.65e-3	-	9.23e-3	-	2.33e-2	-
128	11	5.59e-4	3.10	6.84e-4	2.42	1.39e-3	2.73	6.40e-3	1.86
256	11	9.55e-5	2.55	8.67e-5	2.98	1.31e-4	3.41	1.91e-3	1.74
512	11	1.34e-5	2.83	1.44e-5	2.59	1.78e-5	2.88	6.06e-4	1.66

表 2： ℓ^2-误差及 *Example* 1 的收敛率

网格尺寸	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate	$\|e_p\|_2$	rate
64	1.06e-3	-	9.16e-4	-	1.40e-3	-	5.46e-3	-
128	9.12e-5	3.54	8.73e-5	3.39	1.18e-4	3.57	9.56e-4	2.51
256	1.12e-5	3.03	9.72e-6	3.17	1.57e-5	2.91	2.04e-4	2.23
512	1.43e-6	2.97	1.37e-6	2.83	1.92e-6	3.03	3.82e-5	2.42

例5.2。 在本例中，计算区域是一个椭球体

$$\left\{(x, y, z) \mid x^2 + \frac{y^2}{0.64} + \frac{z^2}{0.36} = 1.\right\}$$



(a) $u_h^{(1)}$ (b) $u_h^{(2)}$ (c) $u_h^{(3)}$ (d) p_h

图4：球面上斯托克斯问题的数值解 $\mathbf{u}_h$ 和 p_h 。

考虑精确解

$$\begin{cases} u^{(1)} = 2x^3y/3 - z^2x^2 + e^z + \sin(\pi z), \\ u^{(2)} = -x^2y^2 + \cos(\pi x), \\ u^{(3)} = 2z^3x/3 + e^x + \sin(\pi x), \\ p = (x-1)^3(y-1)^3(z-1)^3. \end{cases}$$

速度分量 $u^{(1)}$、 $u^{(2)}$、 $u^{(3)}$ 以及压力 p 的归一化误差分别列于表3和表4中，误差采用离散最大范数和 ℓ^2 范数度量。可以看出，速度的各分量在离散最大范数和离散ℓ^2 范数下均达到二阶精度，而压力在 ℓ^2 范数下达到二阶精度。不同网格尺寸对应的 GMRES 迭代次数也列于表3–4中。

表3： *Example* 2的最大误差和收敛率

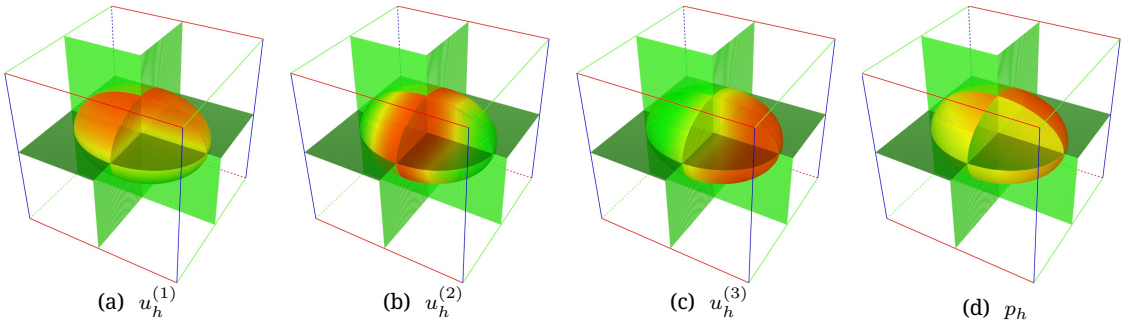
N	步数	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_\infty$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_\infty$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_\infty$	rate	$\|e_p\|_\infty$	rate
128	14	5.44e-4	-	7.65e-4	-	2.53e-4	-	2.22e-2	-
256	15	5.94e-5	3.20	8.01e-5	3.26	4.13e-5	2.61	7.05e-3	1.65
512	14	8.44e-6	2.82	2.07e-5	1.95	6.80e-6	2.60	1.77e-3	1.99

表4： ℓ^2误差及 *Example* 2的收敛率

N	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate	$\|e_p\|_2$	rate
128	2.95e-5	-	6.43e-5	-	1.82e-5	-	1.14e-3	-
256	6.02e-6	2.29	1.26e-5	2.35	4.18e-6	2.12	2.94e-4	1.96
512	1.29e-6	2.22	2.07e-6	2.61	9.42e-7	2.15	9.10e-5	1.69

示例 5.3。 在本例中，考虑一个更复杂的定义域，其表达式为

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 : (c - \sqrt{(x^2+y^2)})^2 + z^2 < a^2\}$$



(a) $u_h^{(1)}$ (b) $u_h^{(2)}$ (c) $u_h^{(3)}$ (d) p_h

图5：椭球体内斯托克斯问题的数值解$\mathbf{u}_h$ 和 p_h 。

其中 $a = 0.35$ 和 $c = 0.7$。精确解由下式给出：

$$\begin{cases} u^{(1)} = -4xy(1-x^2-y^2) - x^2(x^2+6z^2-2) + z^2(3z^2-2) \\ \qquad + \exp(\cos y) + \exp(\sin z), \\ u^{(2)} = x^2(3x^2-6y^2-2) - y^2(y^2-2) + \exp(\sin x), \\ u^{(3)} = -4(1-x^2-z^2)xz + \exp(\cos x), \\ p = \exp(1-y^2-z^3)\sin(x^2+1). \end{cases}$$

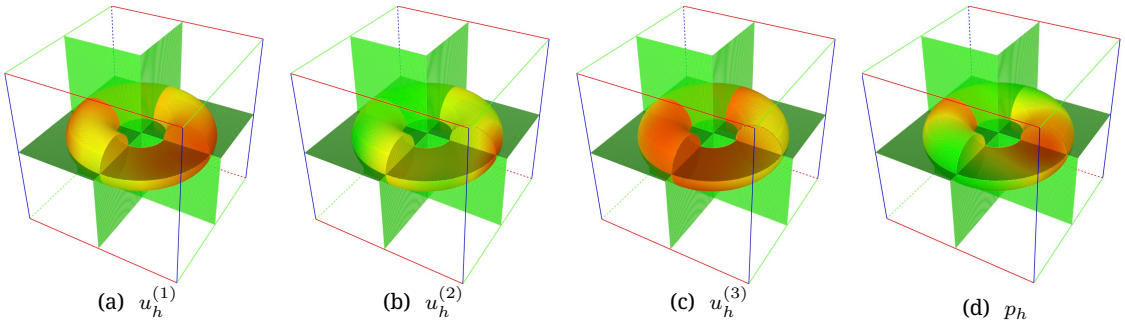
最大误差、 ℓ^2-误差及相应的收敛率列于表5-6中，这表明解（$\mathbf{u}_h$， p_h）达到了二阶精度。此外，表格第二列所示的 GMRES 迭代次数几乎不受网格尺寸影响。

表5： *Example* 3的最大误差和收敛率

N	步数	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_\infty$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_\infty$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_\infty$	rate	$\|e_p\|_\infty$	rate
128	24	8.97e-4	-	8.29e-4	-	7.42e-4	-	5.54e-1	-
256	26	7.54e-5	3.57	5.80e-5	3.84	6.19e-5	3.58	1.00e-1	2.47
512	26	1.01e-5	2.90	9.86e-6	2.56	1.32e-5	2.23	1.86e-2	2.43

表 6： ℓ^2-误差及其收敛率 *Example* 3

N	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate	$\|e_p\|_2$	rate
128	2.22e-5	-	7.64e-5	-	2.62e-5	-	1.50e-2	-
256	4.74e-6	2.23	1.26e-5	2.60	3.95e-6	2.73	2.94e-3	2.35
512	1.03e-6	2.20	2.50e-6	2.33	9.14e-7	2.11	8.82e-4	1.74



(a) $u_h^{(1)}$ (b) $u_h^{(2)}$ (c) $u_h^{(3)}$ (d) p_h

图 6：斯托克斯问题在环面上的数值解 $\mathbf{u}_h$ 和 p_h

5.2. 纳维问题示例

为检验 KFBI 求解纳维边值问题的效率，这里考虑了三个算例。数值结果列于表 7–12 中。每个表格有八列，分别展示笛卡尔网格的尺寸、求解边界积分方程时的 GMRES 迭代次数、数值解在最大范数或离散 ℓ^2-范数下的误差，以及收敛率。图 4-6 分别展示了各算例在 256×256 网格上的数值解 $\mathbf{u}_h$ 的彩色映射图。

例 5.4. 在本例中，计算区域为一个球面，由$x^2 + y^2 + z^2 = 1$给出。精确解由下式确定：

$$\begin{cases} u^{(1)} = \sin(2\pi r^2)\cos(2y)\cos(z), \\ u^{(2)} = \sin(2\pi r^2)\cos(x)\cos(x+z), \\ u^{(3)} = \sin(2\pi r^2)\cos(\pi x)\cos(y). \end{cases}$$

材料数据取为 $E = 1000$ 和 $\nu = 1/10$。最大误差及相应的收敛率见表 7。 ℓ^2-误差及相应的收敛率见表 8。正如预期，所提出的方法对数值解具有二阶精度。此外，迭代次数与网格尺寸无关，且相对较少。

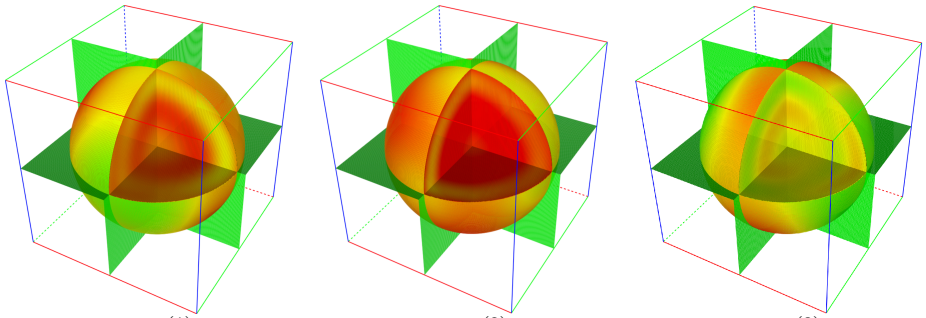
表 7：例 4.4 的最大误差及其收敛率

N	步数	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate
64	14	1.50e-2	-	1.33e-2	-	1.60e-2	-
128	14	4.09e-3	1.87	3.03e-3	2.13	4.02e-3	1.99
256	14	9.97e-4	2.04	7.98e-4	1.92	9.81e-4	2.03
512	15	2.62e-4	1.92	2.10e-4	1.93	2.60e-4	1.92

例5.5。 本例求解椭球域上的纳维方程，该椭球域由 $x^2/r_a^2 + y^2/r_b^2 + z^2/r_c^2 = 1$ with $r_a = 1$, $r_b = 0.8, r_c = 0.6$ 确定。精确解为

表 8：例 4.4 的 ℓ^2-误差及其收敛率

N	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate
64	9.03e-3	-	8.03e-3	-	9.63e-3	-
128	2.12e-3	2.09	1.90e-3	2.08	2.29e-3	2.07
256	4.05e-4	2.39	3.84e-4	2.31	4.97e-4	2.20
512	1.01e-4	2.00	9.65e-5	1.99	1.25e-4	1.99



(a) $u_h^{(1)}$ (b) $u_h^{(2)}$ (c) $u_h^{(3)}$

图7：纳维问题中球面上的数值解$\mathbf{u}_h$ in

by

$$\begin{cases} u^{(1)} = x^2 + y^2 + z^2 - 4 + \cos x \cos y \cos z, \\ u^{(2)} = x^2 + y^2 + z^2 - 4 + xy + \cos x \cos y \cos z, \\ u^{(3)} = x^2 + y^2 + z^2 - 4 + yz + \cos x \cos y \cos z. \end{cases}$$

材料数据选取为 $E = 4000$, 以及 $\nu = 1/20$。具有二阶精度的数值结果汇总于表9和表10。此处观察到的数值解的效率和精度与例 4.4 一致。

表9：例4.5的最大误差及其收敛率

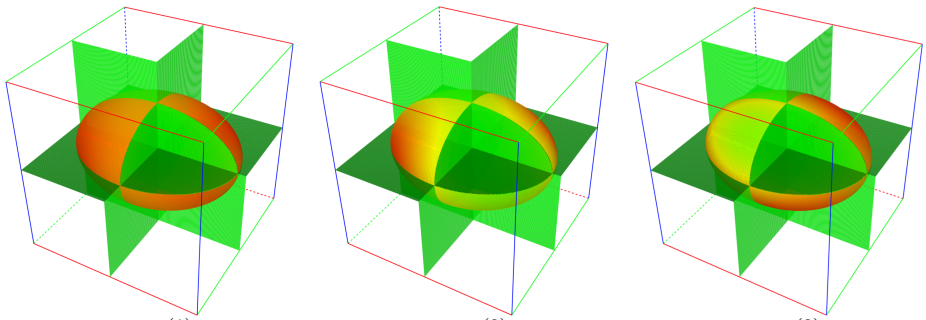
N	步数	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate
64	13	1.43e-3	-	1.35e-3	-	2.12e-4	-
128	13	3.44e-4	2.06	2.90e-4	2.22	3.17e-4	2.74
256	13	1.03e-4	1.74	7.66e-5	1.92	8.41e-5	1.91
512	14	2.91e-5	1.82	1.99e-5	1.94	2.15e-5	1.97

E例 5.6。 本例求解环面上的问题 (2a)-(2b), 该环面由 by

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in R^3 : (c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 < a^2\right\}$$

表10：例4.5 的 ℓ^2-误差及其收敛率

N	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate
64	8.60e-5	-	1.04e-4	-	6.87e-5	-
128	1.96e-5	2.13	1.99e-5	2.39	1.45e-5	2.24
256	4.66e-6	1.95	4.53e-6	2.14	3.73e-6	1.96
512	1.19e-6	1.97	1.15e-6	1.98	9.63e-7	1.95



(a) $u_h^{(1)}$ (b) $u_h^{(2)}$ (c) $u_h^{(3)}$

图 8：纳维问题在椭球体中的数值解$\mathbf{u}_h$ 。

由 $a = 0.35$ 和 $c = 0.7$ 确定。精确解选为

$$\begin{cases} u_1 = \exp(1 - y^2 - z^2)\sin(3x^2 + 2), \\ u_2 = \sin(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ u_3 = 3x^2 + 2y^2 + z^2. \end{cases}$$

材料数据选为 $E = 2000$ 和 $\nu = 2/5$。表 11 和表 12 中的数值结果验证了，GMRES 迭代次数基本上与网格尺寸无关，而且所提出的方法也能得到二阶精度解。

表 11：例4.6的最大误差及其收敛率

N	步数	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate
128	18	9.18e-3	-	8.43e-3	-	3.31e-3	-
256	19	1.90e-3	2.27	1.93e-3	2.13	7.20e-4	2.20
512	19	4.95e-4	1.94	4.99e-4	1.95	1.92e-4	1.91

6. 结论与讨论

本文提出了一种基于 MAC 格式的全局二阶 KFBI 方法，用于求解非规则区域上的三维斯托克斯和纳维边值问题。该方法

表12：例4.6的 ℓ^2-误差及其收敛率

N	$\|e_{\mathbf{u}_1}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_2}\|_2$	rate	$\|e_{\mathbf{u}_3}\|_2$	rate
128	8.74e-4	-	1.08e-3	-	3.30e-4	-
256	1.77e-4	2.30	2.34e-4	2.21	7.22e-5	2.19
512	4.55e-5	1.96	5.94e-5	1.98	1.84e-5	1.97

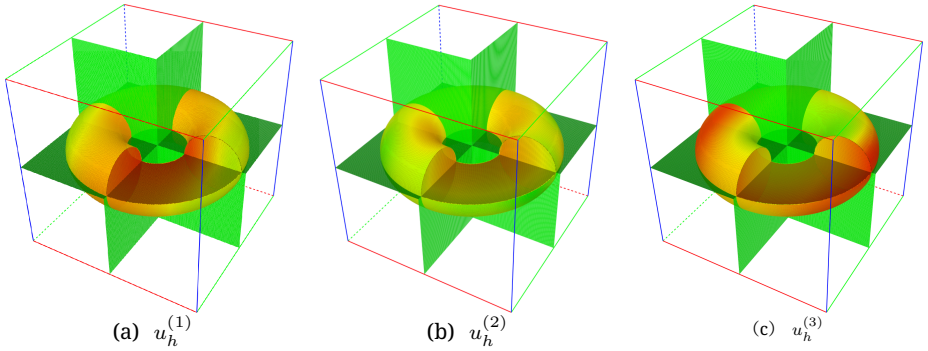


图9：纳维问题中环面内的数值解$\mathbf{u}_h$ 。

在边界积分方程框架下求解不规则边值问题，但与传统边界积分法不同，它间接计算体积分或边界积分。该方法避免了直接计算近奇异、奇异或超奇异边界积分，甚至无需格林函数的解析表达式。

重新表述的边界积分方程是第二类弗雷德霍姆积分方程，可以采用 Krylov 子空间方法（例如 GMRES）求解，且迭代次数基本上与网格尺寸无关。在每次 GMRES 迭代中，通过将斯托克斯方程写成一种略微广义的形式，即在连续性方程中包含压力项，可以将用于积分计算的等价简单斯托克斯和纳维界面问题改写为统一形式，然后采用修正MAC格式进行离散化。随后，结合基于快速傅里叶变换的泊松求解器，使用共轭梯度法高效求解该格式的离散系统。这种方法为求解双流体或多流体问题提供了通用的算法模板。

此外，曲面的离散化在 KFBI方法中发挥着重要作用。本文采用边界与网格线的交点来表示曲面的离散化。使用交点的优点在于便于寻找插值模板，从而实现高阶精度格式，并且适用于具有移动边界的问题。

然而，该方法仍有若干方面可以进一步改进。例如，在纳维问题中，当泊松比趋近于 $1/2$ 时（即材料变得不可压缩时），该方法在某些情况下的性能会下降。针对近乎不可压缩的弹性材料，[33] 中基于对开尔文张量进行适当分解的技术为我们提供了一些思路。本文仅介绍了 KFBI 方法二阶版本的细节

（三维）。原则上，为流体力学和固体力学推导该方法的高阶扩展是自然而直接的。此外，将KFBI 方法应用于 Stokes-Darcy 问题以及固液相互作用，将是我们未来的工作。

致谢

Haixia Dong 获得国家自然科学基金委员会（项目编号：12001193）、湖南省教育厅科学研究基金（项目编号：20B376）和长沙市自然科学基金（项目编号：kq2014073）的部分资助。Wenjun Ying 获得中国科学院战略性先导科技专项（项目编号：XDA25010405）、国家自然科学基金委员会（项目编号：DMS-11771290）和中国科学挑战计划（项目编号：TZ2016002）的部分资助。

参考文献

参考文献

[1] Abousleiman, Y. 和 Cheng, AH-D，1994。稳态与非稳态 Stokes 流的边界元解。《计算机在应用力学与工程中的方法》117 (1-2)，1–13。[2] Beale, J. Thomas，2004。三维椭圆问题的基于网格的边界积分法。《SIAM数值分析杂志》42 (2)，599–620。[3] Beale, J Thomas 和 Lai, Ming-Chih，2001。一种计算近奇异积分的方法。《SIAM数值分析杂志》38 (6)，1902–1925。[4] Biros, George、Ying, Lexing 和 Zorin, Denis，2004。复杂几何中受分布力作用的斯托克斯方程快速求解器。《计算物理学杂志》193 (1)，317–348。[5] Bootland, Niall、Bentley, Alistair、Kees, Christopher 和 Wathen, Andrew，2019。两相不可压缩Navier–Stokes流的预条件子。《SIAM科学计算杂志》41 (4)，B843–B869。[6] Cao, Yue、Xie, Yaning、Krishnamurthy, Mahesh、Li, Shuwang 和 Ying, Wenjun，2022。双连通区域上椭圆型偏微分方程的无核边界积分法。《工程数学杂志》136 (1)，1–21。[7] Chessa, Jack 和 Belytschko, Ted，2003。一种用于两相流体的扩展有限元法。《应用力学杂志》70 (1)，10–17。[8] Cyr, Eric C、Shadid, John N 和 Tuminaro, Raymond S，2012。Navier–Stokes方程的稳定化与可扩展块预条件。《计算物理学杂志》231 (2)，345–363。[9] Dong, Haixia、Zhao, Zhongshu、Li, Shuwang、Ying, Wenjun 和 Zhang, jiwei，2023。修正MAC格式求解斯托克斯界面问题的二阶收敛。arXiv预印本 arXiv:2302.08033。

[10] Elman, Howard、Howle, Victoria E、Shadid, John、Shuttleworth, Robert 和 Tuminaro, Ray，2006。基于近似交换子的块预条件子。《SIAM科学计算杂志》27 (5)，1651–1668。[11] Elman, Howard C，1996。离散斯托克斯方程的多重网格与Krylov子空间方法。《国际流体数值方法杂志》22 (8)，755–770。[12] Greengard, Leslie、Kropinski, Mary Catherine 和 Mayo, Anita，1996。平面上斯托克斯流与各向同性弹性力学的积分方程方法。《计算物理学杂志》125 (2)，403–414。[13] Griffith, Boyce E，2009。一种使用投影方法作为预条件子的不可压缩Navier–Stokes方程精确高效求解方法。《计算物理学杂志》228 (20)，7565–7595。[14] Grigoriev, MM 和 Dargush, GF，2005。不规则二维区域中斯托克斯流的多层边界元方法。《计算机在应用力学与工程中的方法》194 (34-35)，3553–3581。[15] Hansbo, Peter、Larson, Mats G 和 Zahedi, Sara，2014。一种用于斯托克斯界面问题的切割有限元方法。《应用数值数学》85，90–114。[16] He, Xiaoming、Lin, Tao 和 Lin, Yanping，2011。具有非齐次跳跃条件的椭圆界面问题的浸入有限元方法。《数值分析与建模国际期刊》8 (2)。[17] Hsiao, George C 和 Wendland, Wolfgang L，2008。边界积分方程。施普林格。[18] Huang, Q 和 Cruse, TA1231438，1993。关于边界元分析中奇异积分技术的一些注记。《国际工程数值方法杂志》36 (15)，2643–2659。[19] Jiang, Shidong、Veerapaneni, Shravan 和 Greengard, Leslie，2012。二维非定常Stokes流的积分方程方法。《SIAM科学计算杂志》34 (4)，A2197–A2219。[20] Jones, Derrick 和 Zhang, Xu，2021。一类用于斯托克斯界面问题的非协调浸入有限元方法。《计算与应用数学杂志》392，113493。[21] Klaseboer, Evert、Sun, Qiang 和 Chan, Derek YC，2012。流体力学应用中的无奇异边界积分法。《流体力学杂志》696，468–478。[22] Kress, Rainer、Maz'ya, V 和 Kozlov, V，1989。线性积分方程。第17卷。施普林格。[23] Layton, William J、Schieweck, Friedhelm 和 Yotov, Ivan，2002。流体流动与多孔介质流动的耦合。《SIAM数值分析杂志》40 (6)，2195–2218。[24] Leveque, Randall J 和 Li, Zhilin，1994。用于系数不连续且存在奇异源的椭圆方程的浸入界面方法。《SIAM数值分析杂志》31 (4)，1019–1044。[25] Lin, Paul T、Sala, Marzio、Shadid, John N 和 Tuminaro, Ray S，2006。用于不可压缩流与输运的全耦合代数多层域分解预条件子的性能。《国际工程数值方法杂志》67 (2)，208–225。

[26] Mayo, Anita, 1984年. 在不规则区域上快速求解泊松方程和双调和方程. 《SIAM数值分析杂志》21 (2), 285–299.[27] Mayo, Anita, 1985年. 在不规则区域上快速、高阶精度地求解拉普拉斯方程. 《SIAM科学与统计计算杂志》6 (1), 144–157.[28] Mayo, Anita, 1992年. 一般区域上位势理论体积分的快速计算. 《计算物理学杂志》100 (2), 236–245.[29] Peskin, Charles S, 1977年. 心脏血流的数值分析. 《计算物理学杂志》25 (3), 220–252.[30] Rachh, Manas and Greengard, Leslie, 2016年. 二维弹性模量与迁移率问题的积分方程方法. 《SIAM数值分析杂志》54 (5), 2889–2909.[31] Saad, Youcef and Schultz, Martin H, 1986年. GMRES：求解非对称线性系统的广义最小残量算法. 《SIAM科学与统计计算杂志》7 (3), 856–869.[32] Silva, Goncalo and Ginzburg, Irina, 2016年. 周期阵列可渗透圆柱形夹杂物中的双峰多孔介质流的斯托克斯–布林克曼–达西解：单元模型、润滑理论与格子玻尔兹曼法/有限元法数值模拟. 《多孔介质中的传输》111 (3), 795–825.[33] Steinbach, Olaf, 2007年. 椭圆型边值问题的数值近似方法：有限元与边界元. 施普林格科学与商业媒体.[34] Tan, Zhijun and Lim, KM and Khoo, BC, 2011. 面向不可压缩两相流的基于 MAC 网格的浸入界面法斯托克斯求解器实现. 《计算物理通讯》10 (5), 1333–1362.[35] Tlupova, Svetlana and Beale, J Thomas, 2013年. 三维 Stokes流中的近奇异积分. 《计算物理通讯》14 (5), 1207–1227.[36] Vanka, S Pratap, 1986年. 原始变量纳维–斯托克斯方程的块隐式多重网格求解. 《计算物理学杂志》65 (1), 138–158.[37] Wang, Ming and Chen, Long, 2013年. 基于最小二乘交换子和分布式 Gauss–Seidel 松弛的斯托克斯方程多重网格方法. 《科学计算杂志》56, 409–431.[38] Wang, Nan and Chen, Jinru, 2019年. 用于斯托克斯界面问题的非协调尼采扩展有限元法. 《科学计算杂志》81, 342–374.[39] Wang, Weiyi and Tan, Zhijun, 2021. 交错网格上具有奇异力的Stokes流的简单双维浸入界面法. 《计算物理通讯》30 (1), 227–254.[40] Wei, Guo-Wei, 2010年. 基于微分几何的多尺度模型. 《数学生物学通报》72 (6), 1562–1622.[41] Wei, Guo-Wei, 2013年. 多尺度、多物理场和多区域模型 I：基础理论. 《理论与计算化学杂志》12 (08), 1341006.

[42] Xie, Yaning and Ying, Wenjun, 2019年. 修正亥姆霍兹方程的四阶无核边界积分法. 《科学计算杂志》78 (3), 1632–1658.[43] Xie, Yaning and Ying, Wenjun, 2020年. 二维空间不可压缩流动方程的高阶无核边界积分法. 《数值数学：理论、方法与应用》13 (3).[44] Ying, Wenjun, 2018年. 在紧密排列单元上求解椭圆型界面问题的基于笛卡尔网格的边界积分法. 《计算物理通讯》24 (4), 1196–1220.[45] Ying, Wenjun and Henriquez, Craig S, 2007年. 椭圆型边值问题的无核边界积分法. 《计算物理学杂志》227 (2), 1046–1074.[46] Ying, Wenjun and Wang, Wei-Cheng, 2013年. 用于隐式定义曲面的无核边界积分法. 《计算物理学杂志》252, 606–624.[47] Ying, Wenjun and Wang, Wei-Cheng, 2014. 变系数椭圆型偏微分方程的无核边界积分法. 《计算物理通讯》15 (04), 1108–1140.[48] Youngren, GK and Acrivos, Andrias, 1975年. 任意形状粒子周围的斯托克斯流：一种数值求解方法. 《流体力学杂志》69 (2), 377–403.[49] Zeb, A and Elliott, L and Ingham, DB and Lesnic, D, 1998年. 求解二维区域斯托克斯方程的边界元法. 《边界元工程分析》22 (4), 317–326.[50] Zhou, YC and Zhao, Shan and Feig, Michael and Wei, Guo-Wei, 2006. 用于系数不连续且具有奇异源的椭圆型方程的高阶匹配界面与边界法. 《计算物理学杂志》213 (1), 1–30.