arXiv:2303.04994v1 [econ.EM] 9 Mar 2023

分布式向量自回归：揭示宏观与金融依赖关系*

Yunyun Wang† Tatsushi Oka‡ Dan Zhu§

2023年2月1日

摘要

向量自回归是实证宏观经济学和金融学中的重要工具，有助于理解多元时间序列之间的动态相互依赖。本研究通过纳入多变量分布回归框架并引入分布冲击响应函数，拓展了向量自回归的应用范围，从而全面展现动态异质性。我们提出了一种简洁而灵活的估计方法，并在弱依赖假设下确立了其渐近性质。我们的实证分析考察了美国GDP增长与金融状况的条件联合分布，重点关注全球金融危机。结果表明，紧缩的金融状况会导致GDP增长与金融状况的条件联合分布呈多峰形态；宽松金融状况会显著影响长期GDP增长，而在全球金融危机期间改善GDP增长，对金融状况的影响有限。

关键词：向量自回归、脉冲响应函数、多元时间序列、分布式回归 JEL分类代码：C14、C32、C53、E17、E44

*我们感谢 Catherine Forbes、Jiti Gao、Kostas Kardaras、Seojeong Lee、Myung Hwan Seo、Qiwei Yao，以及参加在伦敦政治经济学院、伦敦玛丽女王大学、首尔国立大学、新南威尔士大学、昆士兰大学和时间序列与预测研讨会（TSF2022）举办的研讨会的其他与会者，感谢他们提出的宝贵意见和建议。

†莫纳什大学计量经济学与商业统计系（yunyun.wang@monash.edu）
‡CyberAgent 人工智能实验室（oka tatsushi@cyberagent.co.jp）§莫纳什大学计量经济学与商业统计系（dan.zhu@monash.edu）

1 引言

自Sims（1980）的开创性研究以来，向量自回归（VAR）已成为实证宏观经济学和金融学中的重要工具，可用于对多元时间序列进行基本的定量描述、预测和结构分析（参见Litterman，1986；Stockand Watson，2001）。标准VAR以多元系统的均值回归为基础，通常采用多元高斯误差。它能够支持深入的结构分析，最突出的是通过脉冲响应函数（IRF）进行分析。然而，近期金融危机和大流行病引发的严重宏观经济衰退，促使人们对多元时间序列的分布特征日益关注。这一研究方向超越了传统上对均值估计的关注，转而研究冲击的分布效应，例如经济活动的风险增长率。

本研究提出一种半参数分布向量自回归模型，为分析多元时间序列的分布特征提供了一种灵活的替代方案。我们介绍了一种结合分布分解与分布回归（DR）方法的估计方法。与传统参数模型不同，我们的方法不对变量在给定其过去取值条件下的边际分布或联合分布施加整体参数假设。该框架采用能够纳入数量适中的条件变量的回归模型，从而捕捉过去事件对整个响应分布的影响。此外，我们提出了常用脉冲响应函数（IRFs）的分布对应形式，用于考察在特定时点系统中某个变量的分布受到扰动后，条件分布如何演变。这使我们能够识别响应动态中的异质性和非线性。

我们的研究建立在多个文献分支的基础上，并为其作出了贡献。首先，我们估计方法的基础是 DR，这是一种用于边际条件分布的半参数方法。Williams 和 Grizzle (1972) 首次引入 DR，利用多重二元回归分析有序分类结果。之后，Foresi 和 Peracchi (1995) 将其扩展至刻画任意条件分布，而 Hall 等人(1999) 提出了局部版本。Chernozhukov 等人 (2013) 建立了对整个条件分布进行推断的统一

有效性。其他研究者也探讨了 DR 方法，包括 Rothe 和 Wied (2013) 以及 Chernozhukov 等人 (2020)，等等。近年来，DR 方法已扩展至独立截面数据的条件多元分布。 Meier (2020) 研究了直接应用 DR 方法估计联合条件分布，而 Wang 等人 (2022) 提出了一种基于 DR 和分布分解的方法，解决了直接应用 DR 可能产生的计算问题。我们的研究进一步拓展了 DR 方法的适用范围，将其用于分析多元时间序列数据及其动态相互依赖。我们还给出了所提出估计量在 β-混合条件下的渐近性质。

本文还为结构向量自回归（结构向量自回归）模型的相关文献作出了贡献。对向量自回归模型作结构性解释，需要基于制度知识、经济理论或对模型响应施加的其他外部约束，额外作出识别假设（Blanchard 和 Quah，1989；Rubio-Ramirez 等，2010；Kilian 和 L¨utkepohl

，

2017）。向量自回归文献中常用的一种识别方案，是假设内生变量的同期方差矩阵为下三角形式（Sims，1980；Primiceri，2005）。我们的研究采用了基于三角形假设的类似结构识别方案。在估计用于脉冲响应分析的多期条件预测分布时，我们借鉴了局部投影（Jord`a，2005）和直接多步预测（McCracken 和 McGillicuddy，2019）的概念。这种方法使我们能够在每个预测期分别估计一个多变量分布，而不是采用迭代预测。Plagborg-Møller 和 Wolf （2021）的近期研究表明，在估计脉冲响应函数时，局部投影与向量自回归模型在概念上是等价的。

本文也为不断发展的文献作出了贡献：该文献致力于将分位数回归框架扩展至VAR模型，并建立在以下先前研究的基础上：Koenker和Bassett(1978）以及Koenker和Xiao(2004、2006）。具体而言，White等人(2015）构建了一个分位数多元自回归模型，以直接研究多元时间序列之间尾部相互依赖的程度。Montes-Rojas (2019）提出了一种约化形式分位数

VAR模型，该模型基于方向分位数框架，并估计了分位数脉冲响应函数（QIRF），以探究一组固定分位数指标下的动态效应。Chavleishvili和Manganelli(2019）提出了分位数SVAR模型，并基于固定样本路径分析QIRFs。我们提出的方法与现有分位数VAR模型的不同之处在于，我们以联合条件分布为目标，而分位数VAR则通过一组分位数回归方程建模，与均值VAR模型类似。在某些应用中，我们的方法为分析联合分布特征以及过去事件条件下冲击在整个联合分布中的动态传导提供了直接途径。不过，需要指出的是，连续随机变量的条件分位数与条件分布可通过逆变换相互转换。因此，分位数VAR和分布式VAR都能从多元时间序列中提取类似信息，可根据研究目标选用。

本文应用所提出的框架，分析在给定过去滞后变量的条件下，美国（U.S.）实际GDP增长率与全国金融状况指数（NFCI）的联合分布。Adrian等人Adrian等人（2021）此前研究了同一数据集，使用非参数核框架估计联合条件分布和密度脉冲响应函数。这项研究的主要发现表明，联合分布在正常时期呈单峰，但在大衰退期间则表现出明显的多峰性。Adrian等人（2019）使用分位数回归研究了给定过去金融和经济状况时GDP增长的分布，结果表明，与上尾相比，该分布的中位数和下尾随时间变化幅度大得多。我们的方法对他们的研究作了补充，允许将更多滞后变量作为条件回归变量；由于维数灾难，非参数方法无法做到这一点。即使在纳入更多滞后变量作为条件后，我们的实证结果仍证实了他们的主要发现。我们还发现，多峰性仅出现在短期预测中，并会在几个季度内消退，且紧缩程度相对温和。

我们进一步考察了大衰退期间，对所有变量的矩、分位数和整体分布可能产生的政策效应所对应的分布脉冲响应函数。研究结果表明，如果2008年第3季度实施的政策成功阻止了金融收紧，

那么在2008年第四季度，2009年第一至第二季度不利实际国内生产总值增长和NFCI收紧的可能性会提高，而在2009年第三至第四季度则会降低，这与Adrian等人(2021）的研究发现一致。混频模型提供的其他证据表明，对NFCI施加脉冲会对NFCI和实际国内生产总值增长产生长期影响。然而，我们对实际国内生产总值增长的分布冲击进行分析后发现了不同结果：限制2008年第四季度实际国内生产总值负增长的可能性，只会在短期内提高经济活动为正的可能性，却几乎不会对NFCI产生影响，即使在随后一个季度也是如此。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍所提出的多变量模型和分布脉冲响应函数。第3节说明估计程序，并给出估计量的渐近结果。第4节将运用我们的方法研究美国有关宏观经济和金融状况的时间序列数据。第5 节总结全文。理论结果的证明及补充实证分析见附录。

2 多变量分布回归

我们介绍一种用于条件多元分布的半参数回归方法，并说明分布脉冲响应函数；该函数描述冲击对多元时间序列整体分布的动态影响。

$\mathbb{R}$表示实数集，$1\!\!1\{\cdot\}$ 表示指示函数：当 $\{\cdot\}$ 中的条件成立时取值为1，否则取值为0。我们用$\ell^\infty(D)$表示定义在任意集合 D上的所有实值有界函数的集合。我们用 $\|\cdot\|$ 表示向量的欧几里得范数，并用 $a^\top$ 表示向量 a的转置。

2.1 模型

假设我们观测到一个样本量为 T 的平稳时间序列 $\{(Y_t, Z_t)\}_{t=1}^T$，其中 $Y_t = (Y_{1t}, \ldots, Y_{Jt})^\top$ 是一个 J 维结果变量，而 Z_t 是一个 $k \times 1$ 维条件变量向量。我们将 Y_t 的支撑集记为 $\mathcal{Y} := \times_{j=1}^J \mathcal{Y}_j \subset \mathbb{R}^J$，将 Y_t 和

Z_t分别记为 $\mathcal{Y}_j$ 表示 Y_{jt}的支撑集。给定该多元时间序列，研究目标是估计条件联合分布 $F_{Y_t|Z_t}(y|z)$，即给定 Y_t 时 $Z_t = z$，对于 $(y,\ z) \in \mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$。本研究主要关注 VAR 设定，其中 Z_t 仅包含滞后因变量；不过，我们的框架也可应用于其他情形，例如包含代理变量或工具变量的 VAR 模型（Bloom，2009；Jurado 等，2015）。

我们提出了一种用于联合条件分布的半参数估计方法。首先，我们应用分布分解，通过层级结构利用一组边际条件分布来表示联合条件分布，然后估计条件边际分布。具体而言，我们定义

$$X_{1t} := (1, Z_t^\top)^\top \quad \text{and} \quad X_{jt} := (1, Z_t^\top, Y_{1t}, \ldots, Y_{j-1,t})^\top \quad \text{for } j = 2, \ldots, J,$$

其支撑集为 $\mathcal{X}_j \subset \mathbb{R}^{k+j}$，对于 $j = 1$、.....、 J。令 $F_{Y_{jt}|X_{jt}}$ 为给定 X_{jt} 时 Y_{jt} 的边际条件分布。随后，分布分解表明存在一个变换 ρ：$\times_{j=1}^{J}\ell^\infty(\mathcal{Y}_j\times\mathcal{X}_j) \to \ell^\infty(\mathcal{Y}\times\mathcal{Z})$，其定义为

$$F_{Y_t|Z_t} = \rho(F_{Y_{1t}|X_{1t}}, \ldots, F_{Y_{Jt}|X_{Jt}}). \tag{1}$$

这一表达式很有用，因为可以通过分别建模这些 J 边际条件分布来得到多元联合分布。分布分解有许多不同的变换，每种变换在数学上都有效，且根据其实证应用而具有相关性。这是因为式 $\rho(\cdot)$ 中的变换依赖于1中 Y_t 坐标的排序。采用不同的基于排列的排序会产生另一种变换。我们将在第2.2节讨论这一排序问题，以进行结构分析。

在以下示例中，我们展示双变量结果情形下的变换。

例1. 令 $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t})^\top$ ，且预定变量最多包含两阶滞后项，或$Z_t = (Y_{t-1}^\top, Y_{t-2}^\top)^\top$。给定 Z_t 时， Y_t 的条件联合分布可通过以下方式刻画：

以下分布分解:

$$F_{Y_t|Z_t} = \int F_{Y_{2t}|X_{2t}} dF_{Y_{1t}|X_{1t}},$$

其中， $F_{Y_{1t}|X_{1t}}$ 和 $F_{Y_{2t}|X_{2t}}$ 是条件边际分布，分别为 $X_{1t} = (1, Z_t^\top)^\top$ 和$X_{2t} = (1, Z_t^\top, Y_{1t})^\top$。

□

研究单变量条件分布时，一种常见方法是根据样本信息假设适当的参数分布，并通常假设条件变量仅影响其位置参数或尺度参数。然而，当观测值呈现长尾和极端偏度等复杂统计特征时，选择适当的参数模型便颇具挑战。本研究采用DR方法，不施加严格的全局参数假设。

DR方法通过在结果位置上拟合一组参数线性指标模型，刻画给定一组协变量条件下结果变量的整个条件分布。具体而言，为估计第 j 个条件分布 $F_{Y_{jt}|X_{jt}}$，对于任意 $(y_j, x_j) \in \mathcal{Y}_j \times \mathcal{X}_j$，我们考虑:

$$F_{Y_{jt}|X_{jt}}(y_j|x_j) = \Lambda\big(\phi_j(x_j)^\top \theta_j(y_j)\big), \tag{2}$$

其中 Λ： $\mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个已知的链接函数，例如 logistic 函数或概率单位函数[1]， ϕ_j： $\mathcal{X}_j \mapsto \mathbb{R}^{d_j}$ 是一个变换，而 θ_j（y_j）是一个 $d_j \times 1$ 特定于该位置的未知参数向量 y_j。通过考察支撑集上不同位置的 Y_{jt} ，可以刻画 $\mathcal{Y}_j$的整个条件分布；而边际条件分布的集合通过（1）中的变换形成联合条件分布。所提出的模型具有足够的灵活性，能够纳入协变量，并为结果变量的每个位置设定回归系数。

[1]在实践中，对于每个 Y_{jt}，都可以选择不同的链接函数；为简化起见，我们使用相同的记号。只要对协变量进行足够丰富的变换，就能以任意高的精度逼近条件分布函数，而无需额外顾虑链接函数的选择。

2.2 分布脉冲响应函数

脉冲响应函数是结构分析中的标准工具，用于刻画同期冲击在实证宏观经济学和金融学中的多元时间序列上的动态传播。Sims （1980）最初利用向量自回归的移动平均表示提出了脉冲响应函数，而Jord`a （2005）引入了局部投影方法，该方法在多步预测框架下评估冲击的动态效应。Plagborg-Møllerand Wolf（2021）最近证明，局部投影和向量自回归模型在总体中估计出相同的脉冲响应。不同于传统上考察均值脉冲响应函数的向量自回归文献，近期文献使用分位数脉冲响应函数（Montes-Rojas、2019；Chavleishvili and Manganelli、2019）和密度脉冲响应函数（Adrian等人、2021）探索冲击对整个分布的动态影响。

我们采用局部投影方法，将可观测变量的条件分布相对于反事实分布进行积分，以构建分布脉冲响应函数。所提出的方法可视为Chernozhukov 等人(2013研究的动态扩展。他们利用截面观测值考察了项目评估中的反事实无条件分布。给定一个非负整数 h，基准联合分布$F_{Y_{t+h}|Z_t}$ 的 h期前结果 Y_{t+h} 条件于 Z_t 可表示为

$$F_{Y_{t+h}|Z_t} = \int F_{Y_{t+h}|Y_t,Z_t} dF_{Y_t|Z_t},$$

其中， $F_{Y_t|Z_t}$ 和$F_{Y_{t+h}|Y_t,\ Z_t}$ 是观测变量的两个不同条件分布，可由数据识别，其特征刻画方式与所提出的半参数方法类似。在估计$F_{Y_{t+h}|Y_t,\ Z_t}$时，我们采用局部投影的思路，即针对不同预测期 h 估计不同模型，使用DR方法将 Y_{t+h} 对(Y_t, Z_t)进行回归。

我们考虑这样一种情形：使用替代条件分布 $G_{Y_t|Z_t}$，而非实际分布 $F_{Y_t|Z_t}$。在全文中，出于识别目的，我们假设反事实分布 $G_{Y_t|Z_t}$ 的支撑集是 $\mathcal{Y}_t$ 的一个子集。在分布 $G_{Y_t|Z_t}$ 的情形下，反事实条件联合分布定义为

定义为

$$F^*_{Y_{t+h}|Z_t} := \int F_{Y_{t+h}|Y_t,Z_t} dG_{Y_t|Z_t}.$$

此外，第 j 个变量$Y_{j,\ t+h}$ 的基准边际分布和反事实边际分布也可以用类似的方式定义

$$F_{Y_{j,t+h}|Z_t} = \int F_{Y_{j,t+h}|Y_t,Z_t} dF_{Y_t|Z_t} \quad \text{and} \quad F^*_{Y_{j,t+h}|Z_t} := \int F_{Y_{j,t+h}|Y_t,Z_t} dG_{Y_t|Z_t}, \tag{3}$$

其中，条件分布 $F_{Y_{j,\ t+h}|Y_t,\ Z_t}$ 可以采用单变量 DR 方法建模，即对 (Y_t, Z_t) 回归 $Y_{j,\ t+h}$ 。

我们仅考虑 Y_t 中一个元素的分布变化，这有助于实证应用中的分析和解释，从而构建反事实联合分布$G_{Y_t|Z_t}$。例如，我们将实际的第 i 个边际分布 $F_{Y_{it}|X_{it}}$ 替换为反事实边际分布 $G_{Y_{it}|X_{it}}$；因此，根据（1），反事实联合分布为$G_{Y_t|Z_t} = \rho(F_{Y_{1t}|X_{1t}}, \ldots, G_{Y_{it}|X_{it}}, \ldots, F_{Y_{Jt}|X_{Jt}})$。应用所提出的半参数方法刻画 $G_{Y_t|Z_t}$ 时，需要对可观测变量排序，以便通过分布分解识别冲击。在结构向量自回归框架下，一种标准的识别方案是递归短期约束，该方案假设内生变量的同期协方差矩阵为下三角形式（Sims，1980）。我们的三角形假设与结构识别方案类似。结构向量自回归文献中的其他识别策略包括长期约束（Blanchard 和 Quah，1989 ）、符号约束（ Antol´ín-D´íaz 和 Rubio-Ram´írez，2018 ），以及使用工具变量进行识别（Jurado 等，2015）。

我们正式将分布脉冲响应函数定义如下。

定义 1. 描述冲击在 h 期后对 Y_t 的联合分布所产生影响的分布冲击响应函数定义为:

$$DIR_h := F^*_{Y_{t+h}|Z_t} - F_{Y_{t+h}|Z_t}. \tag{4}$$

h 期后第 j 个变量的分布脉冲响应函数定义为:

$$DIR_{j,h} := F^*_{Y_{j,t+h}|Z_t} - F_{Y_{j,t+h}|Z_t}. \tag{5}$$

所提出的框架在多个方面具有一般性。首先，标准的脉冲响应分析通常通过评估变化一个单位对 h 期前结果的影响来进行。这是反事实情景的一种特殊情况：目标变量的反事实联合分布 $G_{Y_t|Z_t}$ 可以是退化分布，或是在某个取值处集中的点质量。其次，在估计分布脉冲响应函数时，识别限制仅用于构造反事实分布 $G_{Y_t|Z_t}$，以识别冲击，但对于 $F_{Y_{t+h}|Y_t,\ Z_t}$则并非必要。最后，给定分布信息后，可以轻松获得其他感兴趣的统计量，例如均值、标准差和分位数。因此，所提出的分布脉冲响应函数具有足够的灵活性，研究者可以借此考察文献中通常讨论的其他脉冲响应函数。具体而言，第j个变量的均值脉冲响应函数为

$$MIRF_{j,h} := \int y_{j,t+h} dF^*_{Y_{j,t+h}|Z_t}(y_{j,t+h}) - \int y_{j,t+h} dF_{Y_{j,t+h}|Z_t}(y_{j,t+h}),$$

对于 $\tau \in (0, 1)$，第 j 个元素的第 τ 个分位数脉冲响应函数为

$$QIRF_{j,h}(\tau) := F^{*-1}_{Y_{j,t+h}|Z_t}(\tau) - F^{-1}_{Y_{j,t+h}|Z_t}(\tau),$$

其中，$_{t+h|Z_t}(\cdot)$ 和 $_{t+h|Z_t}(\cdot)$ 分别是第 j 个变量的分布函数 $_{t+h|Z_t}(\cdot)$ 和 $_{t+h|Z_t}(\cdot)$ 的逆，即分位数函数。

例1（续）。我们展示所提出的框架在二元情形下如何运作。首先，基准联合分布 $F_{Y_{t+h}|Z_t}$ 写作

$$F_{Y_{t+h}|Z_t}(y_{t+h}|z_t) = \int F_{Y_{t+h}|Y_t,Z_t}(y_{t+h}|y_t, z_t) dF_{Y_t|Z_t}(y_t|z_t),$$

令 $G_{Y_{2t}|X_{2t}}$ 为给定 X_{2t}时 Y_{2t} 的反事实边际分布，我们得到时间 t的反事实联合分布：

$$G_{Y_t|Z_t} = \int F_{Y_{1t}|X_{1t}} dG_{Y_{2t}|X_{2t}}.$$

那么，经过 h 期后的联合反事实分布为

$$F^*_{Y_{t+h}|Z_t}(y_{t+h}|z_t) = \int F_{Y_{t+h}|Y_t,Z_t}(y_{t+h}|y_t, z_t) dG_{Y_t|Z_t}(y_t|z_t).$$

$F_{Y_{t+h}|Z^*_t}$ 与 $F_{Y_{t+h}|Z_t}$ 之间的差异导致了 DIR_h （4）中的结果。作为一种特殊情况，我们可以将反事实边际分布设为一个退化分布，使得 $\Pr(Y_{2t} = y^*_{2t}|X_{2t}) = 1$。在这种情况下，反事实分布可简化为$\int F_{Y_{t+h}|Y_{1t},\ Y_{2t},\ Z_t}(y_{t+h}|y_{1t}, y^*_{2t}, z_t) dF_{Y_{1t}|X_{1t}}(y_{1t}|x_{1t})$。

□

3 估计与渐近性质

我们介绍条件分布和分布脉冲响应函数的估计程序，并给出条件分布函数及其变换的估计量的渐近性质。

3.1 估计

为了估计多元联合分布，首要步骤是使用DR方法估计一组单变量条件分布。在本研究中，我们针对二元结果$\mathbb{1}\{Y_{jt} \leq y_j\}$ （其中 $y_j \in \mathcal{Y}_j$）使用二元选择模型，并对每个 $j \in \{1, \ldots, J\}$在最大似然框架下估计模型（2）。未知参数的估计量定义为对数似然函数的最大化解，如下所示：

$$\widehat{\theta}_j(y_j) = \arg\max_{\theta_j \in \Theta_j} \widehat{\ell}_{y,j}(\theta_j), \tag{6}$$

其中，$\Theta_j \subset \mathbb{R}^{d_j}$ 是参数空间，对数似然为

$$\widehat{\ell}_{y,j}(\theta_j) := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\mathbb{1}\{Y_{jt} \le y_j\}\ln\Lambda\big(\phi_j(X_{jt})^\top\theta_j\big) + \mathbb{1}\{Y_{jt} > y_j\}\ln\big(1-\Lambda\big(\phi_j(X_{jt})^\top\theta_j\big)\big)\right].$$

Y_{jt} 给定 $X_{jt} = x_j$ 的条件分布估计量为

$$\widehat{F}_{Y_{jt}|X_{jt}}(y_j|x_j) := \Lambda\big(\phi_j(x_j)^\top\widehat{\theta}_j(y_j)\big). \tag{7}$$

实际上，可以从支撑集 $\mathcal{Y}_j$ 中选取足够多的离散点，以得到$\widehat{\ }$估计量 $F_{Y_{jt}|X_{jt}}(y_j|x_j)$。一个重要性质是，映射 $y_j \mapsto F_{Y_{jt}|X_{jt}}(y_j|x_j)\widehat{\ }$根据定义是非递减的。然而，在有限样本中，估计得到的分布函数 $F_{Y_{jt}|X_{jt}}(\cdot|x_j)$不一定满足单调性。我们使用 Chernozhukov 等人提出的重排法，对不同位置的条件分布估计量进行单调化。(2009)。该程序能够带来有限样本改进（例如，参见Chetverikov 等人，2018），并且在使用 Hadamard 可微映射变换估计分布时，可以直接应用泛函 delta 方法。

给定边际条件分布的估计量以及式（1）中的变换后，便可将条件联合分布估计为

$$\widehat{F}_{Y_t|Z_t} = \rho(\widehat{F}_{Y_{1t}|X_{1t}}, \widehat{F}_{Y_{2t}|X_{2t}}, \ldots \widehat{F}_{Y_{Jt}|X_{Jt}}). \tag{8}$$

对于不同的预测期 h，我们以类似的方式估计条件联合分布 $F_{Y_{t+h}|Y_t,\ Z_t}$，并将估计量记为 $F_{Y_{t+h}|Y_t,\ Z_t}$。如果我们考虑第 i 个元素 Y_{it} 的边际反事实分布 $G_{Y_{it}|X_{it}}$，则可以用 $G_{Y_t|Z_t} = \rho(F_{Y_{1t}|X_{1t}}, \ldots, G_{Y_{it}|X_{it}}, \ldots, F_{Y_{Jt}|X_{Jt}})$ 估计联合反事实分布 $G_{Y_t|Z_t}\widehat{\ }$。这些估计得到的分布

使我们能够 以获得实际联合分布和反事实联合分布的估计量 s:[2]

$$\widehat{F}_{Y_{t+h}|Z_t} = \int \widehat{F}_{Y_{t+h}|Y_t,Z_t} d\widehat{F}_{Y_t|Z_t}, \quad \text{and} \quad \widehat{F}^*_{Y_{t+h}|Z_t} = \int \widehat{F}_{Y_{t+h}|Y_t,Z_t} d\widehat{G}_{Y_t|Z_t}.$$

我们采用单变量 DR 方法估计条件分布 $F_{Y_{j,\ t+h}|Y_t,\ Z_t}$，$\widehat{\ }$其估计量记为 $F_{Y_{j,\ t+h}|Y_t,\ Z_t}$。实际边际分布和反事实边际分布$Y_{j,\ t+h}$ 也可以通过类似方式估计，即在（3）中用估计得到的对应分布替换条件分布。最后， DIR_h 和 $DIR_{j,\ h}$ 可以通过相应基准分布与反事实分布之差进行估计。

3.2 渐近性质

在本小节中，我们给出条件联合分布估计量和分布脉冲响应函数估计量的渐近性质。本小节所有定理的证明见附录 A。

令 $\ell_{y,\ j}(\cdot)$ 为总体对数似然；我们将真实参数 $\theta_j(y_j)$ 定义为以下最大化问题的解：

$$\theta_j(y_j) = \arg\max_{\theta_j \in \Theta_j} \ell_{y,j}(\theta_j). \tag{9}$$

与 J 条件边际分布相关的真实参数向量以及相应估计量向量分别为

$$\theta(y) := \left(\theta_1(y_1)^\top, \theta_2(y_2)^\top, \ldots, \theta_J(y_J)^\top\right)^\top \quad \text{and} \quad \widehat{\theta}(y) := \left(\widehat{\theta}_1(y_1)^\top, \widehat{\theta}_2(y_2)^\top, \ldots, \widehat{\theta}_J(y_J)^\top\right)^\top.$$

此外，令 $\Theta := \times_{j=1}^J \Theta_j$ 为 $\theta(y)$ 和 $\widehat{\theta}(y)$ 的参数空间。我们将真实参数处总体对数似然的二阶导数记为 $H_j(y_j) := \nabla^2 \ell_{y,j}\left(\theta_j(y_j)\right)$。

为获得渐近结果，需满足以下假设：

[2]或者，我们可以直接使用方程（ $\widehat{F}_{Y_{t+h}|Z_t}$ 8）中的变换来估计实际分布。为了确保实际分布和反事实分布的估计量具有可比性，在实证应用中，我们对这两种分布采用相同的估计量，具体如正文所述。

假设

假设 A1：时间序列 $\{(Y_t, Z_t)\}_{t=1}^{T}$ 是严格平稳的 β-混合或绝对正则过程，其 β-混合系数 $\{\beta_k\}$ 满足条件 $\sum_{k>0} \beta_k < \infty$。支撑集 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 分别是 $\mathbb{R}^J$ 和 $\mathbb{R}^k$ 的紧子集。

A2. 链接函数 $\Lambda(\cdot)$ 二阶连续可微，且其一阶导数为 $\lambda(\cdot)$。对任意 $y_j \in \mathcal{Y}_j$，对数似然函数 $\theta_j \mapsto \ell_{y,\ j}(\theta_j)$ 均一致凹，其中$j = 1$，……，J。

A3. 对每个 $j = 1$，……，J，真实参数 $\theta_j(\cdot)$ 均包含于紧参数空间Θ_j的内部。

A4. 对每个 $j \in \{1, \ldots, J\}$，条件密度函数 $f_{Y_{jt}|X_{jt}}(y_j|x_j)$ 关于 $\mathcal{Y}_j \times \mathcal{X}_j$ 一致有界，且关于 $\mathcal{Y}_j$ 连续。

假设 A1 要求时间序列为 β-混合序列，这允许存在异方差性和序列相关。在下文给出的定理中，我们利用 Rio (1998) 的结果建立经验过程的弱收敛。该结果要求 β-混合序列满足 $\sum_{k>0} \beta_k < \infty$，这比 Arcones 和 Yu (1994) 中考虑的条件更弱；后者要求 $\beta_k = O(k^{-c})$ 对某个 $c > 1$成立。此外，为了得到极限过程，需要具有紧支撑集；在我们的实证应用中，这一条件可以满足。

假设 A2 确保可以使用基于导数的标准优化程序来获得最大似然估计量，且逻辑斯蒂和概率单位链接函数均满足该假设。此外，该假设意味着海森矩阵 $H_j(y_j)$ 的最大特征值在其支撑集上严格为负，且这一性质在整个支撑集上统一成立（参见 Boyd 等人，2004）；结合假设 A3，这保证真实参数唯一存在。即使模型（2）设定有误，在假设 A2 和 A3 下，真实参数仍可视为满足一阶条件的伪参数，$\nabla \ell_{y,\ j}(\theta_j(y_j)) = 0$；因此，参数估计量可以在准似然框架下解释，

每个 $y_j \in \mathcal{Y}_j$ （参见 Huber， 1967； White， 1982）。假设 A4 是获得联合条件分布和分布脉冲响应函数在各支撑集上的估计量极限过程、以进行统计推断所必需的。

对于式（6）中的最大似然估计，我们对每个 $j = 1$、.....、J 使用目标函数^ function $\nabla \ell_{y,j}(\theta_j)$ 的一阶导数。对于 $(\theta, y) \in \Theta \times \mathcal{Y}$，定义

$$\widehat{\Psi}_y(\theta) := \left[\widehat{\Psi}_{y,1}(\theta_1)^\top \ldots, \widehat{\Psi}_{y,J}(\theta_J)^\top\right]^\top,$$

其中 $\widehat{\Psi}_{y,j}(\theta_j) := \sqrt{T}\nabla\widehat{\ell}_{y,j}(\theta_j)$ 写作

$$\widehat{\Psi}_{y,j}(\theta_j) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} \left[\Lambda\left(\phi_j(X_{jt})^\top \theta_j\right) - \mathbb{1}\{Y_{jt} \leq y_j\}\right] R\left(\phi_j(X_{jt})^\top \theta_j\right) \phi_j(X_{jt}),$$

其中 $R(u) := \lambda(u)/\{\Lambda(u)[1 - \Lambda(u)]\}$。

在下面的定理中，我们得到双重稳健估计量的联合极限过程。

定理 1. 假设假设 A1-A3 成立。则有

$$\sqrt{T}\left(\widehat{\theta}(\cdot) - \theta(\cdot)\right) \rightsquigarrow \mathbb{B}(\cdot) \quad in \quad \times_{j=1}^{J} \ell^\infty(\mathcal{Y}_j)^{d_j}$$

其中， $\mathbb{B}(\cdot)$ 是定义在 $\mathcal{Y}$ 上的 $\sum_{j=1}^{J} d_j$ 维紧均值为零的高斯过程。对于任意 y、$y' \in \mathcal{Y}$， $\mathbb{B}(\cdot)$ 的协方差核由 $H(y)^{-1}\Sigma(y, y')H(y')^{-1}$ 给出，其中 $H(y) :=\text{diag}\left(\{H_j(y_j)\}_{j=1}^{J}\right)$，且 $\Sigma(y, y') :=\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}[\widehat{\Psi}_y\left(\theta(y)\right)\widehat{\Psi}_{y'}\left(\theta(y')\right)^\top]$.

定理 1 的结果表明，在准似然框架下，由于可能存在模型设定错误，协方差核呈现三明治形式。此外，在存在序列相关的情况下，协方差核取决于长期协方差矩阵。由于极限过程依赖未知的干扰参数，因此可以采用移动区块自助法（Kunsch， 1989； Liu 和 Singh， 1992）、平稳自助法（Politis 和 Romano， 1994）或子抽样（Politis 等， 1997）进行实际推断。

我们引入　　从 DR 参数到一组边际条件　　1

分布。对于每个 $j = 1, ..., J$，我们定义一个映射 φ_j: $\mathbb{D}_{\varphi_j} \subset \mathbb{D}_j := \ell^\infty(\mathcal{Y}_j)^{d_j} \mapsto \mathbb{S}_{\varphi_j} \subset \ell^\infty(\mathcal{X}_j \times \mathcal{Y}_j)$，如下

$$\varphi_j(b_j)(x_j, y_j) := \Lambda\big(\phi_j(x_j)^\top b_j(y_j)\big).$$

令 $\varphi(b) := \big[\varphi_1(b_1) \ldots, \varphi_J(b_J)\big]^\top$ 对于 $b = (b_1^\top, \ldots, b_J^\top)^\top \in \mathbb{D}_\varphi \subset \mathbb{D}$，其中 $\mathbb{D}_\varphi := \times_{j=1}^J \mathbb{D}_{\varphi_j}$ 以及 $\mathbb{D} := \times_{j=1}^J \mathbb{D}_j$。于是，利用映射 $\varphi: \mathbb{D}_\varphi \mapsto \mathbb{S}_\varphi := \times_{j=1}^J \mathbb{S}_{\varphi_j}$，我们可以写成

$$\varphi(\widehat{\theta}) = (\widehat{F}_{Y_{1t}|X_{1t}}, \widehat{F}_{Y_{2t}|X_{2t}}, \ldots, \widehat{F}_{Y_{Jt}|X_{Jt}})^\top \text{ and } \varphi(\theta) = (F_{Y_{1t}|X_{1t}}, F_{Y_{2t}|X_{2t}}, \ldots, F_{Y_{Jt}|X_{Jt}})^\top.$$

映射 φ 在 $\theta \in \mathbb{D}_\varphi$ 处沿着 $\mathbb{D}$ 是 Hadamard 可微的，其 Hadamard 导数为:

$$\varphi'_{\theta(\cdot)}(b) := \big[\varphi'_{1,\theta_1(\cdot)}(b_1), \ldots, \varphi'_{J,\theta_J(\cdot)}(b_J)\big]^\top,$$

其中 $\varphi'_{j,\ \theta_j\ (\cdot)}(b_j)(x_j, y_j) := \lambda\big(\phi_j(x_j)^\top \theta_j(y_j)\big)\phi_j(x_j)^\top b_j(y_j)$ 对于 $j = 1, \ldots, J$。

下面的定理给出了 J 单变量分布函数估计量的联合渐近分布，该结果是通过对上文所示的 Hadamard 导数应用函数型 delta 方法得到的。此外，我们还可以推导任何可通过 Hadamard 可微映射得到的分布特征量估计量的渐近分布。

定理 2. 假设假设 A1-A3 成立。那么，

(a) 我们有

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix} \widehat{F}_{Y_{1t}|X_{1t}} - F_{Y_{1t}|X_{1t}} \\ \vdots \\ \widehat{F}_{Y_{Jt}|X_{Jt}} - F_{Y_{Jt}|X_{Jt}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi'_{\theta(\cdot)}(\mathbb{B}) \quad in \quad \times_{j=1}^J \ell^\infty(\mathcal{Y}_j \times \mathcal{X}_j),$$

其中 $\mathbb{B}$ 是定理 *1*中定义的紧均值为零的高斯过程。

(b) 此外，若 m 在 ν 处: $\mathbb{S}_\varphi \mapsto \ell^\infty(\mathcal{Z} \times \mathcal{Y})$ 在 $(F_{Y_{1t}|X_{1t}}, \ldots, F_{Y_{Jt}|X_{Jt}})$ 处 Hadamard 可微

沿切向 $\varphi'_{\theta(\cdot)}(\mathbb{D})$，其 Hadamard 导数为 $\nu'_{F_{Y_{1t}|X_{1t}},\ldots,F_{Y_{Jt}|X_{Jt}}}$，则 $\sqrt{T}\{\nu(\widehat{F}_{Y_{1t}|X_{1t}},\ldots,\widehat{F}_{Y_{Jt}|X_{Jt}}) - \nu(F_{Y_{1t}|X_{1t}},\ldots,F_{Y_{Jt}|X_{Jt}})\} \rightsquigarrow \nu'_{F_{Y_{1t}|X_{1t}},\ldots,F_{Y_{Jt}|X_{Jt}}} \circ \varphi'_{\theta(\cdot)}(\mathbb{B})$，在 $\ell^\infty(\mathcal{Z}\times\mathcal{Y})$ 中。

由于 Hadamard 可微变换的复合仍然是 Hadamard 可微的（引理 3.9.3，van der Vaart 和 Wellner，1996年），定理 2 可应用于所有这些我们感兴趣的分布特征量。正如第 3.1 节所述，在假设 A4 下，可以通过对若干单变量条件分布进行 Hadamard 可微变换，得到条件分布 $F_{Y_t|Z_t}$、$F_{Y_{t+h}|Y_t,\,Z_t}$ 和 $G_{Y_t|Z_t}$。此外，分布脉冲响应函数 DIR_h 和 $DIR_{j,\,h}$，是这些条件分布的 Hadamard 可微变换。定理 2(b) 可用于对条件联合分布和分布脉冲响应函数的估计量进行统计推断。

4 宏观经济与金融依赖关系

我们将所提出的方法应用于美国宏观经济和金融状况的时间序列数据。我们使用实际国内生产总值增长和 NFCI 作为指标，衡量经济和金融部门的状况。越来越多的研究尝试通过国内生产总值增长和 NFCI 的向量自回归模型，考察衰退期间宏观与金融之间的相互作用（Carriero 等人，2020；Clark 等人，2021；Gertler 和 Gilchrist，2018）。本实证研究沿着这一方向进一步推进，开展更全面的分布分析。本节主要探讨两个问题。第一，在给定过去滞后信息的条件下，国内生产总值增长与 NFCI 的联合分布是否会在金融压力期间发生变化？第二，宏观和金融状况中的分布冲击会如何影响它们的联合分布？

4.1 数据与模型设定

实际国内生产总值增长使用经济分析局公布的季度实际国内生产总值数据计算[3]。NFCI 是全国金融活动 105 项指标的加权平均值；每项指标均以其样本均值为基准，并按其样本标准差进行标准化。芝加哥联邦储备银行每周发布这些指标[4]。NFCI 为正值表示金融状况比平均水平更紧张。我们使用这两个指数在 1973年第一季度至 2019年第一季度期间的数据进行分析。这些时间序列的发布频率各不相同。遵循 Adrian等人 (2021)，我们通过对每季度的每周观测值取平均，将 NFCI 数据转换为季度观测值。我们考虑一个关于结果变量的二元模型 $Y_t = (Y_{1t},\ Y_{2t})^\top$，其中 Y_{1t} 表示季度芝加哥联储全国金融状况指数，而 Y_{2t} 表示实际国内生产总值增长。

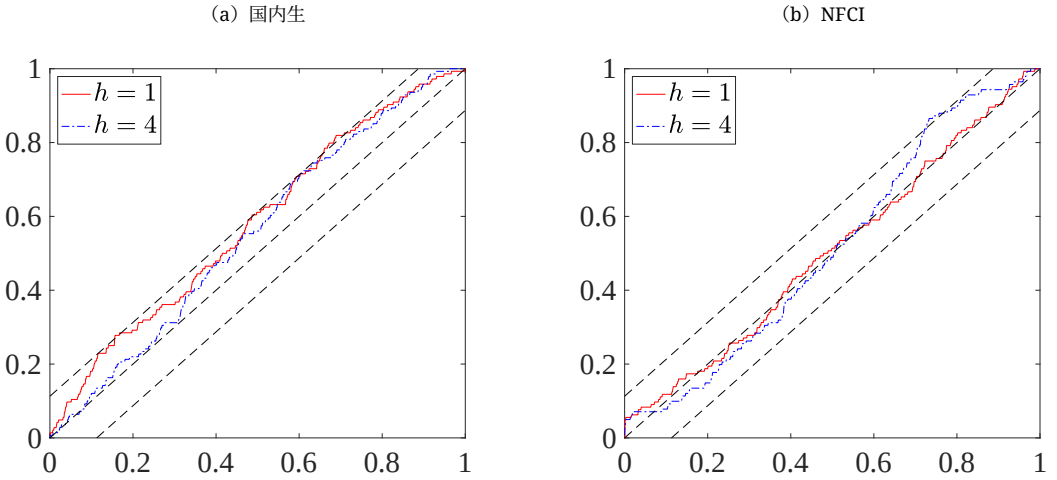
我们采用所提出的多变量DR方法，为每个变量估计特定预测期限的多期预测分布。具体而言，我们使用两阶滞后信息 $Z_t = (Y_{t-1}^\top, Y_{t-2}^\top)^\top$ 来估计联合条件分布 $F_{Y_t|Z_t}$，并使用三阶滞后信息构建 h期预测分布$F_{Y_{t+h}|Y_t,\ Z_t}$ 以覆盖不同的 h。随后可基于这些条件分布估计分布脉冲响应函数，从而设计不同的反事实情景，考察政策效应可能如何随时间影响NFCI和实际国内生产总值增长的整体分布。

4.2 多期条件分布预测

聚焦于提前一个季度和一年的预测期，我们展示多变量DR方法在估计NFCI和实际国内生产总值增长的多期预测分布方面的样本外表现。

[3]数据下载自圣路易斯联邦储备银行经济数据库（FRED）：https://fred.stlouisfed.org/series/A191RL1Q225SBEA[4]有关NFCI的更多详情，请访问：https://www.chicagofed.org/publications/nfci/index

图1：样本外概率积分变换的经验累积分布函数

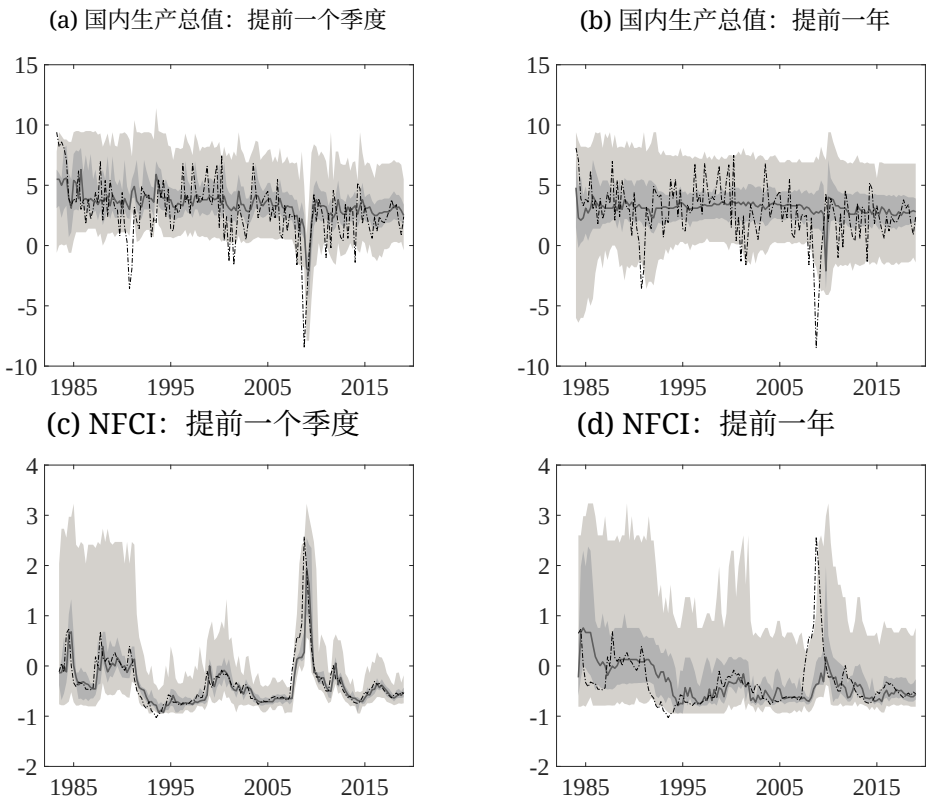


注释：本图报告了 DR 方法得到的概率积分变换的经验累积分布函数，其中提前一季度的结果以红色实线表示，提前一年的结果以蓝色点划线表示；此外，还给出了正确校准原假设下概率积分变换的累积分布函数（45度线），以及 Rossi and Sekhposyan (2019) 概率积分变换检验的95%置信带（虚线）。

首先，使用从1973年第一季度至1982年第三季度的样本进行估计，并以此为起点采用扩展窗口，我们通过分析概率积分变换（PIT）来评估分布预测的样本外表现。概率积分变换反映低于任意给定分位数的观测值所占比例。在完全校准的模型中，低于预测分布任意给定分位数的实现值比例恰好等于该分位数对应的概率，因此，PIT的累积分布是一条45度直线。PIT经验累积分布越接近45度直线，模型的校准效果就越好。对于不同的预测期，图中展示了实际国内生产总值增长和NFCI预测边际分布的PIT经验分布，以及 Rossi and Sekhposyan (2019)概率积分变换检验[5] 的95%置信带，见图1。这表明，所提出方法得到的PIT经验分布均落在置信区间内。

[5]在概率积分变换均匀性与独立性的零假设下，我们采用 Rossi and Sekhposyan (2019) 建议的 5%显著性水平渐近临界值 1.34 来构造置信带。

图2：样本外预测分布



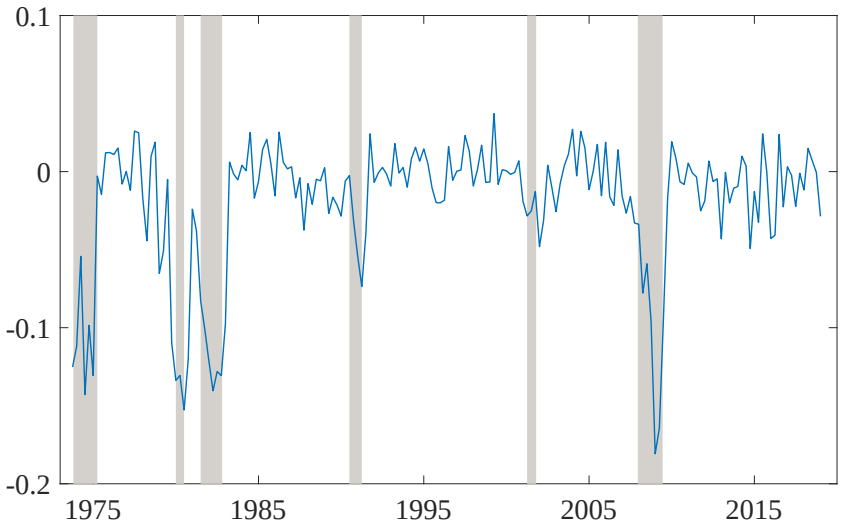
注：每个面板均展示边际分布随时间的变化。浅灰色区域表示第5至第95百分位区间，深灰色区域表示第25至第75百分位区间，实线表示分布的中位数。实际观测值以点线表示。

此外，我们还利用扩展窗口（样本外）考察了实际国内生产总值增长和 NFCI 的未来一季度及未来一年的边际分布估计值。根据预测分布，第 5 至第 95 百分位区间和第 25 至第 75 百分位区间、中位数以及数据实现值绘于图2中。实际国内生产总值增长分布的演变显示，与上尾（上行风险）相比，中位数和下尾（下行风险）呈现出显著的时间序列变化。将预测分位数与实现值进行比较可以发现，预测分布能够实时识别不利的国内生产总值增长和紧缩的金融状况出现的可能性。

根据实际国内生产总值增长和 NFCI 的实现值，我们发现，当 NFCI 相对宽松时，经济照常运行。与此同时，NFCI 极度收紧与极其不利的国内生产总值增长同时出现。在图 3 中，我们绘制了样本内

实际国内生产总值增长与 NFCI 之间的条件相关系数。正常时期，相关系数在 0 附近波动，而在衰退时期则显著为负。这表明金融状况与实际经济活动之间存在非线性关系，其条件联合分布在正常时期和衰退时期表现出截然不同的特征。

图3：NFCI与实际国内生产总值增长的样本内条件相关性



注：图中绘制的是根据一步预测分布计算得出的相关系数。阴影区域表示美国的经济衰退期。

4.3 大衰退期间宏观金融动态的多峰性

我们进一步研究了大衰退期间实际国内生产总值增长与NFCI的联合分布如何演变。图 $h = 1$4展示了样本外预测分布的联合分布动态：不同列对应从一（最左列，$h = 4$）到四（最右列，$h = 4$）个季度的预测期，不同行则对应不同的条件信息，从2008年第一至第三季度（最上行）到2009年第一至第三季度（最下行）。4。

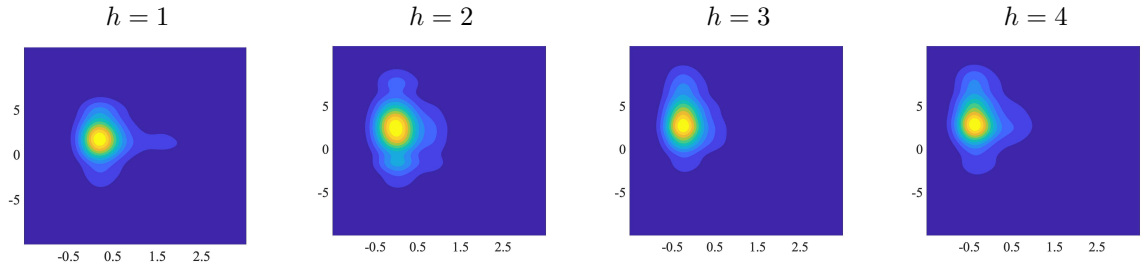
使用截至2008年第一至第三季度的数据预测的实际国内生产总值增长与NFCI的联合分布

如图4第一行所示，在所有预测期限上均呈现单峰特征。随着预测期限延长，经济增长较高且金融状况较宽松的可能性有所增加。然而，纳入2008年第四季度的信息后，预测分布呈现出多峰性。如图4第二行所示，提前一个季度的预测分布呈现两个明显的峰值，二者均集中在较低的GDP增长水平（约 -2 ）和紧缩的金融状况（一个峰值约为1，另一个约为2）附近。随着预测期限延长，预测分布的权重逐渐向较高的GDP增长水平和较宽松的金融状况转移。最终，提前一年的分布呈现单峰，峰值位于实际国内生产总值增长约为2、金融状况处于平均水平（NFCI约为0）的位置。随着2009年第一季度和2009年第二季度的更多信息陆续可用，第三和第四行中的预测分布呈现出与第二行所示相似的变化。不过，由于纳入了更新的信息，多峰性更快消失。值得注意的是，如图4最后一行所示，以截至2009年第一至第三季度的信息为条件的预测分布，在所有预测期上都近似呈单峰。值得注意的是，分布中的多峰性主要源于NFCI分布的变化。

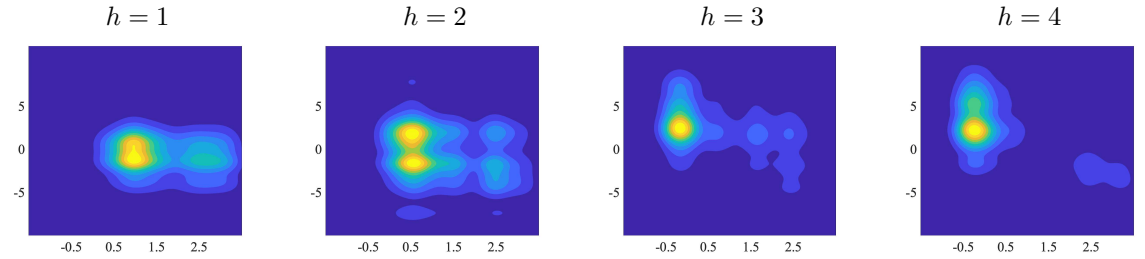
因此，图 4 所示的分布特性表明，在正常时期，实际国内生产总值增长与 NFCI 的联合分布呈现单峰特征。然而，在金融状况紧缩时期，分布形态会显著变化，出现多个峰。当金融状况不那么严峻时，多峰性仅出现在短期预测中，通常会在几个季度内消失。此外，图形还表明，随着预测期限延长，两个变量的波动性都会逐渐增大，其中实际国内生产总值增长表现出更大程度的不确定性。

Fig图 4：大衰退期间联合分布的等高线图

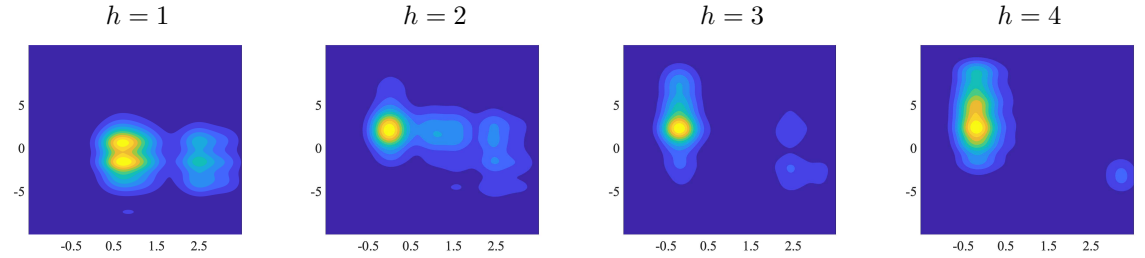
(a) 对于 t=2008:Q3，在给定 (Y_t, Z_t) 的条件下，Y_{t+h}



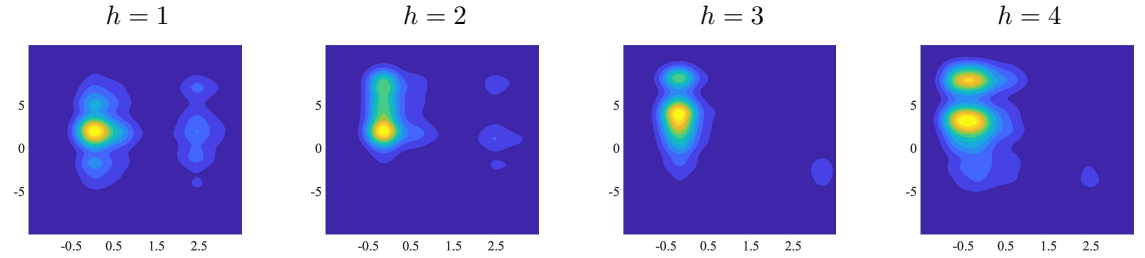
(b) 对于 t=2008:Q4，在给定 (Y_t, Z_t) 的条件下，Y_{t+h}



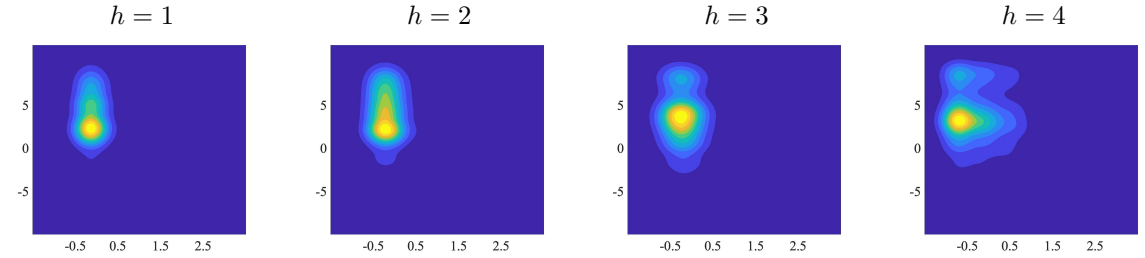
(c) 对于 t=2009:Q1，在给定 (Y_t, Z_t) 的条件下，Y_{t+h}



(d) 对于 t=2009:Q2，在给定 (Y_t, Z_t) 的条件下，Y_{t+h}



(e) 对于 t=2009:Q3，在给定 (Y_t, Z_t) 的条件下，Y_{t+h}



注：每个等高线图（以 NFCI 为 x 轴、国内生产总值为 y 轴）均基于从多步预测分布中生成的样本，采用带宽为（0.25，0.8）的双变量核密度估计得到。不同列对应的预测期为 $h=1$、2、3、4，不同行对应从 2008年第一至第三季度到 2009年第一至第三季度的不同条件信息。

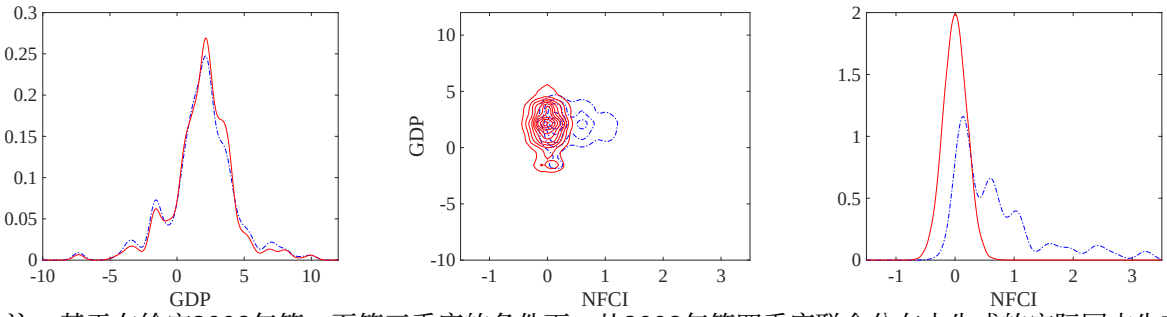
4.4 大衰退期间的反事实分析

假设关于经济和金融状况的信息截至2008年第三季度，基于样本外预测分布，我们使用分布脉冲响应函数探究大衰退期间潜在的政策效应。具体而言，我们考察旨在限制2008年第四季度金融状况收紧或国内生产总值增长恶化可能性的政策干预，对随后几个季度预测分布的影响。

4.4.1 NFCI上分布冲击的反事实分析

图5：2008年第四季度对NFCI的分布冲击

给定 Z_t 时 Y_t 的分布，条件为 t 等于2008年第四季度（$h = 0$）



注：基于在给定2008年第一至第三季度的条件下，从2008年第四季度联合分布中生成的实际国内生产总值增长和NFCI样本，采用核密度估计，并使用“经验法则”带宽估计边际密度和联合等高线图。基准分布以蓝色点划线绘制，反事实分布以红色实线绘制。

我们首先考察2008年第3季度政策干预的影响，该干预可能限制2008年第四季度金融状况收紧的可能性。我们将2008年第四季度的NFCI设为一个反事实分布，即均值为0、标准差为0。2、定义在（-1.5，2）上的截断正态分布。图5展示了2008年第四季度初始的一步超前（基准）联合分布和边际分布，以及分布冲击作用于 Y_{1t}后的相应反事实分布。此外，表1列出了它们在分布不同分位数和各阶矩上的差异，包括均值、标准差、偏度和峰度，其中 $h = 0$。分布冲击显著降低了NFCI的95%分位数、偏度和峰度，因而也降低了

其他分位数和矩。与此同时，它使国内生产总值的95%分位数提高约1，峰度提高约0.65；但对其他分位数和矩的影响较小。结果表明，NFCI冲击对国内生产总值的同期效应较小。

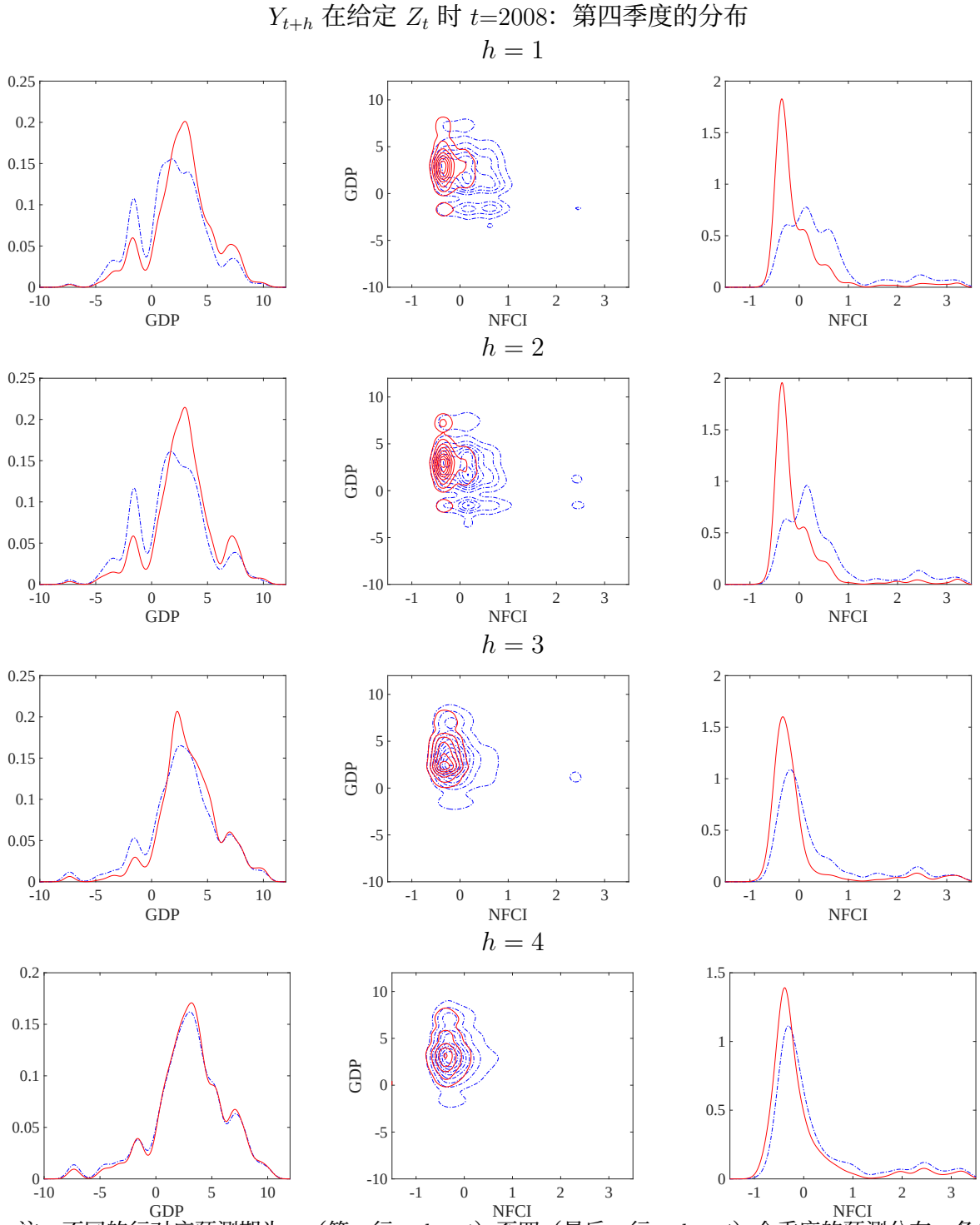
对于2008年第四季度的NFCI 分布冲击，我们研究随后一年的分布脉冲响应函数（DIRFs），即从2009年第一季度到2009年第四季度，分别对应预测期 h =1，2，3和4个季度。图6 全面展示了随后一年内，实际国内生产总值增长和NFCI的联合分布及边际分布如何响应NFCI冲击。表1 列出了分位数脉冲响应函数和矩脉冲响应函数的结果。根据图6，在随后的两个季度中，NFCI的右尾大幅收缩，GDP的左尾明显变薄，而NFCI的左尾和GDP的右尾则略微变厚。随着预测期延长，这种影响持续存在，但逐渐减弱。

表1：NFCI 冲击的QIR和MIR

变量			NFCI					GDP				
		h	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
分位数	0.05	Base	0.01	-0.36	-0.36	-0.41	-0.49	-1.77	-3.03	-3.03	-2.10	-3.03
		Diff	-0.34	-0.09	-0.09	-0.08	-0.16	0.00	0.93	1.26	0.80	0.93
	0.25	Base	0.15	-0.09	-0.11	-0.23	-0.37	0.68	0.40	0.34	1.20	1.36
		Diff	-0.28	-0.29	-0.25	-0.16	-0.05	0.02	0.96	1.11	0.80	0.09
	0.5	Base	0.55	0.18	0.17	-0.09	-0.14	2.03	1.96	1.96	2.90	3.00
		Diff	-0.55	-0.45	-0.48	-0.23	-0.22	0.00	0.94	0.94	0.20	0.10
	0.75	Base	1.00	0.68	0.62	0.56	0.40	3.20	3.60	3.60	4.67	4.94
		Diff	-0.87	-0.57	-0.51	-0.69	-0.42	0.00	0.60	0.60	0.17	0.17
	0.95	Base	2.40	2.72	2.55	2.47	2.72	6.26	7.06	7.44	8.10	8.10
		Diff	-2.08	-1.63	-1.68	-0.06	-0.32	-0.88	0.38	0.00	0.00	0.00
矩	Mean	Base	0.71	0.52	0.46	0.35	0.27	1.86	1.85	1.84	2.81	2.91
		Diff	-0.71	-0.53	-0.50	-0.34	-0.28	0.05	0.88	0.92	0.54	0.17
	Std	Base	0.77	0.89	0.88	0.94	1.00	2.50	2.90	3.00	3.12	3.25
		Diff	-0.56	-0.22	-0.23	-0.10	-0.14	-0.23	-0.16	-0.30	-0.43	-0.18
	偏度	Base	1.53	1.55	1.70	1.66	1.70	-0.20	-0.06	-0.03	-0.41	-0.59
		Diff	-1.52	1.52	1.54	1.00	0.71	-0.02	-0.22	-0.22	0.16	0.10
	峰度	Base	4.83	4.70	5.14	4.66	4.72	4.90	3.07	3.16	3.90	3.92
		Diff	-1.79	8.49	9.43	4.40	3.44	0.65	0.53	0.72	0.59	0.03

注：本表列出了从 2008年第四季度（$h = 0$）到 2009年第四季度（$h = 4$）期间，NFCI 和实际国内生产总值增长的基准分布 $F_{Y_{j,\ t+h}|Z_t}$（基准）的不同分位数和矩，以及反事实分布 $F^*_{Y_{j,\ t+h}|Z_t}$ 相对于基准分布的分位数和矩差异（差异）。

图6：对 NFCI 冲击的分布响应



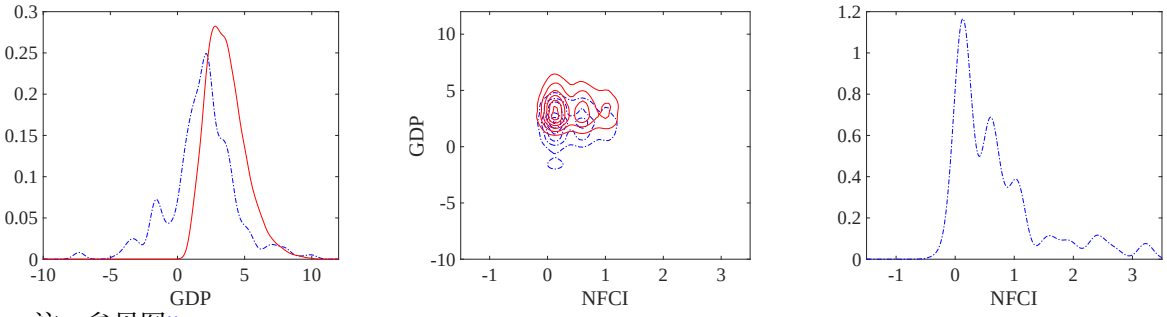
注：不同的行对应预测期为一（第一行，$h = 1$）至四（最后一行，$h = 4$）个季度的预测分布，条件为 2008年第二至第三季度。各行图表的详情请参阅图5 。

通过考察分位数脉冲响应函数，进一步证实了这一观察结果。NFCI的所有分位数均下降；然而，差异会随时间推移而减小。对于国内生产总值，自2009年第二季度起，脉冲对95%分位数的效应可以忽略不计。所有其他分位数，尤其是5%、25%和75%分位数，均在随后两个季度显著上升。在更长的预测期内，这一差异变得更小，但仍具有显著性。此外，对矩脉冲响应函数的分析表明，在所有预测期内，NFCI的均值均下降至约0，这主要是由脉冲对上尾的显著效应所驱动的。国内生产总值下尾受到的更大影响使其均值在所有预测期内上升至 $2\sim3$ 。该脉冲显著改变了NFCI的偏度和峰度，而其他矩的结果也表明两个变量均存在显著的长期效应。最后，我们得出结论：如果2008年第3季度的政策能够限制2008年第四季度金融收紧的可能性，那么2009年第一至第二季度出现不利的国内生产总值增长（左尾）和紧缩的金融状况（右尾）的可能性将大幅消除，并在2009年第三至第四季度降低。

4.4.2 国内生产总值分布冲击的反事实分析

图7：2008年第四季度实际国内生产总值增长的分布冲击

给定 Z_t 时， Y_t 在 t 等于2008年第四季度（$h=0$）条件下的分布



注：参见图5。

我们探讨了2008年第3季度的政策对限制2008年第四季度经济活动低迷可能性的影响。具体而言，如图7所示，我们保持2008年第四季度NFCI的条件分布不变，并考虑GDP服从定义在(0，11)上的反事实截断伽马分布，其尺度参数为6，形状参数为0。6。图8 展示了 Y_t

给定 Z_t 及其反事实对应分布；它们在分位数和矩方面的差异列于表2中，其中 $h = 0$。GDP的分布冲击使5%分位数显著上升，从-2.1升至1.5，其他分位数则上升约1∼2。这一冲击还显著改变了GDP的不同矩。

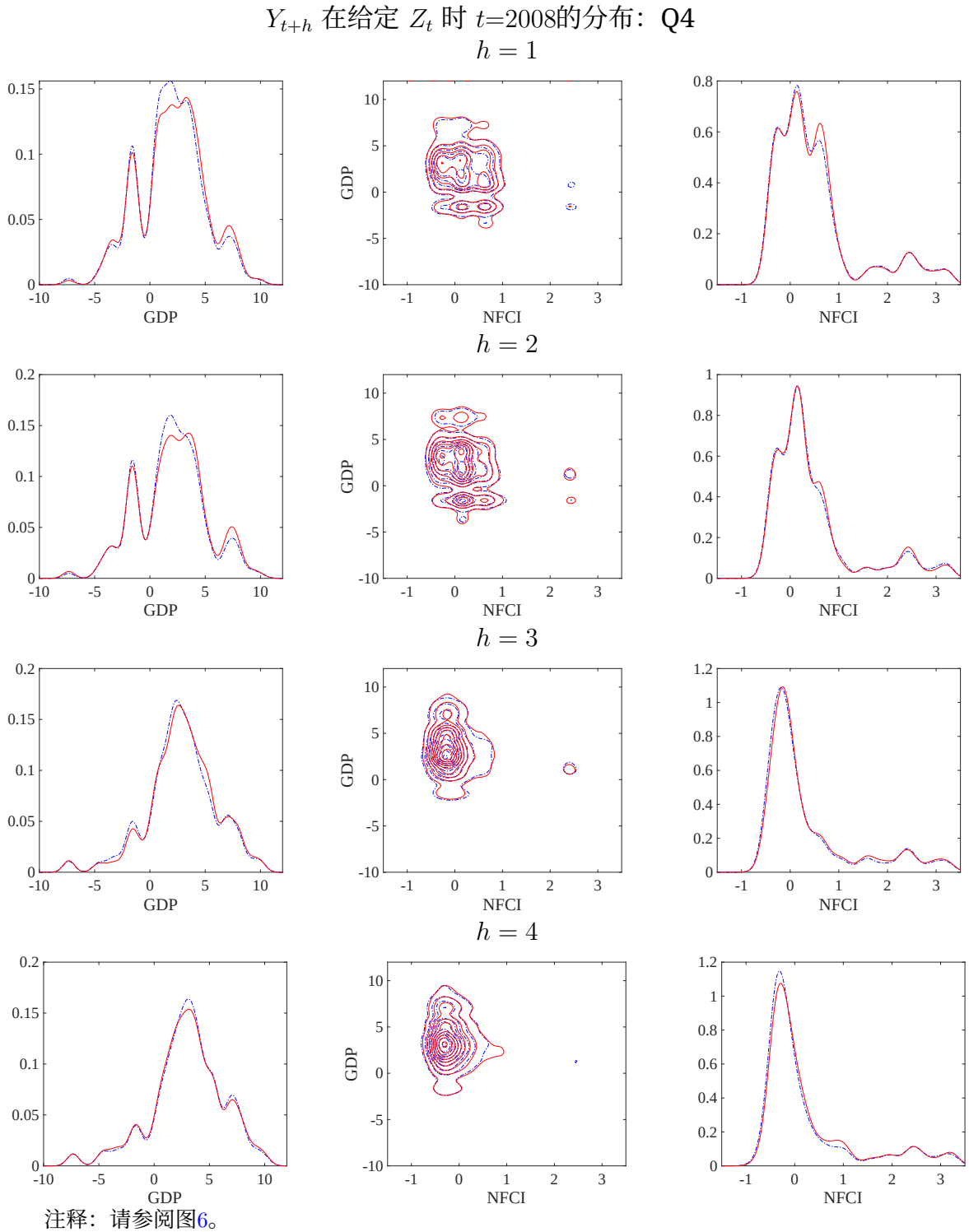
利用 2008年第四季度实际国内生产总值增长的分布冲击，我们研究从 2009年第一季度到 2009年第四季度这一年间的分布脉冲响应函数，对应的预测期分别为 $h = 1$、2、3 和 4 个季度。图 8展示了该脉冲对 NFCI 和实际国内生产总值增长的整个分布所产生的动态影响，其中基准分布和反事实分布分别以蓝色和红色绘出。在所有预测期内，NFCI 和实际国内生产总值增长的基准分布与反事实分布之间都存在细微差异。

表2：对 GDP 冲击的 QIR 和 MIR

变量			NFCI					GDP				
		h	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
分位数	0.05	Base	0.01	-0.37	-0.36	-0.41	-0.50	-2.10	-3.03	-3.03	-2.10	-3.03
		Diff	0.00	0.02	0.00	0.00	0.03	3.64	0.00	-0.59	0.00	0.00
	0.25	Base	0.15	-0.10	-0.12	-0.24	-0.37	0.68	0.40	0.11	1.20	1.36
		Diff	0.00	0.01	0.02	0.08	0.02	1.84	0.11	0.00	0.10	-0.06
	0.5	Base	0.55	0.18	0.17	-0.10	-0.14	2.03	2.00	2.00	2.90	3.04
		Diff	0.00	0.06	0.01	0.08	0.02	1.39	0.10	0.10	0.10	0.00
	0.75	Base	1.00	0.68	0.62	0.55	0.31	3.20	3.60	3.80	4.67	5.11
		Diff	0.00	0.00	0.00	0.07	0.09	1.25	0.30	0.10	0.17	0.00
	0.95	Base	2.47	2.55	2.55	2.55	2.55	5.50	7.06	7.44	8.10	7.78
		Diff	0.00	0.00	-0.08	0.00	0.00	0.81	0.38	0.34	0.00	0.32
矩	Mean	Base	0.70	0.50	0.46	0.35	0.24	1.84	1.88	1.87	2.79	2.99
		Diff	0.00	0.01	0.00	0.05	0.05	1.77	0.17	0.16	0.17	-0.05
	Std	Base	0.77	0.87	0.88	0.95	0.98	2.46	2.91	3.02	3.10	3.23
		Diff	0.00	-0.01	-0.01	0.01	0.00	-0.99	0.08	0.15	-0.03	0.06
	偏度	Base	1.59	1.56	1.69	1.66	1.77	-0.22	-0.09	-0.02	-0.39	-0.58
		Diff	0.00	0.00	-0.02	-0.10	-0.07	1.00	0.00	-0.09	-0.07	0.06
	峰度	Base	5.03	4.77	5.10	4.64	5.03	4.87	3.14	3.11	3.85	3.86
		Diff	0.00	0.07	-0.07	-0.33	-0.18	-1.11	-0.27	-0.13	0.20	-0.17

注释：参见表1。

图8：对 GDP 冲击的分布响应



注释：请参阅图6。

我们进一步探讨表 2中呈现的分位数和矩脉冲响应函数，以绘制更

具体比较如下。首先，NFCI在未来一至四个季度的分位数脉冲响应函数和矩脉冲响应函数均接近0。对于实际国内生产总值增长，未来一至两个季度的反事实分布相比基准分布，右尾略厚，均值也更高。然而，对于更远期的预测期，反事实分布与基准分布几乎完全相同。因此，在NFCI分布没有相应改善的情况下，降低2008年第四季度实际国内生产总值增长为负的可能性，只会提高短期内经济活动为正的可能性，并不会显著影响NFCI，即使在随后的季度也是如此。

我们在附录 B 中进一步探讨这一实证应用。第 B.1 节介绍如何从多期预测分布中模拟结果变量样本。第 B.2 节考察采用不同排序、但模型设定相同的情形，其中 Y_{1t} 表示实际国内生产总值增长，Y_{2t} 表示季度芝加哥联储全国金融状况指数。结果表明，变量排序不会显著影响多期预测分布的估计。第 Adrian等人 (2021) 在第 B.3 节介绍的核回归方法与本文提出的方法进行了比较。结果表明，核回归方法的表现对带宽较为敏感，而本文提出的 DR 方法在提取这一条件分布方面表现更优，尤其是在 NFCI 分布方面。第 B.4 节探讨了在系统中使用月度芝加哥联储全国金融状况指数，以及基于两个滞后项的四维混频模型；该模型将三个逐月的 NFCI 序列视为一个季度内的独立观测值。基于此模型，我们重新考察了分布预测和反事实分析。对于每种情景，我们使用移动区块自助法估计整个分布的95%置信带以及密度脉冲响应，结果见第 B.5 节。

5 结论

本研究提出一种灵活的半参数方法，用于刻画多元时间序列的条件联合分布。由此得到的分布脉冲响应函数能够更全面地呈现动态异质性。

此外，本文还推导了条件分布估计量及其变换的渐近性质。基于对美国实际国内生产总值增长和NFCI的分析，实证结果证实了文献中的一些既有发现：第一，紧缩的金融状况会使条件联合分布呈现多峰性。第二，对金融状况上尾的限制会显著影响长期GDP增长。然而，纳入更多滞后信息后，所提出模型关于全球金融危机期间限制GDP下尾所产生影响的结果表明，其对金融状况的影响可以忽略不计。

参考文献

Adrian, T., N. Boyarchenko 和 D. Giannone（2019）。脆弱性增长。《美国经济评论》109（4），1263–89。Adrian, T., N. Boyarchenko 和 D. Giannone（2021）。宏观金融动态中的多峰性。《国际经济评论》62（2），861–886。Antol´ın-D´ıaz, J. 和 J. F. Rubio-Ram´ırez（2018）。结构向量自回归模型的叙事符号限制。《美国经济评论》108（10），2802–29。Arcones, M. A. 和 B. Yu（1994）。平稳混合序列的经验过程与 U 过程的中心极限定理。《理论概率杂志》7（1），47–71。Blanchard, O. J. 和 D. Quah（1989）。总需求和供给冲击的动态效应。《美国经济评论》79（4），655–673。Bloom, N.（2009）。不确定性冲击的影响。《计量经济学》77（3），623–685。Boyd, S., S. P. Boyd 和 L. Vandenberghe（2004）。凸优化。剑桥大学出版社。Bradley, R. C.（1985）。绝对正则性条件下的中心极限问题。《概率年刊》13（4），1314–1325。Carriero, A., T. E. Clark 和 M. G. Marcellino（2020）。利用贝叶斯向量自回归捕捉宏观经济尾部风险。工作论文 20-02R，克利夫兰联邦储备银行。Chavleishvili, S. 和 S. Manganelli（2019）。利用分位数向量自回归进行预测和压力测试。技术报告。Chernozhukov, V., I. Fernandez-Val 和 A. Galichon（2009）。通过重排改进单调函数的点估计量和区间估计量。《生物统计学》96（3），559–575。Chernozhukov, V., I. Fern´andez-Val 和 B. Melly（2013）。反事实分布的推断。《计量经济学》81（6），2205–2268。Chernozhukov, V., I. Fernandez-Val 和 M. Weidner（2020）。通过分布回归研究网络和面板分位数效应。《计量经济学杂志》。Chetverikov, D., A. Santos 和 A. M. Shaikh（2018）。形状限制计量经济学。《经济学年度评论》10，31–63。Clark, T. E., F. Huber, G. Koop, M. Marcellino 和 M. Pfarrhofer（2021）。利用多元贝叶斯加性回归树进行尾部预测。工作论文 21-08R，克利夫兰联邦储备银行。Foresi, S. 和 F. Peracchi（1995）。超额收益的条件分布：实证分析。《美国统计学会会刊》90（430），451–466。Gertler, M. 和 S. Gilchrist（2018）。发生了什么：大衰退中的金融因素。《经济展望杂志》32（3），3–30。

Hall, P., R. C. Wolff 和 Q. Yao（1999）。条件分布函数的估计方法。《美国统计学会会刊》94（445），154–163。Huber, P. J.（1967）。非标准条件下最大似然估计的行为。载于《第五届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，第1卷：统计学，第221–233页。加利福尼亚州伯克利：加州大学出版社。Jord`a, `O.（2005）。通过局部投影估计和推断脉冲响应。《美国经济评论》95（1），161–182。Jurado, K., S. C. Ludvigson 和 S. Ng（2015）。衡量不确定性。《美国经济评论》105（3），1177–1216。Kato, K.（2009）。argmin过程的渐近性质：凸性论证。《多元分析杂志》100（8），1816–1829。
Kilian, L. 和 H. L¨utkepohl（2017）。结构向量自回归分析。剑桥大学出版社。
Koenker, R. 和 J. G. Bassett（1978）。回归分位数。《计量经济学：计量经济学会期刊》，33–50。Koenker, R. 和 Z. Xiao（2004）。单位根分位数自回归推断。《美国统计学会会刊》99（467），775–787。Koenker, R. 和 Z. Xiao（2006）。分位数自回归。《美国统计学会会刊》101（475），980–990。Kunsch, H. R.（1989）。一般平稳观测的刀切法与自助法。《统计学年刊》，1217–1241。Litterman, R. B.（1986）。利用贝叶斯向量自回归进行预测——五年的经验。《商业与经济统计期刊》4（1），25–38。Liu, R. Y. 和 K. Singh （ 1992 ）。重抽样的效率与稳健性。《统计学年刊》 20 （ 1 ），370–384。McCracken, M. W. 和 J. T. McGillicuddy（2019）。直接与迭代多步条件预测的实证研究。《应用计量经济学期刊》34（2），181–204。Meier, J.（2020）。多元分布回归。技术报告，伯尔尼大学，经济系。Montes-Rojas, G.（2019）。多元分位数脉冲响应函数。《时间序列分析期刊》40（5），739–752。Nolan, D. 和 D. Pollard（1987）。U过程：收敛速率。《统计学年刊》，780–799。Pakes, A. 和 D. Pollard（1989）。模拟与优化估计量的渐近性质。《计量经济学：计量经济学会期刊》，1027–1057。

Plagborg-Møller, M. 和 C. K. Wolf（2021）。局部投影与向量自回归估计出相同的脉冲响应。《计量经济学》89（2），955–980。Politis, D. N. 和 J. P. Romano（1994）。平稳自助法。《美国统计学会会刊》89（428），1303–1313。Politis, D. N.、J. P. Romano 和 M. Wolf（1997）。异方差时间序列的子抽样。《计量经济学杂志》81（2），281–317。Pollard, D.（1984）。随机过程的收敛（第1版，1984年版）。施普林格统计学丛书。Pollard, D.（1991）。最小绝对偏差回归估计量的渐近性质。《计量经济学理论》7（2），186–199。Primiceri, G. E.（2005）。时变结构向量自回归与货币政策。《经济研究评论》72（3），821–852。Rio, E.（1998）。绝对正则经验过程与普适熵。《概率论及相关领域》111（4），585–608。Rossi, B. 和 T. Sekhposyan（2019）。条件预测密度正确设定的替代检验。《计量经济学杂志》208（2），638–657。Rothe, C. 和 D. Wied（2013）。一类条件分布模型中的错设检验。《美国统计学会会刊》108（501），314–324。Rubio-Ramirez, J. F.、D. F. Waggoner 和 T. Zha（2010）。结构向量自回归：识别理论与推断算法。《经济研究评论》77（2），665–696。Sims, C. A.（1980）。《宏观经济学与现实》。《计量经济学》48（1），1–48。Stock, J. H. 和 M. W. Watson（2001）。向量自回归。《经济学展望杂志》15（4），101–115。van der Vaart, A.（1994）。平滑经验过程的弱收敛。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，501–504。van der Vaart, A. 和 J. Wellner（1996）。弱收敛与经验过程：统计学中的应用。施普林格科学与商业媒体。Wang, Y.、T. Oka 和 D. Zhu（2022年三月）。双变量分布回归及其在保险数据中的应用。论文2203.12228，arXiv.org。White, H.（1982）。错设模型的最大似然估计。《计量经济学》50（1），1–25。White, H.、T.-H. Kim 和 S. Manganelli（2015）。用于风险价值的向量自回归：利用多元回归分位数测量尾部依赖。《计量经济学杂志》187（1），169–188。Williams, O. D. 和 J. E. Grizzle（1972）。具有有序响应类别的列联表分析。《美国统计学会会刊》67（337），55–63。

附录

A 理论结果

我们将使用经验过程文献中的一些记号和结果。有关更多细节，请参阅vander Vaart (1994)和Pollard (1984)。令 $\mathcal{F}$ 表示一个带有包络函数 F的实值（可测）函数类。给定 $\epsilon \in (0, 1)$和 $p \geq 1$，$N\big(\epsilon\|F\|_{Q,p}, \mathcal{F}, L_p(Q)\big)$ 表示相对于某个概率测度 Q的 $\mathcal{F}$的覆盖数，其定义为相对于 $L_p(Q)$-范数$\|\cdot\|_{Q,p} := (Q|\cdot|^p)^{1/p}$的 $\mathcal{F}$的$_p$-覆盖的最小基数$\epsilon\|F\|_{Q,}$。如果存在常数 A 和 V 使得，类 $\mathcal{F}$就称为关于包络函数 F的欧几里得类

$$N\big(\epsilon\|F\|_{Q,1}, \mathcal{F}, L_1(Q)\big) \leq A\epsilon^{-V},$$

对于所有 $\epsilon \in (0, 1]$ 以及所有测度 Q，只要 $QF \in (0, \infty)$。可以证明，若 $\mathcal{F}$ 是欧几里得类，则对每个 $p > 1$,

$$N\big(\epsilon\|F\|_{Q,p}, \mathcal{F}, L_p(Q)\big) \leq A2^{pV}\epsilon^{-pV}, \tag{A.1}$$

只要 $QF^p \in (0, \infty)$。例如，参见 诺兰和波拉德 (1987)。

我们定义 $\psi_y(\theta) := [\psi_{y,1}(\theta_1)^\top, \ldots, \psi_{y,J}(\theta_J)^\top]^\top$对于 $(\theta, y) \in \Theta \times \mathcal{Y}$，其中

$$\psi_{y,j}(\theta_j) := \big[\Lambda\big(\phi_j(X_{jt})^\top\theta_j\big) - 1\!\!1\{Y_{jt} \leq y_j\}\big]R\big(\phi_j(X_{jt})^\top\theta_j\big)\phi_j(X_{jt}).$$

下面的引理表明函数类 $\{\psi_y(\theta(y)) : y \in \mathcal{Y}\}$具有 Donsker性质

引理 A.1. 假设假设 A1-A2 成立。则，函数类 $\{\psi_y(\theta(y)) : y \in \mathcal{Y}\}$ 是 Donsker 类，且具有平方可积包络函数。

证明。对于每个 $j = 1, \ldots, J$，我们定义函数类,

$$\mathcal{H}_j := \{x_j \mapsto \phi_j(x_j)^\top\theta_j : \theta_j \in \Theta_j\} \quad \text{and} \quad \mathcal{I}_j := \{v_j \mapsto 1\!\!1\{v_j \leq y_j\} : y_j \in \mathcal{Y}_j\}.$$

van der Vaart 和 Wellner 的引理 2.6.15（1996年）表明， $\mathcal{H}_j$ 和 $\mathcal{I}_j$ 是 VC-下图类。令 $\mathcal{G}_j := \{x_j \mapsto \phi_j(x_j)^\top\theta_j(y_j) : y_j \in \mathcal{Y}_j\}$对于 $j = 1$、.....、J，我们可以写成

$\mathcal{G}_j = \mathcal{H}_j \circ \theta(\cdot)$。根据 van der Vaart 和 Wellner（1996）的引理 2.6.18 (vii) 和 (viii)，类 $\mathcal{G}_j$ 及其单调变换 $\Lambda(\mathcal{G}_j)$ 分别是 VC-下图类。由于变换 ϕ_j: $\mathcal{X}_j \to \mathbb{R}^{d_j}$，我们可以写成 $\phi_j(x_j) \equiv [\phi_j^{(1)}(x_j) \ldots, \phi^{(d_j)}{}_j(x_j)]^\top$。van der Vaart 和 Wellner （1996）的引理 2.6.18 (vi) 表明，$\Lambda(\mathcal{G}_j) \cdot \phi_j^{(\ell)}$ 和 $\mathcal{I}_j \cdot \phi_j^{(\ell)}$ 是 VC-下图类。

由于根据Pollard （1984）的引理 II.25，所有 VC 类都是欧几里得类，因此类$\Lambda(\mathcal{G}_j) \cdot \phi_j^{(\ell)}$ 和 $\mathcal{I}_j \cdot \phi_j^{(\ell)}$ 都是具有包络函数 $|\phi_j^{(\ell)}|$的欧几里得类。此外，根据假设 A2，$R(\cdot)$连续可微且具有一致有界导数，因此对于某个常数 M，$|R'(\cdot)| \le M$一致成立。由此可知，对于任意 $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_j$满足 $\|g_2 - g_1\|_{Q,\ 1} < \epsilon/M$，我们可以证明

$$\|R(g_2) - R(g_1)\|_{Q,1} \le M\|g_2 - g_1\|_{Q,1} \le \epsilon.$$

由于 $\mathcal{G}_j$ 是欧几里得类，因此对于某些常数 A_j 和 V_j，有

$$N\big(\epsilon\|\bar{R}_j\|_{Q,1}, R(\mathcal{G}_j), L_1(Q)\big) \le N\big((\epsilon/M)\|G_j\|_{Q,1}, \mathcal{G}_j, L_1(Q)\big) \le (A_j M^{V_j})\epsilon^{-V_j},$$

¯因此，$R(G_j)$是具有包络函数 R_j 的欧几里得类：$= R(g_{j,\ 0}) + c(|g_{j,\ 0}| + G_j)$，其中某个 $g_{j,\ 0} \in \mathcal{G}_j$成立。Nolan andPollard （1987）的引理 19 和推论 17表明，欧几里得类之和仍是欧几里得类；Pakes andPollard （1989）的引理 2.14（ii）表明，欧几里得类之积仍是欧几里得类。因此，函数类 $\mathcal{F}_{(\ell)j} := \{\{[\Lambda(\mathcal{G}_j) - \mathcal{I}_j]R(\mathcal{G}_j)\phi_j^{(\ell)}\}$是具有包络函数 $F_j^{(\ell)}$ 的欧几里得类：对于每个 $j = 1, \ldots, J$和 $\ell = 1, \ldots, d_j$，$= |\phi_j^{(\ell)}| \cdot \bar{R}_j$成立。于是，向量 $\psi_y\big(\theta(y)\big)$ 的每个分量都是以下函数欧几里得类中的一个元素：

$$\mathcal{F} := \cup_{j=1}^{J} \cup_{\ell=1}^{d_j} \mathcal{F}_j^{(\ell)}.$$

由（A.1）可知，对于某些常数 $A_j^{(\ell)}$ 和 $V_j^{(\ell)}$，

$$N\big(\epsilon\|\bar{F}_j^{(\ell)}\|_{Q,2}, \mathcal{F}_j^{(\ell)}, L_2(Q)\big) \le A_j^{(\ell)} 2^{2V_j^{(\ell)}} \epsilon^{-2V_j^{(\ell)}},$$

对于每个 $j = 1, \ldots, J$ 和 $\ell = 1, \ldots, d_j$，因此我们可以证明

$$\int_0^1 \left(\sup_Q \log N(\epsilon\|F_j^{(\ell)}\|_{Q,2}, \mathcal{F}_j^{(\ell)}, L_2(Q)) \log(1/\epsilon) \right)^{1/2} d\epsilon < \infty.$$

This 结合Rio (1998的定理 1可知，类 $\mathcal{F}$ 是Donske的 r. ■

定理证明 ***1***. 首先，我们将推导 β-混合条件下双重稳健估计量的渐近线性表示。也就是说，我们将证明该结论对 $y \in \mathcal{Y}$ 一致成立，

$$\sqrt{T}\{\widehat{\theta}(y) - \theta(y)\} = -\big(H(y)\big)^{-1}\widehat{\Psi}_y\big(\theta(y)\big) + o_p(1). \tag{A.2}$$

由于 $\widehat{\theta}(y)$和 $\theta(y)$分别由子向量 $\{\widehat{\theta}_j(y_j)\}_{j=1}^J$ 和 $\{\theta_j(y_j)\}_{j=1}^J$ 组成，且具有有限的J，因此只需证明：对于每个 $j = 1$，.....， J，在 $y_j \in \mathcal{Y}_j$上一致地，

$$\sqrt{T}\{\widehat{\theta}_j(y_j) - \theta_j(y_j)\} = -\big(H_j(y_j)\big)^{-1}\widehat{\Psi}_{y,j}\big(\theta_j(y_j)\big) + o_p(1). \tag{A.3}$$

固定 $j \in \{1, \ldots, J\}$，并令 M为有限正数。为简化符号，我们定义给定 $\delta_j \in \mathbb{R}^{d_j}$的局部化目标函数

$$\widehat{Q}_{y,j}(\delta_j) := \widehat{\ell}_{y,j}\big(\theta_j(y_j) + T^{-1/2}\delta_j\big) - \widehat{\ell}_{y,j}\big(\theta_j(y_j)\big).$$

于是，估计量 $\widehat{\delta}_j(y_j)$: $= \sqrt{T}\big(\widehat{\theta}_j(y_j) - \theta_j(y_j)\big)$是$\max_{\delta_j \in \mathbb{R}^{d_j}} \widehat{Q}_{y,\,j}(\delta_j)$的解。

^在假设A.2下，映射$\delta_j \mapsto Q_{y,\,j}(\delta_j)$是二阶连续可微的，因此我们可以证明

$$T\widehat{Q}_{y,j}(\delta_j) = \delta_j^\top \widehat{\Psi}_{y,j}\big(\theta_j(y_j)\big) + \frac{1}{2}\delta_j^\top \widehat{H}_j(y_j)\big(\theta_j(y_j)\big)\delta_j + o(T^{-1}\|\delta_j\|^2),$$

关于 $y_j \in \mathcal{Y}_j$ 一致地，对于每个满足 $\|\delta_j\| \le M$ 的固定 δ_j。此外，根据一致大数定律，我们可以证明 $H_j(y_j) \to^p H_j(y_j)$ 关于 $y_j \in \mathcal{Y}_j$ 一致。因此，对于每个满足$\|\delta_j\| \le M$的 δ_j，我们可以证明 $\sup_{y_j \in \mathcal{Y}_j} \big|\widehat{Q}_{y,\,j}(\delta_j) - \widetilde{Q}_{y,\,j}(\delta_j)\big| = o_p(T^{-1})$，其中

$$T\widetilde{Q}_{y,j}(\delta_j) := \delta_j^\top \widehat{\Psi}_{y,j}\big(\theta_j(y_j)\big) + \frac{1}{2}\delta_j^\top H_j(y_j)\delta_j.$$

凸性引理（参见 Pollard，1991；Kato，2009）将逐点收敛扩展为一致收敛，因此，在假设 A2 下，δ_j

$$\sup_{y_j \in \mathcal{Y}_j} \sup_{\delta_j : \|\delta_j\| \le M} \big|\widehat{Q}_{y,j}(\delta_j) - \widetilde{Q}_{y,j}(\delta_j)\big| = o_p(T^{-1}). \tag{A.4}$$

令 $\widetilde{\delta}_j(y_j) := -\big(H_j(y_j)\big)^{-1}\widehat{\Psi}_{y,\ j}\big(\theta_j(y_j)\big)$，其最大化了 $\widetilde{Q}_{y,\ j}(\delta_j)$。那么，通过简单的代数运算可得，对于任意 δ_j，存在某个常数 $c>0$,

$$\widetilde{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)\big) - \widetilde{Q}_{y,j}\big(\delta_j\big) = -\frac{1}{2T}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)-\delta_j\big)^\top H_j(y_j)\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)-\delta_j\big) \geq \frac{c}{2T}\|\widetilde{\delta}_j(y_j)-\delta_j\|^2, \tag{A.5}$$

其中，最后一个不等式是因为在假设 A2 下，$H_j(y_j)$负定。对于包含 $\delta_j(y_j)$ 的任意子集 $D\subseteq\mathbb{R}^{d_j}$，应用三角不等式可得

$$\begin{aligned} 2\sup_{\delta_j\in D}\big|\widehat{Q}_{y,j}(\delta_j)-\widetilde{Q}_{y,j}(\delta_j)\big| \ \geq\ & \sup_{\delta_j\in D}\big\{\widetilde{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)\big)-\widetilde{Q}_{y,j}\big(\delta_j\big)\big\} \\ & -\sup_{\delta_j\in D}\big\{\widehat{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)\big)-\widehat{Q}_{y,j}(\delta_j)\big\}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

令 $\eta>0$ 为任意常数。由于假设 A2 下的凹性，差商满足：对于任意 $\zeta>\eta$，以及 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中单位球面 S^{d_1} 上的任意 $v\in S^{d_1}$，

$$\frac{\widehat{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)+\eta v\big)-\widehat{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)\big)}{\eta} \geq \frac{\widehat{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)+\zeta v\big)-\widehat{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)\big)}{\zeta}.$$

这个关于集合 $\widetilde{D}_j(\eta) := \big\{\delta_j\in\mathbb{R}^{d_j}:\ \|\delta_j-\widetilde{\delta}_j(y_j)\|\leq\eta\big\}$ 的不等式表明，给定事件 $\big\{\sup_{y\in\mathcal{Y}_j}\|\widehat{\delta}_j(y_j)-\widetilde{\delta}_j(y_j)\|\geq\eta\big\}$，对于任意 $y_j\in\mathcal{Y}_j$，我们有

$$\sup_{\delta_j\in\widetilde{D}_j(\eta)}\ \widehat{Q}_{y,j}(\delta_j)-\widehat{Q}_{y,j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)\big)\geq 0, \tag{A.7}$$

其中，最后一个不等式是因为$\widehat{Q}_{y,\ j}\big(\widehat{\delta}_j(y_j)\big)-\widehat{Q}_{y,\ j}\big(\widetilde{\delta}_j(y_j)\big)\geq 0$，根据 $\widehat{\delta}_j(y_j)$ 的定义。由 (A.5)-(A.7) 可知，给定事件 $\big\{\sup_{y\in\mathcal{Y}_j}\|\widehat{\delta}_j(y_j)-\widetilde{\delta}_j(y_j)\|\geq\eta\big\}$,

$$\sup_{\delta_j\in\widetilde{D}_j(\eta)}\big|\widehat{Q}_{y,j}(\delta_j)-\widetilde{Q}_{y,j}(\delta_j)\big|\geq\frac{c}{4T}\eta^2.$$

由于 $\widehat{\Psi}_{y,j}\big(\theta(y_j)\big)$ 根据引理 A.1是 Donsker 类，因此我们可以证明，对于任意 $\xi>0$，存在一个常数 C使得 $\Pr\big(\sup_{y_j\in\mathcal{Y}_j}\|\widetilde{\delta}_j(y_j)\|\geq C\big)\leq\xi$当 T足够大时成立。因此，上述公式意味着

$$\Pr\left(\sup_{y_j\in\mathcal{Y}_j}\|\widehat{\delta}_j(y_j)-\widetilde{\delta}_j(y_j)\|\geq\eta\right)\leq\Pr\left(\sup_{y_j\in\mathcal{Y}_j}\sup_{\delta_j:\|\delta_j\|\leq\eta+C}\big|\widehat{Q}_{y,j}(\delta_j)-\widetilde{Q}_{y,j}(\delta_j)\big|>\frac{c}{4T}\eta^2\right)+\xi,$$

当 T足够大时成立。由（A.4）可知，上述等式右侧的第一项在 $T \to \infty$时收敛于 0。因此，我们得到（A.3），这意味着（A.2）。

现在，引理 A.1 表明，经验过程 $\widehat{\Psi}_y\big(\theta(y)\big)$ 在 $\mathcal{Y}$ 上随机等度连续。有限维收敛由 β-混合过程的中心极限定理（定理 4，Bradley，1985）得出。结合映射 $y \mapsto \widehat{\Psi}\big(\theta(y)\big)$ 的随机等度连续性，可得 $\widehat{\Psi}(\cdot)$ $\mathbb{B}(\cdot)$ 在 $\times_{j=1}^{J} \ell^\infty(\mathcal{Y}_j)^{d_j}$ 中收敛，其中 $\mathbb{B}(\cdot)$ 是均值为零、协方差函数由定理 1 定义的高斯过程。■

定理 *2* 的证明。(a) 在假设 A1-A3 下，映射 $\varphi(\cdot)$ 在 $\theta(\cdot)$ 处沿着 $\mathbb{D}$ Hadamard 可微，其导数映射为 $b := (b_1, \ldots, b_J) \mapsto \varphi'_{\theta(\cdot)}(b)$，其表达式如下：

$$\varphi'_{\theta(\cdot)}(b)(x,y) = \begin{bmatrix} \lambda\big(\phi_1(x_1)^\top \theta_1(y_1)\big)\phi_1(x_1)^\top b_1(y_1) \\ \vdots \\ \lambda\big(\phi_J(x_1)^\top \theta_J(y_J)\big)\phi_J(x_J)^\top b_J(y_J) \end{bmatrix}.$$

然后，我们可以写成 $\big(\widehat{F}_{Y_{1t}|X_{1t}}, \ldots, \widehat{F}_{Y_{Jt}|X_{Jt}}\big)^\top = \varphi\big(\widehat{\theta}(\cdot)\big)$ 和 $\big(F_{Y_{1t}|X_{1t}}, \ldots, F_{Y_{Jt}|X_{Jt}}\big)^\top = \varphi\big(\theta(\cdot)\big)$。结合定理 1的结果应用函数型 delta 方法，我们可以证明

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix} \widehat{F}_{Y_{1t}|X_{1t}} - F_{Y_{1t}|X_{1t}} \\ \vdots \\ \widehat{F}_{Y_{Jt}|X_{Jt}} - F_{Y_{Jt}|X_{Jt}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi'_{\theta(\cdot)}(\mathbb{B}) \quad \text{in} \quad \times_{j=1}^{J} \ell^\infty(\mathcal{X}_j \times \mathcal{Y}_j).$$

(b) Hadamard可微映射的链式法则（引理 3.9.3，van der Vaart 和 Wellner，1996 年）表明 $\nu \circ \varphi : \mathbb{D}_\varphi \to \ell^\infty(\mathcal{Z} \times \mathcal{Y})$ 在 θ 处沿 $\mathbb{D}$Hadamard 可微，其导数为 $\nu'_{\varphi(\theta(\cdot))} \circ \varphi'_{\theta(\cdot)}$。应用函数型 delta 方法即可得出所需结论。■

B 实证应用的补充结果

我们进一步给出实证应用的结果。第 B.1节介绍了如何从多期预测分布中模拟结果变量样本。第B.2节中，我们考虑与第 4节相同的模型设定，但采用另一种排序，其中 Y_{1t} 表示实际国内生产总值增长，而 Y_{2t} 表示季度芝加哥联储全国金融状况指数。我们将所提出的方法与 Adrian等人(2021) 在第 B.3节介绍的核回归方法进行比较。第 B.4节中，我们探讨在系统中使用月度芝加哥联储全国金融状况指数，以及在给定两个滞后项的条件下采用四维混频模型，并将三个逐月的芝加哥联储全国金融状况指数序列视为一个季度内的独立观测值。基于该模型，我们重新考察分布预测和反事实分析。最后，在第 B.5节中，我们针对每种情景，使用移动区块自助法估计分布的95%置信带以及密度脉冲响应，并展示结果。

B.1 从联合条件分布中抽样

我们说明如何基于模型（ Y_t 8）从估计得到的联合条件^分布 $F_{Y_t|Z_t}(\cdot|z)$生成随机数。我们假设，对于 j第个元素 Y_{jt},

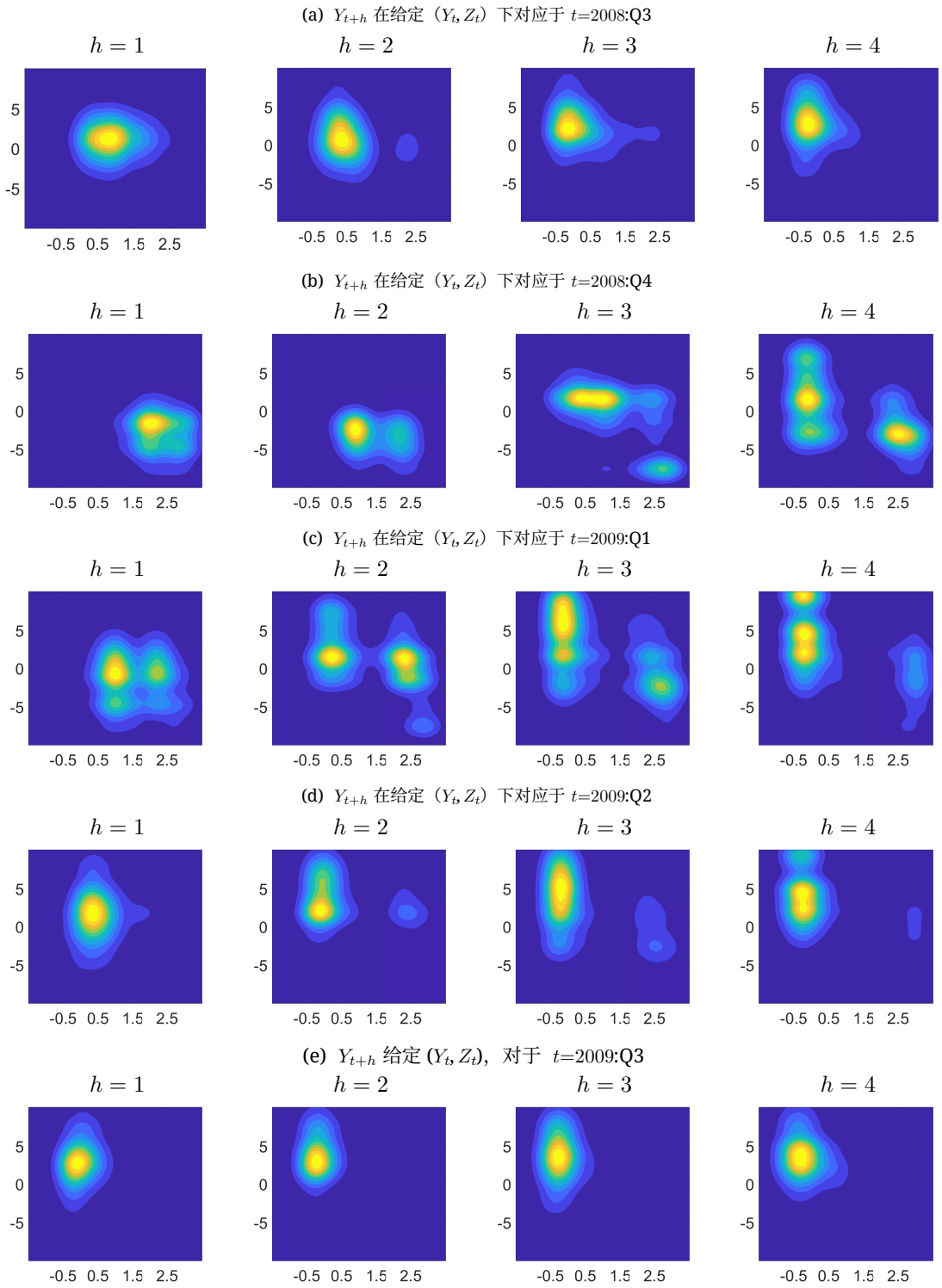
^ ~条件累积分布函数 $F_{Y_{jt}|X_{jt}}(\cdot|x_j)$由 DR 方法在一组有限点上估计， $\mathcal{Y}_j \subseteq \mathcal{Y}_j$对每个 $j = 1$, ..., J。

^算法 1：生成 S 随机样本的算法，从 $F_{Y_t|Z_t}(\cdot|z)$中抽取 Y_t 对于 $s = 1$, ..., S，执行：1. 令 $j = 1$ ，并设置协变量 $x_1^{(s)} = (1, z^\top)^\top$。2. 生成一个标准均匀随机数： $u_j^{(s)} \sim U(0, 1)$。3. 求得 4. 令 $j = j + 1$ ，并设置 $x_{j+1}^{(s)} = \left(x_j^\top, y_j^{(s)}\right)^\top$。5. 重复步骤 2–4，直到 $j = J$。6. 输出： $\left(y_1^{(s)}, \ldots, y_J^{(s)}\right)$，它们是 Y_t的实现值构成的向量。

$$y_j^{(s)} = \min\left\{y_j \in \widetilde{\mathcal{Y}}_j : \widehat{F}_{Y_{jt}|X_{jt}}(y_j|x_j^{(s)}) < u_j^{(s)}\right\}.$$

B.2 不同排序下的联合条件分布

图 B.1：大衰退期间联合分布的等高线图

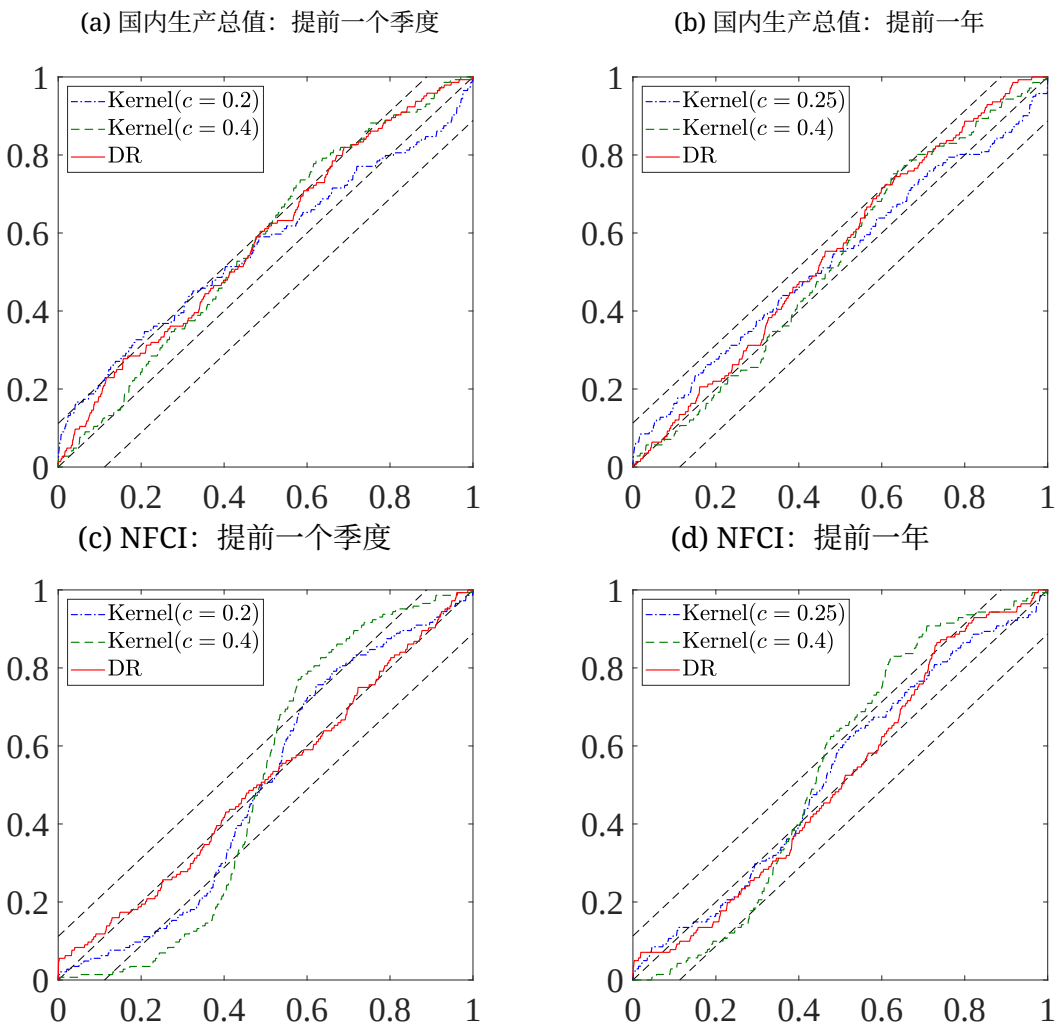


注：参见图 B.1。这些图基于第 4 节中的相同模型构建，但 Y_{1t} 代表国内生产总值，而 Y_{2t} 代表 NFCI。

B.3 与核回归的比较

最近，Adrian等人(2021)尝试用核回归方法构建金融状况与实际国内生产总值增长的联合分布。我们将自己的 DR 方法与核回归方法在估计预测分布方面进行比较。按照他们的做法，我们将带宽参数设定为与相应变量的样本内无条件标准差成正比，且采用单一的比例常数 c。

图 B.2：样本外概率积分变换的经验累积分布函数



注释：本图展示了通过 DR 方法（红色）、具有最优多期预测表现的核回归方法（绿色）和最优模型校准方法（蓝色）得到的概率积分变换的经验累积分布函数，以及正确校准原假设下概率积分变换的累积分布函数（45 度线）和 Rossi andSekhposyan (2019) 概率积分变换检验的 95%置信带（虚线）。

给定一个序列在 c 的取值中，我们找出能最大化预测准确度的那个值 -

所得到的多期条件联合分布（以对数预测得分衡量），以及能优化模型样本外校准（以概率积分变换衡量）的那个值。我们在图 B.2 中，将这两种情况下核回归的概率积分变换与我们的方法进行了比较。结果表明，采用适当的带宽时，核回归模型可以实现正确设定，而最大化预测准确度的带宽很可能会导致模型设定错误。

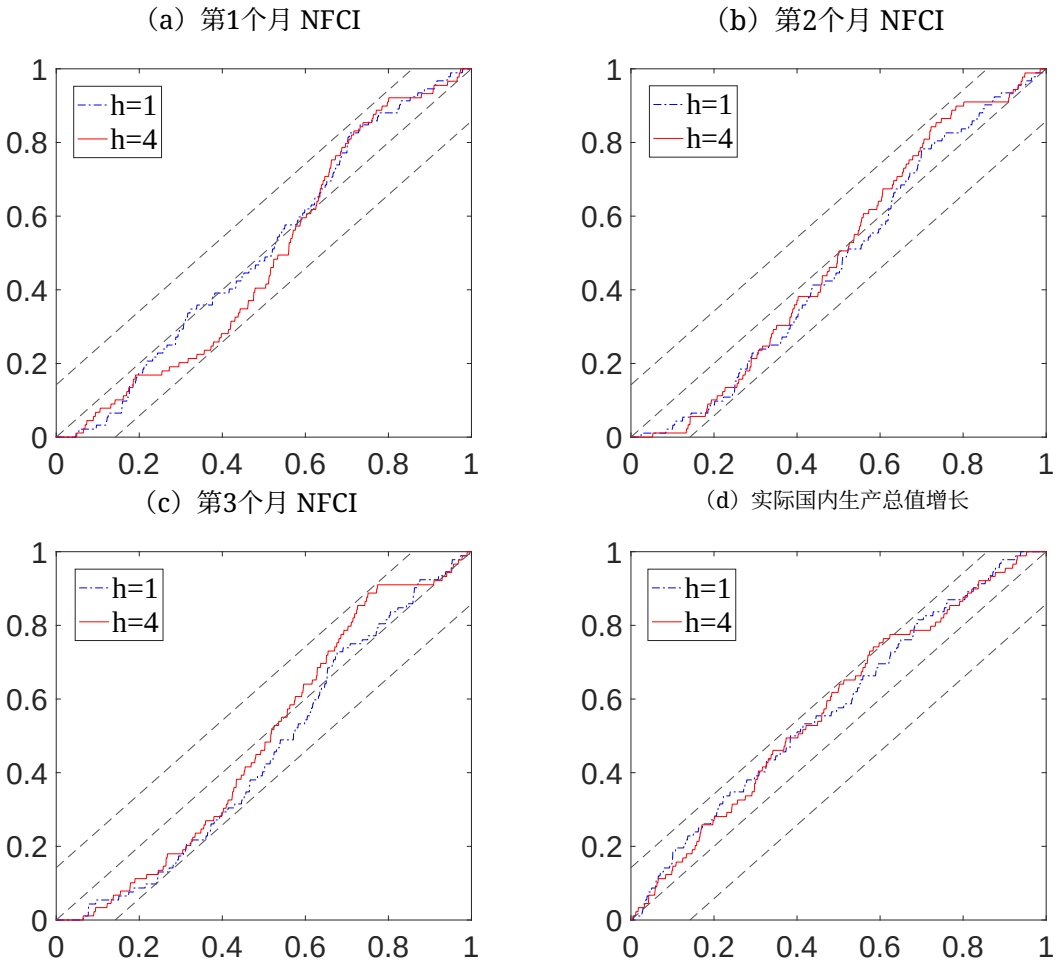
B.4 混频模型

我们进一步探讨在系统中使用月度金融状况，因为将月度可得的金融状况转换为季度序列往往会导致信息损失。

具体而言，我们通过对每周观测值取平均，将 NFCI 转换为月度频率。我们使用三个月度 NFCI 数据，而非之前使用的汇总季度 NFCI 数据，以提供对实际国内生产总值增长的最新观察。我们构建了一个四维混频模型，将三个 NFCI 月度序列视为一个季度内的独立观测值。令 Y_{jt}，$j = 1$、2、3 分别表示季度 j中的第几个月的 NFCI，t，并令 Y_{4t} 表示该模型中的实际国内生产总值增长。与第4节一样，我们将 $Z_t = (Y_{t-1}^\top,\ Y_{t-2}^\top)^\top$ 作为协变量，以刻画联合条件分布 $F_{Y_t|Z_t}$ 和 $F_{Y_{t+h}|Y_t,\ Z_t}$。采用这种模型设定，联合分布中有 8 个条件变量。众所周知，基于核的方法应用于多元数据时会受到所谓的“维数灾难”影响。然而，考虑到协变量之间的过度参数化和共线性，DR方法使我们能够轻松采用流行的正则化技术来提高预测准确性。在此应用中，我们在估计模型（2）时采用套索回归。

分布预测的样本外校准通过概率积分变换检验进行评估，结果见图B.3。对于所有变量，无论是提前一个季度还是一年，概率积分变换的经验累积分布函数都完全落在95%置信带内。将实际国内生产总值增长的结果与模型1（见图1）进行比较可见，使用更高频率的金融状况数据能够带来改进，尤其是对提前一个季度的预测。

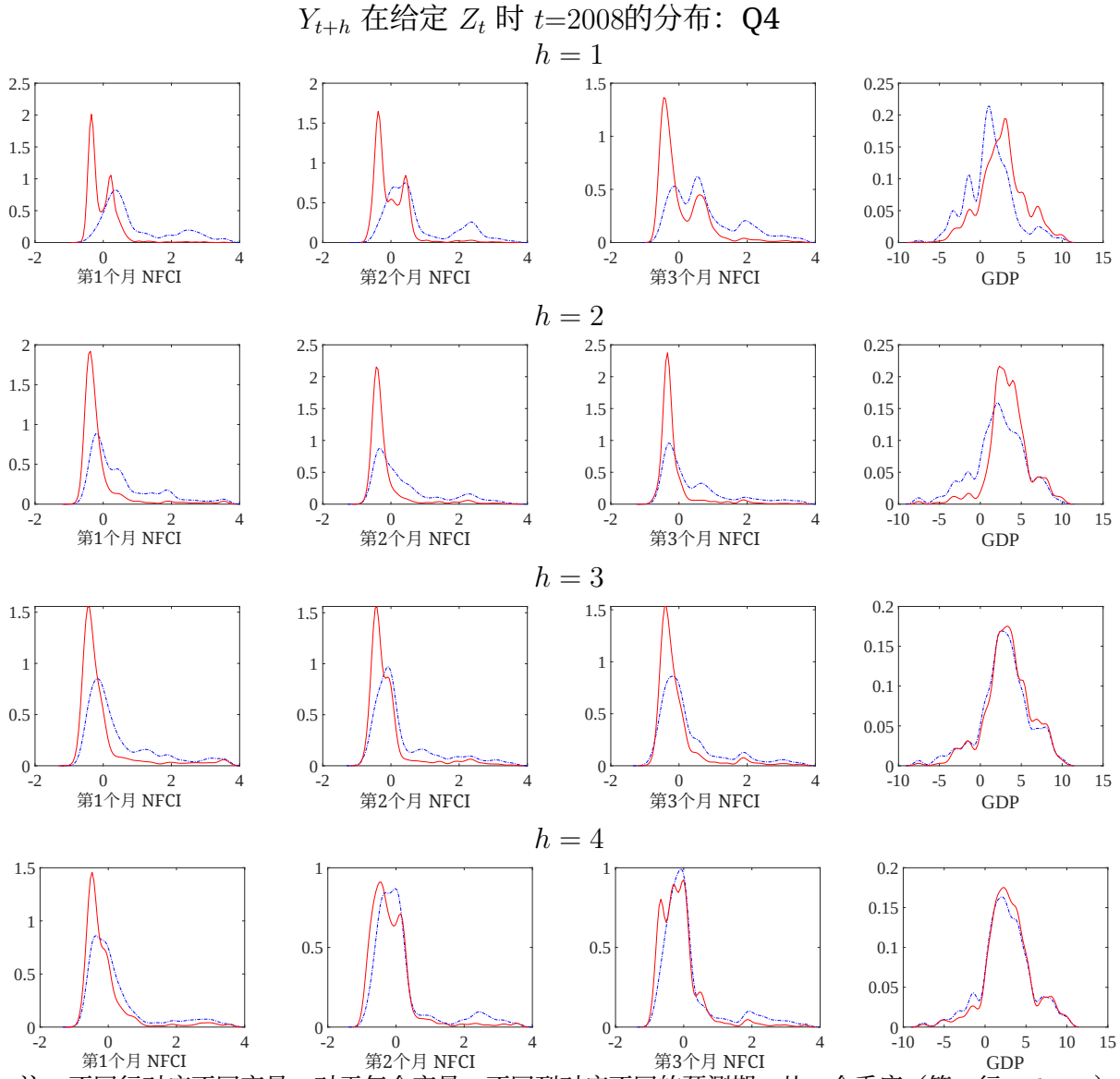
图 B.3：样本外概率积分变换的经验累积分布函数



注释：该图报告了三个月度金融状况指标和实际国内生产总值增长的概率积分变换的经验累积分布函数。针对不同变量的每个面板，图中绘制了提前一个季度（红色）和提前一年（蓝色）的概率积分变换经验累积分布函数，以及正确校准的零假设下概率积分变换的累积分布函数（45度线）和 Rossi andSekhposyan （2019）概率积分变换检验的95%置信带（虚线）。

现在，我们在这一模型设定下重新考察反事实分析。首先，我们考虑2008年第四季度第一个月 Y_{1t} 的相同反事实分布。图B.4展示了随后一年中各变量整个分布的脉冲响应结果。尽管可以得出与第4节相同的结论，但有更多证据表明脉冲效应具有持续性：2008年第四季度第一个月的扰动仍会影响2009年第四季度金融状况和实际国内生产总值增长的分布。

图 B.4：对 NFCI 冲击的分布响应



注：不同行对应不同变量；对于每个变量，不同列对应不同的预测期，从一个季度（第一行，$h = 1$）到四个季度（最后一行，$h = 4$），并基于截至 2008年第四季度可获得的全部信息。边际密度通过核密度估计构造，三个月度 NFCI 的带宽为 0.25，国内生产总值的带宽为 0.8。基准分布以蓝色表示，反事实分布以红色表示。

表B.1：QIR 对 NFCI 冲击

分位数（τ）		0.05		0.25		0.5		0.75		0.95	
	h	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff
NFCI1	0	0.62	-0.96	0.82	-0.96	1.03	-1.03	1.08	-0.96	2.31	-1.94
	1	-0.16	-0.26	0.25	-0.60	0.52	-0.70	1.47	-1.26	2.96	-2.41
	2	-0.36	-0.11	-0.19	-0.26	0.18	-0.51	1.03	-1.20	2.71	-1.24
	3	-0.45	-0.08	-0.21	-0.25	0.00	-0.41	0.82	-0.88	3.18	-0.87
	4	-0.51	-0.10	-0.41	-0.09	-0.06	-0.31	0.37	-0.39	2.71	-0.89
NFCI2	0	0.20	-0.58	0.45	-0.72	0.82	-0.96	1.89	-1.91	2.46	-2.04
	1	-0.30	-0.22	0.07	-0.45	0.45	-0.64	1.08	-0.71	2.71	-2.08
	2	-0.46	-0.07	-0.36	-0.11	0.07	-0.45	0.72	-0.93	2.46	-0.99
	3	-0.50	-0.09	-0.22	-0.21	-0.02	-0.34	0.72	-0.74	2.46	-0.57
	4	-0.66	-0.16	-0.41	-0.16	-0.08	-0.22	0.18	-0.06	2.46	-1.43
NFCI3	0	-0.02	-0.43	0.42	-0.76	0.55	-0.73	1.89	-1.90	3.18	-2.73
	1	-0.41	-0.13	-0.02	-0.43	0.55	-0.80	1.31	-0.79	2.71	-1.40
	2	-0.38	-0.16	-0.32	-0.06	0.00	-0.34	0.82	-1.01	2.96	-1.66
	3	-0.56	0.00	-0.32	-0.10	-0.02	-0.28	0.52	-0.52	2.46	-0.64
	4	-0.67	-0.09	-0.36	-0.18	-0.06	-0.16	0.08	-0.01	2.31	-1.49
GDP	0	-3.20	1.45	0.50	0.30	1.90	0.10	3.10	0.00	6.48	-0.98
	1	-3.60	1.85	-0.55	1.63	1.15	1.75	2.80	1.30	6.88	0.35
	2	-3.20	2.65	0.50	1.60	2.30	0.90	4.50	0.18	7.60	0.42
	3	-3.20	1.45	1.40	0.60	3.10	0.10	4.75	0.43	8.15	0.00
	4	-2.70	0.95	1.15	0.15	2.45	0.25	4.10	0.20	8.15	0.00

注：本表列出了三项月度金融状况指标（NFCI1、NFCI2、NFCI3）以及实际国内生产总值增长从 2008年第四季度（$h = 0$）至 2009年第四季度（$h = 4$）期间的基准分布 $F_{Y_{j,\ t+h}|Z_t}$（基准），以及反事实分布 $F^*_{Y_{j,\ t+h}|Z_t}$ 相对于基准分布的分位数和矩差异（差异）。

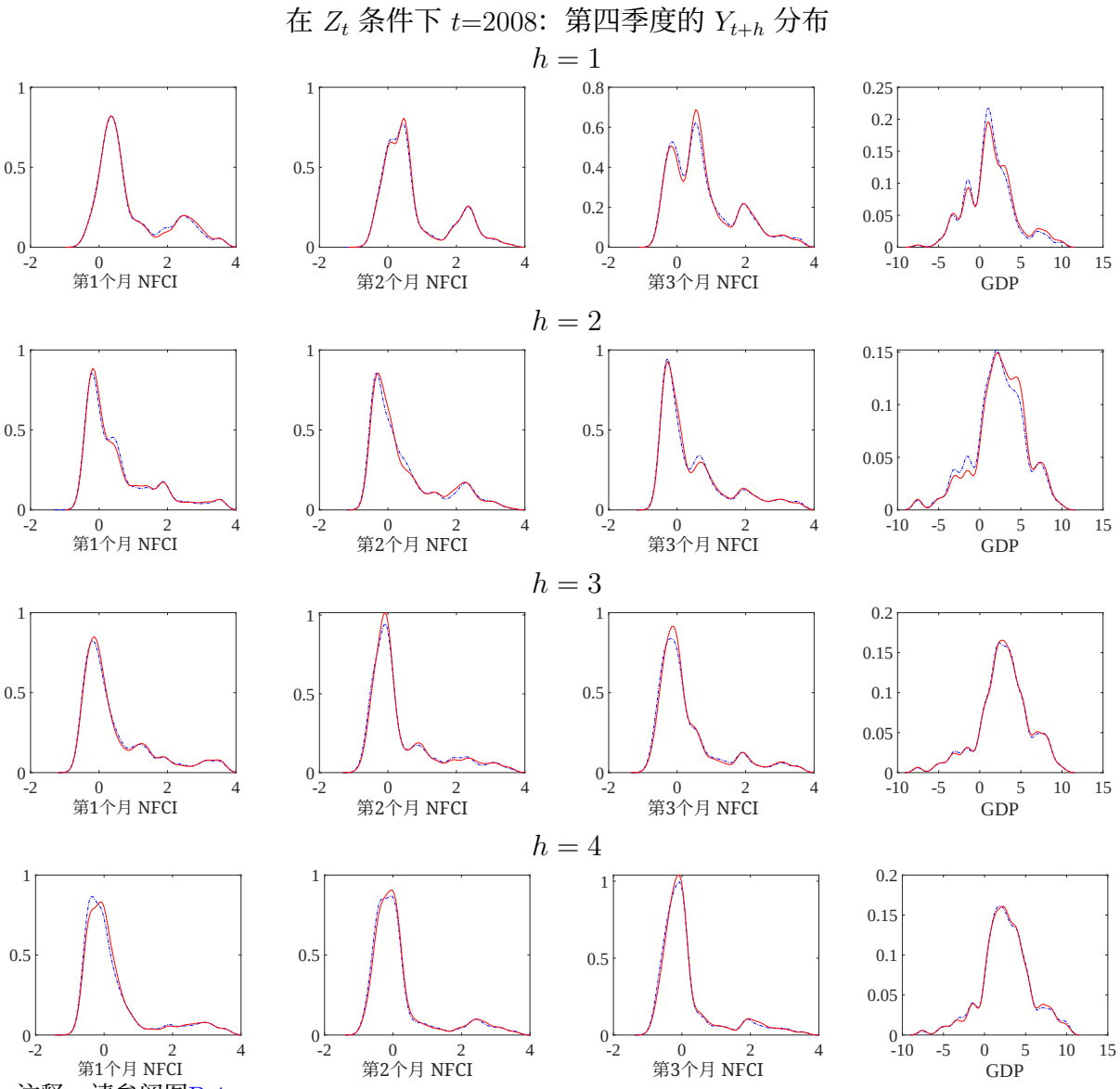
表 B.2：MIR 对 NFCI 冲击

矩		Mean		Std		偏度		峰度	
	h	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff
NFCI1	0	1.17	-1.17	0.48	-0.28	1.62	-1.62	5.60	-2.59
	1	0.94	-0.97	1.01	-0.56	1.05	1.82	2.86	14.39
	2	0.53	-0.64	0.97	-0.27	1.40	2.02	4.24	11.00
	3	0.47	-0.51	1.03	-0.16	1.52	1.30	4.44	5.99
	4	0.26	-0.35	0.97	-0.20	1.85	1.12	5.56	6.64
NFCI2	0	1.09	-1.17	0.78	-0.46	0.76	2.73	2.42	19.61
	1	0.75	-0.76	0.97	-0.44	1.08	1.25	2.95	8.62
	2	0.43	-0.60	0.99	-0.36	1.28	1.98	3.51	10.28
	3	0.35	-0.43	0.97	-0.25	1.57	1.17	4.60	5.80
	4	0.17	-0.31	0.93	-0.25	1.99	0.78	6.23	7.04
NFCI3	0	1.05	-1.17	0.98	-0.59	0.87	3.14	2.68	24.43
	1	0.76	-0.70	0.97	-0.28	0.97	0.90	3.21	4.28
	2	0.46	-0.59	1.02	-0.42	1.44	1.94	4.20	11.23
	3	0.29	-0.36	0.94	-0.26	1.69	1.21	5.22	6.89
	4	0.15	-0.28	0.88	-0.26	1.97	0.53	6.32	5.66
GDP	0	1.77	0.24	2.68	-0.49	0.06	0.05	4.33	1.10
	1	1.22	1.52	2.81	-0.03	0.33	-0.25	3.83	-0.56
	2	2.27	1.17	3.17	-0.73	-0.43	0.04	3.48	1.95
	3	2.95	0.39	3.08	-0.27	-0.49	0.14	3.92	-0.21
	4	2.61	0.26	2.99	-0.18	-0.16	0.05	3.76	0.39

注：本表列出了从 2008年第四季度（$h = 0$）到 2009年第四季度（$h = 4$）期间，每个季度三项月度金融状况指标（NFCI1、NFCI2、NFCI3）以及实际国内生产总值增长的基准分布（Base）的矩，以及反事实分布相对于基准分布的矩差异（Diff）。

为考察国内生产总值的脉冲效应，我们保持 2008年第四季度三项月度金融状况指标的条件分布不变 Y_{jt}，$j = 1$，2，3，并对实际国内生产总值增长 Y_{4t}采用相同的伽马反事实分布。整个分布的脉冲响应结果见图B.5。在该模型下，更多证据表明，提前一至两个季度的实际国内生产总值增长反事实分布右尾更厚，左尾则略薄。不过，根据这些结果得出的最终结论与二元模型中的结论一致。

图 B.5：对 GDP 冲击的分布响应



注释：请参阅图B.4。

表 B.3：QIR 对 GDP 冲击的响应

分位数		0.05		0.25		0.5		0.75		0.95	
	h	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff
NFCI1	0	0.62	0.00	0.82	0.00	1.03	0.00	1.08	0.00	2.31	0.00
	1	-0.16	-0.02	0.25	0.00	0.52	0.00	1.47	-0.16	2.96	0.00
	2	-0.36	0.01	-0.19	0.01	0.18	0.00	1.03	0.00	2.71	0.00
	3	-0.45	0.00	-0.21	0.05	0.00	0.06	0.82	0.26	3.18	0.00
	4	-0.51	0.02	-0.41	0.11	-0.06	0.04	0.37	0.05	2.71	0.25
NFCI2	0	0.20	0.00	0.45	0.00	0.82	0.00	1.89	0.00	2.46	0.00
	1	-0.30	0.00	0.07	0.00	0.45	0.00	1.08	-0.05	2.71	0.00
	2	-0.46	0.04	-0.36	0.09	0.07	0.00	0.72	0.26	2.46	0.00
	3	-0.50	0.03	-0.22	0.04	-0.02	0.01	0.72	0.00	2.46	0.00
	4	-0.66	0.07	-0.41	0.07	-0.08	0.06	0.18	0.00	2.46	0.00
NFCI3	0	-0.02	0.00	0.42	0.00	0.55	0.00	1.89	0.00	3.18	0.00
	1	-0.41	0.05	-0.02	0.01	0.55	0.00	1.31	-0.23	2.71	0.00
	2	-0.38	0.00	-0.32	0.02	0.00	0.00	0.82	0.21	2.96	0.00
	3	-0.56	0.03	-0.32	0.09	-0.02	0.01	0.52	-0.10	2.46	0.00
	4	-0.67	0.05	-0.36	0.08	-0.06	0.00	0.08	0.09	2.31	0.00
GDP	0	-3.20	4.65	0.50	1.95	1.90	1.45	3.10	1.40	6.48	0.00
	1	-3.60	0.40	-0.55	0.58	1.15	0.25	2.80	0.40	6.88	1.15
	2	-3.20	0.00	0.50	0.73	2.30	0.90	4.50	0.25	7.60	0.42
	3	-3.20	0.00	1.40	0.10	3.10	0.00	4.75	0.00	8.15	0.00
	4	-2.70	0.00	1.15	0.00	2.45	0.00	4.10	0.00	8.15	0.00

注：参见表B.1。

表 B.4：MIR 对国内生产总值冲击

分位数		Mean		Std		偏度		峰度	
	h	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff	Base	Diff
NFCI1	0	1.17	0.00	0.48	0.00	1.62	-0.02	5.60	-0.08
	1	0.94	-0.02	1.01	0.00	1.05	0.06	2.86	0.03
	2	0.53	0.01	0.97	-0.01	1.40	0.02	4.24	0.10
	3	0.47	0.00	1.03	-0.03	1.52	0.03	4.44	0.19
	4	0.26	0.06	0.97	0.02	1.85	-0.05	5.56	-0.32
NFCI2	0	1.09	0.00	0.78	0.01	0.76	0.01	2.42	0.01
	1	0.75	-0.01	0.97	-0.02	1.08	0.07	2.95	0.21
	2	0.43	0.07	0.99	0.02	1.28	-0.15	3.51	-0.39
	3	0.35	0.01	0.97	-0.02	1.57	0.10	4.60	0.35
	4	0.17	0.05	0.93	0.01	1.99	-0.07	6.23	-0.40
NFCI3	0	1.05	0.01	0.98	0.02	0.87	0.01	2.68	-0.01
	1	0.76	-0.01	0.97	-0.03	0.97	0.07	3.21	0.26
	2	0.46	0.06	1.02	0.03	1.44	-0.13	4.20	-0.48
	3	0.29	0.01	0.94	-0.01	1.69	0.17	5.22	0.54
	4	0.15	0.04	0.88	-0.02	1.97	-0.11	6.32	-0.55
GDP	0	1.77	3.93	2.68	-1.04	0.06	0.91	4.33	-1.06
	1	1.22	0.45	2.81	0.34	0.33	-0.05	3.83	-0.75
	2	2.27	0.59	3.17	-0.11	-0.43	-0.17	3.48	0.46
	3	2.95	0.10	3.08	-0.06	-0.49	-0.03	3.92	0.18
	4	2.61	0.01	2.99	-0.02	-0.16	0.00	3.76	0.09

注释：请参阅表B.2。

B.5 基于移动区块自助法的置信带

移动区块自助法是一种可用于相关时间序列观测值的非参数自助法。该方法通过从连续数据块中随机、有放回地抽取固定长度的数据块来进行抽样，因此能够考虑条件异方差。在本应用中，每个数据块的长度设为 8，我们使用 500 次自助法重复抽样，构建同期相关系数和分布脉冲响应函数的 95% 逐点置信区间。

B.5.1 分布与密度脉冲响应函数

Figure B.6：NFCI 冲击的分布脉冲响应函数置信区间（双变量模 l)

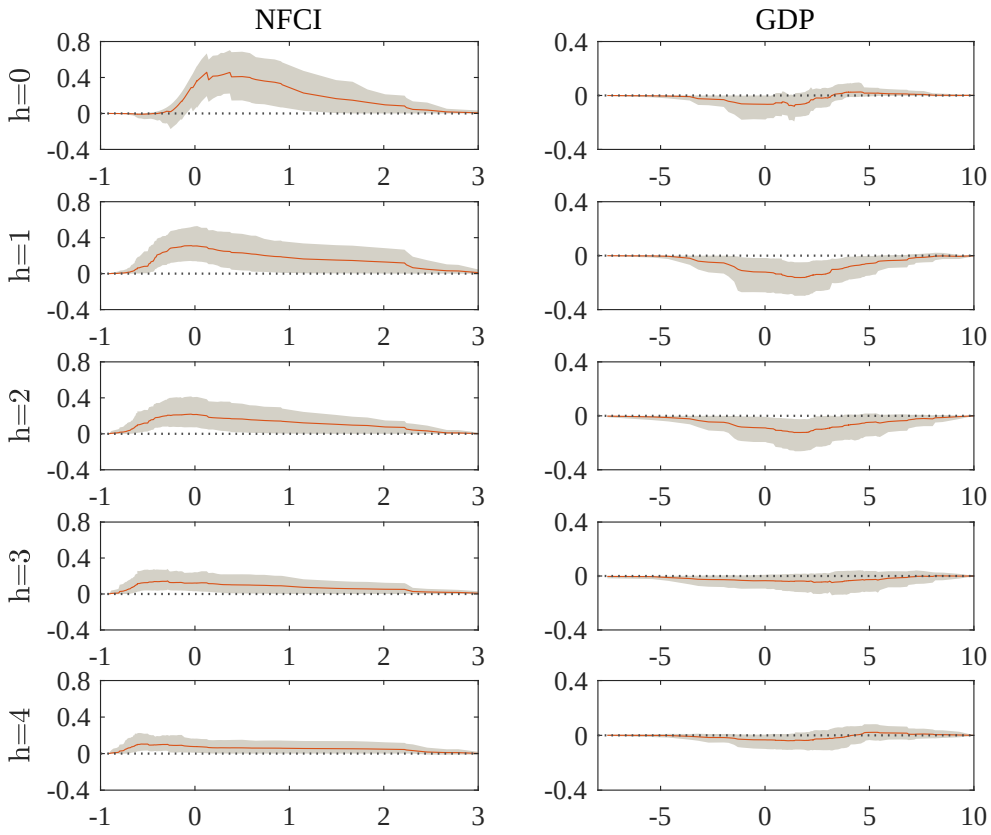


图 B.7:　　二元模型中 NFCI 冲击的密度脉冲响应函数置信区间

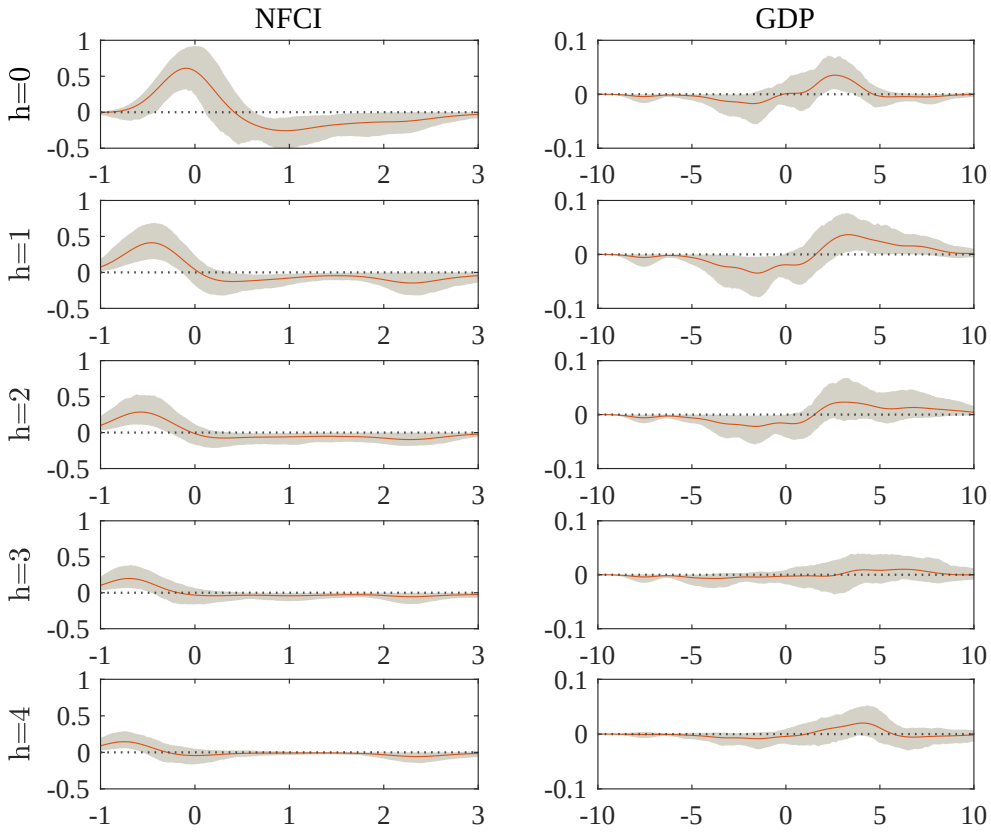
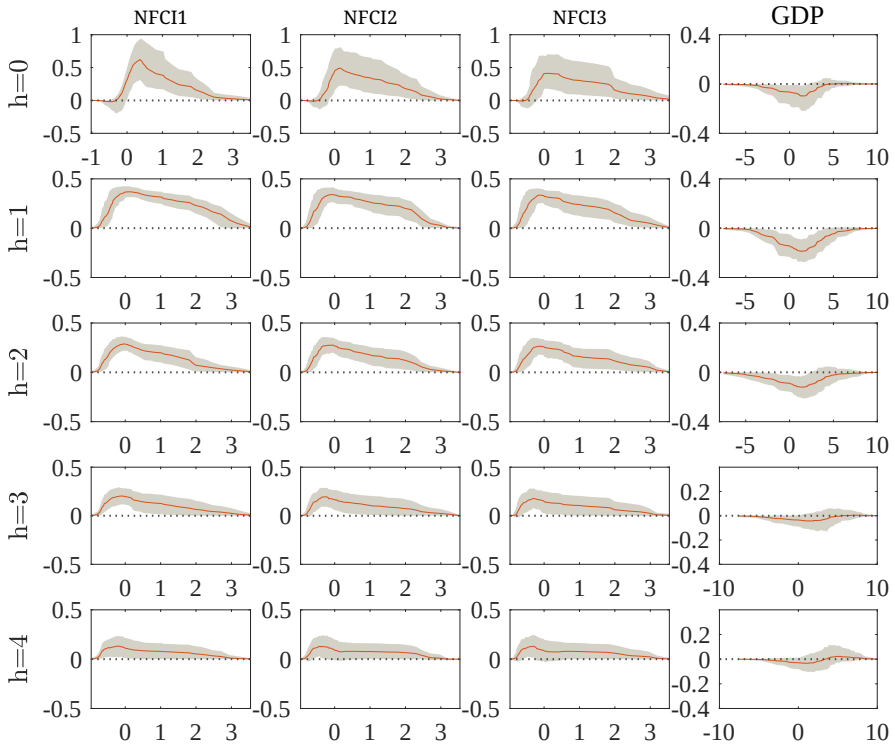


图 B.8：混频模型中 NFCI 冲击的分布脉冲响应函数置信区间(a) 分布脉冲响应函数



(b) 密度脉冲响应函数

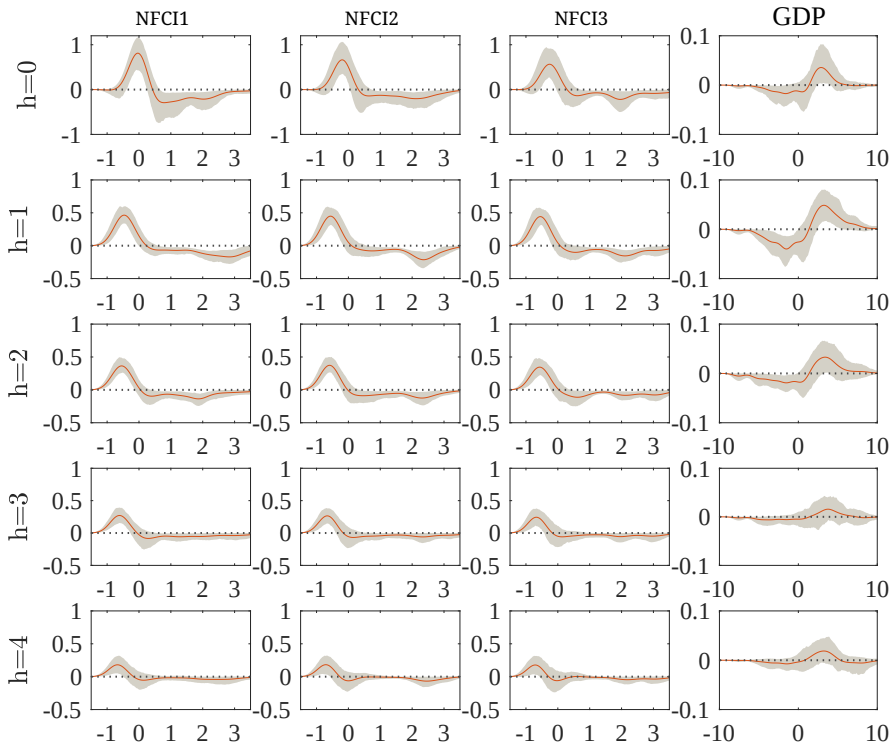
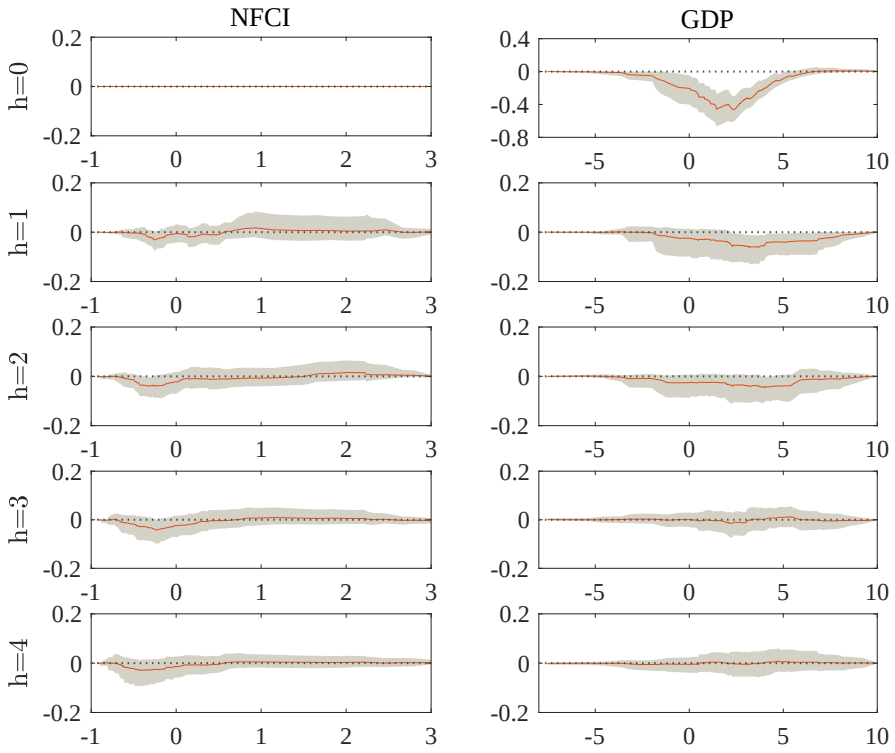


图 B.9：GDP 冲击（二元模型）的分布脉冲响应函数置信区间(a) 分布脉冲响应函数



(b) 密度脉冲响应函数

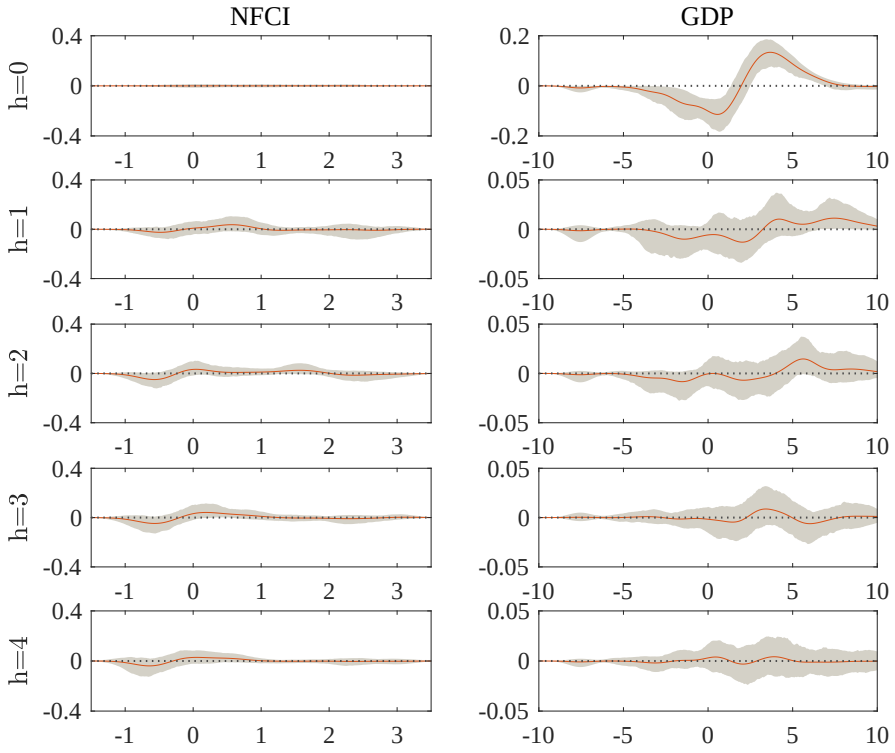
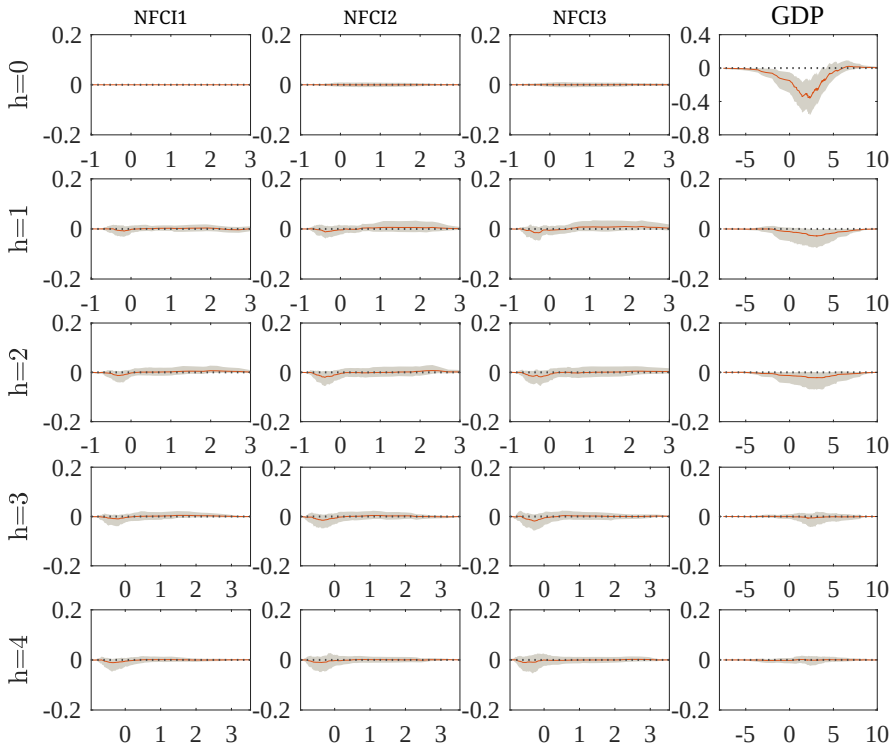
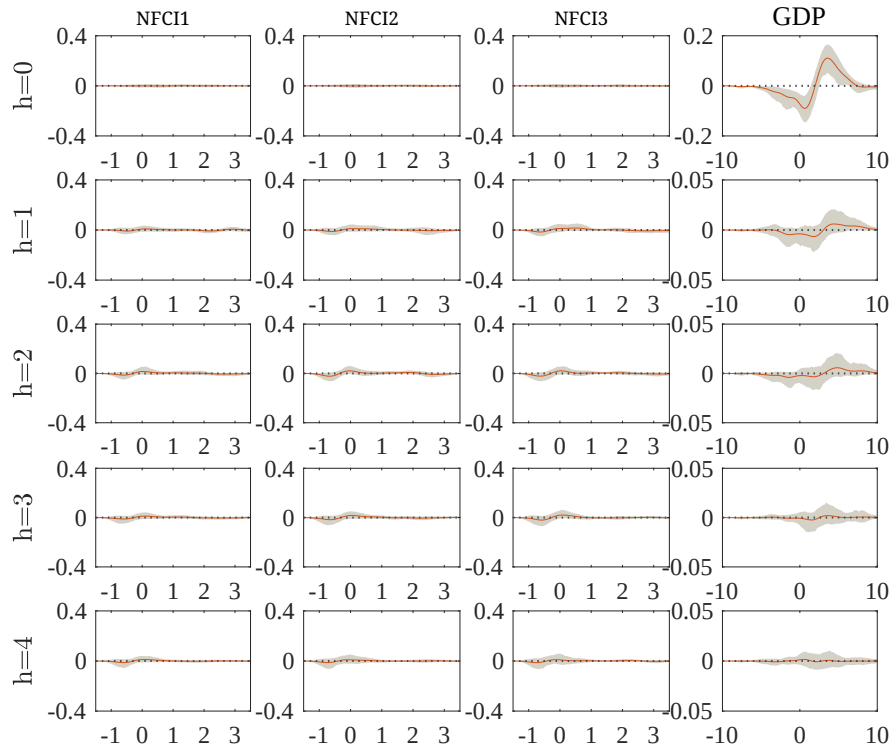


图 B.10：混频模型中 GDP 冲击的分布脉冲响应函数置信区间（a）分布脉冲响应函数

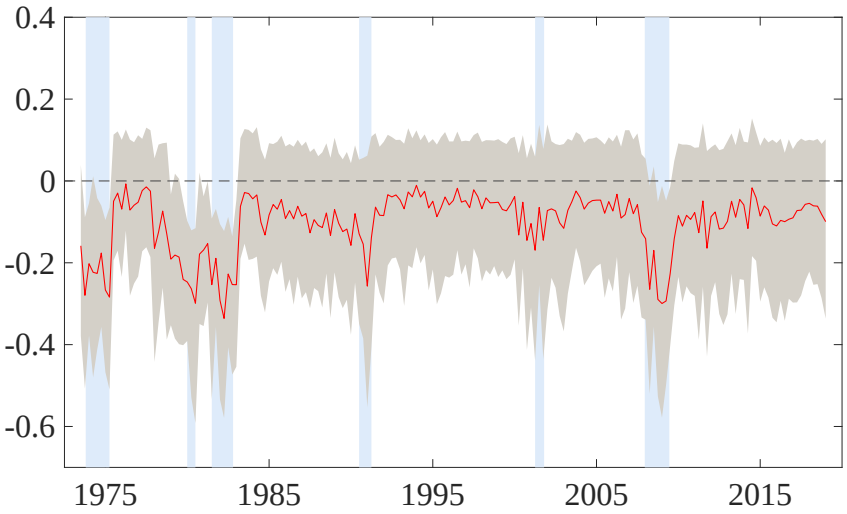


（b）密度脉冲响应函数



B.5.2 同期相关系数

图B.11：NFCI与实际国内生产总值增长的样本内同期相关系数



注：该图绘制了基于一步预测分布的相关系数。垂直阴影区域表示美国经济衰退，水平阴影区域表示95%区间。