arXiv:2303.05006v1 [physics.comp-ph] 9 Mar 2023

A 用于三维电磁散射问题的快速时域边界元法

Toru Takahashi[a],*

[a]D名古屋大学机械系统工程系，日本爱知县名古屋市千种区不老町，464-8603 n

摘要

本文提出一种快速时域边界元法（TDBEM），以经典的时间推进方式求解理想导体的三维瞬态电磁散射问题。快速时域边界元法的算法是基于插值的快速多极子法（IFMM）的时域变体，与作者先前研究的声散射问题时域 IFMM 类似。本文 IFMM 的原理是对电场积分方程和磁场积分方程（分别为 EFIE 和 MFIE）的核函数进行插值，使每个核函数都能表示为空间变量和时间变量的变量分离形式。借助这种表示，可利用与时空层次结构相关的所谓多极矩和局部系数，构建一种快速方法来计算 EFIE 和 MFIE 中的标量势和矢量势。与传统时域边界元法的 $O(N_s^2 N_t)$ 相比，快速时域边界元法的计算复杂度估计为 $O(N_s^{1+\delta} N_t)$，其中 N_s 和 N_t 分别表示空间和时间自由度，而 δ 通常为 1/2 或 1/3。数值算例表明，在求解大规模问题时，所提出的快速时域边界元法优于传统时域边界元法。

关键词：电磁散射、时域、组合场积分方程、时间推进格式、边界元法、快速多极子方法、插值

1. 引言

全波电磁（EM）模拟器是当今推动科学和工业取得成就的重要力量，例如 [1] 及其中的参考文献。为了处理瞬态响应和频率响应（借助傅里叶分析），时域方法十分有用。作为这类方法中应用最广泛的工具，有限差分时域（FDTD）方法大概首屈一指 [2]。另一方面，时域积分方程（IE）方法，或等价地说，时域边界元法（TDBEM），是严谨且历史悠久的方法 [3, 4, 5, 6, 7], ，但其较高的计算成本和内存消耗，往往会在实际应用中造成严重问题 [8]。

为克服这一问题，Ergin 等人首先针对声学提出了平面波时域（PWTD）算法，将其作为基于时间推进法（MOT）的积分方程（IE）求解器的快速算法 [9, 10, 11]，随后 Shanker 等人将其扩展到电磁学领域 [12, 13]。PWTD 可被视为快速多极子法（FMM）的时域版本[14, 15, 16, 17]。这是因为 PWTD 依赖于：（i）借助平面波展开进行远场近似，用于将积分核（即波动方程的基本解）表示为变量分离的形式；（ii）计算区域的层次结构，用于在时空中定义远场和邻近场。传统时域边界元法（TDBEM）算法的计算复杂度为 $O\left(N_s^2 N_t\right)$（其中，N_s 和 N_t 分别表示空间和时间自由度），而对于两层方法 [12]，PWTD 可实现更低的 $O\left(N_s^{1.5}(\log N_s) N_t\right)$ 复杂度，并进一步

*通讯作者电子邮箱：toru.takahashi@mae.nagoya-u.ac.jp（Toru Takahashi）

$O\left(N_s(\log^2 N_s)N_t\right)$ 用于多层方法[13]。值得一提的是，最近，PWTD 加速的时域积分方程求解器已实现并行化，从而能够在分布式内存计算系统上求解超大规模问题，其规模为$N_s \sim 10^6$ 和$N_t \sim 10^3$ 。 [18]。

在关于 PWTD 的研究之后， [9, 10, 11, 12, 13, 19], 本文作者提出了另一种用于三维声学时域边界元法的快速算法 [20]。该算法与 PWTD 类似，但其出发点并非上述平面波展开，而是针对基本解的空间变量和时间变量进行插值。插值后的基本解具有变量分离的形式，因此可以据此构建类似 FMM 的算法。无论是否用于时域，[21, 22] 这种 FMM 都称为基于插值的快速多极子法（IFMM） [23]。此外，近期的工作 [24] 改进了 [20] 中的公式，使其能够将任意阶 d（≥ 0）的 B 样条函数（而不仅是一阶 B 样条函数）用作时间基。与 [20] 的显著区别在于多极展开到局部展开（M2L）平移方案。声学时域边界元法经 IFMM 加速后的计算复杂度 [20, 24] 为 $O\left(N_s^{1+\delta}N_t\right)$，其中，当边界元（用于离散声散射体的曲面）在计算域中均匀分布时， δ 为 1/3；当它们位于一个平面上时， δ 为 1/2。如下文所述，声学情形的这一计算复杂度可直接沿用于本文的电磁情形。因此，与（多层）PWTD [13]相比，本文研究所开发的 IFMM 属于半快速算法。不过需要强调的是，IFMM 的数值实现相对简便，因为其数学表达简洁。

只有 PWTD [12, 13] 和 IFMM 并非用于求解电磁学积分方程的加速方法。其他方法包括分层 FFT 算法（HIL-FFT） [25], 、时域自适应积分法（TD-AIM） [26], 、双层非均匀网格时域（NGTD）算法 [27] 及其多层算法 [18], 、时域 UV 方法 [28], 、快速偶极子法 [29], , 以及用于计算一般两两相互作用的加速笛卡尔展开（ACE） [30, 31]。所提 IFMM 与 ACE 在方法上的最大相似之处 [30] , 是两者在构建快速多极子方法时都从根本上运用了泰勒展开。具体而言，所提方法利用核函数插值实现变量分离，再通过泰勒展开构造快速 M2L 操作，详见 [24]中的算法 4。然而，将 [30, 定理 2.3–2.5]中介绍的基本快速多极子法运算从单个目标时间步的情形推广到多个目标时间步，并非显而易见。因此，尽管所提方法的计算复杂度为 $O(N_s^{1+\delta}N_t)$，高于 ACE 的 $O(N_sN_t)$（其中 $\delta = 1/3$ 或 1/2），所提 IFMM 的适用性更广，因为它能够通过时空层次结构处理多个目标时间步（见公式（27））。此外，本文着重介绍了 IFMM 在电磁积分方程中的构建，而非 ACE 所处理的粒子模拟。

本研究旨在逐步将用于声散射问题的 IFMM 扩展至三维理想电导体（PEC）的电磁散射问题 [20, 24] 。声学情形处理标量场，而电磁情形处理矢量场。这一区别使得为电磁情形构建 IFMM 既引人关注又颇具挑战。不过，整体算法与声学情形几乎相同。因此，本文的重点是阐述构建类似快速多极子法（FMM）的算法所需的一系列基本操作的公式，即：（I）生成多极矩（MM），（II）将多极矩转换为局部系数（LC），以及（III）利用局部系数计算势。下文将按照快速多极子法的常用术语，分别把这些操作称为 P2M、M2L 和 L2P。

选择要求解的积分方程至关重要。为消除非物理共振解，自 Shanker 等人 [32] 在 Rynne 等人 [33] 和 Vechinski 等人 [34]早期工作的基础上确立了组合场积分方程（CFIE）——将电场积分方程（EFIE）和磁场积分方程（MFIE）线性组合而成——以来，通常采用组合场积分方程。然而，正如 Shanker 等人 [32], 所指出的，从拉普拉斯变换域 [3]积分算子的极点扰动角度来看，即使是组合场积分方程也可能不准确，因为采用了数值格式（例如 [34]中使用的显式时间步进法格式），使极点不再对应腔体共振模态，而是对应所考虑的外部问题。因此，对于采用隐式时间步进法格式处理理想电导体外部散射问题的当前情形，文献中在各种数值格式下使用了三种类型的组合场积分方程。第一种是原始形式 [32], , 即电场积分方程和磁场积分方程的线性组合，并已用于一些研究 [12, 28, 35]。第二种是电场积分方程的时间导数与磁场积分方程的时间导数的组合，以下分别记为 ∂_t电场积分方程和 ∂_t磁场积分方程。特别是，这种形式被选用于构建

多层 PWTD [13]。第三种形式则依赖于 ∂_t电场积分方程和磁场积分方程 [36]。

与上述三种组合场积分方程不同，本研究采用了另一种组合场积分方程，它由 ∂_t电场积分方程、∂_t磁场积分方程和磁场积分方程组成。在本文所述数值设置下，即空间采用 Rao–Wilton–Glisson (RWG) [37, 38] 基函数、时间采用二次 B 样条基函数，这种非常规的组合场积分方程确实能够正常工作，正如第4节的数值测试所示。特别是，数值结果表明，使用 IFMM 时，也就是说引入额外近似时，将这三种积分方程组合起来是不可避免的。

从计算成本的角度来看，有必要使用 ∂_t电场积分方程，而非该电场积分方程。朴素的电场积分方程在其标量势中包含时间积分。因此，除非通过时间微分消去时间积分，否则求解电场积分方程（即使与磁场积分方程和/或 ∂_t磁场积分方程组合）的成本在传统算法中将按$O(N_s^2 N_t^2)$的规模增长。虽然可以为电场积分方程构建 IFMM，但由此得到的时域边界元法会比基于 ∂_t电场积分方程的 IFMM 更慢。这是因为连续离散势的抵消（见（9））不适用于电场积分方程中的标量势。不过，使用赫兹矢量$\boldsymbol{P}$，使得 $\partial_t \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$，可以避免对电场积分方程进行时间微分， [36, 39] 并能够以与 ∂_t电场积分方程相同的方式构建 IFMM。

本文其余部分安排如下：第2 节介绍基于上述 CFIE 和离散格式的 TDBEM 公式。第3 节构建 IF MM，以加速上一节中的 TDBEM。重点是通过推导一般时空构型下采用 MM 和 LC 表示的标量/矢量势表达式，给出上述操作 (I)–(III) 的公式。第4节从精度、性能、内存使用量和适用性等方面对所提出的快速 TDBEM 进行数值评估。第5 节总结本研究。

2. 电磁散射问题的 TDBEM

本节介绍基于上述 CFIE 的传统 TDBEM，该方程由 ∂_tEFIE、∂_tMFIE 和 MFIE 组成，用于分析入射电磁波照射下的理想电导体。CFIE 采用 RWG基函数 [37] 进行空间离散，并采用 B 样条基函数进行时间离散。通常，空间部分采用伽辽金方法，这有助于减弱 ∂_tEFIE 标量势的奇异性。最后，使用标准 MOT格式求解离散后的 CFIE。

2.1. 问题描述与组合场积分方程

如图1所示，设理想电导体存在于无限（自由）空间 IR^3, 中的定义域 V 内，其中介电常数和磁导率分别为 ϱ 和 μ；则波速 c 和波阻抗 η 分别由 $(\varrho\mu)^{-1/2}$ 和 $(\mu/\varrho)^{1/2}$确定。曲面或边界 ∂V 记为 S。按照外部问题边界元法领域的惯例，假设 S 的单位法向量 n 指向 V 内部。给定以 E^{I} 和 H^{I}表示的入射电磁场后，问题是求解感应表面电流密度 J：$= \mathrm{n} \times \mathrm{H}$；假设时间 t ≤ 0时，该电流密度为零。求解所依据的组合场积分方程如下：

$$\begin{aligned}&\dot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{J})(\boldsymbol{x},t) + \theta\eta\left(\dot{\mathcal{K}}(\boldsymbol{J})(\boldsymbol{x},t) + \zeta\mathcal{K}(\boldsymbol{J})(\boldsymbol{x},t)\right)\\ &= \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \times \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},t) + \theta\eta\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \times \left(\dot{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},t) + \zeta\boldsymbol{H}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},t)\right) \quad \boldsymbol{x} \in S,\ t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$\theta\,(>0)$ 和 $\zeta\,(>0)$ 表示预定义的耦合参数，点号 $\dot{}\,(\,)$ 表示时间微分 ∂_t，而算子 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别对应标准电场积分方程和磁场积分方程中的算子，即

$$\dot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{J})(\boldsymbol{x},t) := -\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \times \left(\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) + \nabla_x \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)\right), \tag{2}$$

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{J})(\boldsymbol{x},t) := \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t). \tag{3}$$

这里，标量势 ϕ 以及矢量势 A 和 P 定义如下：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) &:= \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y},t-r/c)}{r}\mathrm{d}S_y,\\
\phi(\boldsymbol{x},t) &:= -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\int_0^{(t-r/c)_+}\frac{\nabla_y\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y},s)}{r}\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y,\\
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t) &:= \frac{1}{4\pi}\int_S \nabla_x\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y},t-r/c)}{r}\mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

因此

$$\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\ddot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{y},t-r/c)}{r}\mathrm{d}S_y, \tag{5a}$$

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\nabla_y\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y},t-r/c)}{r}\mathrm{d}S_y, \tag{5b}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t)+\zeta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_S \nabla_x\times\frac{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{y},t-r/c)+\zeta\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y},t-r/c)}{r}\mathrm{d}S_y. \tag{5c}$$

其中，r 表示点 x 和 y 之间的距离，即 $\mathrm{r} := |\mathrm{x}-\mathrm{y}|$；$(\cdot)_+$ 表示（一次）截断幂函数，即 $(\mathrm{x})_+ = 0$ if $\mathrm{x} < 0$ and $(\mathrm{x})_+ = \mathrm{x}$ if $\mathrm{x} \geq 0$。

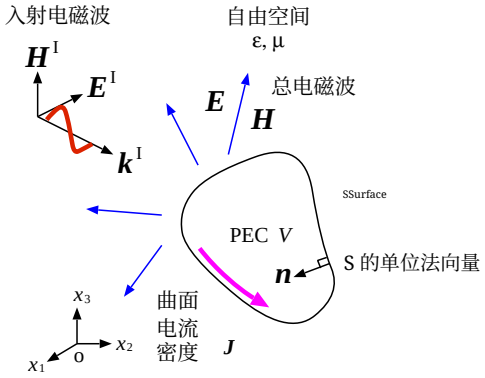

图1：电磁散射问题。向量 k^{I} 表示入射电磁波的传播方向。

2.2. J 的近似

曲面 S 离散化为 N_{s} 个平面三角形单元，记为 $S_1,\ldots,S_{N_{\mathrm{s}}}$。此外，引入等间隔时间步，即 $t^\beta := \beta\Delta_{\mathrm{t}}$ ($\beta = 0, 1, 2\ldots$) 表示第 β 个时间步，Δ_{t} 表示规定的时间步长。然后，式（$\boldsymbol{J}$ （1）中的表面电流密度近似如下：

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t) \approx \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{e}}}\sum_{\beta\geq 0} J_j^\beta \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})N^{\beta,d}(t) \quad \boldsymbol{x}\in S,\ t>0, \tag{6}$$

其中，$\mathrm{N_e}$ 表示所有三角形的边数，这些边记为 $\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_{N_{\mathrm{e}}}$；$\mathrm{f}_j$ 表示 e_j 的 RWG 基函数[37]，定义如下：

$$\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \frac{\pm l_j}{2A_j^\pm}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{o}_j^\pm) & \text{if } \boldsymbol{x}\in S_j^\pm \\ \boldsymbol{0} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

这里，S^{+}_{j}（相应地，S^{-}_{j}），其面积为A^{+}_{j}（A^{-}_{j}），表示e_j正侧（负侧）的三角形，其长度为l_j；见图2。此外，$o^{\pm}_{j}$表示 $S^{\pm}_{j}$中不在 e_j上的顶点。另外，$N^{\beta,d}$表示时间的 d 阶 B 样条基函数，可拆分为 $d+2$ 个 d 次截断幂函数，如下所示[24]:

$$N^{\beta,d}(t) = \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d} \left(\frac{t - t_{\beta+\kappa}}{\Delta_t} \right)_+^d \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots.$$

此处，权重 $w^{\kappa,d}$ 定义为

$$w^{\kappa,d} = \frac{d+1}{\Pi_{i=0; i\neq\kappa}^{d+1}(i-\kappa)} \quad \kappa = 0, \ldots, d+1.$$

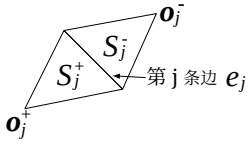

图2：第 j 个 RWG 基函数 f的记号。

在此前针对瞬态声散射问题构建 IFMM 的研究中 [24]，，研究对象是 Burton–Miller积分方程 (BMIE)。BMIE 对应于式 (1) 中的组合场积分方程 (CFIE)，由单层势、双层势及其法向导数组成，它们均为标量函数。此外，为了近似 BMIE 中的边界变量（即声压及其法向导数），空间基函数选用分片常数基，而非 RWG 基函数；时间基则采用前述的 B 样条基函数。由此，式 (5) 中标量/矢量势的离散化（以及下一节所研究的 IFMM 公式）相对复杂，但其思路与声学情形相同。

此外，BMIE 采用配点法，而 CFIE 采用伽辽金方法。不过，IFMM 的作用是在特定点 $x \in S$ 处计算势。因此，在电磁情形下构建 IFMM 时，CFIE 的测试过程之后出现的关于 $x \in S$ 的积分并不重要。

2.3. 组合场积分方程中势的离散化

使用式（6）中的近似，式（5）中的标量势和矢量势可在 $t = t_\alpha$ （其中$\alpha = 1, \ldots, N_t - 1$）处离散化如下:

$$\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d} \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma (c\Delta_t)^d} \int_{S_j^\sigma} \ddot{U}^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_{\beta+\kappa})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{o}_j^\sigma) \mathrm{d}S_y}_{=: \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x})} J_j^\beta, \tag{7a}$$

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d} \underbrace{\frac{-1}{4\pi\varepsilon} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma l_j}{A_j^\sigma (c\Delta_t)^d} \int_{S_j^\sigma} U^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_{\beta+\kappa}) \mathrm{d}S_y}_{=: \dot{\phi}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x})} J_j^\beta, \tag{7b}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) + \zeta \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) \\ &= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma (c\Delta_t)^d} \int_{S_j^\sigma} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{o}_j^\sigma) \times \nabla_y \left(\dot{U}^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_{\beta+\kappa}) + \zeta U^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_{\beta+\kappa}) \right) \mathrm{d}S_y}_{=: \dot{\boldsymbol{P}}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x}) + \zeta \boldsymbol{P}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x})} J_j^\beta, \end{aligned} \tag{7c}$$

其中，对 σ 的求和涵盖边 e$_i$的正侧和负侧。此外，核函数 U^d 定义如下：

$$U^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,s) := \frac{(c(t-s)-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)_+^d}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \tag{8}$$

这与声学情形中使用的核函数完全相同 [24, 式（10）]。

需要注意的是，式（7$^\beta$）右端项中的 J$^\beta$ j 的系数由 α 和 $\beta+\kappa$ 之差确定，这是由式（8^d）中 U^d 的定义以及等间隔时间步的假设所致。为强调这一点，该差值写在括号内。

与声学情形类似，[24, 备注 4], 由于 N$^\beta$ 的支撑有限，^{d} 即 [t$_\beta$、t$_{\beta+d+1}$]，可以证明

$$\sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\chi_{ij}^{(\gamma-\kappa)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \quad \text{if } \gamma > \gamma^*, \tag{9}$$

其中

$$\gamma^* := \frac{\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c\Delta_t} + d + 1 \tag{10}$$

是由 S 的几何形状、Δ_t 和 d 确定的常数。此外，$\chi^{(\gamma)}$i j 是 A$^{(\gamma)}$i j、 $\dot{\text{A}}^{(\gamma)}$i j、 $\ddot{\text{A}}^{(\gamma)}$i j、$\dot{\phi}^{(\gamma)}$i j、P$^{(\gamma)}$i j 和 $\dot{\text{P}}^{(\gamma)}$i j 的代表。需要注意的是，由于时间积分的缘故，$\phi^{(\gamma)}$i j 不具备式（9）中的消失性质；因此，本研究没有采用电场积分方程，而是采用了 ∂_t电场积分方程。

利用（9），可将（$\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}$ 中的7）替换为$\sum_{\beta=\beta^*}^{\alpha-1}$，其中 β^* : $= \alpha - \gamma^*$。由此可得以下表达式：

$$\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\beta=\beta^*}^{\alpha-1}\sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x})J_j^\beta, \tag{11a}$$

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\beta=\beta^*}^{\alpha-1}\sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\dot{\phi}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x})J_j^\beta, \tag{11b}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)+\zeta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\beta=\beta^*}^{\alpha-1}\sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\left(\dot{\boldsymbol{P}}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x})+\zeta\boldsymbol{P}_j^{(\alpha-\beta-\kappa)}(\boldsymbol{x})\right)J_j^\beta. \tag{11c}$$

需要指出的是，对 β 的每次求和最多包含 γ^*-1 项。

为简化上述表达式，定义新变量 ˆJ$_j$ 为 J$^\beta{}_j$、……、J$^{\beta-d-1}{}_j$的加权和，即

$$\hat{J}_j^\beta := \sum_{\kappa=0}^{\min(d+1,\,\beta-\beta^*)} w^{\kappa,d}J_j^{\beta-\kappa} \quad \beta^* \le \beta \le \alpha-1. \tag{12}$$

此外，$\sum_{\beta=\beta^*}^{\alpha-1}$ 可通过重新定义 $\beta+1$ 为 β，改写为$\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}$。然后，如附录A所示，式（11）中的势可写为：

$$\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta+1)}(\boldsymbol{x})\hat{J}_j^{\beta-1}, \tag{13a}$$

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\dot{\phi}_j^{(\alpha-\beta+1)}(\boldsymbol{x})\hat{J}_j^{\beta-1}, \tag{13b}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)+\zeta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\left(\dot{\boldsymbol{P}}_j^{(\alpha-\beta+1)}(\boldsymbol{x})+\zeta\boldsymbol{P}_j^{(\alpha-\beta+1)}(\boldsymbol{x})\right)\hat{J}_j^{\beta-1}. \tag{13c}$$

值得一提的是，式（13）中的积分及其空间导数和时间导数均可解析求得。为此，这些积分写为：

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\gamma)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu}{4\pi}\sum_{\sigma=\pm}\frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma (c\Delta_\mathrm{t})^d}\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{o}_j^\sigma)\ddot{I}_d(\boldsymbol{x},t_\gamma)-\ddot{\boldsymbol{I}}_d(\boldsymbol{x},t_\gamma)\right),\\
\dot{\phi}_j^{(\gamma)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon}\sum_{\sigma=\pm}\frac{\sigma l_j}{A_j^\sigma (c\Delta_\mathrm{t})^d} I_d(\boldsymbol{x},t_\gamma),\\
\boldsymbol{P}_j^{(\gamma)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4\pi}\sum_{\sigma=\pm}\frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma (c\Delta_\mathrm{t})^d}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{o}_j^\sigma)\times\left(-\nabla_x I_d(\boldsymbol{x},t_\gamma)\right),
\end{aligned}$$

其中，最后一个表达式中用到了恒等式 $(\mathrm{y}-\mathrm{o}_j^\sigma)\times\mathrm{r} \equiv (\mathrm{x}-\mathrm{o}_j^\sigma)\times\mathrm{r}$，定义了以下标量值和向量值积分：

$$I_d(\boldsymbol{x},t) := \int_{S_j^\sigma}\frac{(ct-r)_+^d}{r}\mathrm{d}S_y, \quad \boldsymbol{I}_d(\boldsymbol{x},t) := \int_{S_j^\sigma}\frac{(ct-r)_+^d}{r}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \equiv -\nabla_x\int_{S_j^\sigma}\frac{(ct-r)_+^{d+1}}{d+1}\mathrm{d}S_y.$$

I_d 的解析求值方式与声学情形 [24, AppendixB], 相同，而I_d 可通过类似于I_d 的积分计算得出，再对求值点x求导。

然而，IFMM采用数值方法计算积分。虽然精度相对较低，但由于按构造x与y相距足够远，因此这些积分是非奇异的，所以这种精度可以接受。

2.4. 测试过程

RWG基函数$\boldsymbol{f}_i$，其中$i = 1, \ldots\ldots, N_\mathrm{e}$，作为测试函数应用于式（1）中的组合场积分方程。随后，式（1）左端项中的测试项可由式（13）写为：

$$\int_S \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\left(-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\right)\mathrm{d}S_x = \int_S \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\mathrm{d}S_x = \sum_{j=1}^{N_\mathrm{e}}\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\ddot{A}_{ij}^{(\alpha-\beta+1)}\hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta-1}, \tag{15a}$$

$$\int_S \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\left(-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\nabla_{S_x}\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\right)\mathrm{d}S_x = -\int_S\left(\nabla_{S_x}\cdot\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\right)\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\mathrm{d}S_x = -\sum_{j=1}^{N_\mathrm{e}}\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\dot{\phi}_{ij}^{(\alpha-\beta+1)}\hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta-1}, \tag{15b}$$

$$\int_S \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\left(\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)+\zeta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\right)\mathrm{d}S_x = \sum_{j=1}^{N_\mathrm{e}}\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\left(\dot{P}_{ij}^{(\alpha-\beta+1)}+\zeta P_{ij}^{(\alpha-\beta+1)}\right)\hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta-1}, \tag{15c}$$

其中

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_{ij}^{(\gamma)} &:= \sum_{\rho=\pm}\int_{S_i^\rho}\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\gamma)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x,\\
\dot{\phi}_{ij}^{(\gamma)} &:= \sum_{\rho=\pm}\int_{S_i^\rho}\left(\nabla_{S_x}\cdot\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\right)\dot{\phi}_j^{(\gamma)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x,\\
\dot{P}_{ij}^{(\gamma)}+\zeta P_{ij}^{(\gamma)} &:= \sum_{\rho=\pm}\int_{S_i^\rho}\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\left(\dot{\boldsymbol{P}}_j^{(\gamma)}(\boldsymbol{x})+\zeta\boldsymbol{P}_j^{(\gamma)}(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}S_x.
\end{aligned}$$

此处，积分 的定义域$\boldsymbol{x}$被限制在$S^{\pm i}$，因为$\boldsymbol{f}_i$的支撑是$S^{+i}\cup S^{-i}$。由（15），组合场积分方程（1）可以写成离散形式 改写如下：

$$\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\mathbf{Z}^{(\alpha-\beta+1)}\hat{\mathbf{J}}^{\beta-1} = \mathbf{V}^{\alpha-1} \qquad \alpha = 1,\ldots,N_\mathrm{t}-1, \tag{16}$$

其中，$Z^{(\gamma)}$ 是一个 $N_e \times N_e$ 维系数矩阵，表示 $\gamma\ (\geq 1)$ 的时间步差分，其第 (i, j) 个单元定义为

$$Z_{ij}^{(\gamma)} := \ddot{A}_{ij}^{(\gamma)} - \dot{\phi}^{(\gamma)} + \theta\eta\left(\dot{P}_{ij}^{(\gamma)} + \zeta P_{ij}^{(\gamma)}\right) \tag{17}$$

对于 $i, j = 1, \ldots, N_e$。此外，$\hat{J}^{\alpha-1}$ 是一个 N_e 维向量，其第 j 个元素为 $\hat{J}_j^{\alpha-1}$。另外，$V^{\alpha-1}$ 也是一个 N_e 维向量，其第 i 个分量 $V_i^{\alpha-1}$为

$$V_i^{\alpha-1} := \sum_{\rho=\pm} \int_{S_i^\rho} \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) \cdot \left[-\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) + \theta\eta \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \times \left(\dot{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) + \zeta \boldsymbol{H}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}, t_\alpha)\right)\right] \mathrm{d}S_x. \tag{18}$$

为了计算式 ($S^\rho{}_i$ 中关于 $\boldsymbol{x}$ 的空间积分，17) 和 (18) 中三角形上的积分采用预设数量的求积点进行高斯求积。在第 4节的数值实验中，使用三点求积公式。

2.5. 求解离散化的组合场积分方程

根据 MOT 格式求解当前 $\mathbf{J}^{\alpha-1}$ 时间步 α的未知向量，将式 (16) 重写为

$$w^{0,d}\mathbf{Z}^{(1)}\mathbf{J}^{\alpha-1} = \mathbf{R}^{\alpha-1} \qquad \alpha = 1, \ldots, N_t - 1, \tag{19}$$

其中，右端项向量定义为

$$\mathbf{R}^{\alpha-1} := \mathbf{V}^{\alpha-1} - \sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha} \mathbf{Z}^{(\alpha-\beta+1)}\hat{\mathbf{J}}^{\beta-1}. \tag{20}$$

这里，式 ($\mathbf{J}^\beta$ 中的 ˆ12) 应重新定义，使其不包含相应的未知向量 $\mathbf{J}^{\alpha-1}$，即

$$\hat{\mathbf{J}}^\beta := \begin{cases} \sum_{\kappa=0}^{\min(d+1,\ \beta-\beta^*)} w^{\kappa,d}\mathbf{J}^{\beta-\kappa} & \text{if } \beta^* \leq \beta \leq \alpha - 2 \\ \sum_{\kappa=1}^{\min(d+1,\ \beta-\beta^*)} w^{\kappa,d}\mathbf{J}^{\beta-\kappa} & \text{if } \beta = \alpha - 1 \end{cases}.$$

2.6. 计算复杂度

对上述传统时域边界元法计算复杂度的估算基于以下假设:

Assu假设1. 边界 S 的大小为 $O(1)$，即其大小与 N_s ($\sim N_e$) 和 N_t 均无关。

假设2. 时间步长 Δ_t 为 $O(1)$。

由此，式 (10) 中的 γ^* 为 $O(1)$。计算右端项向量 $R^{\alpha-1}$ （见式 (20)）的成本为 $O(\gamma^* N_e^2) = O(N_s^2)$，其中包含矩阵-向量乘积 $Z^{(\alpha-\beta+1)}\hat{J}^{\beta-1}$；对于每个 α，该成本均如此，因为矩阵 $Z^{(\gamma)}$ 会随着 γ 增大而变得更加稠密。另一方面，式 (19) 左端项中的 $Z^{(1)}$ 接近对角矩阵，因此，假设求解式 (19) 以求得 $J^{\alpha-1}$ 的成本为 $O(N_e) = O(N_s)$；在第4节的数值分析中，采用广义最小残量法 [40] 作为求解器，并使用 10^{-8} 作为相对下降容差。因此，所有时间步的计算复杂度估计为 $O(N_s^2 N_t)$，这可能使传统时域边界元法无法求解大规模问题。

IFMM 用于近似计算（20) 中右端向量里矩阵-向量乘积的求和（空间近邻相互作用除外），其计算复杂度低于 $O(N_s^2 N_t)$。

3. 基于插值的快速多极子法

本节介绍快速时域边界元法，用于求解（19）中离散化的组合场积分方程。第 3.1–3.3 节针对式（1）中组合场积分方程的标量势和矢量势，阐述第 1节提到的三个基本步骤 (I)–(III)，即粒子到多极展开、多极展开到局部展开以及局部展开到粒子。根据这些步骤以及 M2M 和 L2L 公式，第 3.4节构建（多层级）快速时域边界元法的算法。随后，第 3.5节估算所提出快速方法的计算复杂度。最后，第 3.6节给出数值实现方面的一些说明。

3.1. 配置

上述三个步骤是在一般配置下表述的。设 O 和 S 为边长为 $2h_s$ 的立方体盒（下文称为单元），用于三维情形（图3）。假设这些单元彼此分离。此外，设 I 和 J 为时间轴上的时间区间，持续时间为 $2h_t$。这里，对于任意 $t \in I$ 和 $s \in J$，均假设 $t \geq s$。两对 (O, I) 和 (S, J) 分别称为观测簇和源簇。

为考虑这一配置，对（13）中的离散化标量势和矢量势进行调整。首先，（9）中的消失性质不再适用于当前的分组计算。这是因为（10）中的 γ^* 值是逐点定义的，因此在某个源时间区间内无法保持为常数。这种情况与 [24]，中注释6所述的声学情形相同，其中矩阵 $U^{(\gamma)}$ 和 $W^{(\gamma)}$ 应理解为由（9）中提到的 $\chi^{(\gamma)}{}_{ij}$（对任意 $i, j \in [1, N_e]$）构成的矩阵。为从（13）中移除消失性质，将 β^* 视为零，即将求和 $P_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}$ 替换为 $P_{\beta=0}^{\alpha-1}$，其中索引 β 向后移一位。此外，将所得的双重求和 $P_{j=1}^{N_e} P_{\beta=0}^{\alpha-1}$ 替换为 $P_{\{j \,|\, S_j \subset S\}} P_{\{\beta \,|\, t_\beta \in J\}}$，后者将简化为 $P_j P_\beta$。此外，假设 (x, t_α) 属于 (O, I)。因此，为推导基本的三个步骤，目标势如下：

$$\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) = \sum_j \sum_\beta \frac{\mu}{4\pi} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma (c\Delta_t)^d} \int_{S_j^\sigma} \ddot{U}^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_\beta)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{o}_j^\sigma)\, \mathrm{d}S_y \hat{\boldsymbol{J}}_j^\beta, \tag{21a}$$

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) = \sum_j \sum_\beta \frac{-1}{4\pi\varepsilon} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma l_j}{A_j^\sigma (c\Delta_t)^d} \int_{S_j^\sigma} U^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_\beta)\, \mathrm{d}S_y \hat{J}_j^\beta, \tag{21b}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) + \zeta \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t_\alpha) = \sum_j \sum_\beta \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma (c\Delta_t)^d} \int_{S_j^\sigma} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{o}_j^\sigma) \times \nabla_y \left(\dot{U}^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_{\beta+\kappa}) + \zeta U^d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_\alpha, t_{\beta+\kappa}) \right) \mathrm{d}S_y \hat{\boldsymbol{J}}_j^\beta, \tag{21c}$$

其中 $x \in O$，且 $t_\alpha \in I$。

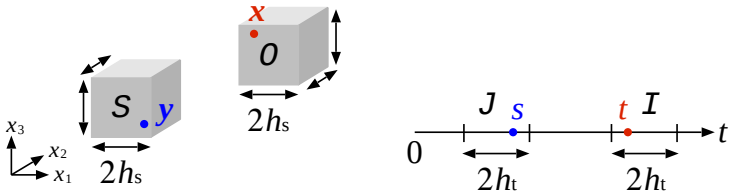

图3：为表述 IFMM 的基本运算，三维中两个单元 O 和 S 的一般配置（左），以及时间轴上的两个时间区间 I 和 J（右）。

3.2. U 的插值

为实现上述操作 (I)–(III)，有必要将 (21) 中的标量/矢量势重新表示为变量分离的形式。为此，IFMM 对 (21) 中的核函数 $U^d(x, y, t, s)$ 进行插值，该核函数由 (8) 定义，插值所涉及的是全部八个自变量，即 $x = (x_1, x_2, x_3) \in O$、$y = (y_1, y_2, y_3) \in S$、$t \in I$ 和 $s \in J$。

以时间变量 s 为例，设 $\{\mathrm{l}_i(\cdot)\}^{p_\mathrm{t}-1}{}_{n=0}$ 为一组 $\mathrm{p_t}$ 个插值函数（插值函数），其定义域假定为 $[-1,1]$，且 $\{\omega_n\}^{p_\mathrm{t}-1}{}_{n=0}$ 为 $[-1,1]$ 上的 $\mathrm{p_t}$ 个插值点。于是，U^d 关于 $\mathrm{s}\in\mathrm{J}$ 的插值形式如下：

$$U^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,s)\approx\sum_{n=0}^{p_\mathrm{t}-1}U^d\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,\overline{J}+h_\mathrm{t}\omega_n^{p_\mathrm{t}}\right)\ell_n\left(\frac{s-\overline{J}}{h_\mathrm{t}}\right),$$

其中，$\overline{\mathrm{J}}$ 表示 J 的中心；同样地，S、I 和 J 也以此定义。此外，对其余七个变量（即 $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3$，和 t）重复进行这样的插值后，$\mathrm{U}^d$ 可表示如下：

$$U^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,s)\approx\sum_{a<p_\mathrm{s}}\sum_{b<p_\mathrm{s}}\sum_{m<p_\mathrm{t}}\sum_{n<p_\mathrm{t}}U^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)\ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\ell_b\left(\frac{\boldsymbol{y}-\overline{S}}{h_\mathrm{s}}\right)\ell_m\left(\frac{t-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\ell_n\left(\frac{s-\overline{J}}{h_\mathrm{t}}\right),\tag{22}$$

其中，$\mathrm{U}^d_{a,\ b,\ m,\ n}$ 表示 U^d 在插值点处的值，即

$$U^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J):=U^d(\overline{O}+h_\mathrm{s}\boldsymbol{\omega}_a^{p_\mathrm{s}},\ \overline{S}+h_\mathrm{s}\boldsymbol{\omega}_b^{p_\mathrm{s}},\ \overline{I}+h_\mathrm{t}\omega_m^{p_\mathrm{t}},\ \overline{J}+h_\mathrm{t}\omega_n^{p_\mathrm{t}}).$$

此外，使用以下记号

$$\sum_{a<p_\mathrm{s}}:=\sum_{a_1=0}^{p_\mathrm{s}-1}\sum_{a_2=0}^{p_\mathrm{s}-1}\sum_{a_3=0}^{p_\mathrm{s}-1},\quad \ell_a(\boldsymbol{\xi}):=\ell_{a_1}(\xi_1)\ell_{a_2}(\xi_2)\ell_{a_3}(\xi_3),\quad \boldsymbol{\omega}_a^{p_\mathrm{s}}:=\left(\omega_{a_1}^{p_\mathrm{s}},\omega_{a_2}^{p_\mathrm{s}},\omega_{a_3}^{p_\mathrm{s}}\right)$$

表示空间指标 a。这里，ξ_i 假定属于 $[-1,1]$，即插值函数 l_a 的定义域。指标 b 也使用类似的记号。

可以发现，式（22）右端具有变量分离的形式。该表达式对应于传统快速多极子方法中的多极展开 [14, 17] 以及 PWTD 中的多极展开 [9, 10, 11, 12, 13, 19]。

从所得精度的角度来看，为每个变量选择插值函数并非显而易见。沿用先前的研究 [20, 24]，，本研究对空间和时间插值均采用三次厄米特插值（CHI），并使用有限差分近似导数；参见 [20, 附录 B]。

3.3. CFIE 中 P2M、M2L 和 L2P 的公式

将插值后的 U^d 代入 (22) 中的势，再代入¨(21)，即可得到基础公式。首先，将 (21a) 中的 $\boldsymbol{A}$ 写成如下形式：

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\ =\ &\sum_j\sum_\beta\frac{\mu}{4\pi}\sum_{\sigma=\pm}\frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma(c\Delta_\mathrm{t})^d}\int_{S_j^\sigma}\sum_a\sum_b\sum_m\sum_n\dot{U}^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)\\&\ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\ell_b\left(\frac{\boldsymbol{y}-\overline{S}}{h_\mathrm{s}}\right)\dot{\ell}_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\ell_n\left(\frac{t_\beta-\overline{J}}{h_\mathrm{t}}\right)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{o}_j^\sigma)\mathrm{d}S_y\boldsymbol{f}_j^\beta.\end{aligned}$$

为推导该式，首先，在 (21a) 中撤去 $\mathrm{t}=\mathrm{t}_\alpha$ 的代入。其次，从 ¨U^d 中分离出一个时间导数 ∂_t。第三，以与 (22) 相同的方式对一阶导数 ˙U^d ($\equiv \mathrm{cdU}^{d-1}$；参见式 (8)) 进行插值。第四，对生成的插值函数 $\mathrm{l}_m((\mathrm{t}-\mathrm{I})/\mathrm{h_t})$ 求导，使用分离出的 ∂_t。最后，将 t_α 代入 t。另一方面，也可以将 ∂_t^2 应用于 U^d 或 l_m，但将两个 ∂_ts 分开似乎是最佳做法；这将在第4节的 4.3 节中讨论。

接下来，通过调整求和的顺序，可将上述表达式化简为

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\ =\ &\sum_a\sum_m\ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\dot{\ell}_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\sum_b\sum_n\dot{U}^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)\\&\underbrace{\sum_j\sum_\beta\frac{\mu}{4\pi}\sum_{\sigma=\pm}\frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma(c\Delta_\mathrm{t})^d}\int_{S_j^\sigma}\ell_b\left(\frac{\boldsymbol{y}-\overline{S}}{h_\mathrm{s}}\right)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{o}_j^\sigma)\mathrm{d}S_y\ell_n\left(\frac{t_\beta-\overline{J}}{h_\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{f}_j^\beta}_{=:\boldsymbol{M}_{b,n}(S,J)},\end{aligned}\tag{23}$$

其中，$M_{b,n}$ 对应于快速多极子法中的多极矩。多极矩的定义对应于 A 的¨粒子到多极展开。需要注意的是，$M_{b,n}$ 是一个三维向量。此外，$M_{b,n}$ 中的 y 积分（以及后续多极矩中的积分）采用高斯求积公式计算；本研究使用三点公式。

依次，相应的局部系数 $L_{a,\ m}$ 可定义如下：

$$\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)=\sum_a\sum_m \ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\dot{\ell}_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\underbrace{\sum_b\sum_n \dot{U}^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)\boldsymbol{M}_{b,n}(S,J)}_{=:\,\boldsymbol{L}_{a,m}(O,I)}. \tag{24}$$

上述 $L_{a,\ m}$ 的定义不过是 M2L公式。此外，上述方程表示对¨矢量势 A 的 L2P。

其次，类 ¨似于 A，可以推导出针对时间微分标量势的基本快速多极子法操作 - 势 $\dot{\phi}$，如下 (21b) 所示：

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t_\alpha) &= \sum_a\sum_m \ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\ell_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\sum_b\sum_n U^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)\\ &\quad\underbrace{\sum_j\sum_\beta\frac{-1}{4\pi\varepsilon}\sum_{\sigma=\pm}\frac{\sigma l_j}{A_j^\sigma(c\Delta_\mathrm{t})^d}\int_{S_j^\sigma}\ell_b\left(\frac{\boldsymbol{y}-\overline{S}}{h_\mathrm{s}}\right)\mathrm{d}S_y\ell_n\left(\frac{t_\beta-\overline{J}}{h_\mathrm{t}}\right)\hat{f}_j^\beta}_{=:\,M_{b,n}(S,J)}\\ &= \sum_a\sum_m \ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\ell_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\underbrace{\sum_b\sum_n U^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)M_{b,n}(S,J)}_{=:\,L_{a,m}(O,I)}.\end{aligned} \tag{25}$$

在这种情况下，多极矩 $M_{b,n}$ 和局部展开系数 $L_{a,m}$ 均为标量。

第三，也是最后，根据（21c），矢量势 $\dot{\boldsymbol{P}}+\zeta\boldsymbol{P}$ 可表示如下：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)+\zeta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t_\alpha) &= \sum_a\sum_m \ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\left(\dot{\ell}_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)+\zeta\ell_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\right)\sum_b\sum_n U^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)\\ &\quad\underbrace{\sum_j\sum_\beta\sum_{\sigma=\pm}\frac{1}{4\pi}\frac{\sigma l_j}{2A_j^\sigma(c\Delta_\mathrm{t})^d}\int_{S_j^\sigma}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{o}_j^\sigma)\times\nabla_y\ell_b\left(\frac{\boldsymbol{y}-\overline{S}}{h_\mathrm{s}}\right)\mathrm{d}S_y\ell_n\left(\frac{t_\beta-\overline{J}}{h_\mathrm{t}}\right)\hat{\boldsymbol{f}}_j^\beta}_{=:\,\boldsymbol{M}^{\mathrm{mag}}_{b,n}(S,J)}\\ &= \sum_a\sum_m \ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\left(\dot{\ell}_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)+\zeta\ell_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\right)\underbrace{\sum_b\sum_n U^d_{a,b,m,n}(O,S,I,J)\boldsymbol{M}^{\mathrm{mag}}_{b,n}(S,J)}_{=:\,\boldsymbol{L}^{\mathrm{mag}}_{a,m}(O,I)}.\end{aligned} \tag{26}$$

这里，定义了另一个矢量多极矩和局部展开系数，分别记为 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{mag}}{}_{b,n}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{mag}}_{a\,m,}$。此外，在（26）中，未对 $\dot{\boldsymbol{P}}$ 进行时间微分，而是对 U^d 进行微分。在这种情况下，与使用磁场积分方程或 ∂_t磁场积分方程时相比，多极矩和局部展开系数的数量与类型均不变。另一方面，如果对 U^d进行时间微分，则除与 U^d相关的多极矩和局部展开系数外，还需要与一阶导数 $\dot{U}^d$ 相关的另一个矢量多极矩和局部展开系数。为节省计算时间和内存，本研究不考虑这种情况。

由（24）、（25）和（26），∂_t电场积分方程和 ∂_t磁场积分方程 + ζ由RWG函数测试的磁场积分方程$\boldsymbol{f}_i$，其中心位于

包含在O中的量可在t = t_α 处表示如下：

$$\int_S \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\left[-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\left(\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)+\nabla_{S_x}\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\right)\right]\mathrm{d}S_x$$

$$= \sum_{\rho=\pm}\int_{S_i^\rho}\sum_a\sum_m \ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\left[\dot{\ell}_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{L}_{a,m}(O,I)+\ell_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)(\nabla_{S_x}\cdot\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}))L_{a,m}(O,I)\right]\mathrm{d}S_x, \quad (27a)$$

$$\int_S \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\left[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\left(\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t_\alpha)+\zeta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t_\alpha)\right)\right]\mathrm{d}S_x$$

$$= \sum_{\rho=\pm}\int_{S_i^\rho}\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\cdot\left[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\sum_a\sum_m \ell_a\left(\frac{\boldsymbol{x}-\overline{O}}{h_\mathrm{s}}\right)\left(\dot{\ell}_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)+\zeta\ell_m\left(\frac{t_\alpha-\overline{I}}{h_\mathrm{t}}\right)\right)\boldsymbol{L}_{a,m}^{\mathrm{mag}}(O,I)\right]\mathrm{d}S_x. \quad (27b)$$

这些表达式用于计算 $\sum_{\beta=\beta^*+1}^{\alpha}\mathbf{Z}^{(\alpha-\beta+1)}\mathbf{J}^{\beta-1}$ 在20中的远场分量。与其余计算（即近场计算）不同，远场计算既不按RWG基函数进行，也不按时间步进行。

3.4. 快速时域边界元法的算法

电磁学快速时域边界元法的整体算法与声学情形的几乎相同[24]。简而言之，电磁情形处理多个矢量多极矩和局部展开，而声学情形处理单个标量多极矩和局部展开。因此，声学IFMM中针对单个标量多极矩/局部展开的操作可能需要执行七次，即一个标量多极矩/局部展开，以及两个矢量多极矩/局部展开的六个分量。

3.4.1. 时空层次结构

按以下方式为边界S中涉及的N_e 条边（或RWG基函数）构建空间层次结构。首先，用一个立方体包围S，称为层级0的根单元。接着，将根单元细分为八个子立方体，称为层级1的单元。此处，不含边的单元将被丢弃。随后，对每个单元（例如层级l上的单元C）重复细分，以生成其层级l + 1 上的子单元，前提是C包含预先设定数量N_{leaf} 条或更多条边。不含子单元的单元称为叶单元。由此构建出最大层级记为$l_{\max}$ 的自适应八叉树。层级l上单元的尺寸记为$d_\mathrm{s}^{(l)}$或$2h_\mathrm{s}^{(l)}$，其中$d_\mathrm{s}^{(l)} \equiv 2h_\mathrm{s}^{(l)}$且$h_\mathrm{s}^{(l)} \equiv d_\mathrm{s}^{(l+1)}$成立。此后，符号的上标“(l)”表示该符号取决于八叉树的层级l，其中$l \in [0, l_{\max}]$。

然后，根据原始快速多极子法 [14]，，某一层级中 C 的相邻单元定义为同一层级上最多 27 个（$= 3^3$）与 C 接触的单元。C 的相邻单元列表记为 $\mathcal{N}(C)$。另一方面，某一层级中 C 的交互单元定义为最多 189 个（$= 6^3 - 3^3$）满足以下条件的单元：(i) 它们是 C 的父单元的所有相邻单元的子单元；(ii) 它们不与 C 接触。交互单元列表，即所谓的交互列表，记为 $\mathcal{I}(C)$。

时间步的时间层次结构，即 $t_0, \ldots\ldots, t_{N_t}$，与上述八叉树的层级相关联。在每个层级 l，时间轴被划分为持续时间相同的时间区间，其持续时间记为 $d^{(l)}t$ 或 $2h^{(l)}t$，其中 $l \in [0, l_{\max}]$，并且满足 $d^{(l)}t \equiv 2h^{(l)}t$。因此，层级 l 中的第 k 个时间区间记为 $I^{(l)}{}_k$，其中 $k \geq 0$。

如上一节所示，IFMM 将源簇 (S, J) 的影响传递给观测簇 (O, I)，其中假设 $S \in \mathcal{I}(O)$，且 I 位于 J 的未来侧。因此，若持续时间 $d^{(l)}t$ 取从 O 到 S 的传播时间的最小值，即 $d^{(l)}t := d_\mathrm{s}^{(l)}/c$，则 S 在 J 期间产生的源信息会在 J 结束后传递至 O。因此，当源时间区间 J 为 $I^{(l)}{}_k$ 时，I 可以是 $I^{(l)}{}_{k+1}$、$I^{(l)}{}_{k+2}$，……。更准确地说，最高层级 $l_{\max}$ 中每个时间区间的时间步数首先由以下因素确定

$$M_\mathrm{t}^{(l_{\max})} := \mathrm{ceil}\left(\frac{d_\mathrm{s}^{(l_{\max})}}{c\Delta_\mathrm{t}}\right). \quad (28)$$

然后，相应的持续时间由以下因素确定

$$d_\mathrm{t}^{(l_{\max})} := M_\mathrm{t}^{(l_{\max})}\Delta_\mathrm{t}.$$

层级 l 的时间步数和持续时间通过递归方式确定如下：

$$M_{\mathrm{t}}^{(l)} := 2M_{\mathrm{t}}^{(l+1)}, \quad d_{\mathrm{t}}^{(l)} := 2d_{\mathrm{t}}^{(l+1)} \quad l = l_{\max} - 1, \ldots, 2.$$

按照构造，$\mathrm{I}^{(l)}{}_k$ 的子单元对应于 $\mathrm{I}_2^{(l+1)}{}_k$ 和 $\mathrm{I}_{2+1}^{(l+1)}{}_k$。

注1. 当 Δ_{t} 较大或 $\mathrm{d}^{(l_{\max})}{}_{\mathrm{s}}$ 较小时，式（$^{(l_{\max})}{}_{\mathrm{t}}$（28）中的 M 可以变为零，因此当前算法会失效。

3.4.2. 使用伪程序描述快速算法

程序 1 是主程序，用于在 MOT格式下求解式（19）中的离散化组合场积分方程。根据部分输入（即 S 的网格、 Δ_{t}、$\mathrm{N_t}$ 和 $\mathrm{N_{leaf}}$）构建上述时空层次结构后，在第 3 行初始化所有右端向量 $\mathrm{R}^0, \ldots, \mathrm{R}^{N_{\mathrm{t}}-2}$。这是因为当前时间区间的影响会在第 8 行传递给未来时间区间的某些右端向量。根据快速多极子法的原理，当前 IFMM 在概念上将式（20）中的每个系数矩阵（例如 $\mathrm{Z}^{(\gamma)}$）分解为近场分量和远场分量，分别记为 $\mathrm{Z}_{\mathrm{near}}^{(\gamma)}$ 和 $\mathrm{Z}^{(\gamma)}\,\mathrm{far}$。前者 $\mathrm{Z}_{\mathrm{near}}^{(\gamma)}$ 由彼此距离较近的 RWG基函数之间的相互作用组成。距离远近按单元粒度判定：同一层级的两个单元 O 和 S 在 $\mathrm{S} \in \mathcal{N}(\mathrm{O})\,(\Leftrightarrow \mathrm{O} \in \mathcal{N}(\mathrm{S})$ 的情况下彼此接近。这样计算得到的矩阵 $\mathrm{Z}_{\mathrm{near}}^{(\gamma)}$ 与某个向量 $\hat{}\mathrm{J}^{\beta-1}$相乘；实际中，矩阵-向量乘积是在计算过程中即时完成的，无需将矩阵 $\mathrm{Z}_{\mathrm{near}}^{(\gamma)}$ 分配到计算机内存中。由此得到的近场贡献会累加到当前右端项向量 $\mathrm{R}^{\alpha-1}$中；见第 6 行。更多细节见程序 2。按照快速多极子法的术语，近场计算称为点对点计算或直接计算。

程序 1 主程序。

1：输入：S 的网格（由 $\mathrm{N_s}$ 个三角形组成）、介电常数 ϱ、磁导率 μ、入射场 E^{I} 和 H^{I}、耦合参数 θ 和 ζ、时间步数 $\mathrm{N_t}$、时间步长 Δ_{t}、插值点数 $\mathrm{p_s}$ 和 $\mathrm{p_t}$、叶单元中边的最大数量 $\mathrm{N_{leaf}}$（参见第 3.4.1 节）、高斯求积点数量（参见第 3.3 节）、GMRES 参数（参见第 2.5 节）。2：按照第 3.4.1 节构建时空层次结构。3：初始化 $\alpha = 1$ 至 $\mathrm{N_t} - 1$ 对应的所有右端向量 $\mathrm{R}^{\alpha-1} = \mathbf{0}$。4：对于从 $\alpha = 1$ 到 $\mathrm{N_t} - 1$ 的时间步：5：将入射场 $\mathrm{V}^{\alpha-1}$ 加到 $\mathrm{R}^{\alpha-1}$。6：按照程序 2，将当前时间步 α 的近场贡献加到 $\mathrm{R}^{\alpha-1}$。7：使用广义最小残量法求解式 (19)，得到未知向量 $\mathrm{J}^{\alpha-1}$。8：按照程序 3 和程序 4，将当前时间区间的远场贡献加到 R^{β}，并考虑有限数量的未来时间区间。

在程序2中，数字 $\gamma^{*(l)}$ 在第8 行的定义与 γ^* 在（10）中的定义类似，但$\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$ 的定义域仅限于O的邻居，即

$$\gamma^{*(l)} := \frac{\max_{\boldsymbol{x}\in O,\, \boldsymbol{y}\in\mathcal{N}(O)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c\Delta_{\mathrm{t}}} = \frac{2\sqrt{3}d_{\mathrm{s}}^{(l)}}{c\Delta_{\mathrm{t}}}. \tag{29}$$

由此可见，随着层级 l 增加（即空间尺度变小），与对 β 进行循环对应的已传递时间步数会减少，这发生在第 8 行，因此直接计算量也随之减少。由此，近场计算在空间和时间上都具有局部性。

程序 2 近场计算（点对点）。

```
1: 当前时间步为 α。
2: 对于层级 l = 2 到 l_max
3:     对于层级 l 中的单元 O
4:         对于邻居列表 N(O)中的单元 S
5:             如果 O 或 S 是叶单元
6:                 对于 O 中的 RWG基函数 f_i
7:                     对于 S 中的 RWG基函数 f_j
8:                         对于时间步 β = α − γ^{*(l)} + 1 至 α
9:                             如果尚未计算并存储系数 Z^{(α−β+1)}_{ij}，则计算并存储它。
10:                            将乘积 −Z^{(α−β+1)}_{ij} Ĵ^{β−1}_j 加到 R_i^{α−1}中。
```

求解当前未知向量 $J^{\alpha-1}$ 后（程序 1 第 8 行），在程序 1 第 8 行通过程序 3 和程序 4 中的向上与向下传递，分别计算远场贡献。当当前时间步 α 与当前时间区间 $I^{(l)}k$ 的末端重合时，在层级 l 执行这些传递，其中 $k := \alpha/M^{(l)}t - 1$。（根据 PWTD，这称为时间门控。）随后，可以通过 M2L操作来解释远场计算：该操作将簇 $(O, I^{(l)}k)$ 的远场贡献传递至任意簇 $(S, I^{(l)}j)$，其中交互单元 $S \in \mathcal{I}(O)$，且未来时间区间为 $j = k+1, \ldots, k+\mu+1$。这里，无论层级如何，μ 均取 8[24, 第4节。2]。因此，在程序 1 第 8 行更新与未来 $\mu+2$ 个时间区间相关的未来右端项向量（即 $R^{\alpha}, R^{\alpha+1}, \ldots$）。

需要指出的是，程序 4 中的 M2L 转换并非基于 [20] 中的代码4，而是基于 [24]中的算法1。这是因为 [24] 中的算法1（或公式1）是将 [20] 中的代码4从 $d = 1$ 推广到$d \geq 1$，其中 d 表示 B样条时间基函数的阶数；回顾式（$\boldsymbol{J}$（6）中的近似。

当前的向上和向下传递与声学情形类似，即 [20],中的代码 3 和 4，但在以下方面有所不同：

- 每个 M2M（程序 3第 9 行）、M2L（程序 4第 6 行）和 L2L（程序 4第 10 行）执行的次数不是一次，而是七次，因为当前的电磁情形涉及一个标量和两个矢量MM及其局部展开系数，而声学情形则只涉及一个标量MM和局部展开系数。
- 如程序 4第 8 行所示，在电磁情形中，标量势和矢量势根据（27）在三角形上进行积分；而在声学情形中，则在配点处计算层势。不过，由于（27）中对 x 的积分是通过高斯求积公式计算的，因此求积点可以视为声学情形中的配点。因此，对 $\boldsymbol{x}$ 的积分是否存在，与 IFMM 的概念无关。

由此可见，电磁情形所需的计算时间和内存实际上比声学情形更多，尽管前者的计算复杂度与后者相同（见第 3.5 节）。由于在当前多层算法中，大部分计算时间都花在 M2L 转换上，因此电磁情形的计算时间约增加 7×3 倍，其中数字“7”表示电磁情形的多极矩/局部展开数量与声学情形对应数量之比，“3”表示对 $\boldsymbol{x}$ 积分时所用的高斯求积点数。

程序 3：远场计算的向上遍历。

1：当前时间步为 α。
2：对于层级 l = $l_{\max}$ to 2
3： 如果 α 能被 $M_t^{(l)}$ 整除
4： 当前时间区间为 $I^{(l)}_k$，其中 $k := \frac{\alpha}{M_t^{(l)}} - 1$.
5： 对于层级 l 中的单元格 S
6： 如果 S 是叶单元
7： 根据（23）、（25）和（26）执行 P2M 操作。
8： **else**
9： 执行 M2M 操作；根据 $(S', I2^{(l+1)}_k)$ 的七个多极矩，计算 $(S, I^{(l)}_k)$ 的每一个多极矩，并 $(S', I2^{(l+1)}_{+1\,k})$，对于 S 的每个子单元 S'，根据 [20] 中的 (16) 式所示的 M2M 公式计算。

程序 4 远场计算的向下传递。

1：当前时间步为 α。
2：对于层级 l = 2 到 $l_{\max}$
3： 如果 α 能被 $M_t^{(l)}$ 整除
4： 当前时间区间为 $I^{(l)}_k$，其中 $k := \frac{\alpha}{M_t^{(l)}} - 1$.
5： 对于层级 l 中的单元 O
6： 对（24）、（25）和（26）中的七对多极矩和局部展开分别执行 M2L 操作。具体而言，对每一对应用 [24] 中的算法 4。
7： 如果 O 是叶单元
8： 根据（27）计算任意 $f_i \in O$ 和 $t_\beta \in I^{(l)}_{k+1}$ 的积分，其中使用（O，$I^{(l)}_{k+1}$）的局部展开系数；其中 I 和 t_α 分别表示 $I^{(l)}_{k+1}$ 和 t_β。
9： **else**
10： 执行 L2L 操作；据此计算（O′, $I2^{(l+1)}_{+1}(k)$）和（O′, $I2^{(l+1)}_{+1}(k)+1$）的七个局部展开中的每一个
  根据 [20] 的式（17），对每个 O 的子单元 O′，计算 $(O, I^{(l)}_{k+1})$。

3.5. 复杂度

除假设 1 和 2 外，为了计算快速时域边界元法的计算复杂度，还考虑以下假设：

假设3。IFMM 的参数 N_{leaf}、p_s 和 p_t 与 N_s 和 N_t无关，即 $N_{leaf} = O(1)$、$p_s = O(1)$ 和 $p_t = O(1)$。

假设4。N_e 条边（或 RWG基函数）在立方域（或根单元）内均匀分布，使得每个非叶单元都可以拥有完整的八个子单元。此外，每个叶单元都位于层级 l_{max}。由此可得

$$N_{\text{leaf}} \cdot 8^{l_{\max}} = N_{\text{e}} \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{l_{\max}} = \left(\frac{N_{\text{e}}}{N_{\text{leaf}}}\right)^{1/3} \sim O(N_{\text{s}}^{1/3}). \tag{30a}$$

或者，N_e 条边分布在立方域内的一个平面上，使得每个非叶单元都可以拥有四个子单元。此外，每个叶单元都位于层级 l_{max}。由此可得

$$N_{\text{leaf}} \cdot 4^{l_{\max}} = N_{\text{e}} \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{l_{\max}} = \left(\frac{N_{\text{e}}}{N_{\text{leaf}}}\right)^{1/2} \sim O(N_{\text{s}}^{1/2}). \tag{30b}$$

注2。 所提出的快速时域边界元法的计算复杂度估算为 $O(N_s^{4/3}N_t)$ (分别为，$O(N_s^{3/2}N_t)$)，其假设条件为假设 *1*、*2*、 *3*以及假设 4中的（30a）（分别为（30b））。

为清晰起见，式（30a）在均匀分布情况下的计算复杂度描述方式与 [20,附录A]类似。为此，可得到以下关系：

$$\Delta_t,\ N_{\text{leaf}},\ p_s,\ p_t \sim O(1),\quad \Delta_s^{(l)} \sim 2^{-l},\quad \gamma^{*(l)} \sim \frac{\Delta_s^{(l)}}{\Delta_t} \sim 2^{-l}\cdot\Delta_t^{-1},\quad 2^{l_{\max}} \sim N_s^{1/3},\quad M_t^{(l)} \sim \frac{\Delta_s^{(l)}}{\Delta_t} \sim 2^{-l}\cdot\Delta_t^{-1}.$$

在下文中，为了考虑计算复杂度的另一种情形，我们不省略常数 Δ_t；这一情形将在备注3中提及。由此，IFMM 中主要操作的浮点运算次数（flops）计算如下：

1. 程序1 第6行的 P2P：

$$\begin{aligned}
&(\text{flops per leaf and time-step}) \times (\#\text{ of leaves at level } l_{\max}) \times (\#\text{ of time-steps})\\
\sim\ & N_{\text{leaf}} \cdot 27N_{\text{leaf}} \cdot \gamma^{*(l_{\max})} \times 8^{l_{\max}} \times N_t\\
\sim\ & 27N_{\text{leaf}}^2 \cdot 2^{-l_{\max}} \cdot \Delta_t^{-1} \times \frac{N_s}{N_{\text{leaf}}} \times N_t \sim N_s^{2/3} N_t \Delta_t^{-1}
\end{aligned}$$

2. 程序3 第7行的 P2M：

$$\begin{aligned}
&(\text{flops per leaf and time-interval}) \times (\#\text{ of leaves at level } l_{\max}) \times (\#\text{ of time-intervals})\\
\sim\ & N_{\text{leaf}} M_t^{(l_{\max})} {p_s}^3 p_t \times 8^{l_{\max}} \times \frac{N_t}{M_t^{(l_{\max})}} \sim N_s N_t
\end{aligned}$$

3. 程序3 第9行的 M2M：

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=2}^{l_{\max}-1} (\text{flops per cell and time-interval}) \times (\#\text{ of cells}) \times (\#\text{ of time-intervals})\\
\sim\ & \sum_{l=2}^{l_{\max}-1} {p_s}^6 {p_t}^2 \cdot 8 \times 8^l \times \frac{N_t}{M_t^{(l)}} \sim \sum_{l=2}^{l_{\max}-1} 16^l N_t \Delta_t \sim 16^{l_{\max}} N_t \Delta_t \sim N_s^{4/3} N_t \Delta_t
\end{aligned}$$

4. 程序4 第6行的 M2L：
   如第3.4.2节所述，电磁情形下，公式 [24, 公式 1] 中的 M2L公式应用于每一对多极矩和局部展开。此时，不仅需要根据（24）、（25）和（26）计算局部展开系数，还需要计算局部展开的导数以及相关局部展开。不过，计算开销最大的操作是计算局部展开系数。相应的浮点运算次数估算如下：

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=2}^{l_{\max}} (\text{flops per cell and time-interval}) \times (\#\text{ of cells}) \times (\#\text{ of time-intervals})\\
\sim\ & \sum_{l=2}^{l_{\max}} {p_s}^3 p_t (\log p_s + \log p_t) \cdot 189 \cdot 9 \times 8^l \times \frac{N_t}{M_t^{(l)}}\\
\sim\ & \sum_{l=2}^{l_{\max}} 16^l N_t \Delta_t \sim 16^{l_{\max}} N_t \Delta_t \sim N_s^{4/3} N_t \Delta_t
\end{aligned}$$

   此处，第二行中的因子‘9’表示需要考虑的未来时间区间数量；在第μ + 1节中，该数量被称为‘3.4 ’，并将在3.6.1节中再次提及。
5. L2Lat 行10，程序4：
   由于这几乎与 M2M 翻译执行相同的操作，因此浮点运算次数按 $N_s^{4/3} N_t \Delta_t$ 的比例缩放。

6. 程序中第 8 行的 L2P4:

$$\begin{aligned} & \text{(flops per leaf and time-interval)} \times \text{(\# of leaves at level } l_{\max}) \times \text{(\# of time-intervals)} \\ \sim \quad & N_{\text{leaf}} M_{\text{t}}^{(l_{\max})} {p_{\text{s}}}^3 p_{\text{t}} \times 8^{l_{\max}} \times \frac{N_{\text{t}}}{M_{\text{t}}^{(l_{\max})}} \sim N_{\text{s}} N_{\text{t}} \end{aligned}$$

根据这些 计数，在均匀分布的假设下，计算复杂度确实估计为 $O(\mathrm{N_s^{4/3}N_t})$，

布 （30a）中的

注释3。 与假设 Δ_{t} 中将其设为常数不同，2，另一种情形是固定终止时间 T，即 $\mathrm{T} := (N_{\text{t}} - 1)\,\Delta_{\text{t}} \sim N_{\text{t}}\Delta_{\text{t}}$。在这种情况下， Δ_{t} 的缩放为 $O(N_{\text{t}}^{-1})$。因此，快速时域边界元法中各项操作的复杂度计算如下:

$$P2P \sim N_{\text{s}}^{2/3} N_{\text{t}}^2, \quad P2M,\, L2P \sim N_{\text{s}} N_{\text{t}}, \quad M2M,\, M2L,\, L2L \sim N_{\text{s}}^{4/3}$$

在假设（30a）成立的前提下，以及

$$P2P \sim N_{\text{s}}^{1/2} N_{\text{t}}^2, \quad P2M,\, L2P \sim N_{\text{s}} N_{\text{t}}, \quad M2M,\, M2L,\, L2L \sim N_{\text{s}}^{3/2}$$

基于式 (30b) 的替代假设。此外，如果 $\mathrm{N_s}$ 和 $\mathrm{N_t}$ 均与某个参数 n 成比例变化，即 $\mathrm{N_s}$、$\mathrm{N_t} \sim O(\mathrm{n})$，则快速时域边界元法的计算复杂度对于式 (30a) 和 (30b) 分别计算为 $O(\mathrm{n}^{8/3})$ 或 $O(\mathrm{n}^{5/2})$。另一方面，由于式 (10) 中的 γ^* 按 $O(\Delta_{\text{t}}) = O(\mathrm{N_t^{-1}})$ 缩放，传统时域边界元法的复杂度估计为 $O(\mathrm{N_s^2 N_t^2}) = O(\mathrm{n}^4)$。

在前文针对声学问题进行数值验证时， [20, 第 5 节2], 分析了一系列问题，其情形为 $\Delta_{\text{t}} = O(N_{\text{t}}^{-1})$ 和 N_{s}， $N_{\text{t}} \sim O(n)$，如备注 3所述。然而，在 固定的情况下，传统时域边界元法和快速时域边界元法在声学问题中的实际计算时间是结合计算复杂度进行讨论的，这分别对应于第 2.6 节和备注 2中的情形。就此而言，该讨论并不完整，但快速时域边界元法本质上快于传统时域边界元法这一点是正确的。

3.6. 注释

在结束本节之前，下面就快速时域边界元法的数值实现作一些说明。

3.6.1. 多极矩、局部展开系数和多极展开到局部展开操作的数值处理

对于给定单元和时间区间的七个多极矩和局部展开系数（作为标量），可以将所有分量连接起来，将其视为一个 ${p_{\text{s}}}^3 p_{\text{t}}$- 维代数向量。例如，式（$M_{b,n}(S,J)$ 中的标量 25可以表示为代数向量 $\mathbf{m}(S,J)$，其定义为

$$\mathrm{m}_{((b_1 p_{\text{s}} + b_2) p_{\text{s}} + b_3) p_{\text{t}} + n + 1}(S,J) := M_{b_1,b_2,b_3,n}(S,J)$$

对于任意 $b_1, b_2, b_3 \in [0, p_{\text{s}})$ 和 $n \in [0, p_{\text{t}})$。类似地，局部展开系数 $L_{a,m}(O,I)$ 可以表示为 $\mathbf{l}(O,I)$。于是，式（25）中的 M2L公式可以写成一个 ${p_{\text{s}}}^3 p_{\text{t}}$-维矩阵-向量乘积，即

$$\mathbf{l}(O,I) = \mathbf{U}^d(O,S,I,J)\mathbf{m}(S,J), \tag{31}$$

其中，M2L算子（矩阵）U^d 可计算为

$$\mathrm{U}^d_{((a_1 p_{\text{s}} + a_2) p_{\text{s}} + a_3) p_{\text{t}} + m + 1, ((b_1 p_{\text{s}} + b_2) p_{\text{s}} + b_3) p_{\text{t}} + n + 1} := U^d_{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,m,n}(O,S,I,J)$$

对于任意 $\mathrm{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3} \in [0, \mathrm{p_s})$ 以及 $\mathrm{m、n} \in [0, \mathrm{p_t})$。

式（31）中的 M2L算子 $\mathrm{U}^d(O、S、I、J)$ 已针对所有可能的 O、S、I和 J进行了预计算。由于函数U^d （8）具有关于空间和时间的平移不变性，O

与 S 的组合数量仅限于一个固定值 316（$= 7^3 - 3^3$）。另一方面，I 和 J 的组合数量会随着N_t 的增加而增加。然而，利用递推公式，只需 9 组组合即可，即 [24, 局部展开的公式 1]）。一旦 316×9 计算并存储了某一层级的多极到局部算子，其他层级的算子便可通过一定的缩放得到，因为当层级 l 增加（相应地，减少）1 时，该层级的单元尺寸 $d_\mathrm{s}^{(l)}$和持续时间 $d^{(l)}{}_\mathrm{t}$ 分别减半（相应地，翻倍）（参见第 3.4.1节）。

此外，还应注意到，如31)中所述的矩阵-向量乘积可以通过四维快速傅里叶变换（FFT）高效计算，详见 [20, 第4节5]。

3.6.2. 并行化

在实际程序中，借助 OpenMP 实现多线程并行化，其方式与声学程序[20]类似。具体而言，对程序2第3 行中的O、程序3第5 行中的S，以及程序4第5 行中的O所对应的循环均使用 OpenMP 指令“omp parallel for”进行标注。此外，预计算阶段也采用相同的并行化方法，例如计算上述 316×9 M2L算子。

3.6.3. 传统时域边界元法程序

传统时域边界元法的伪代码可通过修改快速时域边界元法的伪代码得到。为此，程序2 第2 行中对层级的循环仅限于根层级，即$l = 0$。接下来一行中的单元O 仅为根单元，其邻居列表 $\mathcal{N}(O)$仅包含O 。因此，修改后的程序可以计算全部N_e 个 RWG基函数之间的相互作用。程序1第8行中的远场计算不再需要，因此将其删除。

4. 数值算例

通过一个测试问题（第 4.1–4.3 节）和一个演示（第4.4 节），对所提出的快速时域边界元法进行了数值验证。

4.1. 测试问题

考虑一个电磁散射问题：在自由空间中，原点处有一个半径为 $a = 0.5$ 的球形理想电导体，其参数为 $\epsilon = \mu = 1$ （图 4）。考虑一个沿 $-x_3$ 方向或 $\boldsymbol{k}^\mathrm{I} := (0,0,-1)^\mathrm{T}$ 传播的平面入射波，其电场和磁场如下：

$$\boldsymbol{E}^\mathrm{I}(\boldsymbol{x},t) = \left(A\,\mathrm{Sin}^2\left(\frac{2\pi}{\Lambda}(ct + x_3 - a)\right), 0, 0\right)^\mathrm{T}, \quad \boldsymbol{H}^\mathrm{I}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{k}^\mathrm{I} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{I}(\boldsymbol{x},t),$$

其中，脉冲长度 Λ 和振幅 A 均设为 0.5。此处，正弦函数 Sin() 定义为

$$\mathrm{Sin}(x) := \begin{cases} \sin(x) & 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

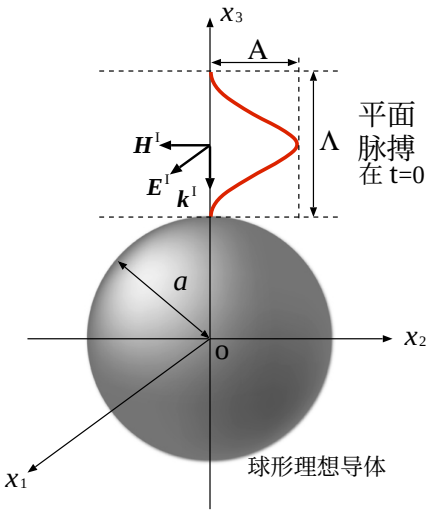

图4：测试问题的配置。

将所提出的快速时域边界元法与传统方法进行了比较。在两种方法中，组合场积分方程θ和 ζ 中耦合参数（1）均简单地取为 1。

如表1所示，考虑了七种网格规模，即 N_s ($\equiv 2N_e/3$)；图5 展示了情形3的网格。由于理想电导体的尺寸固定，这与假设1一致，因此边长（记为 Δ_s）会随着 N_s 增大而减小，如表中所示。此外，通过设置 $N_{leaf} = 100$，八叉树的最大层级 l_{max} 从 2 变化到 5。为与假设2 一致，所有这些情形的时间步长 Δ_t 均固定为 0.005。在此情况下，备注1中提到的 IFMM 崩溃从未发生。实际上，每个时间区间内层级 l_{max} 的时间步数 $M^{(l_{max})}$ t 按表中所示确定。

当前边（RWG基函数）的分布更接近假设4中的（30b）所示的平面情形，而非（30a）中的均匀分布。以情形5为例，当N_{max} 时，（30a）和（30b）的左端项分别计算为$N_{leaf} \cdot 8^{l_{max}} = 100 \cdot 8^5 = 3276800$ 和 $N_{leaf} \cdot 4^{l_{max}} = 100 \cdot 4^5 = 102400$。显然，后者比前者更接近边的实际数量，即$N_e \equiv 3N_s/2 = 122880$。

表1：测试问题的七种情况。

Case	N_s	Δ_s			l_{max}	$M_t^{(l_{max})}$
		Min.	Ave.	Max.		
1	1280	0.069	0.075	0.084	2	50
2	2880	0.046	0.050	0.056	2	50
3	5120	0.035	0.038	0.042	3	25
4	11520	0.023	0.025	0.028	4	12
5	20480	0.017	0.019	0.021	4	12
6	46080	0.012	0.013	0.014	5	6
7	81920	0.009	0.010	0.011	5	6

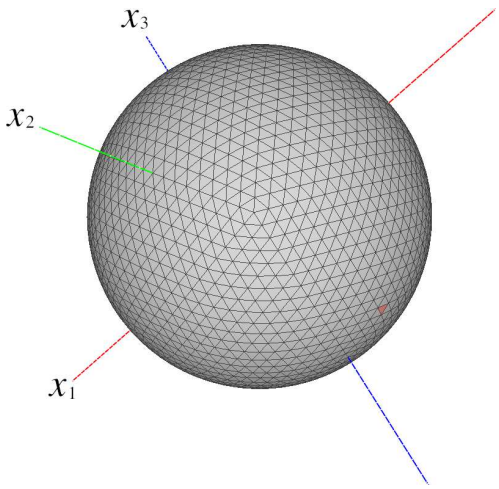

图5：网格　　情形3（5120 个三角形；7680 条边）。红色三角形表示采样电流密度 J 轮廓的单元，其
图7。

为观察快速时域边界元法的精度和运行时间趋势，我们测试了p_s 和p_t的三种取值；它们表示插值点的数量（参见第3.2节）。具体而言，令p_s 和p_t 分别取值4、6或8。根据这些取值，快速时域边界元法分别称为FAST4、FAST6和FAST8，而传统时域边界元法称为CONV。

对于当前问题，可以通过半解析方法计算参考解，例如 $J^{reference}$。为此，首先借助频域或傅里叶变换域中的解 [41]，计算拉普拉斯变换域中的精确解，然后对该精确解应用数值拉普拉斯逆变换。

为衡量两种时域边界元法的精度，计算了它们相对于 $J^{reference}$ 的误差，采用以下相对 l^2-误差：

$$\text{Relative } l^2\text{-error} := \frac{\sum_{i=1}^{N_s}\sum_{\alpha=1}^{N_t-1}\left|\boldsymbol{J}^{\text{TDBEM}}(\overline{S}_i,t_\alpha)-\boldsymbol{J}^{\text{reference}}(\overline{S}_i,t_\alpha)\right|^2}{\sum_{i=1}^{N_s}\sum_{\alpha=1}^{N_t-1}\left|\boldsymbol{J}^{\text{TDBEM}}(\overline{S}_i,t_\alpha)\right|^2}, \tag{32}$$

其中 $\overline{S_i}$ 表示 表示三角形中心的 S_i 和 $\boldsymbol{J}^{\text{TDBEM}}$ 表示通过式（6）采用以下任一方法得到的电流密度
传统方　　法或快速时域边界元法。

所有计算均使用一台配备英特尔至强处理器（型号：Gold 6250，主频：3.90 GHz，计算核心数：16）和 768 GB 内存的工作站。两个时域边界元法程序均按照第 3.6.2 节所述，使用 OpenMP 进行并行化。

4.2. 结果

从精度、计算时间和内存消耗方面评估了所提出的快速时域边界元法。需要指出的是，传统方法由于计算过程中内存耗尽，无法求解案例4–7。

图6 比较了两种时域边界元法的相对误差。随着 N_s 增大，传统方法的误差单调减小。这可以解释为离散误差的减小。另一方面，对于每个精度级别，快速方法的误差随着 N_s 增大而减小，随后趋于饱和。这种现象可能是由选择 p_s 和 p_t 所带来的近似误差造成的。此外，对于每个 p_s 和 p_t，随着 N_s 增大，精度往往会提高。

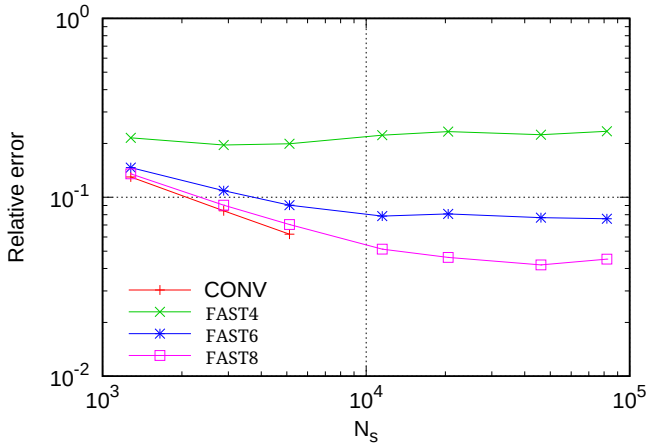

图6：测试问题的相对 l^2-误差。

相对误差约为 10^{-1}，即图6中的 10%。为了查看相应的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的形态，图7 绘出了情形3中随机选取的一个单元中心处 $\boldsymbol{J}$ 的三个分量；该单元在图5中以红色标出。可以看出，FAST4 的精度明显不足，而 FAST6 和 FAST8 的结果较好，但参考解急剧变化的部分除外。需要注意的是，底层 $\boldsymbol{J}$ 的相对 l^2 误差分别为 5.70×10^{-2}、2.71×10^{-1}、1.08×10^{-1} 和 7.23×10^{-2}，对应 CONV、FAST4、FAST6 和 FAST8。这些数值与图6 中 $N_s = 5120$ 时的数值接近。因此，所示剖面可视为所有剖面的代表。

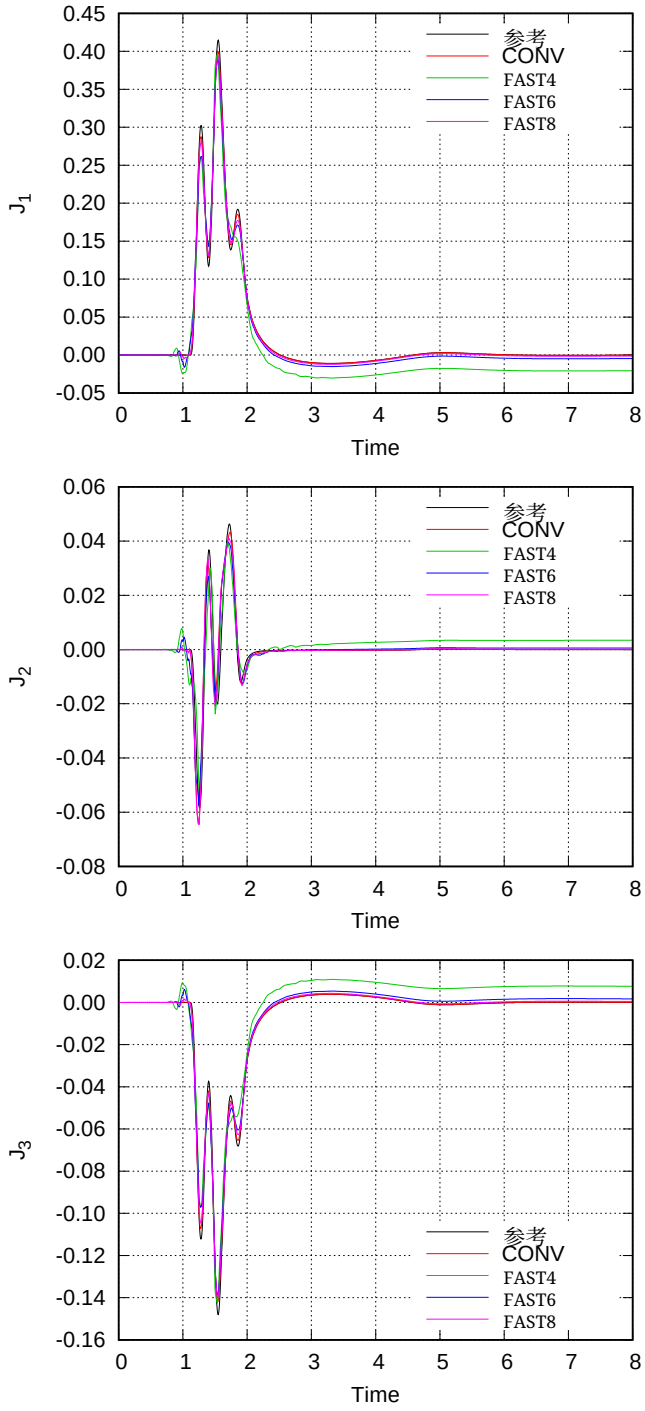

图7：$\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3)^{\mathrm{T}}$ 位于图5中红色三角形的中心。

图8 显示了总计算时间。首先，所提方法在情况1、2和3中优于传统方法；对于规模更大的情况也是如此。从图8 和6可以看出，快速方法在计算时间与误差之间存在权衡。此外，图8 清楚地表明，对于边的类平面分布，当前的 IFMM 可以将计算复杂度从 $O(N_{\mathrm{s}}^2)$ 降至 $O(N_{\mathrm{s}}^{3/2})$。

空间。

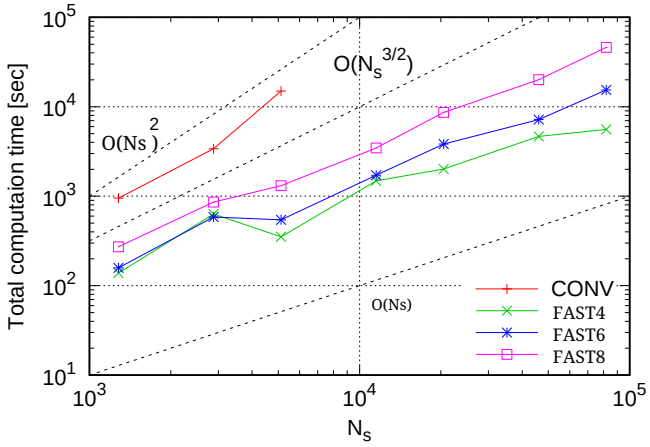

图 8：测试问题的总计算时间。

图9 展示了两种时域边界元法的内存消耗。为简洁起见，测量的是峰值内存大小。[1]传统方法会存储系数矩阵 $Z^{(1)}$、$Z^{(2)}$ 等的非零元素。另一方面，快速方法会存储用于近场计算的部分非零元素（即 $Z^{(\gamma)}_{\text{near}}$），如第 3.4.2 节所述。相应地，远场计算需要为每个单元存储一些量，例如多极矩和局部展开系数，以及多极到局部算子。然而，对于合理的 p_s 和 p_t 值，远场计算所需的内存少于直接计算 $Z^{(\gamma)}$ far (= $Z^{(\gamma)} - Z^{(\gamma)}_{\text{near}}$) 所需的内存。因此，IFMM 可以显著节省内存。

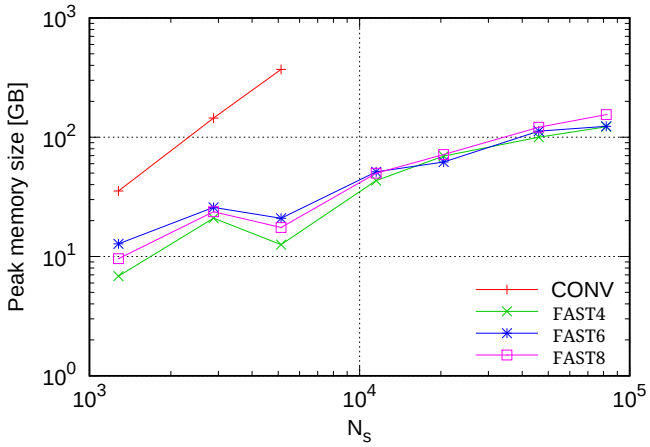

图 9：测试问题的内存消耗。

总的来说，本文给出的数值结果令人满意，验证了所提出的快速时域边界元法的有效性。

[1]在 Linux 系统中，可通过相应 UNIX 进程状态文件中的“VmHWM”条目获取进程的峰值内存大小（即“峰值驻留集大小”）。

4.3. 讨论

4.3.1. 与传统组合场积分方程的比较

当前的时域边界元法确实同时需要磁场积分方程和 ∂_t磁场积分方程。为此，对以下三种组合场积分方程分别采用常规算法和快速算法进行了比较：

- 组合场积分方程1 = ∂_t电场积分方程 + ∂_t磁场积分方程 + 磁场积分方程；这正是式（1）中的组合场积分方程，
- 组合场积分方程2 = ∂_t电场积分方程 + ∂_t磁场积分方程，
- 组合场积分方程3 = ∂_t电场积分方程 + 磁场积分方程。

图 10 比较了时域边界元法六种情形在相对 l^2-误差方面的表现（见式（32））。对于传统算法，组合场积分方程2与组合场积分方程1几乎相同，而组合场积分方程3略逊于其他方案。快速算法基本上也呈现出这一趋势，但其固有的近似（由于通过插值进行变量分离）似乎放大了相应传统方法的误差。尤其是组合场积分方程3导致了晚时不稳定性。从数学上论证组合场积分方程1的必要性并不容易，但这一比较表明，对于传统时域边界元法，同时采用磁场积分方程和 ∂_t磁场积分方程是可选的，而对于快速时域边界元法则不可或缺。

此外，组合场积分方程中耦合参数 θ 和 ζ （1）的选择会影响误差结果。可以进一步寻找最优值，但本研究未对此进行探讨。

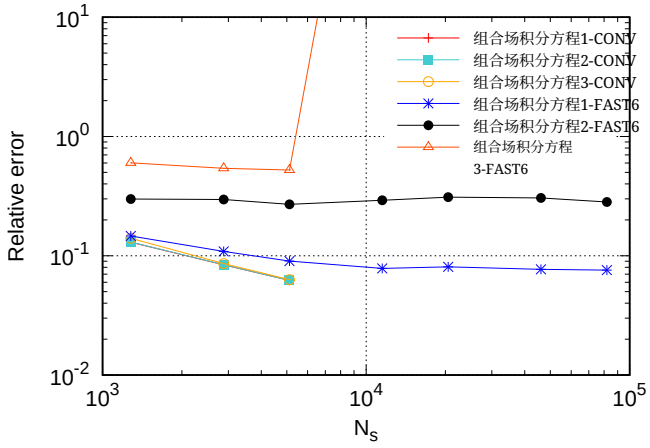

图10：相对　　误差（针对三种组合场积分方程）。组合场积分方程1-CONV和组合场积分方程1-FAST6的结果分别与CONV和图中的 FAST6 6　相同。组合场积分方程3-FAST6在较大的Nss时误差显著增大，因此未绘出。

4.3.2. 时间微分方案的选择

探究对矢量势二阶时间微分的其他可能处理方式将很有意思 $\partial_t^2 \boldsymbol{A}$ 在 ∂_t电场积分方程中。在式（24）的情形下，核函数U^d 和插值函数l_m 均求了一次导数。在这种情形下，除了对 $\dot{U}^d \left(\equiv cdU^{d-1}\right)$ 进行插值外，还需要对导数U^d进行插值。这会在预计算阶段增加计算时间和内存开销，但增幅并不显著。另一方面，也可以对 $\partial_t^2\ U^d$ 或l_m进行微分。在保持$d\ = 2$ （即二次B样条时间基）和插值函数（即采用有限差分近似的CHI），以及$p_\mathrm{s} = p_\mathrm{t} = 6$ （即FAST6）不变的情况下，对这两种情形进行了测试。

相对l^2-误差如图11所示，其中“FAST6（$\partial_t^2 U^d$）”和“FAST6（$\partial_t^2 \mathrm{l}_m$）”分别表示使用$\partial_t^2 U^d$ 和 $\partial_t^2 \mathrm{l}_m$得到的结果。对于 $\partial_t^2 U^d$，FAST6 在每个N_s 中都出现了晚时不稳定性，因此相应的误差显著增大。这可能是因为导数 $\partial^2 U^d$ 因$d\ = 2$ 而不连续，因此插值得到的导数存在误差。通过使用一个

更大的 d ≥ 3 可以提高精度。然而，使用 d ≥ 3 会使算法不稳定；即使是传统时域边界元法，在 d ≥ 3 时也不稳定。

使用 $\partial_t^2 \mathrm{l}_m$ 得到的 FAST6 结果优于 $\partial_t^2 U^d$，但不如基于 $\partial_t U^d$ 和 $\partial_t \mathrm{l}_m$ 的原始 FAST6 结果，这一点在同一图中可以观察到。在这种情况下，微分后的插值函数 $\partial_t^2 \mathrm{l}_m$ 是分段线性的，因为 l_m 是一个三次多项式。然而，其光滑度不足以表达真实解；如图 7 所示，真实解既平滑又变化陡峭。

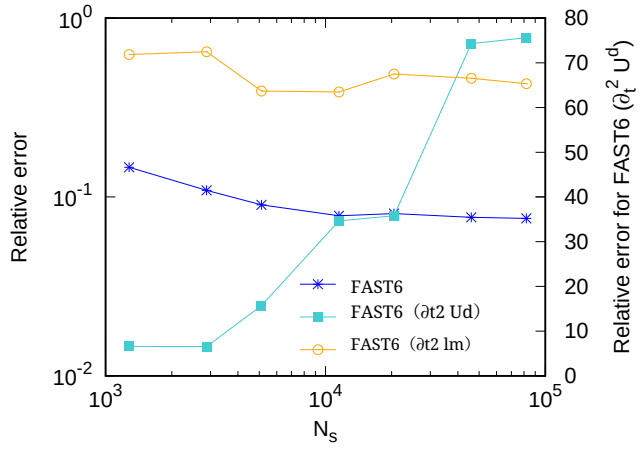

图 11：矢量势 $\boldsymbol{A}$ 的三种时间微分模式的相对误差。右端的纵轴仅对应“FAST6（$\partial_t^2 U^d$）”，显示对数刻度下相对误差的指数；例如，“20”表示 10^{20} 的相对误差。FAST6 的结果与图 6 中相同。

4.4. 演示

为考察所提出的快速时域边界元法的适用性，我们考虑了一个更复杂、规模更大的“公牛”模型，该模型放置在 $[0.0, 1.0] \otimes [0.0, 0.7] \otimes [-0.2, 0.5],$。图 12 展示了由 139282 (= $\mathrm{N_s}$) 个边界元组成的网格：边的最小和最大长度分别为 6.98×10^{-4} 和 7.55×10^{-3}。[2]此外，还选取了 $\Delta_\mathrm{t} = 0.0025$、$\mathrm{N_t} = 1600$ 和 FAST6。此外，入射波设为沿 $-\mathrm{x}_3$ 方向传播的高斯平面脉冲，即 $\mathrm{k}^\mathrm{I} = (0, 0, -1)^\mathrm{T}$，其特征为

$$\boldsymbol{E}^\mathrm{I}(\boldsymbol{x}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t + (x_3 - 0.5)/c - 6\sigma)^2}{2\sigma^2} \right), 0, 0 \right)^\mathrm{T}, \quad \boldsymbol{H}^\mathrm{I}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\eta} \boldsymbol{k}^\mathrm{I} \times \boldsymbol{E}^\mathrm{I}(\boldsymbol{x}, t),$$

其中假设 $\sigma = 0.05$，且 $\varrho = \mu = 1$。

图 13 展示了所选时间步的表面电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的幅值。此外，图 14展示了图 $\boldsymbol{J}$ 12中红色三角形中心处的（底部）。从图 14 可见，$\boldsymbol{J}$ 的峰值出现在 $t = 0.5$ 附近，这与图 13 中的结果一致。

总计算时间为 9.9 小时，内存消耗为 277.3 GB，使用的工作站与第 4.1 节相同。

5. 结论

本研究提出了一种 IFMM，用于加速针对三维理想电导体的电磁散射问题的时域边界元法。所采用的时域边界元法基于一种非常规的组合场积分方程，因为它同时考虑了磁场积分方程及其时间

[2]原始网格（“bull.off”）取自计算几何算法库（CGAL）的源代码（https://www.cgal.org/index.html），随后使用网格处理软件 MeshLab（https://www.meshlab.net/）进行了细化。

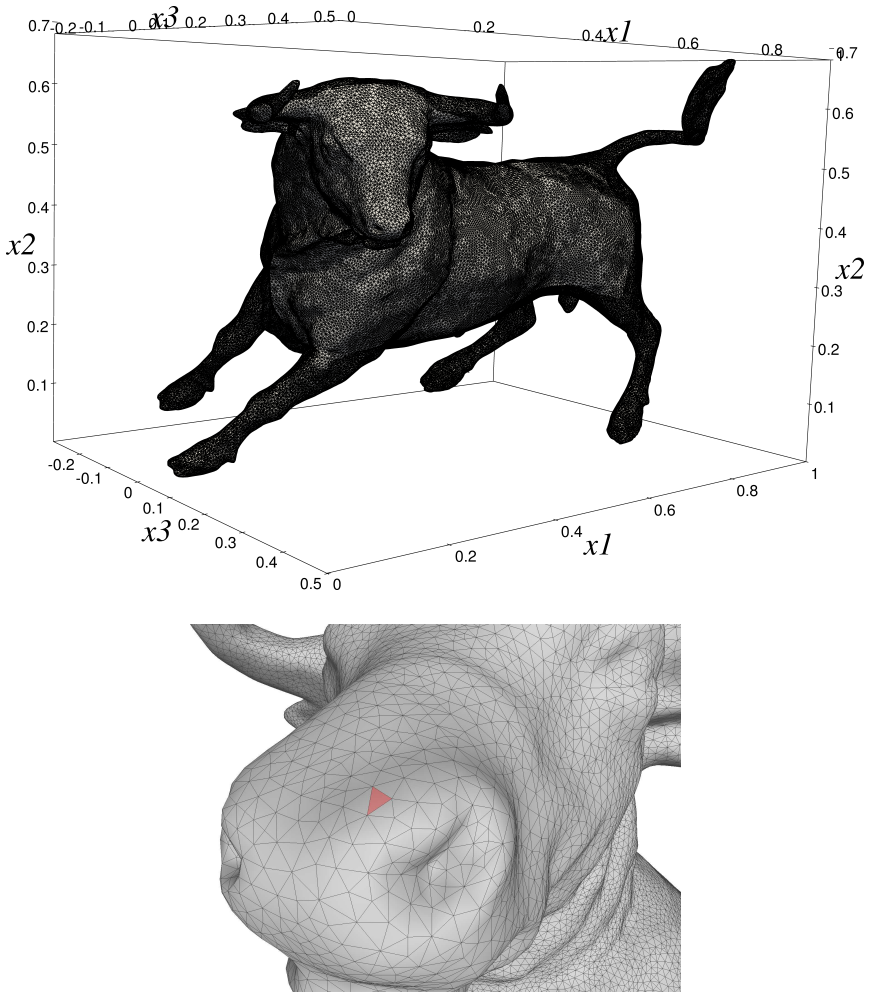

图 12：“公牛”模型的网格，由 139282 个三角形（即 208923 条边）组成：（上）整个模型。入射电磁波沿 $-x_3$ 方向传播。（下）模型的头部。在鼻子上的红色三角形中心处，计算电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的剖面；见图 14。

微分形式，以及对电场积分方程进行时间微分后的形式。只要在空间上用 RWG基函数、在时间上用二次 B 样条基函数对表面电流密度进行离散化，该组合场积分方程的精度便可通过数值方法得到论证。按照以往关于声学的研究[20, 24]，即可构建适用于组合场积分方程的 IFMM。与声学情形的主要区别在于多极矩和局部展开系数的数量，其中一些是向量而非标量，因此会在一定程度上增加计算量。尽管如此，电磁情形下的整体算法与声学情形下的算法基本相同。因此，针对电磁学的 IFMM 加速时域边界元法具有如下复杂度： $O(N_s^{1+\delta}N_t)$, 其中 δ 通常在假设1/2或 1/3 的情况下估计，条件为假设 1–4。

第 4 节中的数值分析考察了所提快速时域边界元法的性能、精度、内存使用量，以及对 $N_s = 139282$ 和 $N_t = 1600$ 等大规模问题的可行性。结果令人满意，且一些额外计算讨论了所提方法公式的有效性。

未来的计划包括：在理论上将理想电导体扩展至可穿透体；通过探索比 CHI 更合适的插值函数（采用有限差分近似导数），提高精度；以及在分布式内存系统上大规模并行化，以求解超大规模问题 [42, 43,44, 45]。

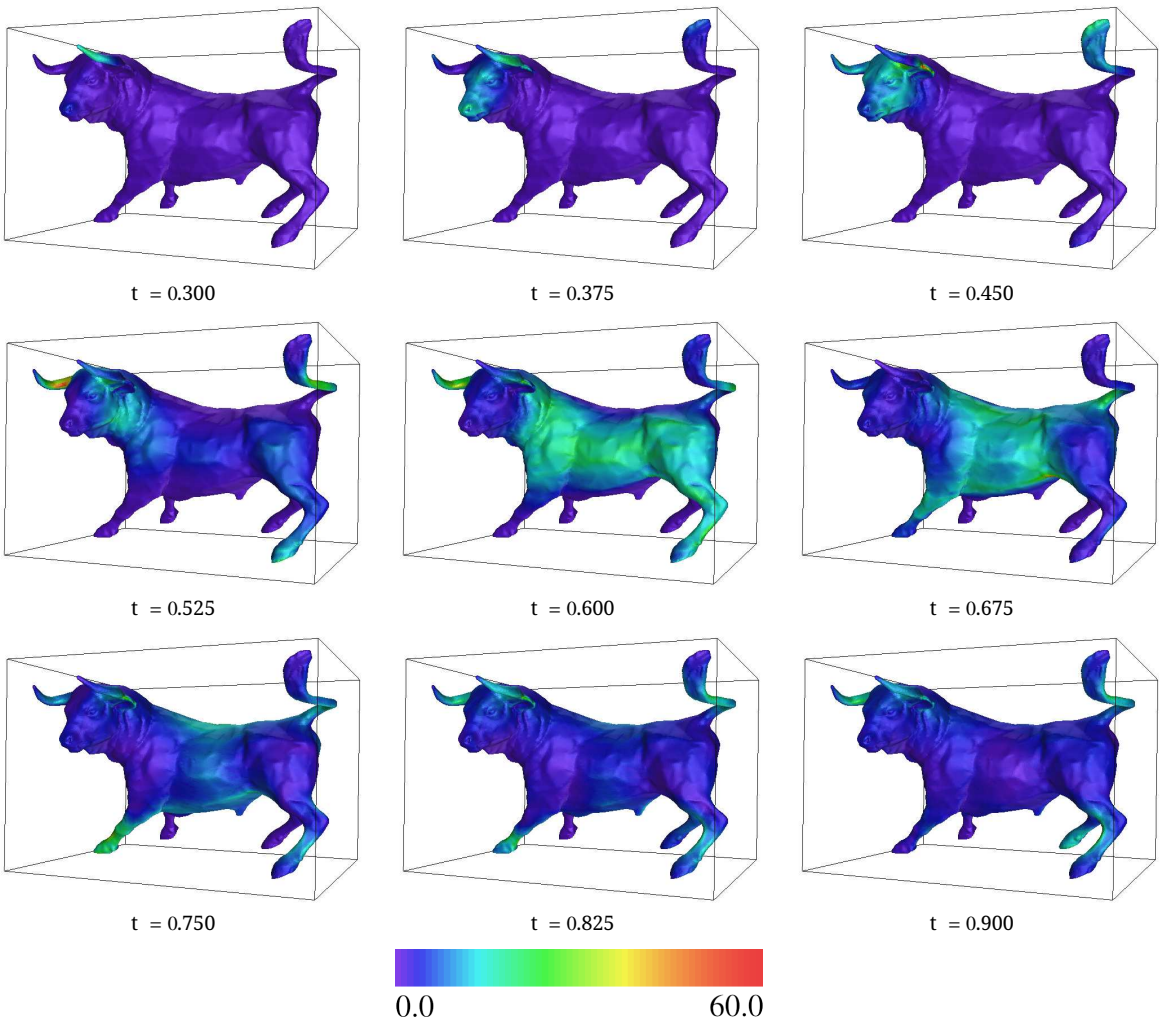

图 13：模型上所选时间步的 $\iint$| 分布。入射电磁波从盒体前侧传播至后侧。

附录A。**(13)**的推导（**11**）

¨与 [24, 附录A], 中离散矢势 $\boldsymbol{A}$ （13a）可通过串联电流 $\hat{}\boldsymbol{J}^{\beta}$ （12）从（13b）和（13c）中的标量势和磁矢势也可以类似地推导。

首先，在 引入一个移位指标β'： $=\beta+\kappa$对β' 在（13a）中的求和可拆分为以下三部分 ：

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\kappa=0}^{d+1}\sum_{\beta'=\beta^*+\kappa}^{\alpha-1+\kappa} w^{\kappa,d}\,\ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')}\hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa} \\ &= \sum_{j=1}^{N_e}\sum_{\kappa=0}^{d+1}\left(\sum_{\beta'=\beta^*}^{\alpha-1} - \sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+\kappa-1} + \sum_{\beta'=\alpha}^{\alpha-1+\kappa}\right) w^{\kappa,d}\,\ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')}\hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa}, \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

其中假定，当 s ＞e 时，任何求和 $\mathrm{P}_{i=s}^{e}$ 均忽略不计。因此，基于以下原因，第三个求和 $\mathrm{P}_{\beta'=\alpha}^{\alpha-1+\kappa}$消失:

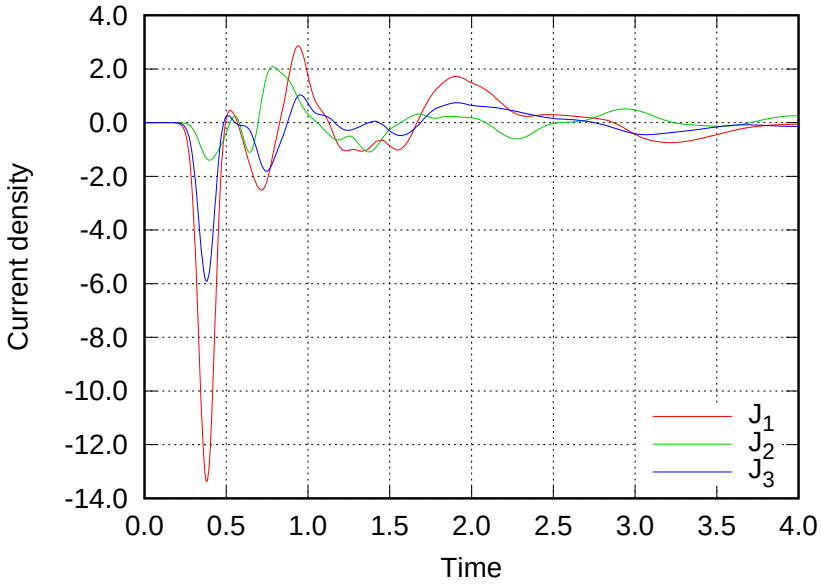

图 14: $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3)^{\mathrm{T}}$ 在图 12（底部）中红色三角形中心处的剖面。

• 对于 $\kappa = 0$，第三个求和变为 $\mathrm{P}_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*-1}$，因此按照上述约定而消失。就此而言，第二个求和也消失，而第一个求和则恰好变为原来的形式。）

• 对于 $\kappa \geq 1$，不等式 $\alpha - \beta' \leq 0$ 对任意 $\beta' \in [\alpha, \alpha - 1 + \kappa]$均成立。然后，由于根据（ $\ddot{\boldsymbol{A}}_{(\alpha-\beta')\,j}$ 的定义，U 在（8）中为零，第三个求和项消失。

因此，（A.1）可写为：

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{e}}} \left[\sum_{\beta'=\beta^*}^{\alpha-1} \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\, \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa} - \underbrace{\sum_{\kappa=0}^{d+1} \sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+\kappa-1} w^{\kappa,d}\, \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa}}_{=:\,F} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{e}}} \left[\left(\underbrace{\sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+d}}_{=:\,G} + \underbrace{\sum_{\beta'=\beta^*+d+1}^{\alpha-1}}_{=:\,H} \right) \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\, \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa} - F \right], \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

其中，对 β' 的求和拆分为 G 和 H。由于 $\sum_{\kappa=0}^{d+1} \sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+\kappa-1}$ 与 $\sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+d} \sum_{\kappa=\beta'-\beta^*+1}^{d+1}$ 在 F中完全相同，因此，$G - F$ 在（A.2）中的差值可按如下方式计算：

$$\begin{aligned}
G - F &= \sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+d} \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\, \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa} - \sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+d} \sum_{\kappa=\beta'-\beta^*+1}^{d+1} w^{\kappa,d}\, \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa} \\
&= \sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+d} \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')} \left(\sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa} - \sum_{\kappa=\beta'-\beta^*+1}^{d+1} w^{\kappa,d}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa} \right) \\
&= \sum_{\beta'=\beta^*}^{\beta^*+d} \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')} \sum_{\kappa=0}^{\beta'-\beta^*} w^{\kappa,d}\, \hat{\boldsymbol{J}}_j^{\beta'-\kappa}.
\end{aligned}$$

与此同时，H 可以改写如下：

$$H = \sum_{\beta'=\beta^*+d+1}^{\alpha-1} \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d} \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')} \hat{\jmath}_j^{\beta'-\kappa} = \sum_{\beta'=\beta^*+d+1}^{\alpha-1} \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta')} \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d} \hat{\jmath}_j^{\beta'-\kappa}.$$

G − F 与 H 的组合得到

$$\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{j=1}^{N_e} [G - F + H] = \sum_{j=1}^{N_e} \left[\sum_{\beta=\beta^*}^{\alpha-1} \ddot{\boldsymbol{A}}_j^{(\alpha-\beta)} \hat{\jmath}_j^{\beta} \right], \tag{A.3}$$

其中，定义了如下边界变量 $\hat{\jmath}^{\beta}{}_j$：

$$\begin{aligned} \hat{\jmath}_j^{\beta} &:= \begin{cases} \sum_{\kappa=0}^{\beta-\beta^*} w^{\kappa,d} \hat{\jmath}_j^{\beta-\kappa} & \text{for } \beta^* \le \beta \le \beta^* + d \\ \sum_{\kappa=0}^{d+1} w^{\kappa,d} \hat{\jmath}_j^{\beta-\kappa} & \text{for } \beta^* + d + 1 \le \beta \le \alpha - 1 \end{cases} \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\min(d+1,\beta-\beta^*)} w^{\kappa,d} \hat{\jmath}_j^{\beta-\kappa} \quad \text{for } \beta^* \le \beta \le \alpha - 1, \end{aligned}$$

这与（12）完全相同。

最后，将（β A.3）中的索引加一，得到式（13a）中的简化表达式。

致谢

本研究得到 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 JP21H03454。

参考

[1] G. Antonini, D. Romano, L. Lombardi, 《工业应用中的计算电磁学》, 《Electronics》11 (2022) 1830。doi:10.3390/electronics11121830。URL https://doi.org/10 3390 11121830。/electronics A. Taflove, [2] 《计算电动力学：时域有限差分法》, 天线与传播丛书，Artech House，1995。URL https://books.google.co.jp/books?id=viVRAAAAMAAJ [3] D. Jones, 《电磁波传播方法》, 牛津工程科学丛书，Clarendon Press，1979。URL https://books.google.co.jp/books?id=AxxRAAAAMAAJ [4] E. Miller，电磁学中时域积分方程模型概述，《电磁波与应用期刊》1 (3) (1987年) 269–293。arXiv:https://doi.org/10.1163/156939387X00054，doi:10.1163/156939387X00054。URL https://doi.org/10 1163 156939387 00054。/ X J. Van Bladel, [5] 《电磁场》, IEEE电磁波理论丛书，Wiley，2007。URL https://books.google.co.jp/books?id=1tPotI3DJuEC [6] J. Hargreaves，室内声学的时域边界元法，博士论文，索尔福德大学（2007年4月）。URL http://usir.salford.ac.uk/id/eprint/16604/ [7] S. Langer, M. Schanz, 《时域边界元法》, Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2008，第18章，第495–516页。[8] W. Chew, E. Michielssen, J. M. Song, J. M. Jin, 《计算电磁学中的快速高效算法》, Artech House, Inc.，美国马萨诸塞州诺伍德，2001。URL https://books.google.co.jp/books?id=_bVvQgAACAAJ [9] A. Ergin, B. Shanker, E. Michielssen，利用对角平移算子快速计算三维瞬态波场，《计算物理学杂志》146 (1) (1998) 157–180。doi:10.1006/jcph.1998.5908。URL https://doi.org/10 1006 1998 5908。/jcph。. A. A. Ergin, B. Shanker, E. Michielssen，利用双层平面波时域算法快速分析刚体声波散射瞬态，[10] 《美国声学学会会刊》106 (1999) 2405–2416。doi:10.1121/1.428077。URL https://doi.org/10.1121/1.428077

[11] A. A. Ergin, B. Shanker, E. Michielssen，利用多层平面波时域算法快速分析刚体声波散射瞬态，《美国声学学会会刊》107 (2000年) 1168–1178。doi:10.1121/1.428406。URL https://doi.org/10.1121/1.428406。/ . B. Shanker, A. Ergin, K. Aygun, E. Michielssen，利用双层平面波时域算法分析瞬态电磁散射现象，《IEEE天线与传播汇刊》48 (4) (2000年) 510–523。doi:10.1109/8.843664。URL https://doi.org/10.1109/8.843664。/ . B. Shanker, A. Ergin, M. Lu, E. Michielssen，利用多层平面波时域算法快速分析瞬态电磁散射现象，《IEEE天线与传播汇刊》51 (3) (2003年) 628–641。doi:10.1109/TAP.2003.809054。URL https://doi.org/10.1109/TAP.2003.809054。/TAP。 . L. Greengard, V. Rokhlin，粒子模拟的快速算法，《计算物理学杂志》73 (2) (1987年) 325–348。doi:10.1016/0021-9991(87)90140-9。URL https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90140-9。/ - ( ) - E. Darve，快速多极子方法：数值实现，《计算物理学杂志》160 (1) (2000年) 195–240。doi:https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6451。URL https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6451。/jcph。 . N. Nishimura，快速多极子加速边界积分方程方法，《应用力学评论》55 (4) (2002) 299–324。doi:10.1115/1.1482087。URL http://link.aip.org/link/?AMR/55/299/1 / / Y. Liu，《快速多极子边界元法：工程理论与应用》，剑桥大学出版社，2009。URL https://books.google.co.jp/books?id=1p4SCnM5UIYC [18] Y. Liu, E. Michielssen，《用于瞬态电磁分析的并行快速时域积分方程方法》，Springer International Publishing，Cham，2020，第347–379页。doi:https://doi.org/10.1007/978-3-030-43736-7_12。URL https://doi.org/10.1007/978-3-030-43736-7_12。/ - - - - K. Aygun, B. Fischer, J. Meng, B. Shanker, E. Michielssen，用于微波电路瞬态分析的快速混合场路仿真器，《IEEE微波理论与技术汇刊》52 (2) (2004) 573–583。doi:10.1109/TMTT.2003.821929。URL https://doi.org/10.1109/TMTT.2003.821929。/TMTT。 . T. Takahashi，适用于三维波动方程的基于插值的快速多极子加速边界积分方程法，《计算物理学杂志》258 (2014) 809–832。doi:10.1016/j.jcp.2013.11.008。URL https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.11.008。/j.jcp。 . . J. Tausch，利用层势快速求解热方程的方法，《计算物理学杂志》224 (2) (2007) 956–969。doi:10.1016/j.jcp.2006.11.001。URL https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.11.001。/j.jcp。 . . M. Messner, M. Schanz, J. Tausch，瞬态热方程的高效Galerkin边界元法，《SIAM科学计算期刊》37 (3) (2015) A1554–A1576。doi:10.1137/151004422。URL https://doi.org/10.1137/151004422。/ D. Schobert, T. Eibert，利用多层格林函数插值和快速傅里叶变换加速求解低频表面积分方程，《IEEE天线与传播汇刊》60 (3) (2012) 1440–1449。doi:10.1109/TAP.2011.2180306。URL https://doi.org/10.1109/TAP.2011.2180306。/TAP。 . T. Takahashi, M. Tanigawa, N. Miyazawa，三维波动方程快速时域边界元法的改进，《计算机物理通讯》271 (2022年) 108229。doi:10.1016/j.cpc.2021.108229。URL https:/doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108229。/j.cpc。 . A. Yilmaz, D. Weile, H.-M. Jin, E. Michielssen，一种用于快速分析瞬态电磁散射现象的分层FFT算法（HIL-FFT），《IEEE天线与传播汇刊》50 (7) (2002年) 971–982。doi:10.1109/TAP.2002.802094。URL https://doi.org/10.1109/TAP.2002.802094。/TAP。 . A. Yilmaz, J.-M. Jin, E. Michielssen，表面积分方程的时域自适应积分法，《IEEE天线与传播汇刊》52 (10) (2004年) 2692–2708。doi:10.1109/TAP.2004.834399。URL https://doi.org/10.1109/TAP.2004.834399。/TAP。 . A. Boag, V. Lomakin, E. Michielssen，用于快速计算瞬态波场的非均匀网格时域（NGTD）算法，《IEEE天线与传播汇刊》54 (7) (2006年) 1943–1951。doi:10.1109/TAP.2006.877186。URL https://doi.org/10.1109/TAP.2006.877186。/ TAP。 . Q. Wang, Y. Shi, M. Li, Z. Fan, R. Chen, M. Xia，利用经拉盖尔多项式增强的UV方法时域积分方程分析瞬态电磁散射，《微波与光学技术快报》53 (1) (2011年) 158–163。doi:10.1002/mop.25646。URL https://doi.org/10.1002/mop.25646。/mop。 J. Ding, C. Q. Gu, Z. Li, Z. Niu，利用时域快速偶极子法分析瞬态电磁散射，《电磁学研究进展》136 (2013年) 543–559。doi:10.2528/PIER12121104。URL https://doi.org/10.2528/PIER12121104。/PIER M. Vikram, B. Shanker，利用加速笛卡尔展开（ACE）快速计算亚波长源/观测点分布中的时域场，《计算物理学杂志》227 (2) (2007年) 1007–1023。doi:10.1016/j.jcp.2007.08.017。URL https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.08.017。/j.jcp。 . . B. Shanker, H. Huang，加速笛卡尔展开——一种快速计算所有实数 ν 对应的 $r^{-\nu}$ 形式势的方法，《计算物理学杂志》226 (1) (2007年) 732–753。doi:10.1016/j.jcp.2007.04.033。URL https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.04.033。/j.jcp。 . . B. Shanker, A. Ergin, K. Aygun, E. Michielssen，利用组合方法分析闭合表面的瞬态电磁散射

场积分方程，IEEE天线与传播汇刊 48 (7) (2000年) 1064–1074。doi:10.1109/8.876325。URL https://doi.org/10 1109 8 876325。/。B. Rynne，P. Smith，电场积分方程时间推进算法的稳定性，电磁波与应
[33] 用期刊 4 (12) (1990) 1181–1205。doi:10.1163/156939390X00762。URL https://doi.org/10 1163 156939390 00762。/ X D. A. Vechinski，S. M. Rao，介质圆柱体的瞬态散射：电场、磁
[34] 场和组合场解，无线电科学 27 (1992) 611–622。doi:10.1029/92RS00964。URL https://doi.org/10 1029 92 00964。/ RS X. Wang，Y. Shi，M. Lu，B. Shanker，E. Michielssen，H. Baˇgcı，
[35] 基于准精确积分技术的时域电场积分方程、磁场积分方程和组合场积分方程稳定且精确的时间推进求解器，IEEE天线与传播汇刊 69 (4) (2021) 2218–2229。doi:10.1109/TAP.2020.3026867。URL https://doi.org/10 1109 2020 3026867。/TAP.。B. H. Jung，Y.-S. Chung，T. K. Sarkar，采用拉盖尔多项
[36] 式作为时间基函数的时域电场积分方程、磁场积分方程和组合场积分方程公式，用于分析任意形状导体结构的瞬态散射，电磁波与应用期刊 17 (5) (2003年) 737–739。doi:10.1163/156939303322226383。URL https://doi.org/10 1163 156939303322226383。/ S. Rao，D. Wilton，A. Glisson，任意形状表面的电磁散射，
[37] IEEE天线与传播汇刊 30 (3) (1982) 409–418。doi:10.1109/TAP.1982.1142818。URL https://doi.org/10 1109 1982 1142818。/TAP.。S. Rao，D. Wilton，任意形状导体表面的瞬态散射，
[38] IEEE天线与传播汇刊 39 (1) (1991) 56–61。doi:10.1109/8.64435。URL https://doi.org/10 1109 8 64435。/。Y.-s. Chung，T. K. Sarkar，B. H. Jung，采用无条件稳定方法求解任意形状
[39] 介质体的时域电场积分方程，无线电科学 38 (3) (2003)。doi:https://doi.org/10.1029/2002RS002759。URL https://doi.org/10 1029 2002 002759。/ RS Y. Saad，M. H. Schultz，GMRES：求解非对称线性系统的广义最
[40] 小残量算法，SIAM科学与统计计算期刊 7 (1986) 856–869。doi:10.1137/0907058。URL https://doi.org/10 1137 0907058。/ J. Asvestas，J. Bowman，P. Christiansen，O. Einarsson，R. Kleinman，
[41] D. Sengupta，T. Senior，F. Sleator，P. Uslenghi，N. Zitron，《简单形状的电磁与声散射》，SUMMA丛书，Hemisphere Publishing Corporation，1987年。URL https://books.google.co.jp/books?id=uj3hvQEACAAJ [42] E. Darve，C. Cecka，T. Takahashi，并行集群、多核处理器和图形处理器上的快速多极子方法，Comptes Rendus M´ecanique 339 (2) (2011) 185–193，高性能计算。doi:https://doi.org/10.1016/j.crme.2010.12.005。URL https://doi.org/10 1016 2010 12 005。/j.crme.。E. Agullo，B. Bramas，O. Coulaud，E. Darve，
[43] M. Messner，T. Takahashi，面向多核架构的基于任务的快速多极子方法，SIAM科学计算期刊 36 (1) (2014) C66–C93。doi:10.1137/130915662。URL https://doi.org/10 1137 130915662。/ E. Agullo，B. Bramas，
[44] O. Coulaud，E. Darve，M. Messner，T. Takahashi，面向异构架构的基于任务的快速多极子方法，并发与计算：实践与经验 28 (9) (2016) 2608–2629。arXiv:https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpe.3723，doi:https://doi.org/10.1002/cpe.3723。URL https://doi.org/10 1002 3723。/cpe. M. Abduljabbar，G. S. Markomanolis，H.
[45] Ibeid，R. Yokota，D. Keyes，分布式层次N体问题的通信削减算法与边界分布，Springer International Publishing，Cham，2017年，第79–96页。doi:10.1007/978-3-319-58667-0_5。URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-58667-0_5