关于双曲流形的自同构群

Ryan Budney
David Gabai

数学与统计学，维多利亚大学，邮政信箱 *3060*，*CSC* 邮局，维多利亚，*BC*，加拿大 *V8W 3R4*；
Fine Hall，*Washington Road*，普林斯顿，新泽西州 *08544-1000*，美国
电子邮件：rybu@uvic.ca 和 gabai@math.princeton.edu

arXiv:2303.05010v1 [math.GT] 9 Mar 2023

摘要

设 Diff(N) 和 Homeo(N) 分别表示固定 n 维流形 N 边界上每一点的光滑自同构群和拓扑自同构群。我们证明，对于 $n \geq 4$，$\pi_{n-4}\mathrm{Homeo}(S^1 \times D^{n-1})$ 不是有限生成的；特别地，$\pi_0\mathrm{Homeo}(S^1 \times D^3)$ 是无限生成的。我们据此证明，当 $n \geq 4$ 时，有限体积双曲 n 维流形的光滑和拓扑自同构群不具有有限 CW 复形的同伦类型；对于 $n \geq 11$，Farrell 和 Jones 先前已得到这一结果。特别地，我们证明，若 N 是闭双曲 n 维流形，且 $\mathrm{Diff}_0(N)$ 表示与恒等映射同伦的微分同胚所构成的子群，则 $\pi_{n-4}\mathrm{Diff}_0(N)$ 是无限生成的，因此若 $n = 4$，则$\pi_0\mathrm{Diff}_0(N)$ 是无限生成的；拓扑情形也有类似结果。

AMS 分类号 主要分类：57M99

次要分类：57R52, 57R50,57N50

关键词： 4维流形、2维纽结、同痕

Copyright declaration is printed here

1 引言

本文的主要结果如下。

定理 1。1 π_{n-4}同胚群$(S^1 \times D^{n-1})$ 是无限生成的，尤其是 π_0同胚群$(S^1 \times D^3)$ 是无限生成的。

在光滑范畴中，这曾是 [1], 的研究主题，其中证明了 π_{n-4}微分同胚群$S^1 \times D^{n-1})$ 不是有限生成的。这里，所有自同构群在边界上均作用为恒等映射，因此给定的自同构同伦于 id。为证明该定理，我们进一步阐述一种在 [1] 中简要介绍的方法：利用来自共线空间和共水平空间的链接数，并在第 3 节中用它为以下结果给出一个新的证明：只要 $k \geq 4$， δ_k 的 [1] 族在光滑范畴中线性无关。说它是新的，是因为这是一种直接运用交叉理论、从 δ_k 族出发的论证；而 [1] 则展示了如何将 δ_k 表示为我们的 $G(p,q)$族。值得注意的是，这种基于初等交叉理论的方法在拓扑范畴中同样适用，详见第 4 节。我们的主要结果有以下应用。

定理 1.2 当 $n \geq 4$时，$S^1 \times D^{n-1}$ 的自同构群不具有有限维 *CW* 复形的同伦类型。

对于维数 $n \geq 6$，这一结果由 Hatcher 和 Wagoner [12] 在 50 多年前证明；他们证明了 $S^1 \times D^{n-1}$ 的拓扑映射类群和光滑映射类群不是有限生成的。相比之下，当 $n = 2$时，$S^1 \times D^{n-1}$的光滑自同构群和拓扑自同构群具有 $\Omega S^1 \simeq \mathbb{Z}$ 的同伦类型；而当 $n = 3$ 时，根据 Hatcher 的工作，这些群是可缩的 [11]。

定理 1.3 如果 N 是完备双曲 n 维流形，那么 π_{n-4}微分同胚群$_0(N)$ 和 π_{n-4}同胚群$_0(N)$ 都是无限生成的。特别地，如果 $n = 4$，则 π_0微分同胚群$_0(N)$ 和 π_0同胚群$_0(N)$ 都是无限生成的。

此处 Diff_0 和 Homeo_0 表示与恒等映射同伦的自同构。对于$n \geq 11$，这一结果由 Farrell和Jones [6] 于 30 多年前证明。我们的结果是最优的，因为当$n \leq 3$ 时，$\mathrm{Diff}_0(N)$ 是可缩的；这一结论由 [8]和 [9]证明。详情见第 5 节

第 2 节介绍哑铃流形$\mathcal{B}^n_{i,j}$，并定义相应的杠铃微分同胚，将 [1]中给出的哑铃流形和微分同胚概念加以推广。它们本身也值得研究，我们将在未来的论文中进一步探讨。 [1] 中的哑铃流形就是本文记作$\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}$的那些流形。本节从两个角度定义杠铃微分同胚：一种角度类似于 Dehn 扭转的定义，以双点的解消为基础；另一种角度利用哑铃流形的乘积分解，将杠铃微分同胚构造为纤维保持映射，这类映射通常称为“水平”微分同胚。我们还给出某些植入式杠铃微分同胚的零同伦和零伪同伦的若干构造。

致谢：本研究的部分内容是在两次访问 BIRS 和一次访问奥伯沃尔法期间完成的。我们感谢这些机构的热情接待。作者谨向 Allen Hatcher、Sander Kupers 和 Manuel Krannich 致谢，感谢他们对本文初稿提出的宝贵意见。

2 杠铃微分同胚

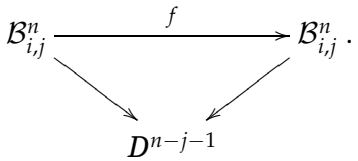
在本文中，n 维哑铃流形指两个以球面为底空间的平凡圆盘丛沿边界作连通和所得的流形。我们按照球面的维数为哑铃流形编序，因此定义

$$\mathcal{B}^n_{i,j} = S^i \times D^{n-i} \natural S^j \times D^{n-j}$$

作为维数为 n 的标准（i，j）-哑铃。我们始终假设i，$j \geq 1$，因为当$i = 0$ 或$j = 0$时，下面的构造都没有意义。我们将第一直和项中的球面$S^i \times \{0\}$ 和第二直和项中的球面$S^j \times \{0\}$ 称为核心球面。我们将第一直和项中的圆盘 $\{*\} \times D^{n-i}$ 和第二直和项中的圆盘 $\{*\} \times D^{n-j}$ 称为余核，其中 $\{*\}$ 是相应球面上的一个基点。我们将中间球 记作B^{n-1}，它是一个嵌入的余维一圆盘，将边界连通和分隔为$S^i \times D^{n-i}$ 和$S^j \times D^{n-j}$ 的副本。

我们用 Diff（M）表示流形上的微分同胚群。如果M有边界，则要求微分同胚在边界上的限制为恒等映射，即限制映射 Diff（M） $\to$ Diff（∂M）是一个常值函数。

姑且假设 $i \leq j$。考虑哑铃流形将其视为纤维丛，底空间为 D^{n-j-1}，纤维为 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$。作为一个流形，$\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$是一个挖去一点的 $S^i \times D^{j-i+1}$。若令 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 表示 $\mathcal{B}^n_{i,j}$ 的保纤维微分同胚群，即给出交换图的微分同胚 $f\colon \mathcal{B}^n_{i,j} \to \mathcal{B}^n_{i,j}$



这些有时也称为“水平微分同胚”。因此，我们有一个同伦等价 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \simeq \Omega^{n-j-1}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j})$。

鉴于 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$ 是一个挖去一点的 $S^i \times D^{j-i+1}$，存在限制纤维丛

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}_{i,j}) \to \mathrm{Diff}(S^i \times D^{j-i+1}) \to \mathrm{Emb}(D^{j+1}, S^i \times D^{j-i+1})$$

其中到底空间的映射是零伦的。该映射通过在 $S^i \times D^{j-i+1}$ 的内部固定一个紧$(j+1)$-球，并取 $\mathrm{Diff}(S^i \times D^{j-i+1})$ 的限制映射得到。因此我们有一个纤维序列

$$\Omega\mathrm{Emb}(D^{j+1}, S^i \times D^{j-i+1}) \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}_{i,j}) \to \mathrm{Diff}(S^i \times D^{j-i+1})$$

使得同伦群上的诱导映射构成短正合列

$$0 \to \pi_k\Omega\mathrm{Emb}(D^{j+1}, S^i \times D^{j-i+1}) \to \pi_k\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}_{i,j}) \to \pi_k\mathrm{Diff}(S^i \times D^{j-i+1}) \to 0.$$

映射 $\Omega\mathrm{Emb}(D^{j+1}, S^i \times D^{j-i+1}) \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j})$ 是通过对 $\mathrm{Emb}(D^{j+1}, S^i \times D^{j-i+1})$中的环应用各向同性延拓，再限制到 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$而得到的，也就是说，限制到$S^i \times D^{j-i+1}$的挖孔副本。

根据管状邻域空间的（同伦）分类，我们知道 $\mathrm{Emb}(D^{j+1}, S^i \times D^{j-i+1})$ 具有 $S^i \times O^{j+1}$ 的同伦类型。注意，$\pi_i S^i \simeq \mathbb{Z}$ 的生成元通过上述短正合列（其中 $k = i - 1$），给出 $\pi_{i-1}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}\, i,j)$ 中的一个非挠元；并且通过等价 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \simeq \Omega^{n-j-1}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}\, i,j)$，当 $i + j \geq n$ 时，它在 $\pi_{i+j-n}\mathrm{Diff}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 中给出一个非挠元。

现在我们分析三个并非完全互不相交的特殊类：

(1) 对于两次穿孔的二维圆盘 $\mathcal{B}^2_{1,1}$，杠铃微分同胚是关于边界曲线的 Dehn 扭转 [5] 的复合，其符号构成一个同调，即符号的选择与边界定向一致。(2) $\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}$ 的杠铃微分同胚是 [1]中研究的那一族。这些杠铃的特点是，只要 $n \geq 3$，就可以采用“手铐”方式将它们打结。微分同胚本身仅在 $i + j \geq n$时才有定义，因此要求 $n \geq 4$。(3) 当 $i + j = n$ 时，只要 $i, j \geq 3$，即 $n \geq 6$，就可以在 $S^1 \times D^{n-1}$ 中将这些杠铃“霍普夫链接”，从而使我们能够联系到 Hatcher 和 Wagoner [12]的工作。

我们给出诱导映射 $\pi_{i+j-n}\Omega^{n-j}S^i \equiv \mathbb{Z} \to \pi_{i+j-n}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 的另一种更对称的定义，其中 $i + j \geq n$。考虑 $\mathbb{R}^n$ 中分别同构于 $\mathbb{R}^i$ 和 $\mathbb{R}^j$ 的两个向量子空间。假设这两个向量子空间交于一点 $\{0\}$，因此 $n \geq i + j$。若 $n > i + j$，我们可以在原点附近进行小扰动（例如使用凸起函数），将这些向量子空间变形为不交子流形。只要 $n > i + j + 1$，所有这类小变形都同痕，因为由 $\mathbb{R}^i$ 和 $\mathbb{R}^j$ 张成的子空间的法球面是 $S^{n-i-j-1}$，而它是连通的。为确保我们处理的是紧流形，考虑 $D^i \subset \mathbb{R}^i$ 和 $D^j \subset \mathbb{R}^j$。使用支撑于这些圆盘内部的凸起函数，可得以下命题。

PSfrag 替换

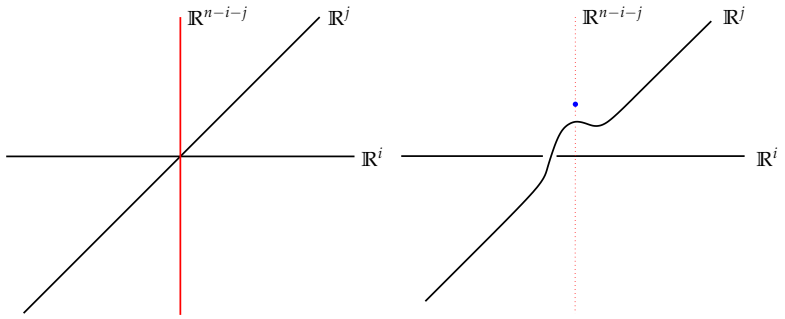


图 1：通过消解双重点得到的杠铃微分同胚。

命题 2.1 考虑上文定义的球面族 $S^{n-i-j-1} \to$ 嵌入空间$(D^i \sqcup D^j,\ D^n)$。那么，纤维化 微分同胚群$(D^n) \to$ 嵌入空间$(D^i \sqcup D^j,\ D^n)$的同伦长正合列中的连接映射给出 $\pi_{n-i-j-2}$微分同胚群$(D^n,\ D^i \sqcup D^j)$中的一个元素。将 D^i 和 D^j的嵌入副本稍微加厚后，可以假设这些微分同胚在 D^i 和 D^j的嵌入副本的某个邻域内是恒等映射，因此这是同伦群中的一个元素

$$\pi_{n-i-j-2}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{n-i-1,n-j-1}).$$

此外，若令 $i' = n - i - 1$ 和 $j' = n - j - 1$，则可将其改写为 $\pi_{i'+j'-n}$微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i',\ j'})$中的一个元素；它是杠铃微分同胚，也就是说，是映射 $\Omega^{n-j'}S^{i'} \to$微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i',\ j'})$在 $\pi_{i'+j'-n}$ 上的诱导映射。

命题 2.1 中的弦链族在 Koytcheff [14] 中得到了系统研究。

命题 2.2 哑铃微分同胚 $\mathbb{Z} \equiv \pi_{i+j-n}\Omega^{n-j}S^i \to \pi_{i+j-n}$微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 是本质的，也就是说，存在一个同态

$$\pi_{i+j-n}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \mathbb{Z}$$

能够检测出该哑铃微分同胚。这个同态是**扫描映射**的一种形式。具体而言，设 B 是 $\mathcal{B}_{i,j}$ 的一个中间球，也就是说，它是 D^{n-1} 的一个光滑嵌入副本，将 $\mathcal{B}^n_{i,j}$ 分割成一个边界连通和。用平行区间纤维化 B。利用 B 进行扫描，得到一个映射

$$\pi_{i+j-n}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \pi_{i+j-2}\mathrm{Emb}(I, \mathcal{B}^n_{i,j}).$$

该映射能够检测出这个哑铃微分同胚。此外，同态

$$\pi_{i+j-2}\mathrm{Emb}(I, \mathcal{B}^n_{i,j}) \to \mathbb{Z}$$

通过计数带符号的点对 $t_1 < t_2 \in I$ 来计算，其中 $f(t_1)$ 位于第一余核上，而 $f(t_2)$ 位于第二余核上。

PSfrag 替换

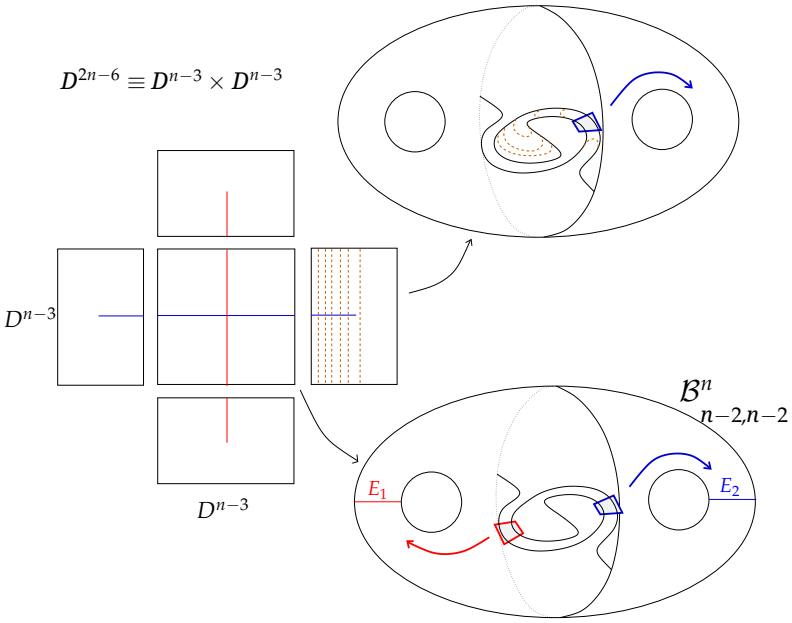


图 2：限制在中间球上的杠铃微分同胚族，作为映射 $D^{2n-6} \to$ 嵌入空间$(I, \mathcal{B}^n_{n-2,n-2})$。

上述两个命题是 [1]，中论证的微小变体，因此留给读者完成。命题 2.1 可通过直接比较得到，即这两个微分同胚由同一个同痕延拓构造诱导。

命题 2.2 还可以用另一种方式表述。给定杠铃微分同胚族，

$$S^{i+j-n} \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j})$$

我们可以想象这个纤维化族，也就是说，

$$S^{i+j-n} \times D^{n-j-1} \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^{j+1}_{i,j}).$$

现在考虑 $\mathcal{B}^n_{i,j}$ 中的中间球，它是 D^{n-1} 的一个副本。中间球中两个余核的原像由映射 $S^{i+j-n} \times D^{n-1} \to \mathcal{B}^n_{i,j}$ 与余核的交集给出，因此它们将分别是 $S^{i+j-n} \times D^{n-1}$ 中两个不交的（带框架）闭流形，其维数分别为 $(i-1)$ 和 $(j-1)$。如果进一步利用纤维化，我们可以将其想象为一个由 $S^{i+j-n} \times D^{n-j-1}$ 参数化的族，其中包含 $\mathcal{B}^{j+1}$ i,j 中间球里的零维流形和 $(j-i)$ 维流形；该中间球是 D^j 的一个副本。这个族很容易可视化。零维流形族可以描述为一个嵌入的 S^0，的一族参数化零配边；而 $(j-i)$ 维流形族类似地是 S^{j-i} 的一族参数化零配边，也就是说，这是一个不交球面的族：一个是 S^0 的副本，另一个是 S^{j-i} 的副本；在这个 $(i-1)$ 维族的边界上，它们是分别界定不交圆盘的球面——这些圆盘用于构造零配边。但由于我们的族是 $(i-1)$ 维的，这恰好是允许该族发生链接的维数，这也正是实际发生的情况。命题 2.2 是这个由参数化高余维链接组成的族的链接数的同伦论类比。稍微转换一下视角，我们可以利用 S^{i+j-n} 参数空间，在 $\mathcal{B}^n_{i,j}$ 的中间球中进行这项分析。一般而言，这将是由两个球面构成的一个族：一个是 D^{n-1} 中的 S^{n-j-1}，另一个是 S^{n-i-1}，因此由 S^{i+j-n} 参数化的族恰好具有允许出现链接数的维数。

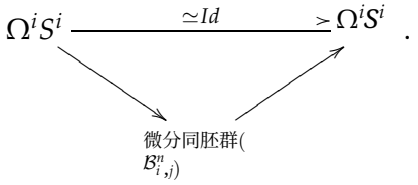
虽然命题 2.2 告诉我们，包含映射 $\Omega^{n-j}S^i \to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 在第一个非平凡同伦群上是非平凡的，但事实上，该包含映射是一个收缩映射，即在 $\Omega^{n-j}S^i$ 的所有同伦群和同调群上都是非平凡的。为证明这一点，我们需要构造一个反向映射。

定义 2.3 注意到存在如下映射

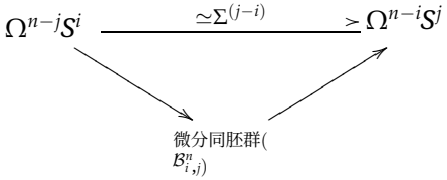
$$\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \Omega^{n-j}S^i, \qquad \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \Omega^{n-i}S^j$$

通过限制到余核并投影到胞腔骨架 $S^i \vee S^j$，然后忘掉互补的球面楔和项而得到。

命题 2.4 保纤维子空间 $\Omega^{n-j}S^i \to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 是一个收缩映射，即与上述映射 微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \Omega^{n-j}S^i$ 复合后同伦于恒等映射。



与另一个映射的复合



在相差一个符号的意义下同伦于迭代悬挂映射，即 Σ^{j-i}；也就是说，我们将 $\Omega^{j-i}S^i$ 视为 $\Omega^{n-i}S^j$ 中保持 j 个 $-i$ 个悬挂坐标的映射所构成的子空间。

证明 思路是根据纤维化 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j} \to \mathcal{B}^n_{i,j} \to D^{n-j-1}$，逐步追踪我们这个族的定义。将纤维视为一个去掉一点的$S^i \times D^{j-i+1}$。由此得到包含映射$\Omega^{n-j}S^i \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}_{i,j})$，其像为保纤维微分同胚。我们考察诱导出的 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$ 纤维微分同胚。与S^i 核球面互补的余核是一个D^{j+1-i}的副本，而与S^j 核球面互补的余核则是区间D^1的一个副本。

复合映射 $\Omega^{n-j}S^i \to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}_{i,j}) \to \Omega^{n-j}S^i$ 是恒等映射（经过适当的识别后），根据定义即可直接推出；推导时需仔细追踪悬挂参数。

复合映射 $\Omega^{n-j}S^i \to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}_{i,j}) \to \Omega^{n-i}S^j$ 如图 3 所示。论证与前一种情形基本相同，但我们的纤维上的余核是D^{j+1-i}的副本，即带有$j-i$ 个额外参数的区间。这些额外参数为嵌入区间提供了典范零伦；换言之，映射 $\Omega^{n-j}S^i \to \Omega^{n-i}S^j$ 就是悬挂 Σ^{j-i}。

PSfrag 替换

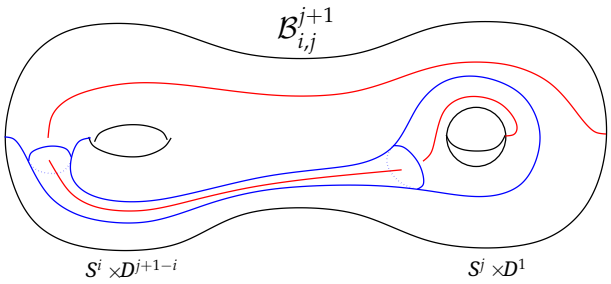


图 3：复合映射 $\Omega^{n-j}S^i \to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}_{i,j}) \to \Omega^{n-i}S^j$ 位于D^{j-1}中某一点上方的纤维内。来自$S^i \times D^{j+1-i}$ 直和项的 $\{*\} \times D^{j+1-i}$ 的像为蓝色，来自$S^j \times D^1$ 直和项的 $\{*\} \times D^1$ 的像为红色。

□

我们列出杠铃微分同胚的另一条基本性质。其思路是考虑通过分别粘接一个$(i+1)$把手或$(j+1)$把手，并通过恒等映射延拓而得到的标准包含 $\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \mathrm{Diff}(S^i \times D^{n-i})$ 和 $\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \mathrm{Diff}(S^j \times D^{n-j})$。

命题 2.5 这些复合映射

$$\Omega^{n-j}S^i \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \mathrm{Diff}(S^i \times D^{n-i})$$

and

$$\Omega^{n-j}S^i \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \mathrm{Diff}(S^j \times D^{n-j})$$

是典范的零伦映射。

证明 回忆一下，映射 $\Omega^{n-j}S^i \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 是通过纤维逐点的同痕延拓过程定义的。命题陈述中的第一个映射对应于忘掉用于构造同痕延拓的球；第二个映射对应于填满其中的流形，而该流形

球移动。在第一种情况下，根据 Palais 同伦长正合列，微分同胚族按定义是零的。第二个映射也是零的，因为输入的同痕本身就是零的，即参数化族 $\Omega^{n-j}S^i$ 通过包含映射 $\Omega^{n-j}S^i \to \Omega^{n-j}D^{i+1}$分解。□

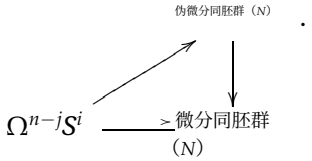
构造上述零同痕的理由是，一旦将哑铃流形嵌入更大的流形中，我们便可利用它们构造某些零伪同痕。这正是命题 2.6 的内容。

尽管杠铃微分同胚本身 $\Omega^{n-j}S^i \to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 在伪同痕意义下并非零，即它们无法提升为映射 $\Omega^{n-j}S^i \to \mathrm{PDiff}(\mathcal{B}^n_{i,j})$，但植入的杠铃微分同胚在伪同痕意义下往往是零。下一个命题是命题 2.5 的一个变体。

命题 2. **6** 给定一个嵌入的哑铃体 $\mathcal{B}^n_{i,j} \to N$，其中 N 是一个 n 维流形，所诱导的映 p

$$\Omega^{n-j}S^i \to \mathrm{Diff}(N)$$

在伪同痕意义下是零，前提是两个核球面之一是光滑切片的，即它是 $N \times I$ 中某个光滑嵌入的 D^{i+1} 或 D^{j+1} 的边界。准确地说，存在杠铃微分同胚族的一个提升



证明 伪微分同胚群 PDiff(N) 是由所有满足以下条件的 N × I 上的微分同胚组成的集合：它们在 N × {0} 以及 (∂N) × I 上限制为恒等映射，通常称为伪同痕微分同胚。其思路是将流形 $S^i \times D^{n-i}$（或 $S^j \times D^{n-j}$）视为哑铃流形 $\mathcal{B}^n_i$，分别并上一个 i + 1（或 j + 1）把手。我们利用映射 f (p, t) = (g(p), t/2)，将 $\mathcal{B}^n_i$，$_j$ × I 嵌入 N × I，其中 g : $\mathcal{B}^n_i$，$_j$ → N 是我们的哑铃嵌入。我们将 (i + 1) 或 (j + 1)-把手嵌入 N × I，使其与 N × $[0, \frac{1}{2}]$ 的交集包含在 U × $[0, \frac{1}{2}]$ 中，其中 U 是 N 中 g($\mathcal{B}^n_i$，$_j$) 的一个小邻域。我们可以通过确保光滑切片圆盘的高度函数在切片球面的一个小邻域之外具有高度> $\frac{1}{2}$ 来做到这一点。这确保把手的内部与 f 的像不相交。f 的像与这个把手的并分别微分同胚于 $S^i \times D^{n-i}$或 $S^j \times D^{n-j}$，因此，我们的微分同胚族 $\Omega^{n-j}S^i \to$ Diff(N) 可延拓为 N × I 上的一个微分同胚：在 f 的像与把手的并上使用命题 2.5 的零同痕，并通过恒等映射将其延拓到 N × I。

□

命题 2.6 的灵感来自与 David Gay 的一次交谈，他对这类零伪同伦有其他描述。

PSfrag 替换

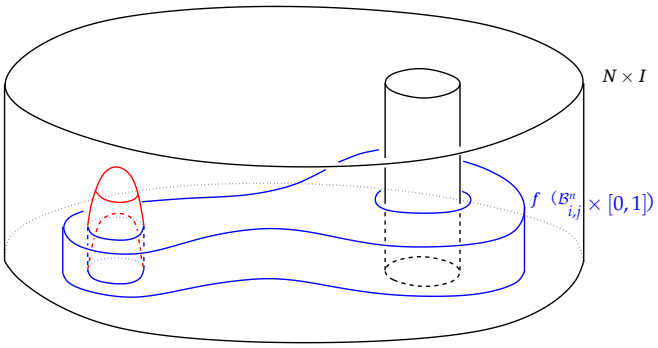


图4：通过嵌入零同痕构造零伪同痕。红色表示嵌入手柄。

当$i + j = n$时，我们给出杠铃微分同胚的一种手术描述。我们从一个观察开始：可以通过嵌入手术的技巧，将带孔圆盘中一条曲线上的一次完整 Dehn 扭转直观地呈现出来。

PSfrag 替换

$k - 1$

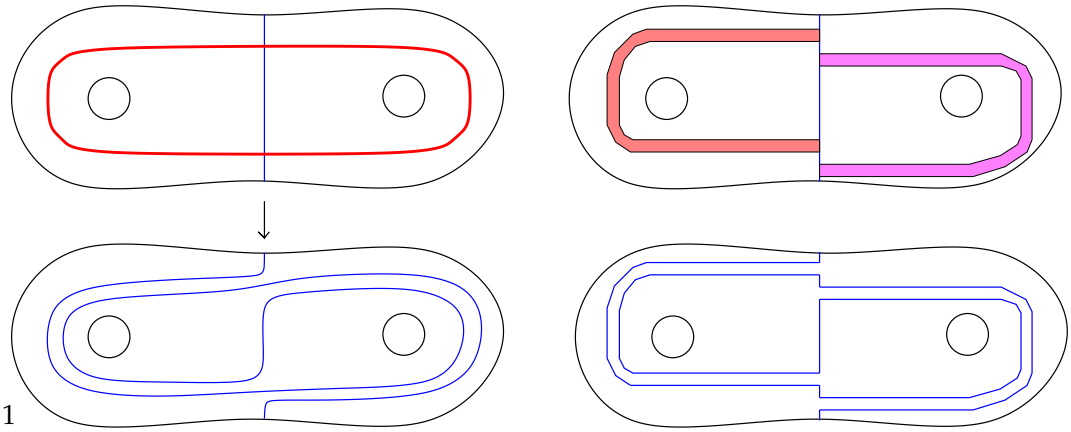


图5：Dehn 扭转的手术描述

在左上图中，我们看到一条蓝色弧将双孔圆盘分成两个环带。我们沿红色圆进行 Dehn 扭转，所得的嵌入弧显示在左下图中。右上图中有两个链接副本S^0 嵌入在蓝色弧中，分别表示左侧（橙色）和右侧（洋红色）两个一维手柄的附着映射。嵌入手术的结果显示在右下图中。

$\mathcal{B}^n_{i,j}$ 的 {style id='3'>i</style} $+ j = n$ 杠铃微分同胚有类似的描述。将图5中的蓝色弧替换为中间球（与 D^{n-1}微分同胚）。再分别将橙色和洋红色的一维手柄附着替换为i 和j手柄附着，其中i-手柄是$S^i \times D^j$ 直和项的核，而j-手柄附着是$\mathcal{B}^n_{i,j}$的$S^j \times D^i$直和项的核。关键问题是，手柄附着的边界是在中间球$S^{i-1} \sqcup S^{j-1} \to D^{n-1}$中的链接球面。

命题 2.7 当 $n = i + j$ 时，杠铃微分同胚在$\mathcal{B}^n_{i,j}$ 中间球上的作用，同痕于将中间球替换为经手术后的嵌入；具体来说，在一个平凡框架链环 $S^{i-1} \sqcup S^{j-1} \subset D^{n-1}$ （即中间球）上进行手术，其中第一个球面是 $S^i \times D^{n-i}$ 直和项核的附着映射，而 S^{j-1} 是 $S^j \times D^{n-j}$ 直和项核的粘附球。链环 $S^{i-1} \sqcup S^{j-1} \subset D^{n-1}$的分支均无结，但各分支的链接数为 ± 1。

证明 要理解这一点，考虑 $\mathcal{B}^n_{i,j}$ 在 D^{i-1} 上纤维化，纤维为 $\mathcal{B}^{j+1}$ i,j。考察杠铃微分同胚对纤维中球的作用。具体来说，考察这些中球的像与余核的交。一般而言，它们由不相交并 $\mathrm{S}^0 \sqcup \mathrm{S}^{j-i}$ 构成。S^0 来自 S^j 余核，而 S^{j-i} 来自 S^i 余核。在 D^{i-1} 参数空间的中心，S^{j-i} 和 S^0 位于同一个 D^{j-i+1} 上，其中 S^0 的一个点在 S^{j-i} 内部，另一个点在外部。随着 D^{i-1} 参数变化，S^0 被推出 S^{j-i} 的子空间；接近边界时，先将 S^{j-i} 锥化，再将 S^0 锥化。这恰好是对标准链环对 $\mathrm{S}^{j-1} \sqcup \mathrm{S}^{i-1} \subset \mathrm{D}^{n-1}$ 的切片视角，即沿 D^{i-1} 切片。

□

这种视角的优势在于，它使我们能够用手柄附着的方式，对杠铃微分同胚给出一种相对初等的组合描述。

命题 2.8 作为 π_0微分同胚群($\mathcal{B}^n_{i,j}$) 中的一个元素，$i + j = n$ 不同伦于恒等映射。我们有两种论证。其在中间球上的限制

$$\pi_0\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \pi_0\mathrm{Emb}(D^{n-1}, \mathcal{B}^n_{i,j})$$

在伪同痕意义下非平凡。事实上，若令 映射(D^{n-1},$\mathcal{B}^n_{i,j}$) 表示从 D^{n-1} 到 $\mathcal{B}^n_{i,j}$的映射空间，其中映射在边界上的限制为标准包含（即边界连通和分解圆盘），则映射 π_0微分同胚群($\mathcal{B}^n_{i,j}$) $\to$ π_0映射(D^{n-1},$\mathcal{B}^n_{i,j}$) 在同伦意义下非平凡。后一个空间在规范同伦等价意义下为 $\Omega^{n-1}(S^i \vee S^j)$。

对任一余核的限制

$$\pi_0\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \pi_0\mathrm{Emb}(D^i, \mathcal{B}^n_{i,j}) \qquad or \qquad \pi_0\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j}) \to \pi_0\mathrm{Emb}(D^j, \mathcal{B}^n_{i,j})$$

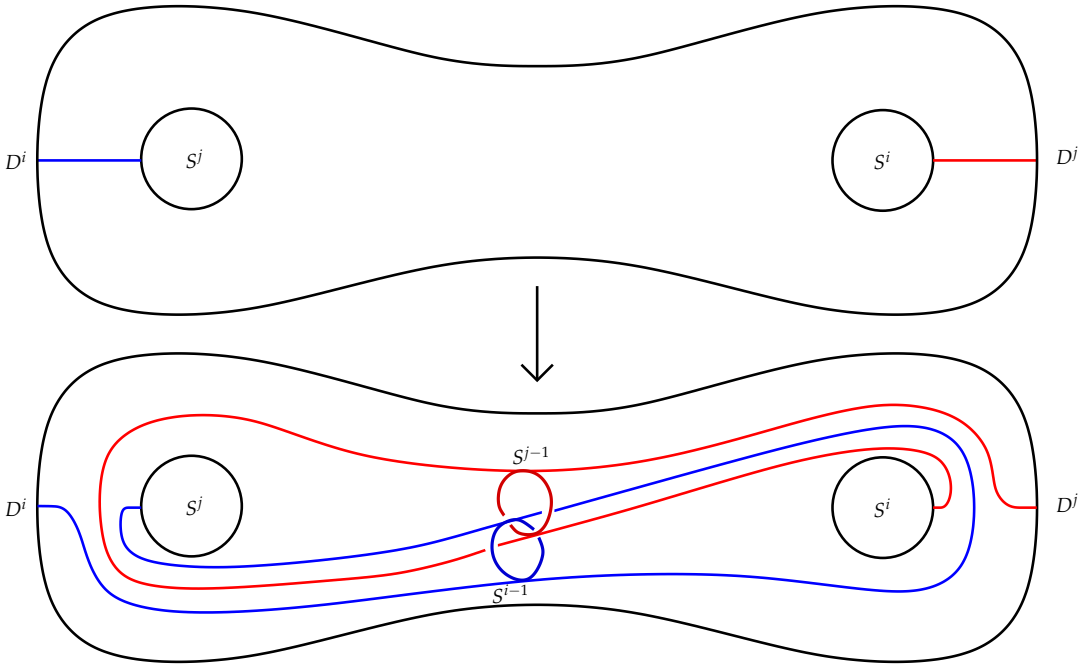
在伪同痕中非平凡。同样，如果再进一步，映射 π_0微分同胚群($\mathcal{B}^n_{i,\ j}$) $\to$ π_0映射(D^i, $\mathcal{B}^n_{i,\ j}$)是非平凡的。

证明：关键观察是，将哑铃微分同胚限制在中间球上，得到的是对一个二分支链环 $\mathrm{S}^{i-1} \sqcup \mathrm{S}^{j-1} \subset \mathrm{D}^{n-1}$ 进行手术的结果，分别对应核 S^i 和 S^j；也就是说，在通过手柄附着从中间球构造 $\mathcal{B}^n_{i,j}$ 时，S^{i-1} 是 i-柄的粘附球，而 S^{j-1} 是 j-柄的粘附球。给定一个嵌入 $\mathrm{D}^{n-1} \to \mathcal{B}^n_{i,j}$，它诱导出 $\Omega^{n-1}\mathcal{B}^n_{i,j} \simeq \Omega^{n-1}(\mathrm{S}^i \vee \mathrm{S}^j)$ 中的一个元素，而哑铃微分同胚诱导出怀特海德积 $[\mathrm{w}_i, \mathrm{w}_j]$，其中 $\mathrm{w}_i \colon \mathrm{S}^i \to \mathrm{S}^i \vee \mathrm{S}^j$ 是 S^i 的包含映射，$\mathrm{w}^j \colon \mathrm{S}^j \to \mathrm{S}^i \vee \mathrm{S}^j$ 是 S^j 的包含映射。

第二个伪同痕障碍可由命题 2.4 得出。具体而言，i维余核的嵌入可以投影到S^i-核，从而得到 $\Omega^i S^i$ 的一个元素。对于杠铃微分同胚，这是 $\pi_0\Omega^i S^i \equiv \pi_i S^i \simeq \mathbb{Z}$ 的一个生成元。

□

命题 2.9 当 $i+j=n$ 时，杠铃微分同胚在余核上的作用对应于与互补核球面的管化。余核的像与中球的交集是霍普夫链接的 $S^{i-1}\sqcup S^{j-1}$ 嵌入副本，如图 *6* 所示。



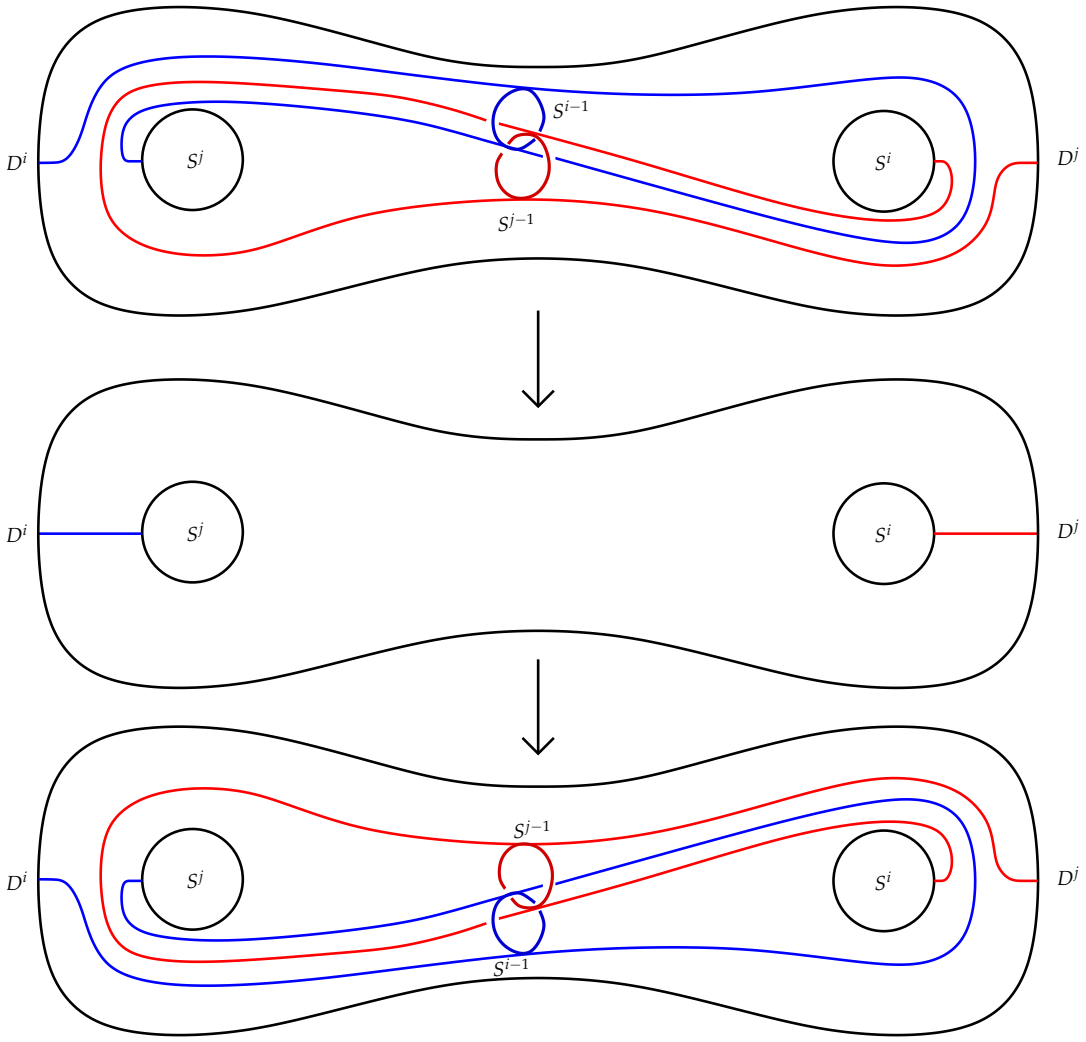
PSfrag 替换

图 6：将哑铃作用于具有“链接”管化的余核。

证明 考虑 $\mathcal{B}^n_{i,j}$ 以D^{i-1} 为底、以 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$ 为纤维的纤维化。映射$D^{i-1}\to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j})$ 对应于由环境同痕诱导的微分同胚，其过程是将“j 个穿孔”绕着“i个穿孔”滑动。纤维 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$ 中的余核分别对应D^1 （对应于j个穿孔）和D^{j-i+1} （对应于i个穿孔）的嵌入副本。在$i=1$ 情形中，通过明确实施同痕延拓，余核对如所述那样相互链接。当$i>1$ 时，余核在 $\mathcal{B}^{j+1}{}_{i,j}$ 中不再相互链接。我们看到的是标准链环对以D^{i-1}为底的纤维化。

□

注意，我们有几种等价的方式来区分哑铃微分同胚及其逆。命题 2.8 告诉我们，若考察中间球与余核像的交集，就会得到一个标准链环对。若使用法丛为这个链环对定向（即采用定向交理论中的标准做法），就会得到一个带标记且定向的二分支链环。因此，链接数是一个定义良好的整数，而哑铃微分同胚与其逆对应的链接数互为相反数。



PSfrag 替换

图 7：杠铃像及余核的原像。

当$i+j>n$时，也有类似的结果。在这种情况下，与中间球相交的余核维数太低，无法形成链接；但在映射的族 $S^{i+j-n}\to\Omega^{n-j}S^i\to$ 微分同胚群$(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 中，与中间球相交的余核族则以类似方式形成链接。

杠铃微分同胚与 Watanabe [19] 构造的微分同胚密切相关。详情请见 [1] 。

3 π_{n-4}微分同胚群$(S^1\times D^{n-1})$ 以及 δ_k 微分同胚。

本节证明定理3.1，这是一个新的证明，表明对于（$S^1\times D^{n-1}$），同伦群 π_{n-4}微分同胚群并非有限生成 ≥ 4。从宏观来看，这个证明与 [1] 中给出的证明有几处相似之处：我们计算相同的W_3-不变量，并考察相同的植入式杠铃微分同胚 δ_k，以证明它们线性无关。两者的主要区别在于

此处给出的论证与 [1] 中的论证不同之处在于，这里W_3-不变量的计算直接基于我们对不变量W_3 和微分同胚 δ_k的定义。在 [1] 中，我们推导出了“邻近”的植入式杠铃微分同胚的W_3-不变量之间的关系，有点类似于双线性或纽结 skein 关系。这种关系为我们提供了一种工具，可将任何具有线性嵌入的袖口的植入式杠铃微分同胚的W_3-不变量的计算，归约为W_3（G（p，q））的计算。

元素 $\delta_k \in \pi_{n-4}\mathrm{Diff}(S^1 \times D^{n-1})$ 是植入式哑铃微分同胚，它们来自于使用图 8 所示的“手铐嵌入”对 $\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}$ 哑铃进行的嵌入。 $\pi_{n-4}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{n-2,n-2})$ 的元素对应于第一个非平凡同伦群 (π_{i+j-n}) 在映射 $\Omega^{n-j}S^i \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{i,j})$ 下的像，其中 $i = j = n-2$ 按第 2 节中的定义。

$$\Omega^2 S^{n-2} \to \mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}).$$

PSfrag 替换

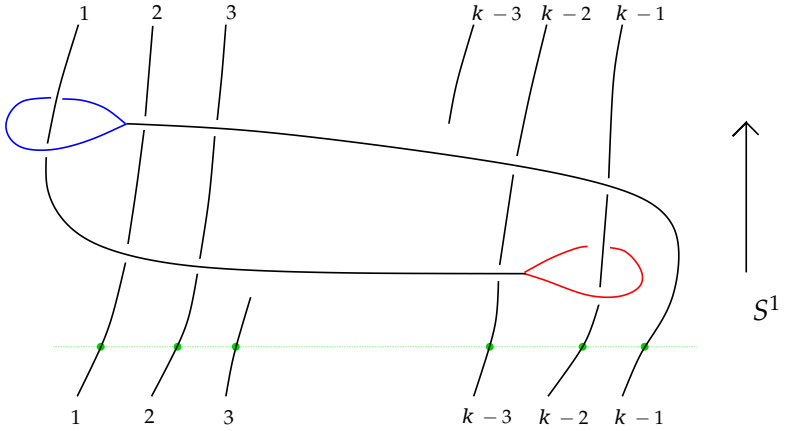


图 8： δ_k $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1}$中的哑铃

PSfrag 替换

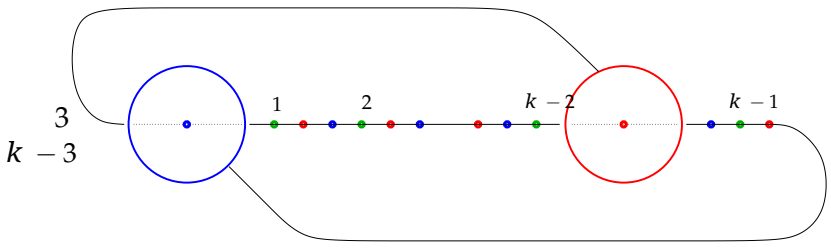


图9： δ_k 哑铃向 D^{n-1} 的投影

“W_3-不变量”的灵感来自命题 2.2，也可以从图 7 中看出。具体而言，命题 2.2 指出，通过将中间球 B^{n-1} 视为区间纤维化，可以检测出哑铃微分同胚，从而得到映射 $\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}) \to \Omega^{n-2}\mathrm{Emb}(I, \mathcal{B}^n_{n-2,n-2})$。在这种表述中，我们考察点对 $t_1 < t_2 \in I$，其中嵌入将 t_1 映到第一余核，将 t_2 映到第二余核，并将其作为该族的带符号交数。另一种

表述方式是，我们计算标准链接对中余核的原像与中间球相交所得的链接数；也就是说，这是图 7 所示链接对的链接数双重点公式。我们倾向于将不变量表述为如下形式的映射：

$$\pi_{n-4}\mathrm{Diff}(\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}) \to \pi_{n-4}\Omega^{n-2}\mathrm{Emb}(I,\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}) \equiv \pi_{2n-6}\mathrm{Emb}(I,\mathcal{B}^n_{n-2,n-2}) \to \mathbb{Z}$$

因为这是一个可以推广到微分同胚群($S^1 \times D^{n-1}$)的表达式。由于我们了解限制在中间球上的杠铃微分同胚，因此也可以类似地扫描 $\{1\} \times D^{n-1} \subset S^1 \times D^{n-1}$，得到一个映射 微分同胚群($S^1 \times D^{n-1}$) $\to$ Ω^{n-2}嵌入空间(I, $S^1 \times D^{n-1}$)。 π_{n-4}微分同胚群($S^1 \times D^{n-1}$)中元素的 W_3-不变量取值于 $\mathbb{Q} \otimes \pi_{2n-6}$嵌入空间(I, $S^1 \times D^{n-1}$)。这个同伦群可在泰勒塔的 3rd 阶检测到，因此我们考虑三点构形空间的诱导映射，以提取该映射的不变量。

PSfrag 替换

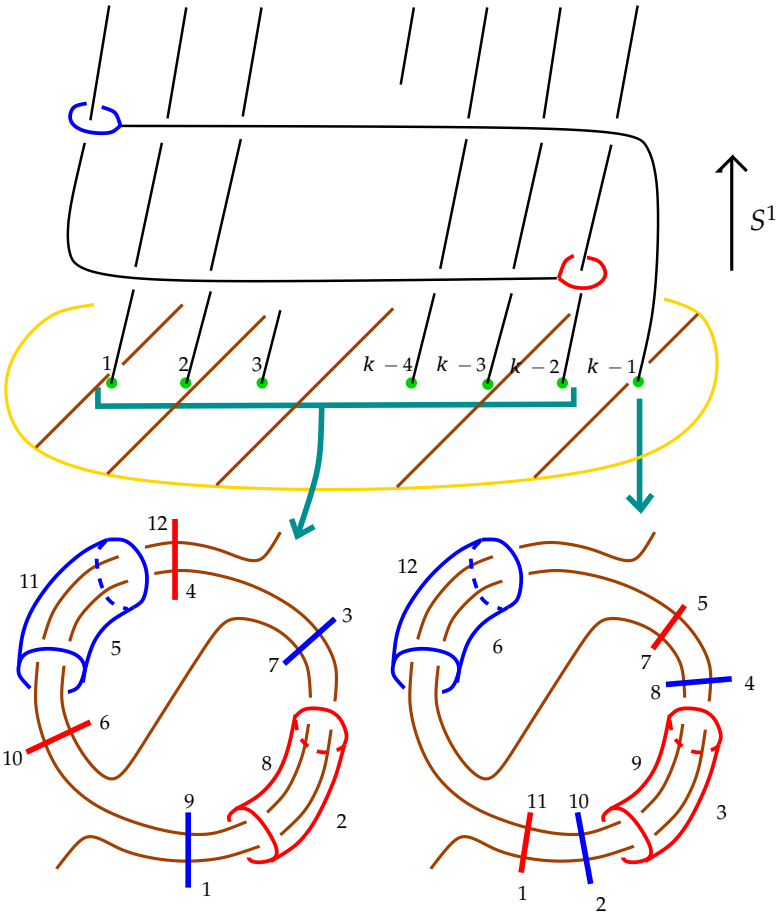


图 10：扫　　描绘 δ_k 哑铃在 $S^1 \times D^{n-1}$ 中。棕色的中间球 $\{1\} \times D^{n-1}$ 的区间纤维　　.

注意，在扫描 δ_k 时，如果棕色区间纤维与横杆不相交，它就不受 δ_k 的影响。但当它穿过横杆时，可以将横杆的横截面想象成 $D^{n-1} \simeq D^{n-2} \times I$。$D^{n-2}$ 与$(n-4)$参数族 $\delta_k : S^{n-4} \to$ 微分同胚群($S^1 \times D^{n-1}$) 为我们提供了一个$(2n-6)$参数族，其中包含 $S^1 \times D^{n-1}$中的嵌入区间；命题 2.2 和图 2 对此作了描述。我们对图 2 作了修改，因为我们的哑铃以手铐式嵌入 $S^1 \times D^{n-1}$ 中。

因此，当棕色区间穿过横杆时，它会如图 10 所示那样卷曲。若将我们的$(2n-6)$参数族视为$D^{n-3}\times D^{n-3}$，第一个D^{n-3}因子对应于悬挂参数$S^{n-2}\equiv \Sigma S^{n-3}$，并控制红色圆柱绕红色袖口摆动。类似地，第二个$D^{n-3}$副本对应于蓝色袖口的悬挂参数$S^{n-2}\equiv \Sigma S^{n-3}$，并为蓝色圆柱绕蓝色袖口摆动提供参数。最后，图 10 底部所示的红色和蓝色直线（共 8 条）标出了与袖口的张成圆盘相交的嵌入点，也就是说，嵌入上具有双重点参数的点。

定理3.1

$$W_3(\delta_k)=(k-1)\left(t_1^{-1}t_3^{1-k}+(-1)^n t_1^{1-k}t_3^{-1}-t_1^{2-k}t_3^{1}+(-1)^{n-1}t_1t_3^{2-k}\right)+$$
$$t_1t_3^{k-1}+(-1)^n t_1^{k-1}t_3-t_1^{1-k}t_3^{2-k}+(-1)^{n-1}t_1^{2-k}t_3^{1-k}.$$

W_3-不变量取值于群 $\mathbb{Q}\otimes\pi_{2n-3}C_3'[S^1\times D^{n-1}]/R$，且元素 $\{W_3(\delta_k):k\geq 4\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。

本节余下部分将阐释上述内容：群 $\mathbb{Q}\otimes\pi_{2n-3}C_3'[S^1\times D^{n-1}]/R$ 究竟是什么，如何将其视为 $\mathbb{Q}\otimes\pi_{2n-6}\mathrm{Emb}(I,S^1\times D^{n-1})$ 的子群，以及如何仅利用双重点数据，根据图 10 计算 $W_3(\delta_k)$。话虽如此，上述关于 $W_3(\delta_k)$ 的公式显然与图 10 有一些共同特征。注意，横杆在 $(k-1)$ 个位置穿过 $\{1\}\times D^{n-1}$，这些位置用绿色点标出。类似地，$W_3(\delta_k)$ 公式中也有一个系数为 $k-1$ 的项。粗略地说，计算 $W_3(\delta_k)$ 时的其余项是一个修正项，因为当该族经过标记为 $k-1$ 的绿色点时，双重点数据呈现出不同的组合模式。

定义3.2 若M 是一个流形，则M 中k 个点的**构形空间**为

$$C_k(M)=\{(p_1,\cdots,p_k):p_i\neq p_j\ \forall i\neq j\}.$$

富尔顿-麦克弗森紧化$C_k(M)$ 记为$C_k[M]$。它是通过在乘积映射下取$C_k(M)$ 的闭包得到的

$$C_k(M)\to M^k\times (S^n)^{\binom{k}{2}}\times [0,\infty]^{\binom{k}{3}}$$

其中，包含映射$C_k(M)\to M^k$ 是集合论意义下的包含$C_k(M)\subset M^k$。映射$C_k(M)\to S^n$ 来自在点对之间取单位位移向量，$p\ \frac{i-j}{|i-|}ppp_j|$ 即我们假设 $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$。最后，映射$C_k(M)\to[0,\infty]$ 来自相对比值映射 $\frac{|i-j|}{|i-l|}pppp$，其中$\{i、j、l\}\subset\{1,2,\cdots,k\}$。

若M 是紧的，则$C_k[M]$ 是一个紧的带角流形。此外，该构造对于嵌入是自然的，并且包含映射$C_k(M)\to C_k[M]$ 是一个同伦等价。

在考虑嵌入空间 $\mathrm{Emb}(I,M)$的语境下，记号 $C_k'[M]$ 表示$C_k[M]$ 的一种小变化。具体来说，我们取单位切丛在映射下的拉回

$$\begin{array}{ccc} UTM^{k+2} & & \\ \downarrow & & \\ C_{k+2}[M] & \longrightarrow & M^{k+2} \end{array}$$

然后限制到这样的子空间：p_1 （及其向量）与 $\mathrm{Emb}(I,M)$的嵌入空间的初始点一致，而p^{k+2} （及其向量）与定义 $\mathrm{Emb}(I,M)$的嵌入的终点一致。详情见 [18] 。对于区间的情形，我们限制到$C'_k[I]$ 的子空间，使得 $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$，也就是说，我们选取一个标准连通分支。在这种情形下，$C'_k[I]$ 已知是第k个斯塔舍夫多面体，亦称结合式多面体。

将 $\pi_1 C_k[S^1 \times D^{n-1}] \simeq \mathbb{Z}^k$的生成元记为 $\{t_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$。类 $w^{ij} \in \pi_{n-1} C_k[S^1 \times D^{n-1}]$ 使所有k 个点保持不动，除了点j 绕点i旋转。

$\pi_{n-1} C_k[S^1 \times D^{n-1}]$ 由集合 $\{t^q{}_l . w_{ij} \ \forall i, j, l, q\}$生成，其关系为

- $w_{ii} = 0 \ \forall i$
- $w_{ij} = (-1)^n w_{ji} \ \forall i \neq j.$
- $t_l \circ w_{ij} = w_{ij}$ 条件是 $l \notin \{i, j\}$。
- $t_j \circ w_{ij} = t^{-1}{}_i \circ w_{ij} \ \forall i, j.$

证明上述结论的方法是注意到遗忘映射 $C_k(S^1 \times D^{n-1}) \to C_{k-1}(S^1 \times D^{n-1})$ 是一个局部平凡纤维丛。此外，该映射有一个截面，因此 $C_k(S^1 \times D^{n-1})$ 的同伦群同构于各纤维的同伦群的乘积（依次进行）；而各纤维本身又是由若干个 S^1 与不同数量的 S^{n-1} 楔和而成。S^1 因子贡献了 π_1 中的 t_i 生成元，而球面因子贡献了 w^{ij} 生成元。根据希尔顿—米尔诺定理，较高阶的有理同伦群由怀特海德积生成。怀特海德积是一个双线性映射 $[\cdot, \cdot] : \pi_i X \times \pi_j X \to \pi_{i+j-1} X$，满足

$$(-1)^{pr}[[f, g], h] + (-1)^{pq}[[g, h], f] + (-1)^{rq}[[h, f], g] = 0,$$
$$\text{where } f \in \pi_p X, g \in \pi_q X, h \in \pi_r X \text{ with } p, q, r \geq 2.$$

由于上述关系的形式，它有时被称为“分次雅可比恒等式”，这与李括号类似。

有两个 基本关系由怀特海德乘积通过 w^{ij} 类满足 ct:

- $[w_{ij}, w_{lm}] = 0$ 当 $\{i, j\} \cap \{l, m\} = \emptyset$时。
- $[w_{ij} + w_{il}, w_{ij}] = 0$ 对所有 i、j、l均成立。

后一个关系应被视为广义的“轨道系统”映射 $S^n \times S^n \to C_3(D^n)$，其中存在一个地球—月球—太阳轨道三元组。对于这种解释，可以将怀特海德括号视为延拓楔映射的障碍，即将 $S^i \vee S^j \to X$ 延拓到乘积 $S^i \times S^j \to X$的障碍。对于轨道三元组，这样的映射确实存在，因此相应的怀特海德括号为零。

上面的后一个关系可改写为 $[w^{ij}, w_{jk}] - [w^{jk}, w_{ki}] = 0$，从而得到三个循环置换相等，

$$[w_{ij}, w_{jk}] = [w_{jk}, w_{ki}] = [w_{ki}, w_{ij}].$$

命题 3.3 $C_k[S^1 \times D^{n-1}]$ 的有理同伦群由元素 $t^m_l . w^{ij}$的怀特海德积生成。这些满足以下关系

- $[wij,wlm] = 0$ 当 $\{i、j\} \cap \{l、m\} = \varnothing$,
- $[wij, wjl] = [wjl, wli] = [wli, wij]$,
- $tl_\circ [f, g] = [tl_\circ f, tl_\circ g]_\circ$

通过交叉理论，可以用一种相对构造性的方法验证上述内容中的大部分。固定一个单位方向 $\zeta \in \partial \mathrm{D}^{n-1}$。定义 $\mathrm{t}^i\mathrm{Co}_1^2$，使其由满足以下条件的点对 $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \in \mathrm{C}_2(\mathbb{R}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$ 组成：位移向量 $\mathrm{t}_2^i.\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1$ 是 ζ 的正倍数。我们称 $\mathrm{t}^i\mathrm{Co}_1^2$ 为共水平流形。给定 $\pi_{n-1}\mathrm{C}_2(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$ 的一个元素，将映射提升到万有覆盖 $\tilde{}\mathrm{C}_2(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1}) \subset \mathrm{C}_2(\mathbb{R} \times \mathrm{D}^{n-1})$，并取其与 $\mathrm{t}^i\mathrm{Co}_1^2$ 子流形的交，这是一个良定义的带框架 0 维流形，其配边类因此对应一个整数。这个不变量检测类 $\mathrm{t}_1^i\mathrm{w}_{12}$。

为类似地检测 $\pi_{2n-3}\mathrm{C}_3(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$ 中的同伦类，我们引入共线类。它由 $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1}$ 中位于一条“直线”上的三个点组成。粗略地说，这里的“直线”指的是 $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1}$ 上标准欧几里得度量下的测地线。更准确地说，流形 $\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^1$ 由形如 $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \in \mathrm{C}_3(\mathbb{R} \times \mathrm{D}^{n-1})$ 的点组成，其中 $(\mathrm{p}_2, \mathrm{t}_1^\alpha \mathrm{p}_1, \mathrm{t}_3^\beta \mathrm{p}_3)$ 按所列顺序位于 $\mathbb{R} \times \mathrm{D}^{n-1}$ 中的一条直线上。类似地，流形 $\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^3$ 由满足以下条件的点定义：$(\mathrm{t}_1^\alpha \mathrm{p}_1, \mathrm{t}_3^\beta \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_2)$ 按所列顺序位于 $\mathbb{R} \times \mathrm{D}^{n-1}$ 中的一条直线上。$\mathrm{C}_3(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$ 的万有覆盖自然是 $(\mathbb{R}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})^3$，的一个开子空间，因此我们可以自然地将 $\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^1$ 和 $\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^3$ 视为 $\mathrm{C}_3(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$ 的万有覆盖的子空间。流形 $\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^1$ 和 $\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^3$ 在 $\mathrm{C}_3(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$ 的万有覆盖中不相交且闭合。给定一个映射 $\mathrm{S}^{2n-3} \to \mathrm{C}_3(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$，我们将其提升到万有覆盖 $\mathrm{S}^{2n-3} \to \tilde{}\mathrm{C}_3(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$，并取成对的 $(\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^1, \mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^3)$ 的原像。一般而言，这会得到 S^{2n-3} 中一对不相交的 $(\mathrm{n}-2)$ 维紧致定向流形，因此它们具有定义良好的链接数。这个链接数可以检测 $\mathrm{t}_1^\alpha \mathrm{t}_3^\beta [\mathrm{w}_{12}, \mathrm{w}_{23}]$ 的系数。

鉴于对任意映射 $S^{2n-3} \to C_3(S^1 \times D^{n-1})$的提升而言，计算点对 $(Col_{\alpha,\beta}^1, Col_{\alpha,\beta}^3)$ 的原像的链接数可能难以直观呈现且不易计算，我们将描述该点对 $(Col_{\alpha,\beta}^1, Col_{\alpha,\beta}^3)$ 的一种同痕，将计算转化为通常更易处理的问题。对于 $\epsilon \in \mathbb{R}$，考虑由 $\mathbb{R}^n$ 给出的微分同胚

$$P_\epsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n + \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right).$$

该微分同胚有一个特点：当 $\epsilon \neq 0$ 时，它会将 $\mathrm{x}_n = \mathrm{c}$ 超平面变为抛物面；类似地，它会将 $\mathrm{x}_n = \mathrm{c}$ 平面中的直线变为抛物线，而在平行于 x_n-轴的直线上，该微分同胚则表现为平移。此外，$\mathrm{P}_{\epsilon_1} \circ \mathrm{P}_{\epsilon_2} = \mathrm{P}_{\epsilon_1+\epsilon_2}$和 $\mathrm{P}_\epsilon^{-1} = \mathrm{P}_{-\epsilon}$。如果我们将 $\mathrm{Col}_{\alpha,\beta}^i$ 流形视为在 $\mathrm{C}_3(\mathbb{R}^n)$ 中自然定义的子流形（即在将它们拉回到 $\mathrm{C}_3(\mathbb{R} \times \mathrm{D}^{n-1})$ 之前），那么我们可以通过微分同胚 P_ϵ 将它们拉回；所得流形由共抛物三元组（以及平行于 x_n-轴的直线上的三元组）构成。由于 P_ϵ 是保定向微分同胚，这些流形拉回到 $\tilde{}\mathrm{C}_3(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})$ 后，也能检测 $\mathrm{t}_1^\alpha \mathrm{t}_3^\beta [\mathrm{w}_{12}, \mathrm{w}_{13}]$ 类。我们将共线流形的拉回称为共抛物流形，即

$$Cop_{\alpha,\beta,\epsilon}^i = P_\epsilon^*(Col_{\alpha,\beta}^i).$$

给定一个映射 $S^{2n-3} \to C_3(S^1 \times D^{n-1})$，我们将其提升到万有覆盖，并取$Cop_{\alpha,\beta,\epsilon}^i$ 在$i = 1, 3$ 时的原像。由于这些是陪域中互不相交的闭定向流形，它们的

原像是 S^{2n-3} 中互不相交的紧定向流形。一般而言，我们可以假设这些映射不包含共水平三元组，因为共水平三元组条件的余维为 $2n-2 > 2n-3$。因此，如果 ϵ 足够大，并且我们的点三元组并非趋近于嵌入上的无穷小三元组，我们可以假设抛物线的临界点位于 $\mathbb{R} \times D^{n-1}$ 之外，且该临界点将抛物线三元组中的三个点之中的两个分隔开来。因此在极限情况下，点对 $(Cop^1_{\alpha,\beta,\epsilon}, Cop^3_{\alpha,\beta,\epsilon})$ 的原像的链接，可通过点对 $(t^\alpha Co^1_2 - t^{\alpha-\beta}Co^1_3, t^{\beta-\alpha}Co^3_1 - t^\beta Co^3_2)$ 的原像的链接数来计算，因为抛物线的陡峭线段近似于共水平直线。符号的由来，例如 $t^{\alpha-\beta}Co^1_3$ 项前的负号，是因为在计算抛物线三元组的带符号交数时，所有 Co^1_2 和 Co^1_3 的符号都相同，只有抛物线方向反转时例外。

PSfrag 替换

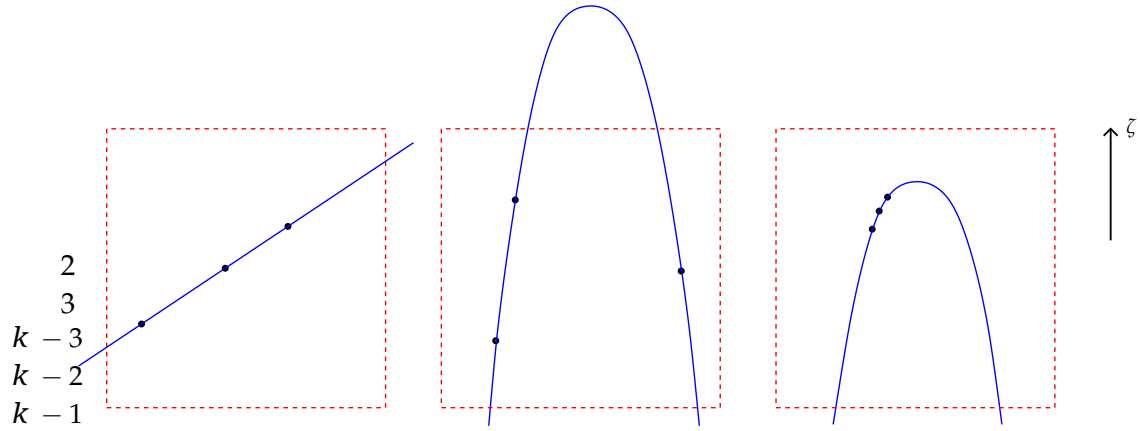


图 11：抛物线三元组，$\epsilon = 0$ 左侧。大号 ϵ 中间和右侧。

引理 3.4 给定一个光滑映射 $f: S^{2n-3} \to C_3(S^1 \times D^{n-1})$，一般情况下可以假设它没有共水平三元组。此外，若该映射没有任何共水平三元组，则考虑其到万有覆盖上的提升 $\tilde{f}: S^{2n-3} \to \tilde{C}_3(S^1 \times D^{n-1})$。$S^{2n-3}$ 中，$\tilde{C}_3(S^1 \times D^{n-1})$ 中那对不相交流形的原像的链接数

$$(Col^1_{\alpha,\beta}, Col^3_{\alpha,\beta})$$

与该对的原像的链接数一致

$$(t^\alpha Co^1_2 - t^{\alpha-\beta}Co^1_3, t^{\beta-\alpha}Co^3_1 - t^\beta Co^3_2)$$

流形线性组合的……，对所有 α，$\beta \in \mathbb{Z}$。

引理 3.4 是对第一作者于 2005年从 Misha Polyak 口头了解到的一种论证的变体；后来，Polyak 在其演讲中更详细地阐述了这一论证 [17]。Polyak 的论证出现在泰勒塔的 4th 阶段，而这个变体则适用于 3rd。

如在 [1]，中，给定一个映射 $S^{n-4} \to \mathrm{Diff}(S^1 \times D^{n-1})$，我们将其与扫描映射 $\mathrm{Diff}(S^1 \times D^{n-1}) \to \Omega^{n-2}\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1})$ 复合。我们进一步与泰勒塔的 3rd 阶复合，并将其视为求值映射 $\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1}) \times C'_3[I] \to C'_3[S^1 \times D^{n-1}]$，或其伴随映射

$$ev_3 : \mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1}) \to \mathrm{Map}(C'_3[I], C'_3[S^1 \times D^{n-1}])$$

其中，在这个映射空间中，我们要求映射保持分层且对齐，这意味着当定义域中的点发生碰撞时，陪域中的对应点也会发生碰撞；此外，它们所对应的切向量相一致。将这些要素结合起来，我们得到一个诱导映射

$$S^{n-4} \wedge S^{n-2} \equiv S^{2n-6} \to \mathrm{Map}(C_3'[I], C_3'[S^1 \times D^{n-1}]).$$

这里可能会有人担心，这些映射提升到 $C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$ 的万有覆盖后，在 $C_3[I]$ 的各种边界分层上会出现横截性问题。具体而言，如果我们在 $\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1})$ 中的族含有任何平行于“竖直”方向（即 $S^1 D^1 \times$ 的 S^{n-1} 方向）的速度向量，那么对于 $\mathrm{Col}^i_{\alpha\beta}$ 簇中无穷多个 α, β，就会存在共线三元组。例如，在 $t_1 = t_2 = t_3$ 分层上会出现这种情况；此外，在 $t_1 = t_2$ 分层上也存在余维不同的交点，其余维取决于 α, β 的选择。有几种方法可以避免这些横截性问题。例如，如果族中没有竖直切向量，就不会出现这个问题。话虽如此，目前尚不清楚能否避免竖直切向量（不过，我们确实知道沿嵌入的切向量场在典范意义下是零同伦的）。其背后的几何问题是，共线流形包含所有竖直直线 $\mathbb{R} \times \{p\}$，其中 $p \in D^{n-1}$。因此，我们可以更改模型来避免这个问题。采用带有 $\epsilon \neq 0$ 的共抛物流形 $\mathrm{Cop}^i_{\alpha,\beta,\epsilon}$ 即可。我们的族 $S^{2n-6} \times C_3'[I] \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$ 通常与这些共抛物流形横截，从而沿所有分层将它们拉回为定向的余维 $n-1$ 子流形。

在 2nd 阶段上相应的映射 $S^{2n-6} \to \mathrm{Map}(C_2'[I], C_2'[S^1 \times D^{n-1}])$ 是挠元（详情见 [1]），因此我们可以将零伦附加到适当倍数的 3rd 阶段上，从而得到映射的一个同伦类 $S^{2n-3} \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$。根据所附加的零伦不同，我们可以得到映射 $S^{2n-3} \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$ 的不同同伦类。以下条目 **(1)–(4)** 将讨论这一问题。

如我们所见，$\pi_{2n-3} C_2'[S^1 \times D^{n-1}]$ 同构于 $\pi_{2n-3}(S^1 \vee S^{n-1}) \oplus \bigoplus_2 \pi_{2n-3} S^{n-1}$。模掉挠元后，$\pi_{2n-3}(S^1 \vee S^{n-1})$ 的生成元是元素 $t^k w_{12}$ 的怀特海德积，其中 $k \in \mathbb{Z}$。由此可得，$\pi_{2n-3} C_2'[S^1 \times D^{n-1}]$ 模掉挠元后，同构于 $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}] / \langle t_1 t_2 - 1 = 0 \rangle$，作为基本群群环上的一个模。$\pi_{2n-3} C_2'[S^1 \times D^{n-1}]$ 中对应于单项式 $t_1^\alpha t_2^\beta$ 的生成元是 $t_1^\alpha t_2^\beta w_{12}$。将映射 $S^{2n-6} \times I \times C_2[I] \to C_2'[S^1 \times D^{n-1}]$ 的一个同伦类附加到封闭的 $S^{2n-6} \times C_3[I] \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$ 上，会通过加上以下项来改变同伦类：

(1) $[t_2^\alpha w_{23}, t_2^\beta w_{23}]$。这来自 $t_1 = 0$面。因此，生成元 $t_1^\alpha w_{12}$ 被映射为 $t_2^\alpha w_{23}$,，而怀特海德括号 $[t_1^\alpha w_{12}, t_1^\beta w_{12}]$ 被映射为 $[t_2^\alpha w_{23}, t_2^\beta w_{23}]$。**(2)** $[t_1^\alpha w_{12}, t_1^\beta w_{12}]$ 到 $[t_1^\alpha w_{13} + t_2^\alpha w_{23} + a_1 w_{21}, t_1^\beta w_{13} + t_2^\beta w_{23} + a_1 w_{21}]$。这来自 $t_1 = t_2$面映射，即包含映射 $C_2'[S^1 \times D^{n-1}] \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$，它将第一个点加倍，也就是 $(p_1, p_2) \longmapsto (p1, \epsilon^+ p_1, p_2)$，其中扰动 $\epsilon^+ p_1$ 的方向与速度向量一致。整数 a_1 是这个速度向量映射的度。该映射将 w_{12} 映射为 $w_{13} + w_{23} + a_1 w_{21}$,，将 t_1 映射为 $t_1 t_2$，并将 t_2 映射为 t_2。泰勒塔的第二阶段给出了速度向量映射的一个零伦，因此我们可以假设 $a_1 = 0$，但有趣的是，下面的计算在 $a_1 \neq 0$时也得到相同的结果。因此，它将 $[t_1^\alpha w_{12}, t_1^\beta w_{12}]$ 映射为

$[t_1^\alpha w_{13} + t_2^\alpha w_{23} + a_1 w_{21}, t_1^\beta w_{13} + t_2^\beta w_{23} + a_1 w_{21}]$。利用双线性展开这个括号，得到

$$= \left(-t_1^{\alpha-\beta} t_3^{-\beta} + (-1)^n t_1^{\beta-\alpha} t_3^{-\alpha}\right) [w_{12}, w_{23}] + [t_1^\alpha w_{13}, t_1^\beta w_{13}] +$$
$$a_1 \left((-1)^{n-1} t_3^{-\beta} + (-1)^n t_3^{-\beta} + t_1^{-\alpha} - t_1^{-\alpha}\right) [w_{12}, w_{23}]$$

其中，后一行来自收集含有 a_1，的项，显然这些项的和为零。

(3) $[t_1^\alpha w_{12} + t_1^\alpha w_{13} + a_2 w_{23}, t_1^\beta w_{12} + t_1^\beta w_{13} + a_2 w_{23}]$。这是针对 $t_2 = t_3$ 面的情形。它对应于映射 $C_2'[S^1 \times D^{n-1}] \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$，该映射将第二个点加倍，即 $(p_1, p_2) \longmapsto (p_1, p2, \epsilon^+ p_2)$。此映射将 w_{12} 映为 $w_{12} + w_{13} + a_2$，将 w_{23}, t_1 映为 t_1，并将 t_2 映为 $t_2 t_3$。因此$[t_1^\alpha w_{12}, t_1^\beta w_{12}] \longmapsto [t_1^\alpha w_{12} + t_1^\alpha w_{13} + a_2 w_{23}, t_1^\beta w_{12} + t_1^\beta w_{13} + a_2 w_{23}]$。与前一种情况类似，这可化简为

$$= \left(-t_1^\alpha t_3^{\alpha-\beta} + (-1)^n t_1^\beta t_3^{\beta-\alpha}\right) [w_{12}, w_{23}] + [t_1^\alpha w_{13}, t_1^\beta w_{13}] +$$
$$a_2 \left(t_1^\beta - t_1^\beta + (-1)^{n-1} t_1^\alpha + (-1)^n t_1^\alpha\right) [w_{12}, w_{23}].$$

同样，带有 a_2 的项相互抵消。

(4) $[t_1^\alpha w_{12}, t_1^\beta w_{12}]$。这是针对 $t_3 = 1$ 面而言的。这对应于包含映射 $C_2'[S^1 \times D^{n-1}] \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$，该映射将 (p_1, p_2) 映射为 $(p_1, p_2, (1, 0))$，因此它发送 $w_{12} \longmapsto w_{12}$ 和 $t_1 \longmapsto t_1, t_2 \longmapsto t_2,$，从而在 $[t_1^\alpha w_{12}, t_1^\beta w_{12}]$ 上平凡作用。

因此，我们通过闭包 $\underline{1}_{me} v_3(mf)$ 得到~~的~~关于 π_{2n-6}嵌入空间$(I、S^1 \times D^{n-1})$ 的不变量取值于

$$\mathbb{Q} \otimes \pi_{2n-3} C_3'[S^1 \times D^{n-1}]/R$$

其中，R 是由上述四个包含映射生成的子群。注意，(1) 消去了对应于 w_{23} 括号的直和项，而 (4) 消去了对应于 w_{12} 括号的直和项。利用关系 (1) 和 (4)，我们可以将 (2) 和 (3) 简化为 w_{13} 括号与形如 $[w_{12}, w_{23}]$, 的括号之间的关系，从而得到命题 3.5。

命题 3.5（闭包论证）给定 $[f] \in \pi_{2n-6}\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1})$ 中的一个元素，使得 $\mathrm{ev}_2(f) : S^{2n-6} \to T_2\,\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1})$ 是零映射，我们构造求值映射 $\mathrm{ev}_3(f) : S^{2n-6} \to T_3\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1})$ 的闭包，它是一个如下形式的基点映射

$$\overline{ev_3}(f) : S^{2n-3} \to C_3'[S^1 \times D^{n-1}].$$

这个映射的同伦类作为同伦类 $[f]$ 的函数，在模去一个称为 R 的子群后是良定义的。R 由 $\pi_{2n-3}C_3'[S^1 \times D^{n-1}]$ 的扭子群以及以下元素生成

$$\left(t_1^{\alpha-\beta} t_3^{-\beta} - t_1^\alpha t_3^{\alpha-\beta} + (-1)^n \left(t_1^\beta t_3^{\beta-\alpha} - t_1^{\beta-\alpha} t_3^{-\alpha}\right)\right) [w_{12}, w_{23}]\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z},$$
$$[t_2^\alpha w_{23}, t_2^\beta w_{23}]\ \forall \alpha, \beta,$$
$$[t_1^\alpha w_{12}, t_1^\beta w_{12}]\ \forall \alpha, \beta,$$
$$[t_1^\alpha w_{13}, t_1^\beta w_{13}] + \left(t_1^{\alpha-\beta} t_3^{-\beta} + (-1)^{n-1} t_1^{\beta-\alpha} t_3^{-\alpha}\right) [w_{12}, w_{23}]\ \forall \alpha, \beta.$$

由于 $\pi_{2n-6}T_2$嵌入空间$(I, S^1 \times D^{n-1})$ 是挠元，因此存在一个同态，称为闭包算子π_{2n-6}嵌入空间$(I, S^1 \times D^{n-1}) \to \mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}]/\langle t_1^{\alpha-\beta} t_3^{-\beta} - t_1^{\alpha} t_3^{\alpha-\beta} = (-1)^{n-1}\left(t_1^{\beta} t_3^{\beta-\alpha} - t_1^{\beta-\alpha} t_3^{-\alpha}\right)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\rangle$其定义为将 f 映射到$\longmapsto \frac{1}{}\mathrm{mev}_3(\mathrm{m\,f})$。

rag 替换

证明 关系已在命题前的注释中给出。关系 (1) 和 (4) 分别消去 $[t_2^{\alpha} w_{23}, t_2^{\beta} w_{23}]$和 $[t_1^{\alpha} w_{12}, t_1^{\beta} w_{12}]$。利用关系 (1) 和 (4)，我们可以将关系 (2) 和 (3) 简化为三项关系，二者都将 $[t_1^{\alpha} w_{13}, t_1^{\beta} w_{13}]$表示为 $\mathbb{Z}[t_1^{\pm}, t_2^{\pm}]$线性张成空间中 $[w_{12}, w_{23}]$的线性组合。比较两者可得关系

$$\left(t_1^{\alpha-\beta} t_3^{-\beta} - t_1^{\alpha} t_3^{\alpha-\beta} + (-1)^n \left(t_1^{\beta} t_3^{\beta-\alpha} - t_1^{\beta-\alpha} t_3^{-\alpha}\right)\right) [w_{12}, w_{23}] = 0.$$

□

$t_1 t_3$

~~为~~计算W_3 不变量，我们首先考察 2nd 阶段上映射的同伦类，$ev_2(\delta_k)$。在我们的族中（如图 10 所示），有$(k-1)$ 个绿色点可产生双重点。前$(k-2)$ 个产生相同的双重点数据，并展示于图 12 中。

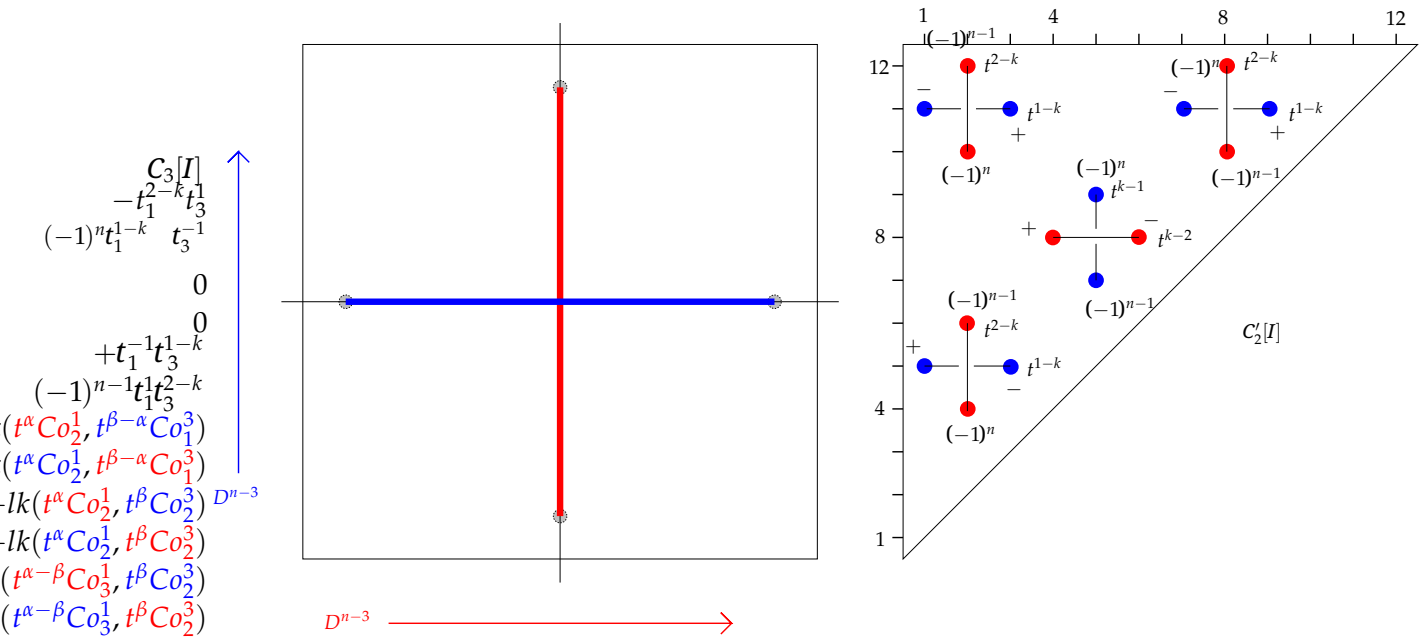


图 12：扫描第一个$(k-2)$ 绿色点。

在图 12 中，我们描绘了 2nd 阶段映射下余水平流形的原像，将其表示为如下形式的映射：$D^{n-3} \times D^{n-3} \times C_2'[I] \to C_2'[S^1 \times D^{n-1}]$。虽然 $C_2'[I]$ 严格来说是一个六边形，但余水平流形与边界不相交，因此为便于说明，我们将 $C_2'[I]$ 压缩为一个三角形 Δ^2。余水平流形是维数为 $n-3$ 的球面，具有一种自然的手术“乘积”分解 $S^{n-3} \equiv D^{n-3} \times \partial I \cup S^{n-4} \times I$。

在图中，这种手术分解由图左侧的实色弧表示，它们描绘了 D^{n-3} 的一个副本；此外，图右侧还有一对颜色相同的点，对应于 $D^{n-3}\times\partial I$ 部分。对于 $I\times S^{n-4}$ 部分，球面边界由图左侧的一对大灰点表示，而图右侧的黑色区间表示一个区间 I。$S^{n-4}\times I$ 因子出现在构造我们这一族时的“端同伦”过程中（如图 2 右上部分所示），而 $D^{n-3}\times\partial I$ 部分则源自当改变另一袖口中的弧时仍然存在的双重点，即图 2 右下部分所示的情形。

我们由图 10 推导出图 12。其关键思想是，对于扫描弧穿过$k-1$ 个绿色点的小族而言，仅存在共水平点（即双重点）。这些点对应于D^{n-3} 中的副本的中心，以及$D^{n-3}\times D^{n-3}$-族中分别对应于抓住嵌入空间在红色或蓝色圆柱中的两股，并将它们绕过哑铃和相应的红色或蓝色袖口扫过的那些副本。因此，当有色圆柱中的两股与穿过横杆或嵌入的哑铃体的股发生上穿或下穿时，就会出现双重点。图 10 左下（及右下）部分各特征旁标注的数字，表示共水平点出现的大致参数时刻。我们在图 12 中采用这一编号系统，即坐标$(2,4)$ 上标有一个红点，表示它记录了前$k-2$ 个绿色点所对应的共水平点，其中标注为 2 的股绕过嵌入空间上标注为 4 的点。

(1,5) $+t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (2,4) $(-1)^n t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$(3,5) $-t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (2,6) $(-1)^{n-1}t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$(1,11) $-t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (2,10) $(-1)^n t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$(3,11) $+t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (2,12) $(-1)^{n-1}t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$(7,11) $-t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (8,10) $(-1)^{n-1}t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$(9,11) $+t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (8,12) $(-1)^n t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$(5,7) $(-1)^{n-1}t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (4,8) $+t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$(5,9) $(-1)^n t_1\wedge t_2\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$ (6,8) $-t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$

图13：标准　余水平流形的定向位于第一个$(k-2)$ 绿色点　　s.

注意，图 12 中的球面是**不链接的**，且带有平凡框架，这意味着 2nd-阶段映射是零伦的。鉴于这些球面本质上是线性嵌入的，你可以思考一个球面的张成圆盘如何与其他球面相交，其中一些交点并非平凡。话虽如此，这些交点是可以避免的。图 12 还记录了一些符号信息。这描述了球面所继承的定向。例如，取其中一个“红色”球面。在它的手术分解中，它由红色的$D^{n-3}\times\partial I$ 副本和一个$S^{n-4}\times I$副本组成。图中的符号信息表示$D^{n-3}\times\partial I$ 分量的定向。由于$D^{n-3}\times\partial I$ 分量与蓝色D^{n-3} 坐标轴平行，该符号指的是该部分流形的法丛定向，而这一法丛定向是相对于 $\Delta^2\times D^{n-3}\times D^{n-3}$ 的标准定向给出的，使用坐标$(r1,\cdots,r_{n-3},b1,\cdots,b_{n-3},t_1,t_2)$

按该顺序，即我们使用定向形式

$$dt_1 \wedge dt_2 \wedge dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_{n-3} \wedge db_1 \wedge \cdots \wedge db_{n-3}$$

按照这些约定，前 $1 \leq l < k-1$ 项的正规定向如图13所示。我们将 1-形式 dx 简记为符号 x。对于最后一个绿色点，我们有一个略有不同的 2nd 阶段图，如图14所示。

rag 替换

在图13中，点 $(1,5)$ 和 $(3,5)$ 分别用蓝色标记，符号分别为 $+$ 和 $-$。在图12中，它们由一条标有单项式 t^{1-k}的弧连接。这意味着它们属于$t^{1-k}Co_1^2$ 流形的原像。加号表示该流形的法向定向为 $+r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$，即与按自然排序排列坐标所诱导的定向一致，坐标顺序为 $(t_1, t_2, r1, \cdots, r_{n-3}, b1, \cdots, b_{n-3})$。类似地，对应于红点 $(4,8)$ 的圆盘在 $t^{k-2}Co_1^2$ 的原像中标记，其定向如图 13 表格所示。

t_1

t_3

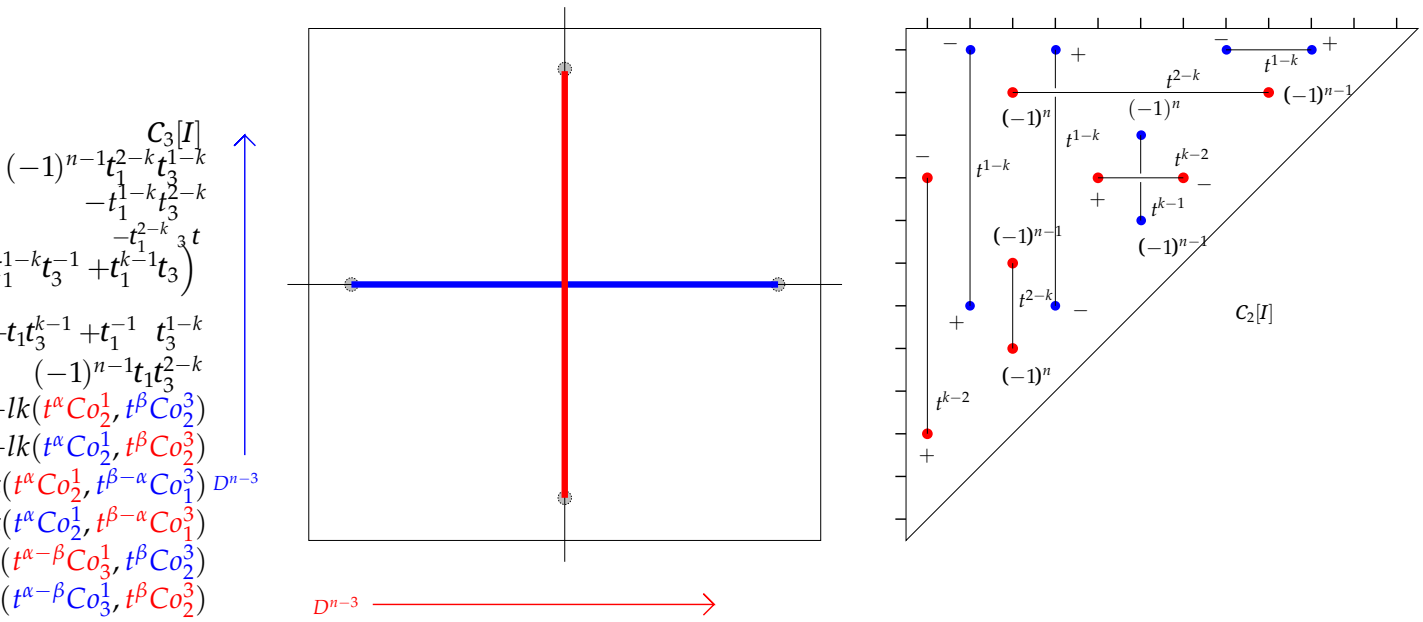


图14：扫描到最后一个绿色点。

(2,6) $+t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$
(2,12) $-t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$(4,6) $-t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$(4,12) $+t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$(8,12) $-t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$(10,12) $+t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$(6,8) $(-1)^{n-1}t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$(6,10) $(-1)^n t_1 \wedge t_2 \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-3}$

(3,5) $(-1)^n t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$
(3,7) $(-1)^{n-1} t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$
(3,11) $(-1)^n t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$
(9,11) $(-1)^{n-1} t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$
(1,3) $+t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$
(1,9) $-t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$
(5,9) $+t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$
(7,9) $-t_1 \wedge t_2 \wedge r_1 \wedge \cdots \wedge r_{n-3}$

图 15：最后一个绿色点处共水平流形的法向定向。

我们从 2nd 阶映射构造 3rd 阶映射的共水平流形，其思路是：无论考虑哪个共水平流形，它在 $C'_3[I]$，的三个参数之一上都是常值，因为余水平条件只约束 $C'_3[I]$ 的三个坐标中的两个。附加为 2nd 阶映射所描述的零同伦后，我们便能封闭这些共水平流形，从而得到一组位于 $D^{n-3} \times D^{n-3} \times C'_3[I]$ 邻域内的不交球面。我们特意强调“邻域”一词，因为这些零同伦的附加部分位于 $D^{n-3} \times D^{n-3} \times C'_3[I]$ 之外。在图16和图17中，我们省略了 $D^{n-3} \times D^{n-3}$ 因子，因为它只会重复图 12 的内容。在示意图中，我们展示 t_1 和 t_3 坐标，而 t_2 垂直于纸面。因此，我们的示意图描绘的是与 S^{n-2} 微分同胚的一组球面。我们将 $C'_3[I]$ 简化画成一个简单的四面体 Δ^3。观察示意图可以看到，Δ^3 的邻域内有一组不交圆，其中一些相互链接，另一些则没有。与图12和图14一样，这些示意图采用“积形式”，也就是说，这些球面具有 $D^{n-3} \times S^1 \cup S^{n-4} \times D^2$，的形式，其中圆和 D^2 因子位于 Δ^3 的邻域内，而 D^{n-3} 因子来自我们所用族参数化中的一个因子。因此，图中只描绘了球面的 $\{0\} \times S^1$ 部分；不过幸运的是，双重点恰恰出现在这里。

上述类型的几何出现在标准链接对的研究中。虽然这只是一个初等的几何观察，但第一作者是从 Haefliger [10]那里了解到这一现象的。例如，若我们取一个标准链接对于 S^{n-1} 中，满足$i + j = n$，即

$$S^{n-1} \equiv \partial D^n \equiv \partial(D^i \times D^j) = S^{i-1} \times D^j \cup D^i \times S^{j-1}$$

we 还可以进一步将$D^n \times \{0\}$ 看作D^{n+1}中的赤道，从而得到

$$S^n \equiv \partial D^{n+1} \equiv S^i \times D^j \cup D^{i+1} \times S^{j-1} \text{ or } S^{i-1} \times D^{j+1} \cup D^i \times S^j.$$

也就是说，可以将(S^{i-1}, S^{j-1}) 中的标准链接对看作S^{n-1} 中某个(S^i, S^{j-1})标准链接对中的赤道部分；反之亦然，即看作S^n中某个(S^{i-1}, S^j) 标准链接对中的赤道部分。这是归纳悬挂过程中的一个步骤，该过程可以从S^1中的(S^0, S^0) 形式的链接对出发，生成所有球面的标准链接对。

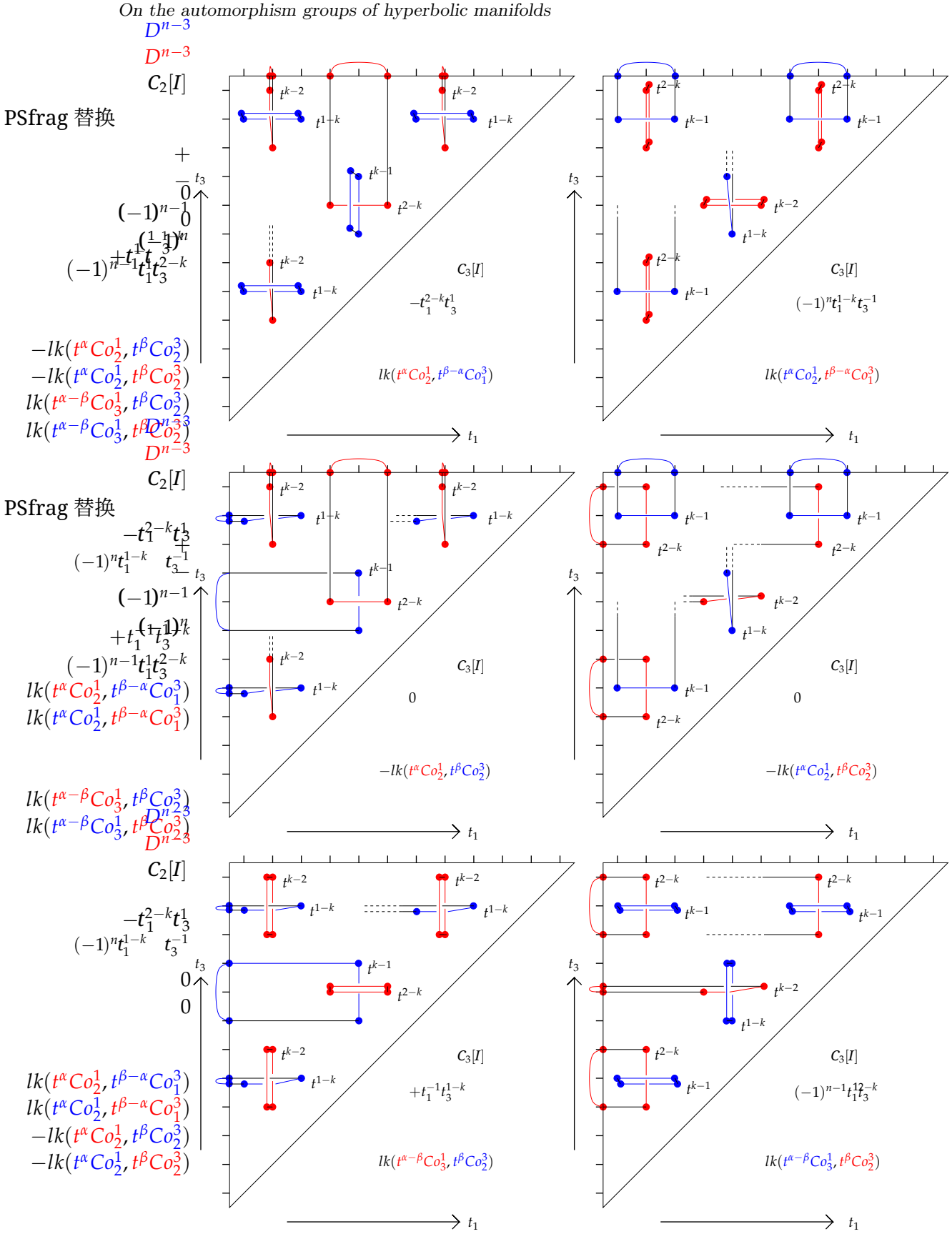


图 16 preprint -2 $^{n-3}\times$ $^{n-3}\times$ $'_3[\ ]$：前k个绿色点对应的共水平流形，位于DDCI

图16和图17展示了形如(S^{n-2},S^{n-2}) 的标准链接对。我们从 Δ^3 中不相交链接圆的基例开始逐步归纳：对于一个圆，使用 $D^{n-3}\times\{0\}$ 因子将其悬挂上去；对于另一个圆，则使用 $\{0\}\times D^{n-3}$ 因子将其悬挂上去。

在图16中，我们根据点被映射到哪个袖口（以颜色区分）以及相关余水平流形的平移，将余水平流形拆分为各个组成部分。在图16的左上部分（$\mathrm{lk}(t^{\alpha}\mathrm{Co}_2^1, t^{\beta-\alpha}\mathrm{Co}_1^3)$）中，只有一个链接对，其单项式为 $t_1^{2-k}t_3^1$。为计算符号，我们统计 $t^{\alpha}\mathrm{Co}_2^1 - t^{\alpha-\beta}\mathrm{Co}_3^1$ 穿过 $t^{\beta-\alpha}\mathrm{Co}_1^3 - t^{\beta}\mathrm{Co}_2^3$ 的带符号上穿次数。经过点 (6, 8, 8)、平行于 t_3 轴的弧的法向定向为 $-t_1\wedge t_2\wedge r_1\wedge\cdots\wedge r_{n-3}$。经过点 (5, 5, 7)、平行于 t_2 轴的弧的法向定向为 $(-1)^{n-1}t_1\wedge t_3\wedge b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-3}$。对图16的全部六个子图重复这一过程，我们得到前 $k-2$ 个绿色点对应的所有这些项之和

$$(k-2)\left(t_1^{-1}t_3^{1-k}+(-1)^n t_1^{1-k}t_3^{-1}-t_1^{2-k}t_3^1+(-1)^{n-1}t_1^1t_3^{2-k}\right).$$

对图17重复上述过程，最后一个绿色点对应各项之和为

$$(-1)^{n-1}t_1^{2-k}t_3^{1-k}-t_1^{1-k}t_3^{2-k}-t_1^{2-k}t_3+(-1)^n t_1^{1-k}t_3^{-1}+(-1)^n t_1^{k-1}t_3^1+t_1t_3^{k-1}+t_1^{-1}t_3^{1-k}+(-1)^{n-1}t_1t_3^{2-k}.$$

将此结果与前$k-2$ 个绿色点的结果合并，可得

$$W_3(\delta_k)=(k-1)\left(t_1^{-1}t_3^{1-k}+(-1)^n t_1^{1-k}t_3^{-1}-t_1^{2-k}t_3^1+(-1)^{n-1}t_1t_3^{2-k}\right)+$$

$$t_1t_3^{k-1}+(-1)^n t_1^{k-1}t_3-t_1^{1-k}t_3^{2-k}+(-1)^{n-1}t_1^{2-k}t_3^{1-k}$$

至此，定理3.1的证明完成。

回顾六边形关系。

$$\begin{aligned}
t_1^{\alpha}t_3^{\beta}+(-1)^n t_1^{-\beta}t_3^{-\alpha} &= t_1^{\alpha-\beta}t_3^{\alpha}+(-1)^n t_1^{-\alpha}t_3^{\beta-\alpha} && (1)\\
&= t_1^{-\beta}t_3^{\alpha-\beta}+(-1)^n t_1^{\beta-\alpha}t_3^{\beta} && (2)\\
&= t_1^{-\alpha}t_3^{-\beta}+(-1)^n t_1^{\beta}t_3^{\alpha} && (3)\\
&= t_1^{\beta-\alpha}t_3^{-\alpha}+(-1)^n t_1^{\alpha}t_3^{\alpha-\beta} && (4)\\
&= t_1^{\beta}t_3^{\beta-\alpha}+(-1)^n t_1^{\alpha-\beta}t_3^{-\beta} && (5)
\end{aligned}$$

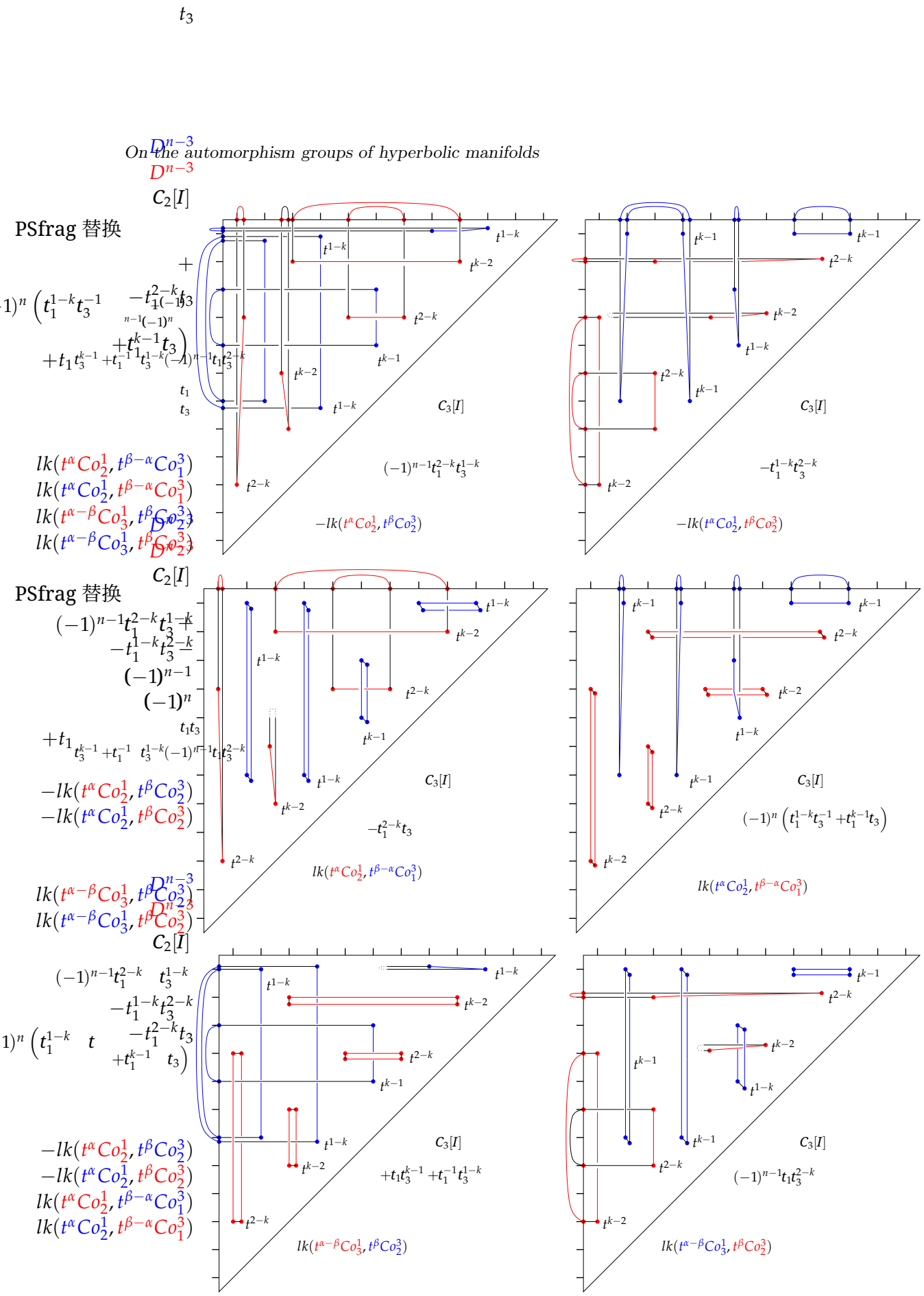


图17：最后一个绿色点对应的共水平流形，位于 $D^{n-3}\times D^{n-3}\times C_3'[I]$

将$k = 3$代入上述$W_3(\delta_3)$公式，得到

$$W_3(\delta_3) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ even} \\ 4t_1^{-2}t_3^{-1} + 4t_1^{-1}t_3^{-2} - 2t_1^{-1}t_3 - 2t_1t_3^{-1} & \text{if } n \text{ odd.} \end{cases}$$

4 $S^1 \times$与D^{n-1}的同胚

本节给出定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明： 我们给出一个论证，说明W_3不变量的一个商可以由 π_{n-4}同胚群$(S^1 \times D^{n-1})$定义。这足以证明，对于所有$n \geq 4$， π_{n-4}同胚群$(S^1 \times D^{n-1})$不是有限生成的。

令 $\mathrm{Emb}^\tau(I, S^1 \times D^{n-1})$ 表示$I = [0,1]$到$S^1 \times D^{n-1}$的拓扑嵌入空间。我们要求这些嵌入将 0 映到$(1, -*)$，并将 1 映到$(1, *)$，其中 $* \in \partial D^{n-1}$ 是选定的基点。类似地，我们要求嵌入将I 的内部映到$S^1 \times D^{n-1}$的内部。最后这个条件不影响该空间的同伦类型，但确实能让一些技术性论证更易读。我们赋予这个嵌入空间紧开拓扑。

我们用 Δ^k 表示标准单形，

$$\Delta^k = \{(t_1, t_2, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \leq 1\}.$$

一个拓扑嵌入空间$f: I \to X$诱导出一个映射

$$f_* : \Delta^k \to (S^1 \times D^{n-1})^k$$

定义为 $\mathrm{f}_*(\mathrm{t}1, \cdots, \mathrm{t}_k) = (\mathrm{f}(\mathrm{t}_1), \cdots, \mathrm{f}(\mathrm{t}_k))$。我们列出其性质。给定集合 $\mathrm{A} = \{\mathrm{i}1, \cdots, \mathrm{i}_j\} \subset \{1, 2, \cdots, \mathrm{k}\}$，$\mathrm{X}^k$ 的 A-对角线表示 X^k 中满足 $\mathrm{x}^{i_1} = \mathrm{x}^{i_2} = \cdots = \mathrm{x}^{i_j}$ 的子空间。将 Δ^k 中满足 $\mathrm{t}_1 = 0$ 的子空间称为 Δ^k 的初始面，将满足 $\mathrm{t}_k = 1$ 的子空间称为 Δ^k 的终止面。对于 $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})^k$ 中满足 $\mathrm{p}_1 = (1, -*)$ 的子集，我们称其为初始面，而将 $\mathrm{p}_k = (1, *)$ 称为 $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})^k$ 的终止面。

(a) 诱导映射 f_*将 A-对角线映射为 A-对角线，而且 A-对角线的原像也是 A-对角线。(b) f_* 将 Δ^k 的初始面映射为 $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})^k$ 的初始面，终止面也同样如此。(c) 若将 f_* 提升为万有覆盖 $\Delta^k \to (\mathbb{R}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})^k$ 之间的映射，则当且仅当两个覆盖变换相同，像中点的两个覆盖变换才相同；也就是说，$\mathrm{p}_i = \mathrm{t}.\mathrm{p}^j$ 成立，当且仅当 $\mathrm{t} = 0 \in \pi_1(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^{n-1})^k$ 且 $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}^j$。

给定一个流形 M，定义

$$C_k^\tau(M) = \{(p_1, \cdots, p_k) \in \tilde{M}^k : p_i \notin (\pi_1 M \setminus \{0\}).p_j \ \forall i, j\}$$

其中 $\tilde{M}$ 是M的万有覆盖。这个定义可以理解为：任意两个列出的点p_i、$p_j \in \tilde{M}$，要么具有不相交的 $\pi_1 M$-轨道，要么在轨道相交时有$p_i = p^j$。我们称k 个点在M的万有覆盖中的$C_k^\tau(M)$ 为主构形空间。

因此，上文的 (c) 项说明，f_* 的提升 $\Delta^k \to (S^1 \times D^{n-1})^k$ 到万有覆盖后，是一个具有如下形式的映射：$\Delta^k \to C_k^\tau(S^1 \times D^{n-1})$。应将 (a) 和 (b) 项视为相对映射空间条件。

作为一个空间，$C_k^\tau(M)$ 是将 M 的万有覆盖与 $\{i, j\}$- 对角线并合所得的轨道构形空间；也就是说，将 $C_k^\tau(M)$ 视为 $(\tilde{M})^k$ 的子空间时，它是 $C_k(\tilde{M})$ 与所有 $i \neq j$ 的 $\{i, j\}$- 对角线的并。参见例如 Fred Cohen 关于轨道构形空间的研究 [4]。就我们的目的而言，我们需要了解 $\pi_{2n-1}\tilde{C}_2^\tau(S^1 \times D^{n-1})$ 以及足够多的 $\pi_{2n-3}\tilde{C}_3(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q}$，下一条命题将阐述这一内容。

命题 4.1 同伦群 $\pi_{n-1}\tilde{C}_2(S^1 \times D^{n-1})$ 由元素 $t_2^a w_{12}$ 自由生成，其中带有一个 $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。

映射的核

$$\pi_{2n-3}\tilde{C}_3(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_{2n-3}C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q}$$

与形如 $[t_j^a w^{ij}、t_j^b w_{jk}]$ 的元素所张成的 $\mathbb{Q}$ 子空间平凡相交，其中 $a、b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，$a \neq b$ 且$\{i、j、k\} = \{1, 2, 3\}$。

证明 关于 $\pi_{n-1}\tilde{C}_2(S^1 \times D^{n-1})$，遗忘映射 $\tilde{C}_2(S^1 \times D^{n-1}) \to \mathbb{R} \times D^{n-1}$ 是一个局部平凡纤维丛，其纤维与去掉点的非平凡覆盖平移后所得的补空间微分同胚；该补空间的同伦类型是球面的楔和，其中维数为$(n-1)$ 的生成元是我们的 $t_2^a w_{12}$ 类，且 $a \neq 0$。

关于 $\pi_{2n-1}\tilde{C}_2(S^1 \times D^{n-1})$，我们通过包含映射 $C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1}) \to (\mathbb{R} \times D^{n-1})^3$，将共线流形 $\mathrm{Col}^1_{\alpha,\beta}$ 和 $\mathrm{Col}^3_{\alpha,\beta}$ 视为 $C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1})$ 的子集。当 $\alpha \neq 0 \neq \beta$ 和 $\alpha \neq \beta$ 时，流形 $\mathrm{Col}^1_{\alpha,\beta}$ 和 $\mathrm{Col}^3_{\alpha,\beta}$ 在 $C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1})$ 中不相交且闭。

通过映射 $[t_2^a w_{12}, t_2^b w_{23}]$ 拉回 $\mathrm{Col}^1_{\alpha,\beta}$ 和 $\mathrm{Col}^3_{\alpha,\beta}$ 这一对，若 $\alpha = -a$ 和 $\beta = -b$，则得到链接数为 ± 1 的不交定向流形对；否则得到零。因此，当 $a \neq b$ 且 $a \neq 0 \neq b$ 时，形如 $[t_2^a w_{12}, t_2^b w_{23}]$ 的括号在 $\pi_{2n-3}C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q}$ 中线性无关。

□

在光滑范畴中，给定 $S^1 \times D^{n-1}$ 的一个微分同胚，我们考虑圆盘 $\{1\} \times D^{n-1}$ 的诱导扫描映射，由此得到 $\Omega^{n-2}\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1})$ 中的一个元素。对于同胚，我们沿用相同的思路，使用映射 $\mathrm{Homeo}(S^1 \times D^{n-1}) \to \Omega^{n-2}\mathrm{Emb}^\tau(I, S^1 \times D^{n-1})$。

在光滑情形中，第二阶段上的诱导映射是挠元。在拓扑情形中，我们将“第二阶段”取为该映射

$$\mathrm{Emb}^\tau(I, S^1 \times D^{n-1}) \to \mathrm{Map}(\Delta^2, C_2^\tau(S^1 \times D^{n-1}))$$

满足相应的边界条件；也就是说，如条件 (a) 和 (b) 所述，这是一个保层映射空间。注意，遗忘映射 $C_k^\tau(S^1 \times D^{n-1}) \to C_{k-1}^\tau(S^1 \times D^{n-1})$ 通常不是纤维化，但在$k = 2$ 的情况下是纤维化，其纤维具有 $\mathbb{R} \times D^{n-1} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 的同伦类型。p 其中$p \in int(\mathbb{R} \times D^{n-1})$，也就是说，它具有一个

球面的楔和。因此，给定 π_{n-4}同胚群$(S^1 \times D^{n-1})$ 中的一个元素，其诱导的第二阶段元素是如下形式的分层保持映射

$$S^{n-4} \times D^{n-2} \times \Delta^2 \to C_2^\tau(S^1 \times D^{n-1}).$$

将此映射限制在 Δ^2 的边界面上，会典范地得到零伦映射，因此我们可以将上述映射封闭起来，构造映射 $S^{2n-4} \to C_2^\tau(S^1 \times D^{n-1})$。鉴于当 $n \geq 4$ 时，$\pi_{2n-4}S^{n-1}$ 是挠元，我们的映射也是挠元。与光滑情形一样， 3rd 阶映射的某个倍数

$$S^{n-4} \times D^{n-2} \times \Delta^3 \to C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1})$$

在边界上为零。我们将附加一个选定的零伦；与光滑情形一样，诱导出的元素

$$\pi_{2n-3}C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1})$$

在一个子群 R' 中产生的误差项意义下是良定义的。子群 R' 是R 在遗忘映射所诱导的映射下的像

$$\pi_{2n-3}C_3(S^1 \times D^{n-1}) \to \pi_{2n-3}C^\tau(S^1 \times D^{n-1}).$$

因此我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-4}\mathrm{Diff}(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{W_3} & \pi_{2n-3}C_3(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q}/R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n-4}\mathrm{Homeo}(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{W_3'} & \pi_{2n-3}C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q}/R' \end{array}.$$

根据命题 4.1，我们的元素 δ_k 满足

$$W_3'(\delta_k) = (k-1)\left(t_1^{-1}t_3^{1-k} + (-1)^n t_1^{1-k}t_3^{-1} - t_1^{2-k}t_3^1 + (-1)^{n-1}t_1t_3^{2-k}\right) +$$
$$t_1t_3^{k-1} + (-1)^n t_1^{k-1}t_3 - t_1^{1-k}t_3^{2-k} + (-1)^{n-1}t_1^{2-k}t_3^{1-k}$$

当 $k \geq 4$ 时，这些元素非平凡且线性无关。关键观察是，这些元素属于六边形的二面体群的 12 元轨道，而根据命题 4.1，这些轨道不属于映射 $\pi_{2n-3}\tilde{C}_3(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_{2n-3}C_3^\tau(S^1 \times D^{n-1}) \otimes \mathbb{Q}/R'$ 的核，从而完成定理 1.1 的证明。 □

Sander Kupers 告知我们，还可以进一步证明，映射 $\pi_{2n-6}\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1}) \to \pi_{2n-6}\mathrm{Emb}^\tau(I, S^1 \times D^{n-1})$ 的核是包含映射 $\pi_{2n-6}\mathrm{Emb}(I, D^n) \to \pi_{2n-6}\mathrm{Emb}(I, S^1 \times D^{n-1})$ 的像。这个子群由与 $\{-1\} \times D^{n-1}$ 不相交的嵌入构成。这一结果（尚未发表）将为定理 1.1 提供另一种证明。利用光滑化理论 [15], 也可以在维数 $n = 4$、5 和 7 以外证明定理 1.1。更一般地，已知只要 $\pi_1 M$ 有限且 M 的维数为偶数并且不等于 4 [3], B(Homeo(M)) 和 B(Diff(M)) 的同伦群就是有限生成的。

5 完备有限体积双曲流形的自同构

Farrell和Jones [6] 证明，若N 是维数大于或等于 11 的紧双曲流形，则 π_0Diff(N) 和 π_0 Homeo(N) 都不是有限生成的。特别是，Diff(N) 和 Homeo(N) 不具有紧流形的同伦类型。本节旨在将 11 降至 4。已知 [8], ，完全有限体积双曲 3-流形的微分同胚群具有与其等距变换群相同的同伦类型，即具有离散有限集的同伦类型。因此，本节的结果是最优的。虽然引言中对双曲 3-流形的 Smale猜想是针对闭流形陈述的，但根据 [8] 的引理 7.2 和定理 7.3，该猜想也适用于完备流形。

Farrell和Jones的证明受到两个重要维数限制的制约：1）我们尚不清楚伪同痕稳定性的最优范围。事实上，我们仍依赖Igusa [13]的初始结果。2）Farrell和Jones也依赖Hatcher和Wagoner [12]的工作，而这项工作始于维数6。

虽然Farrell和Jones计算了N 在光滑情形和拓扑情形下的映射类群，但我们将范围限定为 π_{n-4}微分同胚群(N) 和 π_{n-4}同胚群(N)。在未来的一篇论文中 [2] ，我们计划将这些论证扩展到映射类群的层面。

定理5。 **1** 若N是一个维数为n的完备有限体积双曲流形 ≥ 4 ，则两者 h

$$\pi_{n-4}\mathrm{Diff}(N) \textit{ and } \pi_{n-4}\mathrm{Homeo}(N)$$

都不是有限生成的。

证明 当 n $=4$ 且 N 可定向时，我们给出证明。在嵌入闭测地线 γ 的邻域 N(γ) 中植入哑铃 δ_k ，得到微分同胚 $\mathrm{f}_k \in \in \mathrm{Diff}_0$(N)。令 $\hat{}\mathrm{f}_k$ 为 f_k 在覆盖空间 $\hat{}\mathrm{N}\gamma$ 上的提升；该覆盖空间对应于由 γ 生成的 π_1N 的子群。这个覆盖空间有一个典范紧化 Nγ，例如可利用测地线周围的正规坐标构造。或者，将 Nγ 视为 $\mathbb{Z}$ S^3_∞ 关于与 γ 对应的双曲型元素的 $\mathbb{H}^4$ ∪商。我们将 Nγ 与 $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{D}^3$ 认同。由于 f_k 通过紧支同伦与恒等映射同伦，$\hat{}$N 中各点的移动距离均有统一上界。因此，$\hat{}\mathrm{f}_k$可延拓为同胚 f *k，使得 $\mathrm{f}_k^*|\partial\mathrm{N}\gamma = \mathrm{id}$。

现在， γ 在 $\hat{}$N 中的原像由一条测地线 $\hat{}\gamma$ （它以 1-1 的方式映到 γ ）以及无穷多条其他测地线组成，后者以 ∞ 对 1 的方式映射。根据 [1] 或利用命题 2.5 可知，若 γ_i 是这样一条提升，则 $\hat{}\mathrm{f}_k|$ N(γ_i) 同痕于 id，且该同痕移动点的距离一致有界，与 i 无关。这里，N(γ_i) 是 N(γ) 的相应提升。关键在于， δ_k 在提升到某个有限层覆盖后是同痕平凡的。因此，通过对 f_k^*进行一个移动点的双曲距离一致有界的同痕，我们可以假设 $\mathrm{f}_k^*|\mathrm{N}\gamma$ 支撑于 N($\hat{}\gamma$) 中；这里我们滥用记号，将经过同痕变形的映射称为 f *k。也就是说，f_k^*是沿 Nγ 的核心测地线邻域进行的标准 δ_k 植入。

最后，将我们的W_3'-不变量应用于所得的f^{*k}在$S^1 \times D^3$上的同胚，从而得出f_k's、$k \geq 4$自由生成了 $\pi_0(\mathrm{Diff}_0(N))$的一个无限秩阿贝尔子群。 □

定理 5.1 的证明可以进一步展开，以构造一个同态 $\pi_{n-4}\mathrm{Homeo}(N)\otimes\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的无穷直和，其中 $n>4$时，特别是，对 N 中每条嵌入的可定向测地线，都有一份 $\pi_{2n-3}C_3^\tau(S^1\times D^{n-1})\otimes\mathbb{Q}/R'$。$n=4$ 的情形则有所不同，因为目标群是 N 的双曲等距变换群与 $\mathbb{Q}$的无穷直和之间的半直积。这一结论由莫斯托刚性定理以及闭双曲流形等距变换群的有限性得出。构造该同态的思路是，找出一组由无穷多条互不相同的嵌入测地线组成的集合γ_i，并考虑通过将δ_k 植入 $N(\gamma_i)$而得到的微分同胚 $f_{i,k}$。同样，只要 $k\geq 4$，这些微分同胚就生成 $\pi_0(\mathrm{Diff}_0(N))$ 的一个自由阿贝尔子群。关键在于，提升到 $\hat{N}_{\gamma_i}$ 时，每个 γ_j 的所有原像（$j\neq i$）都是非紧的，因此延拓到 N_{γ_i} 时，只有满足 $j=i$ 的 $f_{j,k}$'s 在同痕意义下仍然存在，且它们可由 W_3'区分。也就是说，我们对 $\pi_{n-4}\mathrm{Homeo}(N)\otimes\mathbb{Q}$的不变量将是 $W_3'(f_{i,k})$，位于与 γ_i对应的直和项中。

参考文献

[1] R. Budney & D. Gabai, 《S^4，中打结的 3-球》，[arXiv:1912.09029].[2] R. Budney & D. Gabai, 《扫描微分同胚》，在准备中。[3] M. Bustamante, M. Krannich, A. Kupers, 《有限基本群流形自同构空间的有限性性质》。《数学年刊》（即将刊出）。[4] F. Cohen, T. Kohno, M. Xicoténcatl, 《与 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的离散子群相关联的轨道构形空间》。《纯粹与应用代数杂志》213（2009），第 12 期。[5] M. Dehn, 《映射类群：曲面上的算术域》。《数学学报》69（1938）：135–206。[6] F.T. Farrell, L.E. Jones, 《莫斯托刚性定理的拓扑类比》，《美国数学会杂志》，1989年4月，第2卷，第2期，第257–370页。[7] D. Gabai, 《自指圆盘与灯泡引理》，《瑞士数学评论》96（2021），483–513。[8] D. Gabai, 《双曲 3-流形的 Smale猜想：等距同构群(M^3) $\simeq$ 微分同胚群(M^3)》，《微分几何杂志》58（1）：113–149。2001年5月。[9] A. Gramain, 《紧致曲面微分同胚群的同伦类型》，《高等师范学校科学年刊》6(4)（1973）53–66。[10] A. Haefliger, 《可微链环》，《拓扑学》第1卷，第241–244页（1962）。[11] A. Hatcher, 《Smale猜想的一个证明：微分同胚群(S^3) $\simeq$ O(4)》，《数学年刊》117（1983）。[12] A. Hatcher, 《伪同痕的第二个障碍》，《星丛》第6卷（1973），第二部分。[13] K. Igusa, 《光滑伪同痕的稳定性定理》，K-理论 2（1-2）（1988）1–355。[14] R. Koytcheff, 《图形、球面的同伦群以及链环与纽结空间》，预印本。arXiv: 2205.00635。[15] A. Kupers, 《流形自同构群的一些有限性结果》。《几何与拓扑》（即将刊出）。[16] R. Palais, 《延拓微分同胚》，《美国数学会会刊》11（1960），274–277。[17] M. Polyak, 《计数几何与有限型不变量》，报告（2008）。[18] D. Sinha, 《构形空间的流形论紧化》，《数学精选》（新系列）10（2004），第3期，391–428。[19] T. Watanabe, 《Diff(D^4) 有理同伦中的一些奇异非平凡元素》，arXiv 预印本（2018）。