大型网络中检测小型社区的相变

Jiashun Jin卡内基梅隆大学 jiashun@stat.cmu.edu

ZhengTracy Ke哈佛大学 zke@fas.harvard.edu

Paxton Turner
哈佛大学
paxtonturner@fas.harvard.edu

张安如杜克大学
anru.zhang@duke.edu

arXiv:2303.05024v1 [math.ST] 9 Mar 2023

摘要

如何在大型网络中检测小型社区是一个有趣的问题，团检测是其一个特例。在 Erd˝os-Renyi 背景下，已有研究表明，一种简单的基于次数的 χ^2-检验具有较高的检验功效。利用 Sinkhorn 定理，我们证明， χ^2-检验捕获的信号可能只是一种建模伪象；一旦将 Erd˝os-Renyi 模型替换为更广泛的网络模型，这种信号便可能消失。我们证明，近期提出的 SgnQ 检验更适用于这类情形。该检验在检测规模与整个网络相当的社区时具有最优性，但对于我们所研究的情形——其与上述情形有显著差异且更具挑战性——尚未得到研究。基于度修正块模型（DCBM），我们确定了这一检验问题的相变，这些相变与小型社区的规模以及大小社区中的边密度有关。当小型社区的规模大于 $\sqrt{n}$ 时，SgnQ 检验是最优的，因为它达到了计算下界（CLB），即允许多项式计算时间的方法所能达到的信息下界。当小型社区的规模小于 $\sqrt{n}$ 时，我们确定了 SgnQ 检验具有完全检验功效的参数范围，并对计算下界作出了一些猜想。我们还研究了经典信息下界（LB），并证明在我们关注的范围内，计算下界与经典信息下界之间始终存在差距。

1 引言

考虑一个包含 n 个节点和 K 个社区的无向网络。为方便起见，我们假设 n 很大，且该网络是连通的。我们关注的是检验 $K = 1$ 还是 $K > 1$，以及某些社区的规模是否远小于 n（社区在科学上有意义，但在数学上难以定义；直观而言，它们是节点簇，其“内部”边数多于“跨越”边数（Jin，2015；Zhao 等人，2012））。这个问题是网络全局检验的一个特例，这一主题已受到广泛关注（例如 Jin 等人（2018；2021b））。然而，现有研究聚焦于所谓的平衡情形，即各社区的规模处于同一数量级。我们研究的情形则是严重不平衡的，即某些社区的规模远小于 n（例如 n^ε）。

该问题还将团检测作为一个特例（这是图学习中备受关注的问题（Alon 等人，1998；Ron & Feige，2010））。沿着这一方向，Arias-Castro & Verzelen (2014)；Verzelen & Arias-Castro (2015) 取得了显著进展。具体而言，他们研究了如下检验问题：图是由单参数 Erd˝os-Renyi 模型生成，还是由双参数模型生成；对于任意节点 $1 \le i,\ j \le n$，若它们都属于一个规模较小的植入子集，则两者之间存在边的概率为 b，否则为 a。这些论文的一个重要结论是：只要团大小处于特定范围内，简单的、基于节点次数的 χ^2 检验就是最优的。因此，乍看之下，这个问题似乎已得到优雅的解决，至少在一定程度上如此。

遗憾的是，网络检验领域的近期进展揭示了截然不同的情况： χ^2-检验所捕捉到的信号可能只是建模伪象。一旦我们用一个恰当扩展的模型取代 Arias-Castro

& Verzelen (2014); Verzelen & Arias-Castro (2015) 中的模型，这种信号就可能消失。发生这种情况时， χ^2-检验将在整个参数空间范围内渐近地不具备检验功效。

我们以广为人知的 度修正块模型（*DCBM*）（Karrer & Newman, 2011）来阐释这一思想，尽管它在更广泛的情形下也成立。令 $A \in \mathbb{R}^{n,\ n}$ 为网络邻接矩阵，其中$A(i,\ j)\ \in \{0,1\}$ 表示节点 i 和 $j\ 1 \leq i,\ j \leq n$ 之间是否存在一条边。按照惯例，我们不允许出现自环，因此 A 的对角元素始终为 0。假设网络中有 K 个社区，分别为 $\mathcal{C}_1$、.....、$\mathcal{C}_K$。对于每个节点 i，$1 \leq i \leq n$我们使用参数 θ_i 来刻画度异质性，并使用 π_i 来刻画其隶属关系：当 $i \in \mathcal{C}_k$时， $\pi_i(\ell) = 1$ 若 $\ell = k$ 则为 $\pi_i(\ell) = 0$，否则。对于一个 $K \times K$ 对称且不可约的非负矩阵 P，它刻画社区结构；度修正块模型假设 A 的上三角部分包含相互独立的伯努利随机变量，且满足[1]

$$\mathbb{P}(A(i,j) = 1) = \theta_i \theta_j \pi_i' P \pi_j, \qquad 1 \leq i, j \leq n. \tag{1.1}$$

在实际应用中，我们将 $P(k,\ \ell)$ 解释为社区 k和ℓ之间的基准连接概率。记 $\theta = (\theta_1,\ \theta_2,\ .....,\ \theta_n)'$、$\Pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]'$，以及 $\Theta = \text{diag}(\theta) \equiv \text{diag}(\theta_1,\ \theta_2,\ .....,\ \theta_n)$。引入矩阵 Ω 和 W，使得 Ω $= \Theta\Pi P\Pi'\Theta$ 且 $W = A - \mathbb{E}[A]$。我们可以将 (1.1) 重写为

$$A = \Omega - \text{diag}(\Omega) + W. \tag{1.2}$$

我们称 Ω 为伯努利概率矩阵，并称 W 为噪声矩阵。当同一社区中的 θ_i 相等时，度修正块模型退化为随机块模型（SBM）（Holland 等，1983）。当 $K = 1$ 时，随机块模型退化为 Erd˝os-Renyi 模型，此时 Ω$(i,\ \ j)$ 对所有 $1 \leq i,\ \ j \leq n$ 取相同的值。

我们首先说明，Arias-Castro & Verzelen (2014); Verzelen & Arias-Castro (2015) 中 χ^2-检验所捕捉到的信号为何是一种建模伪象。利用 Sinkhorn 的矩阵缩放定理（Sinkhorn, 1974），可以构造一个具有 $K = 1$、且没有社区结构的零假设下的度校正块模型，以及一个具有 $K \geq 2$、且有明显社区结构的备择度校正块模型，使两个模型具有相同的期望度。因此，我们不认为诸如 χ^2 这样的基于度的检验能够区分二者。我们在第 2.1 节中对这一 Sinkhorn 论证作出精确说明，并在定理 2.3 中展示 χ^2 的失效。

在 Arias-Castro & Verzelen (2014) 的 Erd˝os-Renyi 设定中，零假设有一个参数，而备择假设有两个参数。在这种设定下，我们无法进行度匹配。在这些情况下，朴素的基于度的 χ^2-检验可能具有良好的检验功效，但这归因于他们所选择的模型非常特殊。对于更现实设定中的团检测，我们更倾向于使用度校正块模型这类更广泛的模型；根据上述度匹配论证， χ^2-检验渐近地不具有检验功效。

这促使我们寻找另一种检验。一个候选方法是 Bogerd 等人（2021）的扫描统计量。然而，只有在每次扫描的节点子集非常小时，扫描统计量在计算上才可行。例如，如果每次只扫描有限个节点，那么计算成本为多项式级；我们将这种检验称为经济扫描检验（*EST*）。另一个候选方法可能来自有符号多边形检验系列（Jin 等人，2021b），其中包括作为特殊情形的有符号四边形（SgnQ）。令 $\hat{}\eta = (\mathbf{1}_n A \mathbf{1}_n)^{-1/2} A \mathbf{1}_n$ 和 $\widehat{A} = A - \hat{}\eta\hat{}\eta_\circ$ 定义$\frown\quad\frown\quad\frown\quad\frown Q_n = \sum_{i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4\ (dist)} A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} A_{i_3 i_4} A_{i_4 i_1}$ 其中，简写形式 $(dist)$ 表示对不同的指标求和。SgnQ 检验统计量为

$$\psi_n = \left[Q_n - 2(\|\hat{\eta}\|^2 - 1)^2\right] / \sqrt{8(\|\hat{\eta}\|^2 - 1)^4}. \tag{1.3}$$

SgnQ 在计算上很有吸引力，因为其计算时间为 $O(n^2 \bar{d})$，其中 $\bar{d}$ 是网络的平均度（Jin 等人，2021b）。

此外，Jin 等人（2021b）证明了：(a) 当 $K = 1$（零假设情形）、$\psi_n \to N$（0，1）时，以及 (b) 当 $K > 1$ 且所有社区的规模处于同一数量级时（即平衡备择情形），SgnQ 检验达到了全局检验的经典信息下界（LB），因此是最优的。遗憾的是，我们所研究的情形要复杂得多：我们关注的信号位于一个规模远小于 n 的社区中（例如 n^ε），因此很容易被 Q_n 的噪声项掩盖。即使在简单的备择情形中，也就是只有两个社区（规模分别为 N 和 $(n - N)$），我们仍不清楚：(a) 下界如何随 $N/n \to 0$ 变化，尤其是计算下界（CLB）与经典信息下界（LB）之间是否存在差距；(b) SgnQ 检验在多大程度上达到了 CLB，因而是否为最优。

[1]在本文中，我们用 M' 表示矩阵或向量的转置 M。

1.1 结果与贡献

我们研究度修正块模型（DCBM）中检测小型社区的问题。在本文中，我们特别关注 $K = 2$ 的情形，因为该问题已经呈现出丰富的相变，而且我们认为它体现了常数 $K > 1$ 下的基本行为。令 $N \ll n$ 表示备择假设下这个小型社区的规模。我们的首项贡献分析了 SgnQ 在此问题中的检验功效，推广了 Jin 等人（2021b）关于平衡情形的研究结果。令 $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$。在第 2.2 节中，我们定义总体对应量 $\widetilde{\Omega}$（对应于 $\hat{A}$），并令 $\widetilde{\lambda} = \lambda_1(\widetilde{\Omega})$。我们证明，当 $\lambda_1/\sqrt{\lambda_2} \to \infty$ 时，SgnQ 具有完全检验功效；在随机块模型（SBM）情形下，这可化简为 $N(a-c)/\sqrt{nc} \to \infty$。关于最优性，我们基于低次多项式猜想得到了计算下界（CLB）；这是研究计算下界时的标准方法（例如 Kunisky 等人（2019））。考虑一种情形，其中 $K = 2$，且我们有一个规模为 N 的小型社区。假设社区内外的边概率分别为 a 和 c，其中 $a > c$。量 $(a-c)/\sqrt{c}$ 充当该检测问题的节点级信噪比（*SNR*）。[2] 当 $N \gg \sqrt{n}$ 时，我们发现计算下界完全由 N 和节点级信噪比决定；此外，SgnQ 与计算下界相匹配，且是最优的。当 $N \ll \sqrt{n}$ 时，情况则更为微妙：如果节点级信噪比 $(a-c)/\sqrt{c} \to 0$（弱信号情形），我们证明该问题在计算上是困难的，且下界取决于 N 和节点级信噪比。如果 $(a-c)/\sqrt{c} \gg n^{1/2}$（强信号情形），那么 SgnQ 可以解决该检测问题。在范围 $1 \ll (a-c)/\sqrt{c} \ll n^{1/2}$（中等信号情形）内，计算下界不仅取决于 N 和节点级信噪比，还取决于背景边密度 c。在此区间内，我们根据前述经济扫描检验（EST）的研究，对计算下界提出了猜想。我们的结果总结于图 1，并在第 2.7 节中详细阐述。

我们还得到了经典信息下界（LB），并发现当 $N/n \to 0$ 时，计算下界与 LB 之间存在很大差距。值得注意的是，LB 可由一个（效率低下的）有符号扫描检验达到。在 Jin 等人（2021b）的平衡情形中，SgnQ 检验在所有检验中都是最优的（即使是允许无限计算时间的检验），而且不存在这样的差距。

我们还表明，由于前述度匹配现象，朴素的基于次数的 χ^2 检验在渐近意义下没有检验功效。

我们的统计下界、计算下界，以及基于度匹配的 χ^2 无检验功效这一结论，对所有 $K > 2$ 也都成立，因为任何具有 $K \geq 2$ 的模型都包含 $K = 2$ 作为特例。我们还预计，我们的下界对这些更广泛的模型是紧的，并且我们针对 $K = 2$ 的下界构造

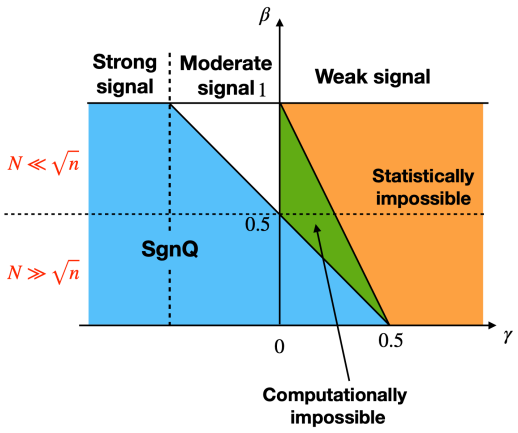

图 1：相图（$(a-c)/\sqrt{c} = n^{-\gamma}$ 和 $N = n^{1-\beta}$）。

代表社区规模严重失衡时最不利的情况。

与 Verzelen & Arias-Castro (2015)；Arias-Castro & Verzelen (2014) 相比，我们在一个更现实的设定下研究网络全局检验，并证明在该设定中最优检验（即朴素的、基于度的 χ^2 检验）在此处可能渐近地没有检验功效。与 Bogerd 等人（2021）相比，我们的设定截然不同（他们考虑的是零假设和备择假设均为度修正块模型且具有 $K = 1$ 的情形）。与平衡情形下的研究（例如 Jin 等人（2018；2021b）；Gao & Lafferty (2017)）相比，我们的研究更具挑战性，原因有二。首先，在平衡情形下，上界（SgnQ 检验给出的上界）与下界之间没有差距，因此无需推导计算下界，而这通常在技术上颇具挑战。其次，较小社区的规模可以小至 n^{ε}，其中 $\varepsilon > 0$ 为任意常数。由于社区规模不平衡，Jin 等人（2021b）的方法不能直接适用。因此，我们的证明需要仔细研究构成 SgnQ 的 256 项，并采用专门针对严重不平衡情形的界。

[2] 请注意，节点级信噪比反映了 Bernoulli(a) 与 Bernoulli(c) 的均值差和标准差之比，这也解释了我们采用该术语的原因。

我们对计算下界的研究与 Hajek 等人 (2015) 在 Arias-Castro & Verzelen (2014) 的 Erd¨os-Renyi 设定下的研究有关。Hajek 等人 (2015) 通过计算归约证明，朴素的 χ^2 检验是最优的多项式时间检验（以植入团假设为条件）。我们还注意到 Chen 和 Xu (2016) 的研究，他们考察了 Arias-Castro & Verzelen (2014)；Verzelen & Arias-Castro (2015) 的 Erd¨os-Renyi 模型的一种 K-簇推广，并提出了关于计算下界的猜想。与我们的设定相比，这些模型截然不同，因为零假设和备择假设下的期望度分布存在显著差异。在这项工作中，我们考虑度修正块模型；由于零假设与备择假设之间存在微妙的度匹配现象，计算下界和下界都不同于 Hajek 等人 (2015) 得到的结果。

记号： 我们用 $\mathbf{1}_n$ 表示一个 n 维全 1 向量。对于向量 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$，diag($\theta$) 是一个对角矩阵，其第 i 个对角元素为 θ_i。对于矩阵 $\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$，diag($\Omega$) 是一个对角矩阵，其第 i 个对角元素为 $\Omega(i,i)$。对于向量 $\theta \in \mathbb{R}^n$，$\theta_{max} = \max\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ 和 $\theta_{min} = \min\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$。对于两个正序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，若 $c_1 \le a_n/b_n \le c_2$ 对常数 $c_2 > c_1 > 0$ 成立，我们记作 $a_n \asymp b_n$。若 $(a_n/b_n) = 1+o(1)$，则称 $a_n \sim b_n$。

2 主要结果

在第 2.1 节中，继第 1 节对 Sinkhorn 定理的讨论之后，我们介绍适用于严重不平衡度修正块模型（DCBM）的校准条件（包括可识别性和平衡性条件），并通过一些示例加以说明。在第 2.2–2.3 节中，我们分析 SgnQ 检验的检验功效，并将其与 χ^2-检验进行比较。在第 2.4–2.5 节中，我们讨论信息论下界（包括下界 LB 和计算下界 CLB），并证明当 $N \gg \sqrt{n}$ 时，SgnQ 检验在多项式时间检验中是最优的。在第 2.6 节中，我们研究 EST，并对当 $N \ll \sqrt{n}$ 时 CLB 作出一些猜想。在第 2.7 节中，我们总结结果并展示相变。

2.1 严重不平衡网络的度修正块模型：可识别性、平衡性度量与全局检验

在度修正块模型（1.1）–（1.2）中，$\Omega = \Theta\Pi P\Pi'\Theta$。已知矩阵 (Θ, Π, P) 不可识别。一个问题是 (Π, P) 仅在置换意义下唯一：对于一个 $K \times K$ 置换矩阵 Q,$\Pi P\Pi = (\Pi Q)(Q'PQ)(\Pi Q)'$。在应用中，这个问题很容易解决，因此通常会被忽略。更大的问题是，(Θ, P) 并非唯一定义。例如，固定一个正对角矩阵$D \in \mathbb{R}^{K\times K}$，令 $P^* = DPD$ 和 $\Theta^* = \mathrm{diag}(\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_n^*)$，其中 $\theta_i^* = \theta_i / \sqrt{D(k,k)}$ 若 $i \in \mathcal{C}_k$,$1 \le k \le K$。可见 $\Theta\Pi P\Pi'\Theta = \Theta^*\Pi P^*\Pi'\Theta^*$，因此 (Θ, P) 并非唯一定义。

为阐明我们的可识别性条件，我们将引言中讨论的度匹配论证形式化。固定 (θ, P)，令 $h = (h_1, \ldots, h_K)'$，且 $h_k > 0$ 是社区k, $1 \le k \le K$ 中节点所占的比例。根据 Sinkhorn（1974）的主要结果，存在唯一的正对角矩阵$D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_K)$，使得 $DPDh = \mathbf{1}_K$。考虑一对度修正块模型（DCBM）：一个具有 $K = 1$ 的零假设，以及一个具有 $K > 1$ 的备择假设，其参数分别为 $\Omega = \Theta\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\Theta \equiv \theta\theta'$ 和 $\Omega^*(i,j) = \theta_i^*\theta_j^*\pi_i'P\pi_j$，其中 $\theta_i^* = d_k\theta_i$ 在 $i \in \mathcal{C}_k$, $1 \le k \le K$ 时分别成立。直接计算可知，节点 i 在零假设和备择假设下具有相同的期望度。

有许多方法可以解决这个问题。例如，在平衡情形下（如 Jin 等人（2021b；2022）），我们可以通过要求 P 具有单位对角线来解决。然而，对于我们的情形，这并不合适。回想一下，在实践中，$P(k, \ell)$表示社区 k 与 ℓ之间的基准连接概率。如果我们在此处强行将 P 重新缩放为具有单位对角线，那么 (P, Θ)都会失去其实际意义。

受度匹配论证的启发，我们提出了一个更适用于严重不平衡度修正块模型（DCBM）的可识别性条件。根据我们在第 1 节中的讨论，对于任意具有伯努利概率矩阵 Ω 的 DCBM，我们总可以利用 Sinkhorn 定理来定义 (Θ, P)（而 Π 保持不变），使得对于新的 (Θ, P)，$\Theta = \Theta\Pi P\Pi'\Theta$ 和 $Ph \propto \mathbf{1}_K$，其中 $h = (h_1, \ldots, h_K)'$，且 $h_k > 0$ 是社区 k中节点所占的比例，$1 \le k \le K$。这启发我们提出以下可识别性条件（它更适用于我们的情形）：

$$\|\theta\|_1 = n, \qquad Ph \propto \mathbf{1}_K, \text{ 其中 } h_k \text{ 是 } \mathcal{C}_k \text{ 中节点的比例}, \quad 1 \le k \le K. \tag{2.1}$$

引理 2.1. 对于任意满足 *DCBM (1.2)* 且对角元素为正的 Ω，总能找到(Θ, Π, P)使得 $\Omega = \Theta\Pi P\Pi'\Theta$，并且 *(2.1)* 成立。此外，任何满足$\Omega = \Theta\Pi P\Pi'\Theta$ 和 *(2.1)* 的(Θ, P)都是唯一的。

此外，对于网络平衡性，$\mathbb{R}^K$ 中的以下两个向量是自然的度量：

$$d = (\|\theta\|_1)^{-1}\Pi'\Theta\mathbf{1}_n, \qquad g = (\|\theta\|)^{-2}\Pi'\Theta^2\Pi\mathbf{1}_K, \tag{2.2}$$

在平衡情形下（例如 Jin 等人（2021b；2022）），我们通常假设 d 和 g 的数量级相同。对于我们的设定，情况并非如此。

接下来，我们介绍所考虑的零假设和备择假设。在每个假设下，我们都施加可识别性条件（2.1）。

度修正块模型（DCBM）的一般零假设模型。当 $K = 1$ 和 $h = 1$ 时，P 是标量（例如 $P = \alpha$），且 $\Omega = \alpha\theta\theta'$ 满足式（2.1）中的 $\|\theta\|_1 = n$。在温和条件下，期望总度为 $\alpha(\|\theta\|_1^2 - \|\theta\|^2) \sim \alpha\|\theta\|_1^2 = n^2\alpha$，因此我们将 α 视为网络稀疏性参数。在此模型中，$d = g = 1$。

度修正块模型的备择模型。我们假设 $K = 2$，且两个社区$\mathcal{C}_0$和 $\mathcal{C}_1$的规模分别为$(n - N)$和 N。对于某些正数 a，b，c，有

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \qquad \text{and} \qquad \Omega(i,j) = \begin{cases} \theta_i\theta_j \cdot a, & \text{if } i,j \in \mathcal{C}_1, \\ \theta_i\theta_j \cdot c, & \text{if } i,j \in \mathcal{C}_0, \\ \theta_i\theta_j \cdot b, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.3}$$

在经典的团检测问题中（例如，Bogerd 等人（2021）），a 和 c 是基准概率，即两个节点都在团内和团外时，它们之间存在边的概率。根据 (2.1)，若记 $\epsilon = N/n$，则 $a\epsilon + b(1-\epsilon) = b\epsilon + c(1-\epsilon)$。因此，

$$b = (c(n - N) - aN)/(n - 2N). \tag{2.4}$$

注意，这只是 Sinkhorn 定理和我们所选参数校准的直接结果，而非出于技术便利而选取的条件。记 $d = (d_0,\ d_1)'$ 和 $g = (g_0,\ g_1)'$。可见 $d_0 = 1 - d_1$、$g_0 = 1 - g_0$、$d_1 = \|\theta\|_1^{-1}\sum_{i\in\mathcal{C}_1}\theta_i$和 $g_1 = \|\theta\|^{-2}\sum_{i\in\mathcal{C}_1}\theta_i^2$。如果所有 θ_i 的量级相同，那么 $d_1 \asymp g_1 \asymp (N/n)$且 $d_0 \sim g_0 \sim 1$。我们还注意到 $b = c + O(a\epsilon)$，这使得该问题看起来与 Arias-Castro & Verzelen (2014) 和 Bogerd 等人（2021）的工作非常相近，尽管事实上这些问题大不相同。

扩展。我们对备择假设作如下扩展：对于这 K 个社区，其中 m 个社区的规模为 N 量级，其中 $N \ll n$ 为一个整数，且 $m, 1 \le m < K$；其余 $K - m$ 个社区的规模为 n 量级。在这种情况下，d 的 m 个元素为 $O(N/n)$，其余元素为 $O(1)$；g 也同样如此。

2.2 SGNQ 检验：极限零分布、p 值与检验功效

在零假设情形下，$K = 1$，并假设 $\Omega = \alpha\theta\theta'$，其中 $\|\theta\|_1 = n$。当 $n \to \infty$ 时，$(\alpha,\ \theta)$ 都可能随 n 变化。记作 $\theta_{\max} = \|\theta\|_\infty$。我们假设

$$n\alpha \to \infty, \qquad \text{and} \qquad \alpha\theta_{\max}^2 \log(n^2\alpha) \to 0. \tag{2.5}$$

以下定理改编自 Jin 等人（2021b），证明从略。

定理 2.1（SgnQ 统计量的极限零分布）。假设零假设成立，且正则性条件 *(2.1)* 和 *(2.5)* 满足。当 $n \to \infty$, $\psi_n \to N(0,\ 1)$ 时，依分布收敛。

我们有两点评论。首先，由于度修正块模型包含许多参数（即使在零假设情形下也是如此），要找到一个极限零分布完全不依赖参数的检验统计量并非易事。例如，如果我们使用 A 的最大特征值作为检验统计量，就难以确定如何对其进行标准化，才能得到这样的极限零分布。其次，由于极限零分布完全明确，我们可以通过 $\mathbb{P}(N(0,\ 1) \ge \psi_n)$ 近似计算 ψ_n 的（单侧）p 值。正如数值实验所示，p 值在实践中很有用。例如，利用一份近期的统计学家发表作品数据集（Ji 等人，2022），我们可以为每位作者构建一个自我中心网络并应用 SgnQ 检验。随后可以用 p 值来衡量该作者的合著多样性。此外，在许多层次社区检测算法中（这些算法通常采用递归方式，旨在估计社区的树结构），我们可以在算法的每个阶段利用 p 值判断是否应进一步划分某个子社区（例如 Ji 等人（2022））。

The SgnQ 检验的检验功效取决于矩阵 $\widetilde{\Omega} = \Omega - (\mathbf{1}_n'\Omega\mathbf{1}_n)^{-1}\Omega\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\Omega$。通过基本代数，

$$\widetilde{\Omega} = \Theta\Pi\widetilde{P}\Pi'\Theta, \qquad \text{where} \quad \widetilde{P} = P - (d'Pd)^{-1}Pdd'P. \tag{2.6}$$

~ ~令 λ_1 为 Ω 的最大（绝对值最大）特征值。引理 2.2 在补充材料中得到证明。 nt.

引理 2.2。 矩阵 $\widetilde{\Omega}$ 的秩和迹分别为 $(K-1)$ 和 $\|\theta\|^2\mathrm{diag}(\tilde{P})'g$。当$K=2$, $\tilde{\lambda}_1=\mathrm{trace}(\widetilde{\Omega})=\|\theta\|^2(ac-b^2)(d_0^2g_1+d_1^2g_0)/(ad_1^2+2bd_0d_1+cd_0^2)$。

根据这个引理，我们观察到，在随机块模型的情形下，$d=h$ 因此 $\lambda_1=\lambda_2\asymp N(a-c)$。为了直观地理解 SgnQ 检验的检验功效取决于 $\tilde{\lambda}_1^4/\lambda_1^2$，若启发式地将 SgnQ 的各项替换为总体对应项，我们得到

$$Q_n=\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(distinct)}\hat{A}_{i_1i_2}\hat{A}_{i_2i_3}\hat{A}_{i_3i_4}\hat{A}_{i_4i_1}\approx\mathrm{trace}([\Omega-\eta\eta']^4)=\mathrm{trace}(\widetilde{\Omega}^4)=\tilde{\lambda}_1^4.$$

现在我们正式讨论 SgnQ 检验的检验功效。我们聚焦于第 2.1 节中的备择假设。令 $d=(d_1,\ d_0)'$ 和 $g=(g_1,\ g_0)'$ 如式 (2.2) 所示，并令 $\theta_{\max,\ 0}=\max_{i\in\mathcal{C}_0}\theta_i$ 和 $\theta_{\max,\ 1}=\max_{i\in\mathcal{C}_1}\theta_{i\circ}$ 假设

$$d_1\asymp g_1\asymp N/n,\qquad a\theta_{\max,1}^2=O(1),\qquad cn\to\infty,\qquad c\theta_{\max,0}^2\log(n^2c)\to 0. \tag{2.7}$$

这些条件较为宽松。例如，当 θ_i 的量级相同时，(2.7) 中的第一个不等式自动成立，而当 $a\le C$ 时，若 $C>0$ 为绝对常数，$cn\to\infty$ 且 $c\log(n)\to 0$，则 (2.7) 中的其他不等式也成立。

固定 $0<\kappa<1$，令 $z_\kappa>0$ 为满足 $\mathbb{P}(N(0,1)\ge z_\kappa)=\kappa$ 的值。水平为 κ 的 SgnQ 检验当且仅当 $\psi_n\ge z_\kappa$ 时拒绝零假设，其中 ψ_n 与 (1.3) 中相同。定理 2.2 和推论 2.1 在补充材料中得到证明。回顾一下，我们在第 2.1 节中定义了备择假设。这里的检验功效 指拒绝备择假设的概率，并在所有满足正则性条件的可能备择度修正块模型中取最小值。

定理 2.2 （SgnQ 检验的检验功效）。 假设(2.7) 成立，且令 $\kappa\in(0,\ 1)$。在备择假设下，若 $|\tilde{\lambda}_1|/\sqrt{\lambda_1}\to\infty$，水平为 κ 的 *SgnQ* 检验的检验功效趋于1。

推论 2.1。 假设定理 *2.2* 的条件成立，并且另外有 $\theta_{\max}\le C\theta_{\min}$，因此所有 θ_i 都处于同一阶。在此情形下，$\lambda_1\asymp cn$ 且 $|\lambda_1|\asymp N(a-c)$，并且若 $N(a-c)/\sqrt{cn}\to\infty$，水平为 κ 的 *SgnQ* 检验的检验功效趋于 1 。

在定理 2.2 和推论 2.1 中，如果 $\kappa=\kappa_n$ 和 $\kappa_n\to 0$ 趋于零的速度足够慢，那么这些结果仍然成立，且 SgnQ 检验在显著性水平-$\kappa_n\to 0$下的第一类和第二类错误之和.....

SgnQ 检验的检验功效此前仅在平衡情形下得到研究（Jin 等人，2021b），而我们的设定属于严重不平衡情形，其中社区规模以及d 和 g的各项都处于不同的数量级。在平衡情形下，SgnQ 的信噪比由 $|\lambda_2|/\sqrt{\lambda_1}$决定，而在我们的设定中，信噪比由 $|\tilde{\lambda}_1|/\sqrt{\lambda_1}$决定。证明也略有不同。由于 P的各项处于不同的数量级，平衡情形的功效分析中被认为可忽略的许多项，在不平衡情形下可能变得不可忽略，需要仔细分析。

2.3 与朴素的基于次数的 χ^2-检验进行比较

考虑这样一种情形：在零假设下 $\Omega=\alpha\Theta\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\Theta\equiv\alpha\theta\theta'$，在备择假设下 $\Omega=\Theta\Pi P\Pi'\Theta$，且 (2.1) 成立。当 θ 未知时，如何应用 χ^2-检验并不明确：零假设情形有 n 个未知参数 θ_1，.....，θ_n，因此我们需要先利用度数估计 θ_i。结果，得到的 χ^2-统计量可能恒为 0。因此，我们考虑一个更简单的随机块模型情形，其中 $\theta=\mathbf{1}_n$。在这种情形下，$\Omega=\alpha\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n$，且 $\Omega=\Pi P\Pi'$，零假设情形仅有一个未知参数 $\alpha_\circ$ 令 y_i 为节点 i的度数，并令 $\hat{}\alpha=[n(n-1)]^{-1}\mathbf{1}_n'A\mathbf{1}_{n\circ}$ χ^2-统计量为

$$X_n=\sum_{i=1}^n(y_i-n\hat{\alpha})^2/[(n-1)\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})]. \tag{2.8}$$

可以看出，当 $n\alpha\to\infty$和 $\alpha\to 0$时，$(X_n-n)/\sqrt{2n}\to N$依分布收敛于$(0,1)$。对于固定显著性水平 $\kappa\in(0,1)$，考虑这样的 χ^2检验：当且仅当$(X_n-n)/\sqrt{2n}>z_\kappa$时拒绝零假设。令 $\alpha_0=n^{-2}(\mathbf{1}_n'\Omega\mathbf{1}_n)$。该 χ^2 检验的检验功效取决于量$(n\alpha_0)^{-1}\|(\Omega\mathbf{1}_n-n\alpha_0)\|^2=(n\alpha_0)^{-1}\|\Pi Ph-(h'Ph)^{-1}\mathbf{1}_n\|^2=0$，若满足 $Ph\propto\mathbf{1}_{K\circ}$ 下一条定理的证明见补充材料。

定理 2.3。 假设 $\theta=\mathbf{1}_n$ 且 (2.7) 成立。若在备择假设下满足$|\tilde{\lambda}_1|/\sqrt{\lambda_1}\to\infty$，则显著性水平为 κ 的 *SgnQ* 检验的检验功效趋于 1，而显著性水平为 κ χ^2 的检验的检验功效趋于 κ。

2.4 统计下界与扫描检验的最优性

对于下界，通常考虑随机成员度修正块模型（Jin 等人，2021b），其中$\|\theta\|_1 = n$， P与 (2.3)-(2.4) 中相同，且对于某个数 $N \ll n$， $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]'$ 满足

$$\pi_i = (X_i, 1 - X_i), \qquad \text{where } X_i \text{ are iid Bernoulli}(\varepsilon) \text{ with } \varepsilon = N/n. \tag{2.9}$$

定理 2.4 (统计下界)。 考虑第 *2.1* 节中的零假设和备择假设，并假设(2.9)成立， $\theta_{\max} \le C\theta_{\min}$和 $Nc/\log n \to \infty$。若 $\sqrt{N}(a-c)/\sqrt{c} \to 0$，则对于任意检验，第一类错误与第二类错误之和趋于1。

为证明这一统计下界是紧的，我们将 Arias-Castro & Verzelen (2014) 在随机块模型情形下的思路改编到度修正块模型情形，提出有符号扫描检验。与 SgnQ 检验和 χ^2-检验不同，有符号扫描检验并非多项式时间检验，但能给出更精确的上界。令 $\hat{}\eta$与 (1.3) 中相同。对于任意子集 $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$， 令 $\mathbf{1}_S \in \mathbb{R}^n$为其第 i个坐标等于 $1\{i \in S\}$的向量。定义有符号扫描统计量

$$\phi_{sc} = \max_{S \subset \{1,2,\ldots,n\}: |S| = N} \mathbf{1}_S'\big(A - \hat{\eta}\hat{\eta}'\big)\mathbf{1}_S. \tag{2.10}$$

定理 2.5 （统计下界的紧致性）。 考虑有符号扫描检验(2.10)，当 $\phi_{sc} > t_n$ 时拒绝零假设。在定理 *2.4* 的假设下，若$\sqrt{N}(a-c)/\sqrt{c\log(n)} \to \infty$，则存在一个序列 t_n，使得有符号扫描检验的第一类和第二类错误之和趋于0。

根据定理 2.4–2.5 和推论 2.1，若$\sqrt{N}(a-c)/\sqrt{c} \to 0$，这两个假设在渐近意义下不可区分；若 $N(a-c)/\sqrt{cn} \to \infty$，则可由 SgnQ 检验在渐近意义下区分。因此，该下界在相差对数因子的意义下是紧的，而有符号扫描检验几乎是最优的。遗憾的是，有符号扫描检验无法在多项式时间内计算。是否存在一种可在多项式时间内计算的最优检验？我们将在下一节探讨这一问题。

2.5 计算下界

考虑与第 2.4 节中相同的假设对，其中 $K = 2$, P 与式 (2.3)-(2.4) 中相同，而 Π 与式 (2.9) 中相同。为简单起见，我们只考虑随机块模型（SBM），即 $\theta_i \equiv 1$。近年来，低阶多项式论证已成为预测广泛高维问题中平均情形计算障碍的重要工具（Hopkins & Steurer, 2017; Hopkins et al., 2017）。许多强大的方法，例如谱算法和近似消息传递，都可以表述为输入数据的函数，其中这些函数是次数至多为问题维度对数的多项式。与许多其他用于建立计算下界的方法相比，低阶多项式方法对各种平均情形困难问题给出了相同的阈值，例如随机块模型中的社区检测（Hopkins & Steurer, 2017）以及（超）隐藏团检测（Hopkins, 2018；Luo & Zhang, 2022）。低阶多项式论证的基础是以下低次多项式猜想（Hopkins et al., 2017）：

猜想 2.1 (改编自 Kunisky 等人（2019）)。 令 $\mathbb{P}_n$ 和 $\mathbb{Q}_n$ 表示一列概率测度，其样本空间为 $\mathbb{R}^{n^k}$，其中 $k = O(1)$。假设每个次数为 $O(\log n)$ 且满足 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n} f^2 = 1$ 的多项式 f在 $\mathbb{P}_n$ 下以高概率有界（当 $n \to \infty$ 时），并且满足一些额外的正则性条件。那么，不存在多项式时间检验能够区分 $\mathbb{P}_n$ 和 $\mathbb{Q}_n$，且其第一类错误和第二类错误在 $n \to \infty$时趋于0 。

We 关于该猜想所要求的正则性条件的精确表述，请参见 Hopkins（2018） s.
The 我们检验问题的低次多项式计算下界如下。
定理 *2.6*（计算下界）。考虑第 *2.1* 节中的零假设和备择假设，并假设 $\theta_i \equiv 1$ 且 *(2.9)* 成立。当 $n \to \infty$ 时，假设 $c < a, c < 1-\delta$ 对常数 $\delta > 0, N < n/3, D = O(\log n)$成立，且 $\limsup_{n\to\infty} \left\{ \left(\log_n \binom{N}{\sqrt{n}} + \log_n \binom{a-c}{\sqrt{c}} \right) \vee \left(\sqrt{D}/2 - 1 \log_n \binom{a-c}{\sqrt{c}} \right) \right\} < 0$。对于任意一列次数为-$D$ 的多项式 $\phi_n : A \to \mathbb{R}$，只要 $\mathbb{E}_{H_0}\phi_n(A) = 0$，$\mathrm{Var}_{H_0}(\phi_n(A)) = 1$，就必有 $\mathbb{E}_{H_1}\phi_n(A) = o(1)$。这意味着，若猜想 *2.1* 成立，则不存在针对该问题的一致的多项式时间检验。

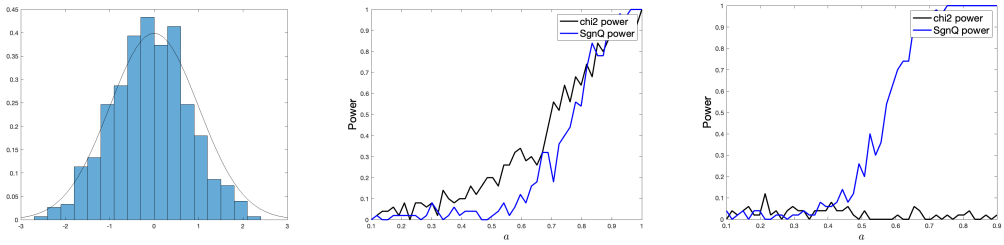

图 2：左：SgnQ 的零分布（$n = 500$）。中间和右侧：SgnQ 与 χ^2（$n = 100$，$N = 10$，重复 50 次）的检验功效比较。我们考虑一个二社区随机块模型，其中 $P_{11} = a$，$P_{22} = 0.1$ $P_{12} = 0.1$ $P_{12} = {}^{an-}$（中间图），以及 ${}_{(a+0.1)\ n}{}^{N}$（右图，度匹配的情形）。

根据定理 2.6，若 $(a-c)/\sqrt{c} \lesssim 1$ 且 $N(a-c)/\sqrt{cn} \to 0$，则该检验问题在计算上不可行。该检验问题在统计上可行、但 SgnQ 检验的检验功效会下降的区域对应于 $N(a-c)/\sqrt{cn} \to 0$。若 $N \gtrsim \sqrt{n}$，定理 2.6 已表明这就是计算上不可行区域；换言之，SgnQ 达到了计算下界，因而是最优的。若 $N = o(\sqrt{n})$，则 SgnQ 仅在 $(a-c)/\sqrt{c} \gg n^{1/2}$ 时才能解决检测问题，也就是节点级信噪比较强时。我们将在下一小节讨论节点级信噪比中等的情形。

2.6 EST 的检验功效，以及关于计算下界紧致性的讨论

当 $N = o(\sqrt{n})$ 和 $(a-c)/\sqrt{c} \to \infty$ 均成立时，SgnQ 给出的上界与计算下界并不匹配。目前尚不清楚计算下界是否紧致。为研究此参数范围下的计算下界，我们考虑其他可能的多项式时间检验。经济扫描检验（EST）是一个候选方法。给定固定的正整数 v 和 e，EST 统计量定义为 $\phi^{(v)}_{EST} \equiv \sup_{|S|\le v} \sum_{i,\ j\in S} A_{ij}$，并且当且仅当 $\phi^{(v)}_{EST} \ge e$ 时，EST 才拒绝零假设。EST 可在 $O(n^v)$ 时间内计算，即为多项式时间。为简单起见，我们考虑随机块模型（SBM），即 $\theta = \mathbf{1}_n$ 的情形，并选取一组特定的参数来定义零假设和备择假设。

定理 2.7（EST 的检验功效）。设 $\beta \in [1/2, 1)$ 和 $0 < \omega < \delta < 1$ 为固定常数。在备择假设下，设 $\theta = \mathbf{1}_n$，（2.9）成立，$N = n^{1-\beta}$、$a = n^{-\omega}$和 $c = n^{-\delta}$。在零假设下，设 $\theta = \mathbf{1}_n$ 和 $\alpha = a\ (N/n)\ + b\ (1 - N/n)$。若 $\omega/\ (1-\beta)\ < \delta$，则满足 $\omega/\ (1-\beta)\ < v/e < \delta$ 的、参数为 v 和 e 的 *EST* 的第一类和第二类错误之和趋于 0。

定理 2.7 可由概率组合学中的标准结果推出（Alon & Spencer，2016）。Bhaskara 等人（2010）猜想，在 Arias-Castro & Verzelen（2014）；Verzelen & Arias-Castro（2015）所考虑的 Erd¨os-Renyi 情形下，EST 可达到计算下界。这表明，当 $N = o(\sqrt{n})$ 且 $(a-c)/\sqrt{c} \to \infty$ 时，定理 2.6 中的计算下界可能并不紧。不过，这并非因为我们在证明计算下界时所用的不等式不够紧。一个可能的原因是，低次多项式猜想所给出的预测并未提供紧界。其他计算不可行性框架能否为我们的问题给出紧的计算下界，仍是一个开放问题。

2.7 相变

我们通过图 1 所示的相变，更精确地描述我们的结果。考虑第 2.1 节中的零假设和备择假设。为便于说明，我们固定常数 $\beta \in (0,\ 1)$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，并假设 $N = n^{1-\beta}$ 和 $(a-c)/\sqrt{c} = n^{-\gamma}$。在 $(\gamma,\ \beta)$ 的二维空间中，$\beta > 1/2$ 和 $\beta < 1/2$ 所对应的区域分别表示小型社区的规模为 $\gg \sqrt{n}$ 和 $o(\sqrt{n})$，而 $\gamma > 0$、$-1/2 < \gamma \prec 0$ 和 $\gamma \prec -1/2$ 所对应的区域分别表示“弱节点信号”“中等节点信号”和“强节点信号”。见图 1。根据第 2.4 节的结果，当 $\beta + 2\gamma > 1$ 时，检验问题在统计上不可解（橙色区域）。根据第 2.2 节的结果，当 $\beta + \gamma < 1/2$ 时，SgnQ 的检验功效达到 1（蓝色区域）。第 2.5 节的结果表明，当 $\gamma > 0$ 和 $\beta + \gamma > 1/2$ 同时成立时，检验问题在计算上不可行（绿色和橙色区域）。综合这些结果，当 $\beta < 1/2$ 时，我们便完全理解了下界和计算下界。

3 数值结果

模拟。首先，在图 2（左图）中，我们展示了在 $\Omega = \theta\theta'$ 形式的零假设下 SgnQ 的渐近正态性，其中 θ_i 是从 Pareto(4，0。375) 独立同分布生成的。尽管度异质性很严重，经过适当标准化的 SgnQ 在零假设下仍近似服从标准正态分布。接下来，我们在非对称和对称随机块模型中比较 SgnQ 的检验功效。正如理论所预测的，当各模型中的度数未经校准时，两种检验都具有较高的检验功效；但在对称情形下，只有 SgnQ 具有较高的检验功效。我们还将 SgnQ 的检验功效与扫描检验进行比较，以展示统计计算差距的证据。这些实验结果将在补充材料中介绍。

真实数据：接下来，我们展示 SgnQ 在检测 Ji 等人（2022）研究的合著网络中的小型社区时的有效性。在例 1 中，我们考虑 Raymond Carroll 的个性化网络，其节点是他在 1975—2015 年间发表于 36 种统计学期刊的论文的合著者。如果两位合著者在指定时期内曾在这些期刊上共同发表论文，则在他们之间连一条边。Carroll 个性化网络的 SgnQ p值 G_{Carroll} 为 0.02，这表明网络中可能存在多个社区。在 Ji 等人（2022）的研究中，作者从与美国国家癌症研究所合作的项目中识别出一小群合著者。我们使用带有 $K = 2$ 的 SCORE 社区检测模块（例如 Ke 和 Jin（2022）），得到一个规模为 218 的较大社区 G^0_{Carroll} 和一个规模为 17 的较小社区 G^1_{Carroll}。具体而言，我们从 Carroll 的网络中移除 Carroll，在剩余的巨型连通分量上应用 SCORE，并将较小社区的补集定义为 $G^0{}_{\mathsf{Carroll}}$。下表中的 SgnQ p值表明，$G^0{}_{\mathsf{Carroll}}$ 和 G^1_{Carroll} 都紧密聚集。请参阅补充材料，其中展示了 Carroll 网络的可视化图，以及标注了作者姓名的较小社区。在例 2 中，我们考虑三个不同的合著网络 G_{old}、G_{recent} 和 G_{new}，它们分别对应 AoS、Bka、JASA 和 JRSSB 期刊在以下时期的数据：(i) 1975—1997 年，(ii) 1995—2007 年，以及 (iii) 2005—2015 年。节点代表作者；如果两位作者在相应时期内曾在这些期刊上合著至少一篇论文，则在他们之间连一条边。对于每个网络，我们都采用与第一个例子类似的步骤。首先，我们计算 SgnQ p值，结果发现所有网络的值均为 ≈ 0（精确到 16 位）。对于每个 $i \in$ {早、近期、新近}网络，我们使用带有 $K = 2$ 的 SCORE 对 G_i 进行处理，并计算由此得到的两个社区的 SgnQ p值，分别记为 G^0_i和 G^1_i。结果见下表。对于 G_{old} 和 G_{recent}，带有 $K = 2$的 SCORE 会提取出一个小型社区。SgnQ p值进一步支持了这一假设：该小型社区内部连接紧密。在最后一个网络中，SCORE 将 G_{new} 分成两个规模相近的部分，其 p值表明它们还可以进一步拆分为更小的子社区。

示例	网络	Size	SgnQ p值	社区	规模	SgnQ p值
1	G_{Carroll}	235	0.02	$(G^0_{\mathsf{Carroll}}, G^1_{\mathsf{Carroll}})$	(218, 17)	(0.134, 0.682)
2	G_{old}	2647	0	$(G^0_{\mathsf{old}}, G^1_{\mathsf{old}})$	(2586, 61)	(0, 0.700)
	G_{recent}	2554	0	$(G^0_{\mathsf{r}}, G^1_{\mathsf{r}})$	(2540,14)	(0, 0.759)
	G_{new}	2920	0	$(G^{\text{近期}}_{\mathsf{new}}, G^{\text{近期}}_{\mathsf{new}})$	(1685,1235)	(0, 0)

讨论：全局检验是一项基础问题，往往也是一系列长期研究的起点。例如，在高斯模型的文献中，某些方法最初是作为全局检验工具提出的，后来发展为变量选择、分类和聚类工具，并推动了许多研究（例如 Donoho & Jin（2004；2015））。SgnQ 检验也可能为许多其他问题提供启发，例如估计团的位置，以及更一般的聚类。例如，在 Jin 等人（2022）中，SgnQ 检验启发了一种估计社区数量的方法（另见 Ma 等人（2021））。SgnQ 还可扩展到张量中的团检测（Yuan 等人，2021；Jin 等人，2021a）以及网络变点检测。本文得到的下界和计算下界也有助于研究其他问题，例如团估计。如果无法判断网络中是否存在团，就不可能对团进行估计。因此，下界和计算下界对于团估计问题同样成立（Alon 等人，1998；Ron & Feige，2010）。

SgnQ 的极限分布为 $N(0，1)$。若采用其他检验思路，例如使用邻接矩阵的最大特征值，则很难实现这一点：极限分布取决于许多未知参数，且难以进行标准化（Liu 等人，2019）。SgnQ 检验的 p 值易于近似计算，在实际应用中也很有用。例如，我们可以用它来衡量某位作者的研究多样性。考虑一位作者在大型合著网络或引文网络中的自我子网络。较小的 p 值表明，该作者的自我中心网络包含多个社区，研究兴趣也更加多样。p 值还可用作层次社群检测模块中的停止准则。

致谢。我们感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。感谢 Louis Cammarata 协助完成 A.3 节中的模拟。J. Jin 的研究部分得到了美国国家科学基金会 DMS-2015469 项目的资助。Z.T. Ke 的研究部分得到了美国国家科学基金会 CAREER 项目 DMS-1943902 的资助。A.R. Zhang 感谢美国国家科学基金会 CAREER-2203741 项目的资助。

附录

目录

A 补充实验 10A.1 卡罗尔网络可视化.10 A.2 SgnQ 与 Scan 的比较.10 A.3 χ_2与 SgnQ 的比较.12**B 引理 2.1 的证明（可识别性）12 C 定理 2.1 的证明（SgnQ 统计量的极限零分布）14 D̃ 引理 2.2 的证明（Ω的性质）14 E 定理 2.2 的证明（SgnQ 检验的检验功效）及推论 2.1 15**E.1 设定与结果.15 E.2 初步界.18 E.3 SgnQ 的均值与方差.21 E.4 引理 E.7–E.12 的证明.24 E.5 随机区块模型设定下的计算.50**F 定理 2.3 的证明（ χ^2 检验的无效性）51 G 定理 2.4 的证明（统计下界）55**G.1 引理 G.1 的证明.59**H 定理 2.5 的证明（统计下界的紧致性）59 I 定理 2.6 的证明（计算下界）69 J 定理 2.7 的证明（EST 的检验功效）71**

A 补充实验

A.1 Carroll 网络的可视化

图 3 展示了 Raymond Carroll 个性化合著网络中高次数节点构成的子图（图经 Ji 等人（2022）许可转载）。图 3 右侧展示了由 SCORE 提取的小型社区，这个规模为 17 的簇以作者姓名标注。

A.2 SGNQ 与 SCAN

本节通过数值实验展示统计计算差距的证据。

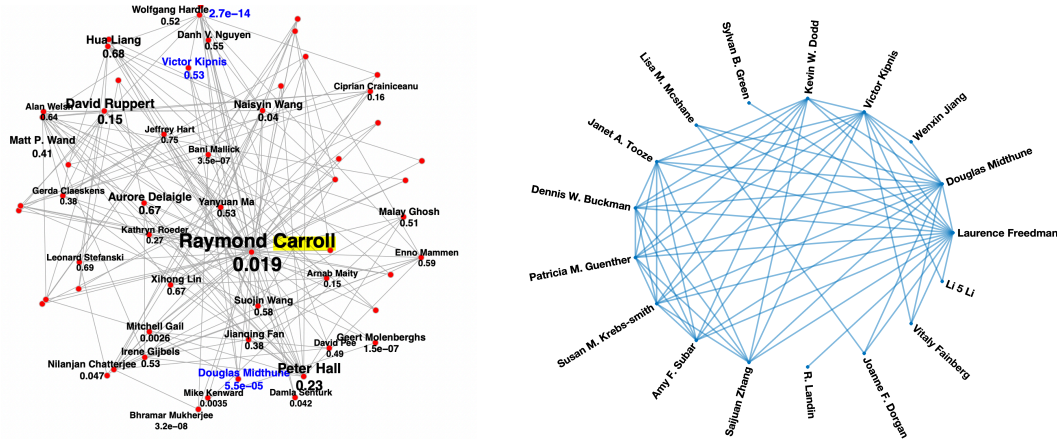

图 3：**左图：**Carroll 的个性化网络，图片摘自 Ji 等人（2022）。**右图：**由 SCORE 提取的一个包含 17 位作者的小型社区，其 SgnQ p值为 0.6818。

我们考虑一个随机块模型的零假设和备择模型（如例 2 中的 $\theta \equiv 1$），其中

$$P_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

其中 $aN + b(n - N) = \alpha n$。对于这个简单的检验问题，我们比较 SgnQ 和扫描检验的检验功效。在实验中，我们设定 $\alpha = 0.2$，并让参数 a 从 $a = \alpha$ 变化到 $a = a_{\max} \equiv \alpha n/N$。一旦固定 a 和 α，参数 b 和 c 就由以下公式确定

$$c = \frac{aN^2 + \alpha n^2 - 2\alpha nN}{(n - N)^2},$$
$$b = \frac{nc - (a + c)N}{n - 2N}.$$

特别地，$a_{\max}$ 是使得 $b \geq 0$ 成立的 a 的最大值。

由于我们定义的扫描检验 ϕ_{sc} 计算开销极大，我们研究一种了解真实植入子集 $\mathcal{C}_1$ 位置的~“预言机”扫描检验 ϕ_{sc}。预言机扫描检验的检验功效计算如下。令 κ 表示所需的显著性水平。

1. 在零假设下进行 M_{cal} 次重复实验，并为每次重复计算（非预言机）扫描统计量 $\phi_{sc}^{(1)}, \ldots, \phi_{sc}^{(M_{cal})}$。我们将阈值 $\hat{}\tau$ 设为 $\phi_{sc}^{(1)}, \ldots, \phi_{sc}^{(M_{cal})}$ 的经验 $1 - \kappa$ 分位数。2. 给定一个来自备择模型的样本，我们使用 M_{pow} 次重复实验计算检验功效；若拒绝，则

$$\tilde{\phi}_{sc} \equiv \mathbf{1}_{\mathcal{C}_1}(A - \hat{\eta}\hat{\eta}')\mathbf{1}_{\mathcal{C}_1} > \hat{\tau}.$$

在我们的实验中，我们设定 $M_{cal} = 75$ 和 $M_{pow} = 200$。

~注意，由于 $\phi_{sc} \leq \phi_{sc}$，上述过程会低估扫描检验的检验功效（前提是阈值经过正确校准）；这很有帮助，因为这可以用来证明存在统计计算差距。

在图中，除了检验功效外，我们还标出了统计（信息论）阈值和计算阈值。受 Arias-Castro 和 Verzelen（2014，公式（10））对植入稠密子图的统计阈值所作精确刻画的启发，我们在所有图中都在满足以下条件的第一个 a 值处画一条黑色竖直虚线

$$(1/2)\sqrt{N}(a - c)/\sqrt{c(1 - c)} > 1.$$

我们在第一个满足以下条件的 a 值处绘制了一条蓝色竖直虚线

$$N(a - c)/\sqrt{nc} > 1.$$

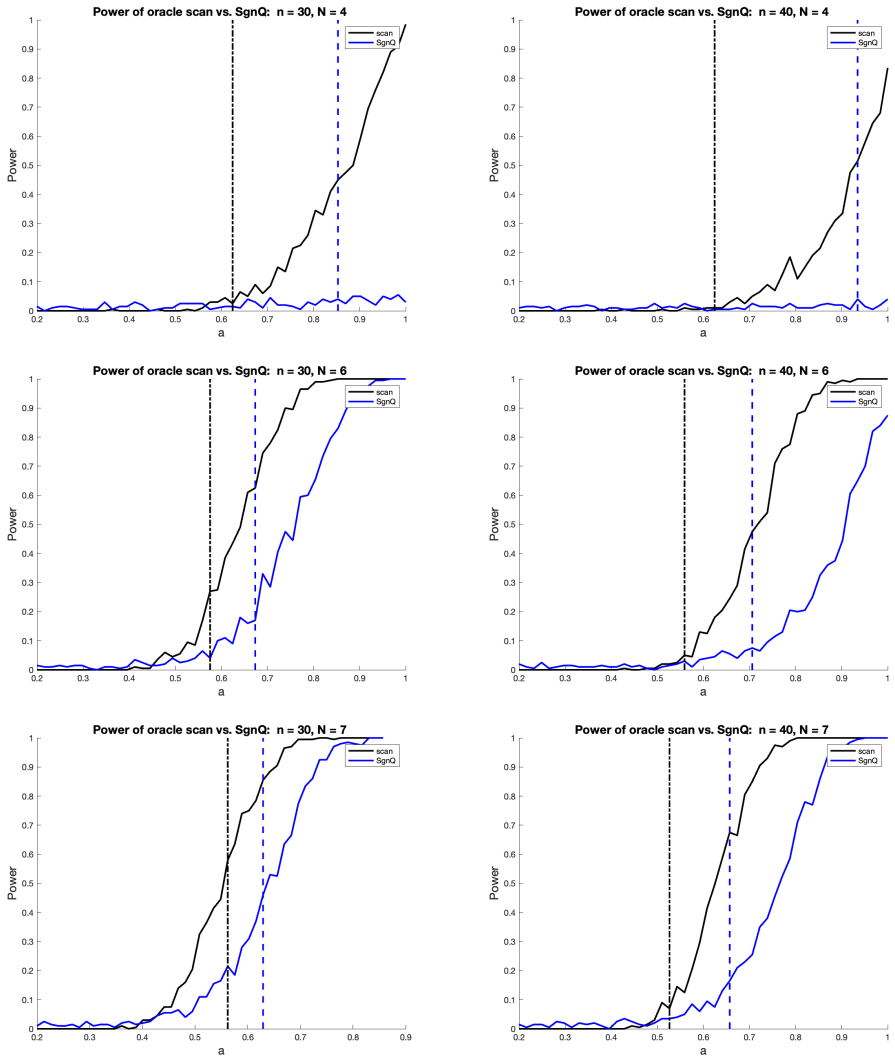

图 4：SgnQ（蓝色曲线）和预言机扫描（黑色曲线）在 $n = 30$，$N \in \{4, 6, 7\}$（左）和 $n = 40$，$N \in \{4, 6, 7\}$（右）下的检验功效。黑色虚线表示理论统计阈值，蓝色虚线表示理论计算阈值。

A. 3 χ_2与 SGNQ 的比较

我们还展示了补充实验，以说明度匹配对 χ^2 检验的检验功效的影响。我们针对以下备择模型计算检验功效（如 $\theta \equiv 1$的例 2 所示），其中

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & c \end{pmatrix}$$

其中，$b = \frac{cn - (a+c)N}{n-2N}$ 固定，而 a 从 c 变化到 $a'_{\max} = c$（$n - N$），用于针对 $P^{(1)}$ 的实验。与之前类似，$a'_{\max}$ 是满足 $b \geq 0$ 的 a 的最大值。更多详情请参见图 5。

B 引理 2.1（可识别性）的证明

为证明可识别性，我们使用以下结果，该结果引自 Jin 等人（2021c，引理 3.1），与 Sinkhorn 关于矩阵缩放的研究 Sinkhorn（1974）一脉相承。

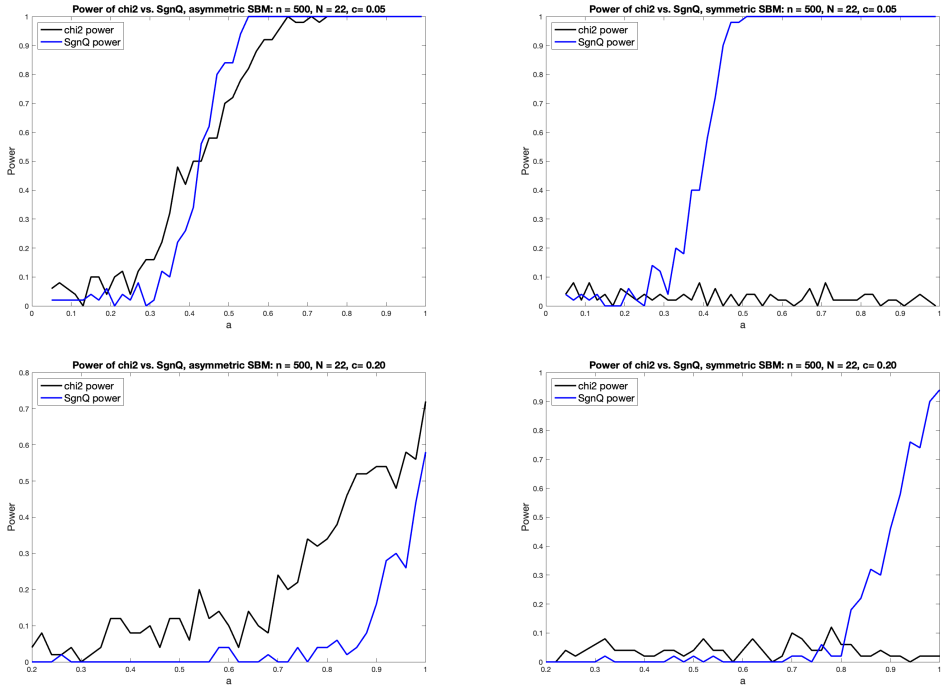

图 5：SgnQ 与 χ^2 的检验功效比较（$n = 500$，重复 50 次）。我们考虑一个二社区随机块模型，其中 $P_{11} = a$、$P_{22} = c$、$P_{12} = c$（左图）以及 $P_{12} = \frac{an - (a+c\,N)}{n}$（右图，度匹配情形），其中 $c = 0.05$（上排）且 $c = 0.20$（下排）。

引理 B.1 (Jin 等人（2021c））。给定一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{K,\,K}$ 其对角线元素严格为正，非对角元素非负，且给定一个严格为正的向量 $h \in \mathbb{R}^K$，存在唯一的对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_K)$ 使得 $DADh = 1_K$ 且 $d_k > 0, 1 \le k \le K$。

我们应用引理 B.1，取 $h = (h_1, \ldots, h_K)'$ 和 $A = P$，构造一个对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_K)$，使其满足 $DADh = 1_K$。注意，由于 Ω 的对角线元素为正，P 的对角线元素也为正。

定义 $P^* = DPD$ 和 $D^* = \mathrm{diag}(d_1^*, \ldots, d_n^*) \in \mathbb{R}^n$，其中

$$d_i^* \equiv d_k \qquad \text{if } i \in \mathcal{C}_k$$

注意到

$$\Pi D^{-1} = (D^*)^{-1}\Pi.$$

定义 $\Theta^* = \Theta(D^*)^{-1}$，并令 $\theta^* = \mathrm{diag}(\Theta^*)$。接下来，令 $\Theta = \frac{n}{\|\theta^*\|_1} \cdot \Theta^*$，令 $\theta = \mathrm{diag}(\Theta)$，并令 $P = \frac{\|\theta^*\|_1^2}{n^2} \cdot P^*$。注意到 $\|\theta\|_1 = n$ 和 $Ph \propto \mathbf{1}_K$。

根据前面的定义和观察，我们有

$$\Omega = \Theta\Pi D^{-1}DPDD^{-1}\Pi'\Theta = \Theta^*\Pi P^*\Pi'\Theta^* = \overline{\Theta}\Pi\overline{P}\Pi'\overline{\Theta}$$

这就证明了存在性。

为证明唯一性，假设

$$\Omega = \Theta^{(1)}\Pi P^{(1)}\Pi'\Theta^{(1)} = \Theta^{(2)}\Pi P^{(2)}\Pi'\Theta^{(2)},$$

其中 $\theta^{(i)} = \mathrm{diag}(\Theta^{(i)})$ 满足 $\|\theta^{(i)}\|_1 = n$，对于 $i = 1, 2$ 且

$$P^{(1)}h \propto \mathbf{1}_K, \qquad P^{(2)}h \propto \mathbf{1}_K.$$

注意到

$$\Pi P^{(1)}\Pi'\mathbf{1}_n = \alpha^{(1)}n \cdot \mathbf{1}_n, \qquad \Pi P^{(2)}\Pi'\mathbf{1}_n = \alpha^{(2)}n \cdot \mathbf{1}_n.$$

对于正常数 $\alpha^{(i)}, i \in \{1,2\}$。由于 Ω 的元素非负且对角元素为正，根据引理 B.1，存在唯一的对角矩阵 D，使得

$$D\Omega D\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n.$$

我们看到，取 $D = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{(i)}n}}(\Theta^{(i)})^{-1}$ 可满足该方程，其中 $i = 1, 2$，因此由唯一性可得，

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^{(1)}n}}(\Theta^{(1)})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{(2)}n}}(\Theta^{(2)})^{-1}.$$

由于 $\|\theta^{(1)}\|_1 = \|\theta^{(2)}\|_1 = n$，进一步可得 $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$，因此

$$\Theta^{(1)} = \Theta^{(2)}.$$

由此可得

$$\Pi P^{(1)}\Pi' = \Pi P^{(2)}\Pi',$$

由于我们假设对 $i = 1, \ldots\ldots, K$， $h_i > 0$，因此进一步可推出 $P^{(1)} = P^{(2)}$。 □

C 定理 2.1 的证明（SgnQ 统计量的极限零分布）

考虑一个 $\Omega = \theta^*(\theta^*)'$ 的零假设下的度校正块模型。请注意，这与我们在主论文中研究的参数化方式不同。Jin 等人（2021c，定理 2.1）证明了，只要满足以下条件，ψ_n（即 SgnQ 的标准化版本）的渐近分布就是标准正态分布：

$$\|\theta^*\| \to \infty, \quad \theta^*_{max} \to 0, \quad \text{and} \quad (\|\theta^*\|^2/\|\theta^*\|_1)\sqrt{\log(\|\theta\|_1^*)} \to 0. \tag{C.1}$$

我们验证，在 $\Omega = \alpha\theta\theta'$ 且 $\|\theta\|_1 = n$ 的度修正块模型中，这些条件可由假设 (2.5) 推出，现将其重述如下：

$$n\alpha \to \infty, \qquad \text{and} \qquad \alpha\theta^2_{\max}\log(n^2\alpha) \to 0 \tag{C.2}$$

在 Jin 等人（2021c）的参数化方式中，我们有 $\theta^* = \sqrt{\alpha}\theta$。首先，$\|\theta^*\|^2 \to \infty$，因为根据 (C.2)，

$$\|\theta^*\|^2 \geq \frac{1}{n}\cdot\|\theta^*\|_1^2 = \alpha n \to \infty.$$

接下来，$\theta^*_{\max} \to 0$，因为根据 (C.2)，

$$\theta_{\max} = \sqrt{\alpha}\theta_{\max} \to 0.$$

为证明（C.1）的最后一部分，注意到

$$(\|\theta^*\|^2/\|\theta^*\|_1)\sqrt{\log(\|\theta\|_1^*)} \leq \sqrt{\alpha}\theta_{\max}\sqrt{\log(\sqrt{\alpha}n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha}\theta_{\max}\sqrt{\log(\alpha n^2)} \to 0$$

由（C.2）可知。因此（C.1）成立，并且在零假设下，ψ_n 渐近服从标准正态分布。 □

˜D 引理 2.2 的证明（Ω 的性质）

引理。矩阵 $\tilde{}\Omega$ 的秩和迹分别为 $(K-1)$ 和 $\|\theta\|^2\mathrm{diag}(\tilde{P})'g$。当$K = 2$, $\tilde{\lambda}_1 = \mathrm{trace}(\tilde{}\Omega)$ $= \|\theta\|^2(ac - b^2)(d_0^2g_1 + d_1^2g_0)/(ad_1^2 + 2bd_0d_1 + cd_0^2)$。

引理 2.2 的证明。根据基本代数，

$$\widetilde{\Omega} = \Theta\Pi\widetilde{P}\Pi'\Theta, \qquad \text{where } \widetilde{P} = (P - (d'Pd)^{-1}Pdd'P).$$

可见 $\widetilde{P}d = Pd - (d'Pd)^{-1}Pdd'Pd = 0$，因此 rank($\widetilde{P}$) $\leq K-1$。同时，由于对于任意˜同规模的矩阵 A 和 B，rank$(A+B) \leq$ rank$(A)+$ rank(B)，可得 $P \geq (K-1)$，因为˜rank(P) $= K$ 且 rank$(Pdd'P) \leq 1$。这证明了 rank$(P) = K-1$。

同时，由于对于任意矩阵 A 和 B，$\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$，

$$\mathrm{trace}(\widetilde{\Omega}) = \mathrm{trace}(\widetilde{P}\Pi'\Theta^2\Pi) = \|\theta\|^2\mathrm{trace}(\widetilde{P}G) = \|\theta\|^2\mathrm{diag}(\tilde{P})'g.$$

这证明了引理的第二项。

最后，当 $K = 2$时，Ω 的秩为 1，其特征值与其迹相同。首先

$$(\tilde{P})_{11} = a - \frac{(ad_1 + bd_0)^2}{ad_1^2 + 2bd_0d_1 + cd_0^2} = (ac - b^2)\frac{d_0^2}{ad_1^2 + 2bd_0d_1 + cd_0^2}$$
$$(\tilde{P})_{22} = c - \frac{(bd_1 + cd_0)^2}{ad_1^2 + 2bd_0d_1 + cd_0^2} = (ac - b^2)\frac{d_1^2}{ad_1^2 + 2bd_0d_1 + cd_0^2}.$$

Thus

$$\tilde{\lambda}_1 = \|\theta\|^2\mathrm{diag}(\tilde{P})'g = \|\theta\|^2(ac - b^2) \cdot \frac{d_0^2g_1 + d_1^2g_0}{ad_1^2 + 2bd_0d_1 + cd_0^2}$$

这证明了最后一项，并完成了引理的证明。

□

E 定理 2.2（SgnQ 检验的检验功效）及推论 2.1 的证明

E.1 设置与结果

记号：给定实数序列 $A = A_n$ 和 $B = B_n$，我们用 $A \lesssim B$ 表示$A = O(B)$，用 $A \asymp B$ 表示 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$，并用 $A \sim B$ 表示 $A/B = 1 + o(1)$。

在本节中，我们考虑参数为 (Θ, P) 的度修正块模型，其中 $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 具有单位对角线，并分析备择假设下 SgnQ 的行为。在本小节末尾，我们将说明定理 2.2 和推论 2.1 如何由下文介绍的结果推出。我们的结果依赖于

$$\tilde{\lambda} \equiv \tilde{\lambda}_1 = \mathrm{tr}(\tilde{\Omega}).$$

给定子集 $U \subset [n]$，令 $\theta_U \in \mathbb{R}^{|U|}$ 表示将 θ 限制到 U的坐标上所得的结果。为方便记号，我们令 $S = \{i : \pi_i(1) = 1\}$，这在主论文中此前记作 $\mathcal{C}_1$。

在一个具有 P 单位对角线的度修正块模型中，我们的主要结果在以下条件下成立。

$$\Omega_{ij} \lesssim \theta_i\theta_j \tag{E.1}$$
$$\|\theta\|_\infty = O(1), \text{ and} \tag{E.2}$$
$$\|\theta\|_2^2 \to \infty. \tag{E.3}$$
$$(\|\theta\|_2^2/\|\theta\|_1)\sqrt{\log(\|\theta\|_1)} \to 0. \tag{E.4}$$

首先，我们证明这些假设由一个与其具有相同 Ω、采用参数化 (2.1) 且满足 (2.7) 的等价度修正块模型所满足。因此，本节证明的所有结果都可直接推广至主论文。

引理 E.1。考虑一个参数为 (Θ^*, P^*)、满足 (2.1) 且满足 (2.7) 的度修正块模型。定义 $\Theta = \mathrm{diag}(\theta)$，其中

$$\theta_i = \begin{cases} \sqrt{a}\theta_i^* & \text{if } i \in S \\ \sqrt{c}\theta_i^* & \text{if } i \in S^c, \end{cases}$$

and

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{\sqrt{ac}} \\ \frac{b}{\sqrt{ac}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\Omega = \Theta\Pi P\Pi\Theta = \Theta^*\Pi P^*\Pi'\Theta^*$$

并且满足 (E.1)–(E.4)。

证明。 关于 Ω 的论述可由基本代数得出。若能证明

$$\frac{b}{\sqrt{ac}} \lesssim 1. \tag{E.5}$$

由于

$$b = \frac{cn-(a+c)N}{n-2N} = c\cdot\frac{n-N}{n-2N} - a\cdot\frac{N}{n-2N},$$

我们有 $a \geq c \gtrsim b$, 因此可得 (E.5)。

接下来，由于 $c\theta_{\max,0}^2 = o(1)$，根据 (2.7) 可直接得到 E.2：$a\theta_{\max,1}^2 \lesssim 1$ 。

对于 (E.3),

$$\|\theta\|_2^2 \geq \frac{1}{n}\cdot\|\theta\|_1^2 \geq cn \to \infty$$

根据 (2.7)。

对于最后一部分，注意到

$$b = c\cdot\frac{n-N}{n-2N} - a\cdot\frac{N}{n-2N} \geq 0 \Rightarrow a\varepsilon \lesssim c.$$

因此,

$$\frac{\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1} = \frac{a\|\theta_S^*\|_2^2 + c\|\theta_{S^c}^*\|_2^2}{\sqrt{a}\|\theta_S^*\|_1 + \sqrt{c}\|\theta_{S^c}^*\|_1} \lesssim \frac{a(N/n)\|\theta_{S^c}^*\|_2^2 + c\|\theta_{S^c}^*\|_2^2}{\sqrt{c}\|\theta_{S^c}^*\|_1}$$
$$\lesssim \frac{c\|\theta_{S^c}^*\|_2^2}{\sqrt{c}\|\theta_{S^c}^*\|_1} \lesssim \sqrt{c}\theta_{\max,0} = o\big(\frac{1}{\sqrt{\log cn^2}}\big) = o\big(\frac{1}{\sqrt{\log(\|\theta\|_1)}}\big),$$

这意味着 (E.4)。上文利用了 $a \geq c$ 和 $g_1 \asymp d_1 \asymp N/n$, 根据假设成立。具体而言，在第一行中，我们使用了

$$a\|\theta_S^*\|_2^2 \asymp a\cdot(1-N/n)^{-1}\frac{N}{n}\|\theta_{S^c}^*\|_2^2 \lesssim c\|\theta_{S^c}^*\|_2^2,$$

在第二行中，我们使用了

$$\|\theta\|_1 \geq \sqrt{c}\|\theta_{S^c}^*\|_1 \asymp \sqrt{c}(1-N/n)^{-1}\|\theta^*\|_1 \asymp \sqrt{c}n.$$

□

有了引理 E.1，本文其余部分将限定在 P 具有单位对角线且满足 (E.1)–(E.4) 的情形。

定义 $v_0 = \mathbf{1}'\Omega\mathbf{1}$，并令 $\eta^* = (1/\sqrt{v_0})\Omega\mathbf{1}$。回顾 $\tilde{\Omega} = \Omega - \eta^*\eta^{*\mathsf{T}}$，以及 $\tilde{\lambda} = \mathrm{tr}(\tilde{\Omega})$。关于备择假设的主要结果如下。

定理 E.1 (SgnQ 检验统计量的极限行为)。 假设前述假设均成立，且 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$。那么在零假设下，当 $n \to \infty$, $\mathbb{E}[Q] = 2\|\theta\|_2^4$, $\mathrm{Var}(Q) \sim 8\|\theta\|_2^8$，且 $(Q-\mathbb{E}Q)/\sqrt{\mathrm{Var}(Q)} \to N(0,1)$ 依分布。在备择假设下，当 $n \to \infty$, $\mathbb{E}Q \sim \tilde{\lambda}^4$ 且 $\mathrm{Var}(Q) \lesssim |\tilde{\lambda}|^6 + |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^3 = o(\tilde{\lambda}^8)$。

按照 Jin 等人（2021c）的做法，我们引入一些记号:

$$\widetilde{\Omega} = \Omega - (\eta^*)(\eta^*)', \qquad \text{where} \quad \eta^* = \frac{1}{\sqrt{v_0}}\Omega\mathbf{1}_n, \ \ v_0 = \mathbf{1}_n'\Omega\mathbf{1}_n;$$

$$\delta_{ij} = \eta_i(\eta_j - \tilde{\eta}_j) + \eta_j(\eta_i - \tilde{\eta}_i), \qquad \text{where} \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{v}}(\mathbb{E}A)\mathbf{1}_n, \ \ \tilde{\eta} = \frac{1}{\sqrt{v}}A\mathbf{1}_n, \ \ v = \mathbf{1}_n'(\mathbb{E}A)\mathbf{1}_n;$$

$$r_{ij} = (\eta_i^*\eta_j^* - \eta_i\eta_j) - (\eta_i - \tilde{\eta}_i)(\eta_j - \tilde{\eta}_j) + (1 - \frac{v}{V})\tilde{\eta}_i\tilde{\eta}_j, \qquad \text{where } \ V = \mathbf{1}_n'A\mathbf{1}_n.$$

理想的 和代理SgnQ 统计量分别定义如下:

$$\widetilde{Q}_n = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} (\widetilde{\Omega}_{ij} + W_{ij})(\widetilde{\Omega}_{jk} + W_{jk})(\widetilde{\Omega}_{k\ell} + W_{k\ell})(\widetilde{\Omega}_{\ell i} + W_{\ell i}) \tag{E.6}$$

$$Q_n^* = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} (\widetilde{\Omega}_{ij} + W_{ij} + \delta_{ij})(\widetilde{\Omega}_{jk} + W_{jk} + \delta_{jk})(\widetilde{\Omega}_{k\ell} + W_{k\ell} + \delta_{k\ell})(\widetilde{\Omega}_{\ell i} + W_{\ell i} + \delta_{\ell i}). \tag{E.7}$$

此外，我们可以将原始的或真实的 SgnQ 表示为

$$Q_n = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \Big[(\widetilde{\Omega}_{ij} + W_{ij} + \delta_{ij} + r_{ij})(\widetilde{\Omega}_{jk} + W_{jk} + \delta_{jk} + r_{jk}) \\ (\widetilde{\Omega}_{k\ell} + W_{k\ell} + \delta_{k\ell} + r_{k\ell})(\widetilde{\Omega}_{\ell i} + W_{\ell i} + \delta_{\ell i} + r_{\ell i}) \Big].$$

接下来的定理讨论这些统计量的行为。这些结果共同推出定理 E.1。同样，零假设下的分析可直接沿用 Jin 等人（2021c）的结果，因此我们只需研究备择假设。关于备择假设的结论由下文的引理 E.7–E.12 得出。

定理 E.2 (理想 SgnQ 检验统计量)。 假设此前的假设成立，且$|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$。那么在零假设下，当 $n \to \infty$, $\mathbb{E}[\tilde{Q}] = 0$ 且 方差$(\tilde{Q}) = 8\|\theta\|_2^8 \{1 + o(1)]$。此外，在备择假设下，当 $n \to \infty$, $\mathbb{E}[\tilde{Q}] \sim \tilde{\lambda}^4$ 且 方差$(\tilde{Q}) \lesssim \lambda_1^4 + |\tilde{\lambda}|^6 = o(\tilde{\lambda}^8)$。

定理 E.3 （代理 SgnQ 检验统计量）。 假设前述假设成立，且$|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$。那么，在零假设下，当 $n \to \infty$ 时， $|\mathbb{E}[\tilde{Q} - Q^*]| = o$ （$\|\theta\|_2^4$） 且 方差（$\tilde{Q} - Q^*$） $= o$ （$\|\theta\|_2^8$）。此外，在备择假设下，当 $n \to \infty$ 时， $|\mathbb{E}[\tilde{Q} - Q^*]| \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1 = o$（$\tilde{\lambda}^4$） 且 方差（$\tilde{Q} - Q^*$） $\lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^3 + |\tilde{\lambda}|^6 = o$（$\tilde{\lambda}^8$）。

定理 E.4 （真实 SgnQ 检验统计量）。 假设前述假设成立，且$|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$。那么，在零假设下，当 $n \to \infty$ 时， $|\mathbb{E}[Q - \tilde{Q}]| = o$（$\|\theta\|_2^4$） 且 方差（$Q - \tilde{Q}$） $= o$（$\|\theta\|_2^8$）。此外，在备择假设下，当 $n \to \infty$ 时， $|\mathbb{E}[Q - Q^*]| \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1 = o$（$\tilde{\lambda}^4$） 且 方差（$Q - Q^*$） $\lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^3 = o$（$\tilde{\lambda}^8$）。

Jin 等人（2021c）的先前工作证明，在上述假设下，若 $\|\theta_S\|_1/\|\theta\|_1 \asymp 1$，则只要满足 $|\lambda_2|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$，SgnQ 就能区分零假设和备择假设。为了与上述结果进行比较，请注意， $\lambda_2 \asymp \lambda$ 若 $\|\theta_S\|_1/\|\theta\|_1 \asymp 1$（参见 Jin 等人（2021c）的引理 E.5）。因此，当 $K = 2$ 时，我们的主要结果将 Jin 等人（2021c）的上界扩展到$\|\theta_S\|_1/\|\theta\|_1 = o$（1）的情形。我们注意到， $|\lambda| \gtrsim |\lambda_2|$ 一般而言（见引理 E.3 和推论 E.1）。

上述定理适用于对称随机块模型。回顾一下，在该模型中，

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} a & \text{if } i, j \in S \\ c & \text{if } i, j \notin S \\ \tilde{b} = \frac{nc-(a+c)N}{n-2N} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 $N = |S|$ 和 a， b， $c \in (0, 1)$。要从我们的度修正块模型得到该模型，令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{b}/\sqrt{ac} \\ \tilde{b}/\sqrt{ac} & 1 \end{pmatrix}, \tag{E.8}$$

and

$$\theta = \sqrt{a}\mathbf{1}_S + \sqrt{c}\mathbf{1}_{S^c}. \tag{E.9}$$

假设 (E.1) 意味着 $b \lesssim \sqrt{ac}$，由于我们假设 $a \geq c$，因此该条件自动成立。在随机块模型中，有 $\lambda_2 = \lambda$ （见引理 E.3）。此外，E.5 节中的显式计算表明

$$\lambda_1 \sim nc, \text{ and} \\ \lambda_2 = \tilde{\lambda} \sim N(a - c). \tag{E.10}$$

此外，与上文一样，若我们有 P， a， b， c

$$\theta_i = \begin{cases} \rho_i\sqrt{a} & \text{if } i \in S \\ \rho_i\sqrt{c} & \text{if } i \notin S \end{cases}$$

在 DCBM（度修正块模型）设定下，对于 $\rho > 0$ 和 $\rho_{\min} \gtrsim \rho_{\max}$，通过一个非常类似的计算（此处略去），可得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\asymp nc, \text{ and} \\ \tilde{\lambda} &\asymp N(a-c). \end{aligned} \tag{E.11}$$

有了本小节前面的结果（这些结果将在后续小节中证明），我们即可证明定理 2.2 和推论 2.1。

定理 *2.2* 的证明。根据定理 2.1，SgnQ 检验的显著性水平为 κ，因此接下来只需研究第二类错误。利用定理 E.1 和引理 E.1，根据切比雪夫不等式以及 $\|\hat{\eta}\|_2^2 - 1 \approx \|\theta\|_2^2$ 以高概率成立这一事实，可以直接得出第二类错误趋于 0。特别要注意，由于 $|\tilde{\lambda}| \gg \sqrt{\lambda_1}$，在备择假设下，SgnQ 的期望远大于其在零假设或备择假设下的标准差。细节从略，因为它们与 Jin 等人（2021c，补充材料，第 5–6 页）中定理 2.6 的证明非常相似。 □

推论 *2.1* 的证明。该结果可由 (E.11) 和定理 2.2 直接得出。 □

E.2 初步界

定义 $v_0 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\Omega\mathbf{1}$，并令 $\eta^* = 1/\sqrt{v_0}\Omega\mathbf{1}$。对于 SgnQ 的分析，理解 $\tilde{\Omega} = \Omega - \eta^*\eta^{*\mathsf{T}}$ 至关重要。下面的引理表明，当 $K = 2$ 时，$\tilde{\Omega}$ 的秩为一，且有简单的表达式。

引理 E.2。设 $f = (\|\theta_{S^c}\|_1, -\|\theta_S\|_1)^\mathsf{T}$。则有

$$\tilde{\Omega} = \frac{(1-b^2)}{v_0} \cdot \Theta\Pi f f^\mathsf{T}\Pi^\mathsf{T}\Theta.$$

证明。令 $\rho_0 = \|\theta_S\|_1$ 和 $\rho_1 = \|\theta_{S^c}\|_1$。注意到

$$(\Omega\mathbf{1})_i = \theta_i \sum_j \theta_j \pi_i^\mathsf{T} P \pi_j = \begin{cases} \theta_i(\rho_0 + b\rho_1) & \text{if } i \in S \\ \theta_i(b\rho_0 + \rho_1) & \text{if } i \notin S. \end{cases}$$

因此

$$v_0 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\Omega\mathbf{1} = \rho_0^2 + 2b\rho_0\rho_1 + \rho_1^2.$$

若 $i,\ j \in S$，则

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \theta_i\theta_j\big(1 - \frac{(\rho_0 + b\rho_1)^2}{v_0}\big) = \theta_i\theta_j \cdot \frac{(1-b^2)\rho_1^2}{v_0}$$

类似地，若 $i \in S$ 且 $j \notin S$，

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \theta_i\theta_j\big(b - \frac{(\rho_0 + b\rho_1)(b\rho_0 + \rho_1)}{v_0}\big) = -\theta_i\theta_j \cdot \frac{(1-b^2)\rho_0\rho_1}{v_0}$$

and

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \theta_i\theta_j\big(1 - \frac{(b\rho_0 + \rho_1)^2}{v_0}\big) = \theta_i\theta_j \cdot \frac{(1-b^2)\rho_0^2}{v_0}$$

若 $i,\ j \in S^c$。命题得证。 □

Let

$$w = \Theta\Pi f = \theta_S\|\theta_{S^c}\|_1 - \theta_{S^c}\|\theta_S\|_1 = \rho_1\theta_S - \rho_0\theta_{S^c}$$

利用前面的引理，我们得到秩一特征分解

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\lambda}\tilde{\xi}\tilde{\xi}^\mathsf{T}, \tag{E.12}$$

其中我们定义

$$\tilde{\xi} = \frac{\rho_1\theta_S - \rho_0\theta_{S^c}}{\|\rho_1\theta_S - \rho_0\theta_{S^c}\|_2} = \frac{\rho_1\theta_S - \rho_0\theta_{S^c}}{\sqrt{\rho_1^2\|\theta_S\|_2^2 + \rho_0^2\|\theta_{S^c}\|_2^2}}, \text{ and} \tag{E.13}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{(1-b^2)}{v_0} \cdot \big(\rho_1^2\|\theta_S\|_2^2 + \rho_0^2\|\theta_{S^c}\|_2^2\big). \tag{E.14}$$

˜Jin 等人（2021c）的引理 E.5 表明，如果 $\|\theta_S\|_1/\|\theta\|_1 \asymp 1$, 那么 $\lambda_2 \asymp \lambda_1$。如果 $\|\theta_S\|_1/\|\theta\|_1 = o(1)$，则该保证可能不成立。下面，在 $K = 2$的情况下，我们将 λ 表示为 Ω 的˜特征值和特征向量的形式。这使我们能够像推论 E.1 中那样，更一般地比较 λ_2 与 λ。

˜**引理 E.3**。设 Ω 的特征值为 λ_1, λ_2，特征向量为 ξ_1, ξ_2。令 λ 表示˜Ω的特征值。那么

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_1\lambda_2\big(\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2\big)}{\lambda_1\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \lambda_2\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2}. \tag{E.15}$$

证明。通过直接计算,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} &= \Omega - \eta^*\eta^{*\mathsf{T}} \\
&= \lambda_1\big(1 - \frac{\lambda_1\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2}{v_0}\big)\xi_1\xi_1^{\mathsf{T}} + \lambda_2\big(1 - \frac{\lambda_2\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2}{v_0}\big)\xi_2\xi_2^{\mathsf{T}} - \frac{\lambda_1\lambda_2\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle}{v_0}\big(\xi_1\xi_2^{\mathsf{T}}\xi_2 + \xi_1^{\mathsf{T}}\big) \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{v_0}\big(\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle\xi_1 + \langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle\xi_2\big) \cdot \big(\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle\xi_1 + \langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle\xi_2\big)^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

由 (E.13) 和 (E.14) 可得

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi} &= \frac{\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle\xi_1 + \langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle\xi_2}{\sqrt{\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2}} \\
\tilde{\lambda} &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{v_0}\big(\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2\big).
\end{aligned}$$

□

推论 E.1. 有

$$|\lambda_2| \lesssim |\tilde{\lambda}| \lesssim \lambda_1. \tag{E.16}$$

若 $\lambda_2 \geq 0$，则

$$\lambda_2 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1 \tag{E.17}$$

证明。假设 $\lambda_2 \geq 0$。则

$$\lambda_2\big(\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2\big) \leq \lambda_1\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \lambda_2\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2 = v_0 \leq \lambda_1\big(\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2\big),$$

推出 (E.17)。

假设 $\lambda_2 < 0$。注意到

$$\lambda_1\big(\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2\big) \geq \lambda_1\langle\xi_1, \mathbf{1}\rangle^2 + \lambda_2\langle\xi_2, \mathbf{1}\rangle^2 = v_0 \geq 0,$$

˜结合 (E.15) 可推出 $|\lambda| \geq |\lambda_2|$。

接下来,

$$\lambda_2 \leq \tilde{\xi}^{\mathsf{T}}\Omega\tilde{\xi} = \tilde{\lambda} + \langle\tilde{\xi}, \eta^*\rangle^2,$$

这意味着

$$|\tilde{\lambda}| \leq |\lambda_2| + \langle\tilde{\xi}, \eta^*\rangle^2 \leq \lambda_1 + \|\eta^*\|_2^2 \lesssim \lambda_1 + \|\theta\|_1^2 \lesssim \lambda_1,$$

最后一个不等式由引理 E.5 得出。 □

接下来的结果在我们对 SgnQ 的分析中经常使用。

引理 E.4. 设 $v = \mathbf{1}^\mathsf{T}(\Omega - \text{diag}(\Omega))\mathbf{1}$ 且 $v_0 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\Omega\mathbf{1}$。那么

$$v_0 \sim v \sim \|\theta\|_1^2. \tag{E.18}$$

证明。 由 (E.4), $\|\theta\|_2^2 = o(\|\theta\|_1)$。由 (E.3), $\|\theta\|_1 \to \infty$。因此

$$v = \mathbf{1}^\mathsf{T}(\Omega - \text{diag}(\Omega))\mathbf{1} = \|\theta\|_1^2 - \|\theta\|_2^2 \sim \|\theta\|_1^2 \sim v_0 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\Omega\mathbf{1}.$$

□

下一个结果可直接由引理 E.2 和 E.4 推得。

推论 E.2. 定义 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 为

$$\beta = \sqrt{\frac{|1-b^2|}{v_0}} \cdot \left(\|\theta_{S^c}\|_1 \mathbf{1}_S + \|\theta_S\|_1 \mathbf{1}_{S^c}\right) \tag{E.19}$$

Then

$$|\tilde{\Omega}_{ij}| \lesssim \beta_i\theta_i\beta_j\theta_j. \tag{E.20}$$

引理 E.5. 设 λ_1 表示Ω的最大特征值。那么

$$\lambda_1 \gtrsim \|\theta\|_2^2. \tag{E.21}$$

证明。 利用普适不等式 $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$, ，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq \frac{\theta^\mathsf{T}\Omega\theta}{\|\theta\|_2^2} \geq \frac{1}{\|\theta\|_2^2} \cdot \sum_{i,j} \theta_i\theta_j\Omega_{ij} \geq \frac{1}{\|\theta\|_2^2} \cdot \Big(\sum_{i,j\in S} \theta_i^2\theta_j^2 + \sum_{i,j\notin S} \theta_i^2\theta_j^2\Big) \\ &\geq \frac{\|\theta_S\|_2^4 + \|\theta_{S^c}\|_2^4}{\|\theta\|_2^2} \gtrsim \|\theta\|_2^2.\end{aligned}$$

□

引理 E.6。 定义 $\eta = \frac{1}{\sqrt{v}}(\Omega - \text{diag}(\Omega))\mathbf{1}$。则

$$\eta_i \lesssim \eta_i^* \lesssim \theta_i \tag{E.22}$$

证明。 左侧显然成立，因此我们证明 $\eta_i^* \lesssim \theta_i$。我们有

$$(\Omega\mathbf{1})_i = \begin{cases}\theta_i(\|\theta_S\|_1 + b\|\theta_{S^c}\|_1) & \text{if } i \in S \\ \theta_i(b\|\theta_S\|_1 + \|\theta_{S^c}\|_1) & \text{if } i \notin S\end{cases}$$

由于 $\Omega_{ii} = \theta_i^2$,

$$\sqrt{v_0} \cdot \eta_i = \begin{cases}\theta_i(\|\theta_S\|_1 + b\|\theta_{S^c}\|_1) - \theta_i^2 & \text{if } i \in S \\ \theta_i(b\|\theta_S\|_1 + \|\theta_{S^c}\|_1) - \theta_i^2 & \text{if } i \notin S.\end{cases}$$

由于 $b = O(1)$、 $\theta_i = O(1)$以及 $v_0 \gtrsim \|\theta\|_1^2$ （参见引理 E.4），

$$\eta_i^* \lesssim \frac{\theta_i\|\theta\|_1}{\sqrt{\|\theta\|_1^2}} = \theta_i,$$

如所需。 □

我们在全文中使用界 (E.18)–(E.22)。我们还反复使用以下事实：

$$\|\theta\|_p^p \lesssim \|\theta\|_q^q, \text{ if } p \geq q, \tag{E.23}$$

根据 (E.2)，该式成立；并且

$$\begin{aligned}\|\beta \circ \theta\|_2^2 &= |\tilde{\lambda}| \\ |\beta_i| &\lesssim 1 \\ \|\beta \circ \theta^{\circ 2}\|_1 \leq \|\beta \circ \theta\|_2\|\theta\|_2 &\lesssim \|\theta\|_2^2,\end{aligned} \tag{E.24}$$

其中第二行由柯西–施瓦茨不等式得出。

E.3 SgnQ 的均值和方差

˜ ˜Jin 等人（2021c）的先前工作将 Q 和 $Q - Q^*$ 分解为有限个项。Jin 等人（2021c）推导出了每一项的均值和方差的精确表达式，该表达式取决于˜ θ、 η、 v 和 Ω。随后，利用不等式 (E.2)、(E.3)、(E.18)、(E.21)–(E.23)，以及一个形式如下的不等式，对这些表达式进行界定

$$|\tilde{\Omega}_{ij}| \lesssim \alpha\theta_i\theta_j.$$

在我们的情形中，这种形式的不等式仍然成立，但无法得到精确的结果，因为它没有˜恰当地捕捉来自较小社区的信号 $|\lambda|$。因此，我们使用不等式 (E.20)，˜再利用 (E.24) 中的界来处理涉及 Ω 的项。

˜ ˜ ˜因此，对于不依赖于 Ω 的 Q 和 $Q - Q^*$ 项，Jin 等人（2021c）中的界可以直接沿用。特别是，他们对零假设的分析可以直接沿用。因此，我们只需关注备择假设。

此外，Jin 等人（2021c）中任何均值为零的项，在我们的设定下其均值也为零：对于每个均值为零的项，它都只是若干均值为零的子项之和，而每个均值为零的子项都是相互独立的中心化随机变量的乘积（例如，X_1 如下）。

E.3.1 理想 SGNQ

˜先前的工作 Jin 等人（2021c）表明 $Q = X_1 + 4X_2 + 4X_3 + 2X_4 + 4X_5 + X_6$，其中 X_1、……、 X_6 的定义见其 G.1 节。为方便起见，我们明确列出这些项的定义。

$$X_1 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} W_{ij}W_{jk}W_{k\ell}W_{\ell i}, \qquad X_2 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{ij}W_{jk}W_{k\ell}W_{\ell i},$$
$$X_3 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{ij}\widetilde{\Omega}_{jk}W_{k\ell}W_{\ell i}, \qquad X_4 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{ij}W_{jk}\widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i},$$
$$X_5 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{ij}\widetilde{\Omega}_{jk}\widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i}, \qquad X_6 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{ij}\widetilde{\Omega}_{jk}\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}.$$

˜由于 X_1 不依赖于 Ω，下面关于 X_1 的界直接引自 Jin 等人（2021c）的引理 G.3。另请注意，X_6 是一个非随机项。

引理 E.7。 在备择假设下，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k] &= 0 \textit{ for } 1 \le k \le 5,\\
\mathrm{Var}(X_1) &\lesssim \|\theta\|_2^8 \lesssim \lambda_1^4\\
\mathrm{Var}(X_2) &\lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\,\|\theta\|_2^4 \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^2\\
\mathrm{Var}(X_3) &\lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^8\,\|\theta\|_2^2 \lesssim |\tilde{\lambda}|^4\lambda_1\\
\mathrm{Var}(X_4) &\lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^8 \le |\tilde{\lambda}|^4\\
\mathrm{Var}(X_5) &\lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^{12} \lesssim |\tilde{\lambda}|^6, \textit{ and}\\
\mathbb{E}[X_6] &= X_6 \sim |\tilde{\lambda}^4|
\end{aligned}$$

由于我们在备择假设下假定 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$，因此有

$$\mathrm{Var}(\tilde{Q}) \lesssim \lambda_1^4 + |\tilde{\lambda}|^6.$$

定理 E.2 可直接由这个界以及 $\mathbb{E}X_6 = \mathbb{E}\tilde{Q} \sim \tilde{\lambda}^4$ 得出。

E.3.2 代理 SGNQ

Jin 等人（2021c）的先前研究表明

$$\tilde{Q} - Q^* = U_a + U_b + U_c,$$

其中

$$U_a = 4Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4 + 4Y_5 + 4Y_6$$
$$U_b = 4Z_1 + 2Z_2 + 8Z_3 + 4Z_4 + 4Z_5 + 2Z_6$$
$$U_c = 4T_1 + 4T_2 + F.$$

这些项定义于 Jin 等人（2021c）的 G.2 节。为方便起见，我们在下文中明确给出定义。仔细展开 (E.6) 和 (E.7) 中定义的 Q 和 Q^*，即可得到前面的方程。因此，上述等式右侧的各项称为展开后项，我们可以逐项分析。现在开始给出它们的定义。

首先，$Y_1, \ldots, Y_6$ 定义如下。

$$Y_1 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} W_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i}, \qquad Y_2 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i},$$
$$Y_3 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} W_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{\ell i}, \qquad Y_4 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{\ell i},$$
$$Y_5 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} W_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}, \qquad Y_6 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}.$$

接下来，$Z_1, \ldots, Z_6$ 定义如下。

$$Z_1 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \delta_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i}, \qquad Z_2 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} W_{jk} \delta_{k\ell} W_{\ell i},$$
$$Z_3 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \delta_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{\ell i}, \qquad Z_4 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \delta_{k\ell} W_{\ell i},$$
$$Z_5 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \delta_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}, \qquad Z_6 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \delta_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}.$$

最后，给出 T_1, T_2 和 F 的定义。

$$T_1 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{k\ell} W_{\ell i}, \qquad T_2 = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i},$$
$$F = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{k\ell} \delta_{\ell i}.$$

以下展开后各项见 Jin 等人（2021c）的引理 G.5。项 $Y_1^{\tilde{}}$ 不依赖于 Ω，因此我们可以直接引用该结果。

引理 E.8. 在备择假设下，有

$$|\mathbb{E}Y_1| = 0, \qquad \mathrm{Var}(Y_1) \lesssim \|\theta\|_2^2 \|\theta\|_3^6 \lesssim \lambda_1^4$$
$$|\mathbb{E}Y_2| = 0, \qquad \mathrm{Var}(Y_2) \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^2 \|\theta\|_2^6 \lesssim |\tilde{\lambda}| \lambda_1^3$$
$$|\mathbb{E}Y_3| = 0, \qquad \mathrm{Var}(Y_3) \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^4 \lesssim |\tilde{\lambda}|^2 \lambda_1^2$$
$$|\mathbb{E}Y_4| \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^2 \lesssim |\tilde{\lambda}|^2 \lambda_1, \qquad \text{方差}(Y_4) \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^6 \|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1} \lesssim |\tilde{\lambda}|^3 \lambda_1^2$$
$$|\mathbb{E}Y_5| = 0, \qquad \mathrm{Var}(Y_5) \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^6 \|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1} \lesssim |\tilde{\lambda}|^3 \lambda_1$$
$$|\mathbb{E}Y_6| = 0, \qquad \mathrm{Var}(Y_6) \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^{12} \|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1} \lesssim |\tilde{\lambda}|^6.$$

因此，

$$|\mathbb{E}U_a| \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1 = o(\tilde{\lambda}^4). \tag{E.25}$$

此外，利用推论 E.1 以及 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \overline{\infty}$，我们有

$$\mathrm{Var}(U_a) \lesssim \lambda_1^4 + |\tilde{\lambda}|^3\lambda_1^2 + |\tilde{\lambda}|^6. \tag{E.26}$$

以下各项出现在 Jin 等人（2021c）的引理 G.7 中。关于 Z_1 和 Z_2 的界直接引自 Jin 等人（2021c）。

引理 E.9。 在备择假设下，有

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}Z_1| \lesssim \|\theta\|_2^4 \lesssim \lambda_1^2, && \mathrm{Var}(Z_1) \lesssim \|\theta\|_2^2\,\|\theta\|_3^6 \lesssim \lambda_1^4\\
&|\mathbb{E}Z_2| \lesssim \|\theta\|_2^4 \lesssim \lambda_1^2, && \mathrm{Var}(Z_2) \lesssim \frac{\|\theta\|_2^6\,\|\theta\|_3^3}{\|\theta\|_1} \lesssim \lambda_1^3\\
&|\mathbb{E}Z_3| = 0, && \mathrm{Var}(Z_3) \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\,\|\theta\|_2^6 \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^3\\
&|\mathbb{E}Z_4| \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^2\,\|\theta\|_2^2 \lesssim |\tilde{\lambda}|\lambda_1, && \mathrm{Var}(Z_4) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\,\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1} \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^2\\
&|\mathbb{E}Z_5| \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\,\|\theta\|_2^2 \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1, && \mathrm{Var}(Z_5) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\,\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2} \lesssim |\tilde{\lambda}|^4\lambda_1\\
&|\mathbb{E}Z_6| \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\,\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2} \lesssim |\tilde{\lambda}|^2, && \mathrm{Var}(Z_6) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\,\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2} \lesssim |\tilde{\lambda}|^4.
\end{aligned}$$

利用推论 E.1 以及在备择假设下 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$ 这一事实，我们有

$$|\mathbb{E}U_b| \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1, \tag{E.27}$$

and

$$\mathrm{Var}(U_b) \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^3. \tag{E.28}$$

以下各项出现在 Jin 等人（2021c）的引理 G.9 中。关于 T_1 和 F 的界直接引自 Jin 等人（2021c），因为它们不依赖于 $Omega$。

引理 E.10. 在备择假设下，有

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}T_1| \le \frac{\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2} \lesssim \lambda_1, && \mathrm{Var}(T_1) \lesssim \frac{\|\theta\|_2^6\,\|\theta\|_3^3}{\|\theta\|_1} \lesssim \lambda_1^3\\
&|\mathbb{E}T_2| \le \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\,\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2} \lesssim |\tilde{\lambda}|, && \mathrm{Var}(T_2) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\,\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^2} \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^2\\
&|\mathbb{E}F| \lesssim \|\theta\|_2^4 \lesssim \lambda_1^2, && \mathrm{Var}(F) \lesssim \frac{\|\theta\|_2^{10}}{\|\theta\|_1^2} \lesssim \lambda_1^3
\end{aligned}$$

U利用推论 E.1 以及在备择假设下 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$ 这一事实，我们有

$$|\mathbb{E}U_c| \lesssim \lambda_1^2, \tag{E.29}$$

and

$$\mathrm{Var}(U_c) \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^2. \tag{E.30}$$

利用推论 E.1 以及 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$,不等式 (E.25)–(E.30) 推出定理 E.3 .

E.3.3 实 SgnQ

关于实 SgnQ 的第一个引理起到了 Jin 等人（2021c）中引理 G.11 的作用。

引理 E.11。 在上述假设下，当 $n \to \infty$时，

- *Under the null hypothesis,* $|\mathbb{E}[Q^* - \tilde{Q}^*]| = o(\|\theta\|_2^4)$ *and* $\mathrm{Var}(Q^* - \tilde{Q}^*) = o(\|\theta\|_2^8)$.
- *Under the alternative hypothesis, if* $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$*, then* $|\mathbb{E}[Q^* - \tilde{Q}^*]| \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1$ *and* $\mathrm{Var}(Q^* - \tilde{Q}^*) \lesssim |\tilde{\lambda}|^2\lambda_1^3$.

下面的引理起到了 Jin 等人（2021c）中引理 G.12 的作用。

引理 E.12. 在前述假设下，当 $n \to \infty$时，

- *Under the null hypothesis,* $|\mathbb{E}[Q - \tilde{Q}^*]| = o(\|\theta\|_2^4)$ *and* $\mathrm{Var}(Q - \tilde{Q}^*) = o(\|\theta\|_2^8)$.
- *Under the alternative hypothesis, if* $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$*, then* $|\mathbb{E}[Q - \tilde{Q}^*]| \lesssim \lambda_1^2 + |\tilde{\lambda}|^3$ *and* $\mathrm{Var}(Q - \tilde{Q}^*) \lesssim \lambda_1^4$.

E.4 引理 E.7–E.12 的证明

E.4.1 证明策略

首先，我们介绍引理 E.7–E.10 的证明方法。我们借鉴 Jin 等人（2021c）的以下策略。令 T表示引理 E.7–E.10 中出现的一项，其一般形式为

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}} c_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m}$$

其中

- $m = O(1)$,
- $\mathcal{R}$ 是 $[n]^m$的子集,
- $c_{i_1,\ \ldots,\ i_m} = \prod_{(s,\ s')\in A} \Gamma_{(s,\ s')\ i_s,\ i_{s'}}$ 是一个非随机系数，其中 $A \subset [m] \times [m]$ 和$\Gamma_{(s,\ s')} \in \{\tilde{\Omega},\ \eta^*\mathbf{1}\tau\eta\mathbf{1}\tau,\ \mathbf{1}\mathbf{1}\tau\}$，并且
- $G_{i_1,\ \ldots,\ i_m} = \prod_{(s,\ s')\in B} W_{i_s,\ i_{s'}}$ 其中 $B \subset [m] \times [m]$。

由于我们研究的是带符号四边形，因此可以直接取上文的 $m = 4$，不过我们希望以一般形式陈述该引理。

定义 $\Gamma^{(s,s')}{}_{i_s,\ i_{s'}}$ 关于 $\Gamma^{(s,s')}{}_{i_s,\ i_{s'}}$ 的一个（相差常数因子）规范上界 如下:

$$\overline{\Gamma^{(s,s')}_{i_s,i_{s'}}} = \begin{cases} \beta_{i_s}\theta_{i_s}\beta_{i_{s'}}\theta_{i_{s'}} & \text{if } \Gamma^{(s,s')} = \tilde{\Omega}, \\ \theta_{i_s} & \text{if } \Gamma^{(s,s')} \in \{\eta^*\mathbf{1}^\mathsf{T}, \eta\mathbf{1}^\mathsf{T}\} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{E.31}$$

定义

$$\overline{c_{i_1,\ldots,i_m}} = \prod_{(s,s')\in A} \overline{\Gamma^{(s,s')}_{i_s,i_{s'}}}. \tag{E.32}$$

根据推论 E.1 和引理 E.6,

$$|c_{i_1,\ldots i_m}| \lesssim \overline{c_{i_1,\ldots,i_m}}.$$

在 Jin 等人（2021c）中，每个项 T 都分解为 $L = O(1)$ 项之和:

$$T = \sum_{\ell=1}^{L} T^{(L)} = \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}^{(\ell)}} c_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m}. \tag{E.33}$$

I在下面的分析以及 Jin 等人（2021c）的分析中，通过以下方式得到 $|\mathbb{E}T|$ 的上界 $\mathbb{E}T$

$$|\mathbb{E}T| \le \sum_{\ell=1}^{L} |\mathbb{E}T^{(\ell)}| \le \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}^{(\ell)}} |c_{i_1,\ldots,i_m}| \cdot |\mathbb{E}G_{i_1,\ldots,i_m}|$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}^{(\ell)}} \overline{c_{i_1,\ldots,i_m}} \cdot |\mathbb{E} G_{i_1,\ldots,i_m}|$$
$$=: \overline{\mathbb{E}T}. \tag{E.34}$$

此外，通过以下方式得到$\overline{\text{Var}T}$ 的方差上界 Var$T$

$$\begin{aligned}
\text{Var}T &\leq L \sum_{\ell=1}^{L} \text{Var}(T^{(\ell)}) \\
&\leq L \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}^{(\ell)} \\ i'_1,\ldots,i'_m \in \mathcal{R}^{(\ell)}}} |c_{i_1,\ldots,i_m} c_{i'_1,\ldots,i'_m}| \cdot \left|\text{Cov}\left(G_{i_1,\ldots,i_m}, G_{i'_1,\ldots,i'_m}\right)\right| \\
&\leq L \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}^{(\ell)} \\ i'_1,\ldots,i'_m \in \mathcal{R}^{(\ell)}}} \overline{c_{i_1,\ldots,i_m}} \cdot \overline{c_{i'_1,\ldots,i'_m}} \cdot \left|\text{Cov}\left(G_{i_1,\ldots,i_m}, G_{i'_1,\ldots,i'_m}\right)\right| \\
&=: \overline{\text{Var}T}.
\end{aligned} \tag{E.35}$$

在引理 E.7–E.10 中，所有给出的上界均以这种方式得到，因此都是关于 $\mathbb{E}T$ 和 Var$T$的上界。

请注意， $\mathbb{E}T$和 Var$T$的定义取决于 Jin 等人（2021c）给出的 T的特定分解 (E.33)。详见下文的证明，其中包括明确的分解。我们再次指出，我们的设定与 Jin 等人（2021c）的区别在于，Jin 等人（2021c）使用的关于 $|\Omega_{ij}|$ 的典型上界 ˜bound 具有 $\alpha\theta_i\theta_j$ 的形式，而不是我们所需的不等式 $\beta_i\theta_i\beta_j\theta_j$。

The 上述形式体系立即推出以下有用事实，使我们能够转移界 s
bet于具有相似结构的项之间。

引理 E.13。 假设

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}} c_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m},$$
$$T^* = \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}} c^*_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m},$$

其中

$$|c_{i_1,\ldots,i_m}| \lesssim \overline{c^*_{i_1,\ldots,i_m}}$$

Then

$$|\mathbb{E}T| \lesssim \overline{\mathbb{E}[T^*]}$$

and

$$\text{Var}\, T \lesssim \overline{\text{Var}\, T^*}.$$

在分析的第二部分，我们证明引理 E.11 和 E.12 可由引理 E.7–E.10 以及反复应用引理 E.13 得出。

E.4.2 引理 E.7 的证明

关于 X_1 的界可直接由 Jin 等人（2021c）得出。

在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 37 页）中证明了 $\mathbb{E}X_2 = 0$，并且

$$\text{Var}(X_2) = 2 \sum_{i,j,k,\ell(dist.)} \tilde{\Omega}^2_{ij} \cdot \text{Var}(W_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i}).$$

因此，根据（E.1）和（E.2），

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_2) &\lesssim \sum_{i,j,k,\ell(dist.)} \tilde{\Omega}_{ij}^2 \cdot \mathrm{Var}(W_{jk}W_{k\ell}W_{\ell i}) \lesssim \sum_{i,j,k,\ell} \beta_i^2\theta_i^2\beta_j^2\theta_j^2 \cdot \Omega_{jk}\Omega_{k\ell}\Omega_{\ell i} \\ &\lesssim \sum_{i,j,k,\ell} \beta_i^2\theta_i^2\beta_j^2\theta_j^2 \cdot \theta_j\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_i = \|\beta\circ\theta\|_2^4\,\|\theta\|_2^4\end{aligned}$$

Jin 等人（2021c，补充材料，第 38 页）证明了 $\mathbb{E}X_3 = 0$和

$$\mathrm{Var}(X_3) \lesssim \sum_{i,k,\ell(dist)} \Big(\sum_{j\notin\{i,k,\ell\}} \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{jk}\Big)^2 \cdot \mathrm{Var}(W_{k\ell}W_{\ell i}).$$

根据 (E.20) 和 (E.24),

$$\Big(\sum_{j\notin\{i,k,\ell\}} \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{jk}\Big)^2 \le \beta_i^2\theta_i^2\,\beta_k^2\theta_k^2\,\|\beta\circ\theta\|_2^4$$

因此，根据 (E.1) 和 (E.2),

$$\begin{aligned}&\text{方差}(X_3) \lesssim \sum \beta_i^2\theta_i^2\,\beta_k^2\theta_k^2\,\|\beta\circ\theta\|_2^4\cdot\Omega_{k\ell}\Omega \\ &{}_{\ell i} \lesssim \sum \beta_i^2\theta_i^3\,\beta_k^2\theta_k^3\,\|\beta\circ\theta\|_2^4\cdot\theta_\ell^2 \quad \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^8\,\|\theta\|_2^2{}_{i,k,\ell} \qquad\qquad {}_{i,k,\ell}\end{aligned}$$

在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 38 页）中证明了 $\mathbb{E}X_4 = 0$和

$$\mathrm{Var}(X_4) \lesssim \sum_{i,j,k,\ell(dist.)} \tilde{\Omega}_{ij}^2\tilde{\Omega}_{k\ell}^2 \cdot \mathrm{Var}(W_{jk}W_{\ell i}).$$

由（E.1）和（E.20），

$$\mathrm{Var}(X_4) \lesssim \sum_{i,j,k,\ell} \beta_i^2\theta_i^2\beta_j^2\theta_j^2\beta_k^2\theta_k^2\beta_\ell^2\theta_\ell^2 \cdot \theta_j\theta_k\theta_\ell\theta_i \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^8.$$

在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 39 页）中证明了 $\mathbb{E}X_5 = 0$和

$$\mathrm{Var}(X_5) = 2\sum_{i<\ell}\Big(\sum_{\substack{j,k\notin\{i,\ell\}\\ j\neq k}} \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{jk}\tilde{\Omega}_{k\ell}\Big)^2 \cdot \mathrm{Var}(W_{\ell i}).$$

我们有

$$\Big|\sum_{\substack{j,k\notin\{i,\ell\}\\ j\neq k}} \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{jk}\tilde{\Omega}_{k\ell}\Big| \lesssim \beta_i\theta_i\|\beta\circ\theta\|_2^4\beta_\ell\theta_\ell.$$

因此，由（E.1）和（E.2），

$$\mathrm{Var}(X_5) \lesssim \sum_{i,\ell}\big(\beta_i\theta_i\|\beta\circ\theta\|_2^4\beta_\ell\theta_\ell\big)^2 \cdot \theta_\ell\theta_i \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^{12}.$$

注意， X_6 是一个非随机项。仿照（Jin 等人，2021c，补充材料，第 39 页），由（E.24）可得,

$$|X_6 - \tilde{\lambda}^4| \lesssim \sum_{i,j,k,\ell(not\,dist.)} \beta_i^2\theta_i^2\beta_j^2\theta_j^2\beta_k^2\theta_k^2\beta_\ell^2\theta_\ell^2 \lesssim \sum_{i,j,k} \beta_i^2\theta_i^2\beta_j^2\theta_j^2\beta_k^4\theta_k^4 \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^6 \lesssim |\tilde{\lambda}|^3.$$

证明到此结束。 □

E.4.3 引理 E.8 的证明

Y_1 的界可直接由（Jin 等人，2021c，引理 G.5）得到。

（Jin 等人，2021c，补充材料，第 43 页）中证明了 $\mathbb{E}Y_2 = 0$。为研究 Var(Y_2)，我们写作 $Y = Y_{2a} + Y_{2b} + Y_{2c}$ 其中，按照（Jin 等人，2021c，补充材料，第 43 页）的做法，我们定义

$$\begin{aligned} Y_2 &= -\frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\substack{i,j,k,\ell(dist) \\ s\neq j}} \eta_i \widetilde{\Omega}_{jk} W_{js} W_{k\ell} W_{\ell i} \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{i,k,\ell(dist)} \Big(\sum_{j\notin\{i,k,\ell\}} \eta_j \widetilde{\Omega}_{jk} \Big) W_{i\ell}^2 W_{k\ell} \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\substack{i,k,\ell(dist) \\ s\notin\{i,\ell\}}} \Big(\sum_{j\notin\{i,k,\ell\}} \eta_j \widetilde{\Omega}_{jk} \Big) W_{is} W_{k\ell} W_{\ell i} \\ &\equiv Y_{2a} + Y_{2b} + Y_{2c}. \end{aligned} \tag{E.36}$$

其中证明了

$$\mathrm{Var}(Y_{2a}) \lesssim \frac{1}{v} \sum_{ijk\ell s} \left| \eta_i \tilde{\Omega}_{jk} + \eta_i \tilde{\Omega}_{sk} + \eta_k \tilde{\Omega}_{ji} + \eta_k \tilde{\Omega}_{si} \right|^2 \cdot \mathrm{Var}(W_{js} W_{k\ell} W_{\ell i}).$$

根据式 (E.22)，我们有

$$\left| \eta_i \tilde{\Omega}_{jk} + \eta_i \tilde{\Omega}_{sk} + \eta_k \tilde{\Omega}_{ji} + \eta_k \tilde{\Omega}_{si} \right| \lesssim \theta_i\beta_j\theta_j\beta_k\theta_k + \theta_i\beta_s\theta_s\beta_k\theta_k + \theta_k\beta_j\theta_j\beta_i\theta_i + \theta_k\beta_s\theta_s\beta_i\theta_i.$$

因此，根据式 (E.1)、(E.2) 和 (E.18)，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_{2a}) &\lesssim \frac{1}{v} \sum_{ijk\ell s} \left(\theta_i\beta_j\theta_j\beta_k\theta_k + \theta_i\beta_s\theta_s\beta_k\theta_k + \theta_k\beta_j\theta_j\beta_i\theta_i + \theta_k\beta_s\theta_s\beta_i\theta_i \right)^2 \cdot \theta_j\theta_s\theta_k\theta_\ell^2\theta_i \\ &\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4 \|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1} \end{aligned}$$

接下来，在 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 43 页) 中，证明了

$$\mathrm{Var}(Y_{2b}) \lesssim \frac{1}{v} \sum_{\substack{ik\ell(dist) \\ i'k'\ell'(dist)}} |\alpha_{ik\ell}\alpha_{i'k'\ell'}| \cdot \mathbb{E}[W_{i\ell}^2 W_{k\ell}, W_{i'\ell'}^2 W_{k'\ell'}]$$

其中 $\alpha_{ik\ell} = \sum_{j\notin\{i,k,\ell\}} \eta_j \Omega_{jk}$。根据式 (E.24)，

$$|\alpha_{ik\ell}| \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2 \|\theta\|_2\, \theta_k.$$

根据 (E.1)、(E.18)、上述不等式，以及 Jin 等人（2021c，补充材料，第 44 页）对 $E[W_{i\ell}^2 W_{k\ell}, W_{i'\ell'}^2 W_{k'\ell'}]$ 的分类讨论，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_{2b}) &\lesssim \frac{1}{v} \sum_{\substack{ik\ell(dist) \\ i'k'\ell'(dist)}} \|\beta\circ\theta\|_2^2 \|\theta\|_2^2 \theta_k\theta_{k'} \mathbb{E}[W_{i\ell}^2 W_{k\ell}, W_{i'\ell'}^2 W_{k'\ell'}] \\ &\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2 \|\theta\|_2^2}{v} \Big(\sum_{ik\ell} \theta_i\theta_k^3\theta_\ell^2 + \sum_{ik\ell i'} \theta_i\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_{i'} + \sum_{ik\ell} \theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2 \Big) \\ &\lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^2 \|\theta\|_2^6. \end{aligned}$$

接下来，Jin 等人（2021c，补充材料，第 44 页）证明了

$$\mathrm{Var}(Y_{2c}) \lesssim \frac{1}{v} \sum_{\substack{ik\ell(dist) \\ s\notin\{i,\ell\}}} \beta_{ik\ell}^2 \mathrm{Var}(W_{is} W_{k\ell} W_{\ell i})$$

其中 $\alpha_{ik\ell}$ 的定义与 Y_{2b} 相同。因此

$$\mathrm{Var}(Y_{2c}) \lesssim \frac{1}{v} \sum_{\substack{ik\ell(dist) \\ s\notin\{i,\ell\}}} \|\beta\circ\theta\|_2^2 \|\theta\|_2^2 \theta_k^2 \cdot \theta_k\theta_\ell^2\theta_s \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2 \|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1}.$$

结合 Y_{2a}， Y_{2b}， Y_{2c} 的结果，即可得出关于 Var(Y_2) 的结论。

在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 45 页）中，证明了 $\mathbb{E}Y_3 = 0$，并引入了分解

$$\begin{aligned} Y_3 &= -\frac{2}{\sqrt{v}} \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \eta_i \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{jk}^2 W_{\ell i} - \frac{2}{\sqrt{v}} \sum_{\substack{i,j,k,\ell(dist) \\ s \notin \{j,k\}}} \eta_i \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{js} W_{jk} W_{\ell i} \\ &\equiv Y_{3a} + Y_{3b}, \end{aligned} \tag{E.37}$$

。其中证明了

$$\mathrm{Var}(Y_{3a}) = \frac{4}{v} \sum_{\substack{i,j,k,\ell(dist) \\ i',j',k',\ell'(dist)}} (\eta_i \widetilde{\Omega}_{k\ell} \eta_{i'} \widetilde{\Omega}_{k'\ell'}) \cdot \mathbb{E}[W_{jk}^2 W_{\ell i} W_{j'k'}^2 W_{\ell' i'}].$$

利用（E.1）、（E.2）、（E.24）以及（Jin 等人，2021c，补充材料，第 45 页）中的分类讨论，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_{3a}) &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^2} \bigg(\sum_{ijk\ell} [\beta_k^2 \beta_\ell^2 + \beta_i \beta_j \beta_k \beta_\ell] \theta_i^2 \theta_j^2 \theta_k^2 \theta_\ell^2 + \sum_{ijk\ell j'k'} \beta_k \beta_\ell^2 \beta_{k'} \theta_i^3 \theta_j \theta_k^2 \theta_\ell^3 \theta_{j'} \theta_{k'}^2 \bigg) \\ &\lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2} + \|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^4 \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^4 \end{aligned}$$

与对 Y_{2a} 的研究类似，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_{3b}) &\lesssim \frac{1}{v} \sum_{ijk\ell s} \big(\theta_i \beta_k \theta_k \beta_\ell \theta_\ell + \theta_\ell \beta_k \theta_k \beta_i \theta_i + \theta_i \beta_s \theta_s \beta_\ell \theta_\ell + \theta_\ell \beta_s \theta_s \beta_i \theta_i \big)^2 \cdot \mathrm{Var}(W_{sj} W_{jk} W_{\ell i}) \\ &\lesssim \frac{1}{v} \sum_{ijk\ell s} \big(\theta_i \beta_k \theta_k \beta_\ell \theta_\ell + \theta_\ell \beta_k \theta_k \beta_i \theta_i + \theta_i \beta_s \theta_s \beta_\ell \theta_\ell + \theta_\ell \beta_s \theta_s \beta_i \theta_i \big)^2 \cdot \theta_s \theta_j^2 \theta_k \theta_\ell \theta_i \\ &\lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1}. \end{aligned}$$

结合 Var(Y_{3a}) 和 Var(Y_{3b}) 的界，可得 Var(Y_3) 的所需上界。按照（Jin 等人，2021c，补充材料，第 46 页），我们得到分解

$$\begin{aligned} Y_4 &= -\frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\substack{i,j,\ell(dist) \\ s \neq j}} \Big(\sum_{k \notin \{i,j,\ell\}} \eta_i \widetilde{\Omega}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \Big) W_{js} W_{\ell i} - \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\substack{i,\ell(dist) \\ s \neq i}} \Big(\sum_{j,k \notin \{i,\ell\}} \eta_j \widetilde{\Omega}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \Big) W_{is} W_{\ell i} \\ &\equiv Y_{4a} + Y_{4b}. \end{aligned}$$

首先，我们研究 Y_{4a}；Jin 等人（2021c）证明它的均值为零，并满足以下条件：

$$\mathrm{Var}(Y_{4a}) \lesssim \frac{1}{v} \sum_{\substack{ij\ell(dist) \\ s \neq j}} \alpha_{ij\ell}^2 \mathrm{Var}(W_{js} W_{\ell i})$$

~ ~其中 $\alpha_{ij\ell} = \sum_{k \notin \{i,j,\ell\}} \eta_i \Omega_{jk} \Omega_{k\ell}$。与之前的论证类似，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_{4a}) &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^2} \sum_{ij\ell s} \theta_i^2 (\beta_j \theta_j)^2 (\beta_\ell \theta_\ell)^2 \|\beta \circ \theta\|_2^4 \cdot \theta_i \theta_j \theta_\ell \theta_s \\ &\lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1}. \end{aligned}$$

接下来，我们使用分解来研究 Y_{4b}

$$Y_{4b} = -\frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{i,\ell(dist)} \beta_{i\ell} W_{\ell i}^2 - \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\substack{i,\ell(dist) \\ s \notin \{i,\ell\}}} \beta_{i\ell} W_{is} W_{\ell i} \equiv \widetilde{Y}_{4b} + Y_{4b}^*.$$

˜（引自 Jin 等人，2021c，补充材料，第 47 页）。其中证明了只有 $\mathbb{E}Y_{4b}$ 非零，并且

$$|\mathbb{E}\tilde{Y}_{4b}| \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1}\sum_{i,\ell}|\alpha_{i\ell}|\theta_i\theta_\ell.$$

˜ ˜其中 $\alpha_{i,\ell}=\sum_{j,k\notin\{i,\ell\}}\eta_j\Omega_{jk}\Omega_{k\ell}$。在我们的情形下，由 (E.24) 可得，

$$|\alpha_{i\ell}| \lesssim \beta_\ell\theta_\ell\|\beta\circ\theta\|_2^3\|\theta\|_2.$$

采用与前文类似的论证，

$$|\mathbb{E}\tilde{Y}_{4b}| \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1}\sum_{i\ell}\beta_\ell\theta_\ell\|\beta\circ\theta\|_2^3\|\theta\|_2\cdot\theta_i\theta_\ell \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^2.$$

现在我们研究 Var(Y_{4b})。利用上述关于 $|\alpha_{i\ell}|$ 的界并进行直接计算，

$$\mathrm{Var}(\widetilde{Y}_{4b}) = \frac{2}{v}\sum_{i,\ell(dist)}\alpha_{i\ell}^2\cdot\mathrm{Var}(W_{i\ell}^2) \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^2}\sum_{i,\ell}\beta_\ell^2\theta_\ell^2\|\beta\circ\theta\|_2^6\|\theta\|_2^2\cdot\theta_i\theta_\ell \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1},$$

$$\mathrm{Var}(Y_{4b}^*) \le \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\}}}\alpha_{i\ell}^2\cdot\mathrm{Var}(W_{is}W_{\ell i}) \le \frac{1}{\|\theta\|_1^2}\sum_{i,\ell,s}\beta_\ell^2\theta_\ell^2\|\beta\circ\theta\|_2^6\|\theta\|_2^2\cdot\theta_i^2\theta_\ell\theta_s \le \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1}.$$

结合上述结果，可得关于 $\mathbb{E}Y_{4b}$ 和 Var(Y_{4b})。

在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 48 页）中证明了 $\mathbb{E}Y_5=0$and

$$\mathrm{Var}(Y_5) \lesssim \frac{1}{v}\sum_{\substack{j,k,\ell(dist)\\ s\neq j}}\alpha_{jk\ell}^2\cdot\mathrm{Var}(W_{js}W_{k\ell})$$

其中

$$\alpha_{jk\ell} \equiv \sum_{i\notin\{j,k,\ell\}}\eta_i\widetilde{\Omega}_{jk}\widetilde{\Omega}_{\ell i}.$$

利用（E.20）、（E.24）和三角不等式，我们有，

$$|\alpha_{jk\ell}| \lesssim \|\theta\|_2^2(\beta_j\theta_j)(\beta_k\theta_k)(\beta_\ell\theta_\ell).$$

因此，按照与前面类似的论证，

$$\mathrm{Var}(Y_5) \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^2}\sum_{jk\ell}\big(\|\theta\|_2^4(\beta_j\theta_j)^2(\beta_k\theta_k)^2(\beta_\ell\theta_\ell)^2\big)\theta_j\theta_s\theta_k\theta_\ell \lesssim \frac{\|\theta\|_2^4\|\beta\circ\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1}.$$

接下来，在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 49 页）中证明了 $\mathbb{E}Y_6=0$and

$$\mathrm{Var}(Y_6) = \frac{8}{v}\sum_{j,s(dist)}\Big(\sum_{i,k,\ell(dist)\notin\{j\}}\eta_i\widetilde{\Omega}_{jk}\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}\Big)^2\cdot\mathrm{Var}(W_{js}).$$

利用（E.20）、（E.24）和三角不等式，我们有，

$$\Big|\sum_{i,k,\ell(dist)\notin\{j\}}\eta_i\widetilde{\Omega}_{jk}\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}\Big| \lesssim \beta_j\theta_j\|\beta\circ\theta\|_2^5\|\theta\|_2.$$

Thus

$$\mathrm{Var}(Y_6) \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^2}\sum_{j,s}\big(\beta_j^2\theta_j^2\|\beta\circ\theta\|_2^{10}\|\theta\|_2^2\big)\theta_j\theta_s \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^{12}\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1}.$$

证明至此完成。 □

E.4.4 引理 E.9 的证明

Z_1 和 Z_2 的界可直接沿用自（Jin 等人，2021c，引理 G.7），因为这两个项~都不依赖于 Ω。

我们考虑 Z_3。在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 61 页）中，引入了分解

$$\begin{aligned} Z_3 &= \sum_{\substack{i,j,k,\ell \\ (dist)}} \eta_i(\eta_j-\tilde{\eta}_j)\eta_j(\eta_k-\tilde{\eta}_k)\widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i} + \sum_{\substack{i,j,k,\ell \\ (dist)}} \eta_i(\eta_j-\tilde{\eta}_j)^2\eta_k\widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i} \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k,\ell \\ (dist)}} (\eta_i-\tilde{\eta}_i)\eta_j^2(\eta_k-\tilde{\eta}_k)\widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i} + \sum_{\substack{i,j,k,\ell \\ (dist)}} (\eta_i-\tilde{\eta}_i)\eta_j(\eta_j-\tilde{\eta}_j)\eta_k\widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i} \\ &\equiv Z_{3a}+Z_{3b}+Z_{3c}+Z_{3d}. \end{aligned} \tag{E.38}$$

我们分别研究每个项。

在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 61 页）中，证明了 $\mathbb{E}Z_{3a}=0$，并引入了分解

$$\begin{aligned} Z_{3a} &= \frac{1}{v}\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \alpha_{ijk\ell}W_{jk}^2W_{\ell i} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,j,k,\ell(dist) \\ s\neq j,t\neq k,(s,t)\neq(k,j)}} \alpha_{ijk\ell}W_{js}W_{kt}W_{\ell i} \\ &\equiv \widetilde{Z}_{3a}+Z_{3a}^*. \end{aligned}$$

~被引入，其中 $\alpha_{ijk\ell}\equiv\eta_i\eta_j\Omega_{k\ell}$。然后

$$\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{3a}) \lesssim \sum_{\substack{ijk\ell(dist) \\ i'j'k'\ell'(dist)}} |\alpha_{ijk\ell}||\alpha_{i'k'j'\ell'}|\cdot|\mathrm{Cov}(W_{jk}^2W_{\ell i},W_{j'k'}^2W_{\ell' i'})|.$$

利用 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 62 页) 中的分类讨论、(E.1)、(E.2) 和 (E.24)，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\tilde{Z}_{3a}) &\lesssim \frac{1}{v^2}\Big(\sum_{ijk\ell}[\beta_k^2\beta_\ell^2+\beta_k\beta_\ell\beta_i\beta_j]\theta_i^3\theta_j^3\theta_k^3\theta_\ell^3 + \sum_{ijk\ell j'k'}\beta_k\beta_\ell^2\beta_{k'}\theta_i^3\theta_j^2\theta_k^2\theta_\ell^3\theta_{j'}^2\theta_{k'}^2\Big) \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^2+\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4+\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^4}. \end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z_{3a}^*) &\lesssim \frac{1}{v^2}\Big(\sum_{ijk\ell st}\beta_k^2\beta_\ell^2\theta_i^3\theta_j^3\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_s\theta_t + \sum_{ijk\ell st}[\beta_k^2\beta_\ell\beta_j+\beta_k\beta_\ell^2\beta_j]\theta_i^2\theta_j^3\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_s^2\theta_t\Big) \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2+\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6\|\theta\|_1\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(Z_{3a}) \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4.$$

接下来，在 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 63 页) 中证明了 $\mathbb{E}Z_{3b}]=0$，且分解

$$Z_{3b} = \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,j,\ell(dist) \\ s\neq j}}\beta_{ij\ell}W_{js}^2W_{\ell i} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,j,\ell(dist) \\ s,t(dist)\notin\{j\}}}\beta_{ij\ell}W_{js}W_{jt}W_{\ell i} \equiv \widetilde{Z}_{3b}+Z_{3b}^*.$$

已给出。利用 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 63 页)，我们有

$$\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{3b}) \lesssim \sum_{\substack{i,j,\ell,s,t \\ i',j',\ell',s',t'}} |\alpha_{ij\ell}||\alpha_{i'j'\ell'}||\mathrm{Cov}(W_{js}^2W_{\ell_i},W_{j's}'^2W_{\ell' i'})|.$$

其中

$$\alpha_{ij\ell} = \sum_{k\notin\{i,j,\ell\}}\eta_i\eta_k\widetilde{\Omega}_{k\ell}.$$

使用 (E.24)、(E.18) 以及与之前类似的论证，

$$|\alpha_{ij\ell}| \lesssim \theta_i(\beta_\ell\theta_\ell)\|\theta\|_2^2.$$

根据 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 63 页) 中的分类讨论、(E.1) 和 (E.2)，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{3b}) &\lesssim \frac{1}{v^2}\bigg(\sum_{ij\ell s}\beta_\ell^2\|\theta\|_2^4\theta_i^3\theta_j\theta_\ell^3\theta_s + \sum_{ij\ell sj's'}\beta_\ell^2\|\theta\|_2^4\theta_i^3\theta_j\theta_\ell^3\theta_s\theta_{j'}\theta_{s'} + \sum_{ij\ell s}\beta_\ell\beta_j\|\theta\|_2^4\theta_i^2\theta_j^2\theta_\ell^2\theta_s^2\bigg)\\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^6\|\theta\|_1 + \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^6\|\theta\|_1^3 + \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^8\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1}.\end{aligned}$$

通过类似的论证，

$$\mathrm{Var}(Z_{3b}^*) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1}.$$

因此，根据 (E.2)，

$$\mathrm{Var}(Z_{3b}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1} \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^6.$$

对于 Z_{3c}，(Jin 等人，2021c，补充材料，第 64 页) 中证明了 $\mathbb{E}Z_{3c}=0$，且分解

$$Z_{3c} = \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ t\neq k}}\alpha_{ik\ell}W_{i\ell}^2W_{kt} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\neq k}}\alpha_{ik\ell}W_{is}W_{kt}W_{\ell i} \equiv \widetilde{Z}_{3c} + Z_{3c}^*.$$

已给出。我们有

$$|\alpha_{ik\ell}| = |\sum_{j\notin\{i,k,\ell\}}\eta_j^2\widetilde{\Omega}_{k\ell}| \lesssim (\beta_k\theta_k)(\beta_\ell\theta_\ell)\|\theta\|_2^2.$$

根据 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 65 页) 中的分类讨论

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{3c}) &\lesssim \sum_{\substack{ik\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\neq k}}\sum_{\substack{i'k'\ell'(dist)\\ s'\notin\{i',\ell'\},t'\neq k'}}|\alpha_{ik\ell}\alpha_{i'k'\ell'}||\mathbb{E}W_{i\ell}^2W_{kt}W_{i'\ell'}^2W_{k't'}|\\ &\lesssim \frac{\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\sum_{ik\ell t}\bigg[\beta_k^2\beta_\ell^2\theta_i\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_t + \beta_k^2\beta_\ell\beta_i\theta_i^2\theta_k^3\theta_\ell^2\theta_t + \beta_k\beta_\ell^2\beta_t\theta_i^1\theta_k^2\theta_\ell^3\theta_t^2\\ &\quad + \beta_k\beta_\ell\beta_t\beta_i\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2 + \beta_k^2\beta_\ell\beta_i\theta_i^2\theta_k^3\theta_\ell^2\theta_t^1 + \beta_k\beta_\ell^2\beta_t\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^3\theta_t^2 + \beta_k^2\beta_\ell^2\theta_i\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_t\bigg]\\ &\quad + \sum_{ik\ell ti'\ell'}\bigg[\beta_k^2\beta_\ell\beta_{\ell'}\theta_i\theta_k^3\theta_\ell^2\theta_t\theta_{i'}\theta_{\ell'}^2 + \beta_k\beta_\ell\beta_{\ell'}\beta_t\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2\theta_{i'}\theta_{\ell'}^2\bigg]\end{aligned}$$

由 (E.2) 和 (E.24) 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{ik\ell t}\bigg[\beta_k^2\beta_\ell^2\theta_i\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_t+\beta_k^2\beta_\ell\beta_i\theta_i^2\theta_k^3\theta_\ell^2\theta_t + \beta_k\beta_\ell^2\beta_t\theta_i^1\theta_k^2\theta_\ell^3\theta_t^2 + \beta_k\beta_\ell\beta_t\beta_i\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2\\ &\qquad + \beta_k^2\beta_\ell\beta_i\theta_i^2\theta_k^3\theta_\ell^2\theta_t^1 + \beta_k\beta_\ell^2\beta_t\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^3\theta_t^2 + \beta_k^2\beta_\ell^2\theta_i\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_t\bigg]\\ &\lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2 + \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1 + \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4 + \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2\end{aligned}$$

and

$$\sum_{ik\ell ti'\ell'}\bigg[\beta_k^2\beta_\ell\beta_{\ell'}\theta_i\theta_k^3\theta_\ell^2\theta_t\theta_{i'}\theta_{\ell'}^2 + \beta_k\beta_\ell\beta_{\ell'}\beta_t\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2\theta_{i'}\theta_{\ell'}^2\bigg] \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^3 + \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2$$

Thus

$$\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{3c}) \lesssim \frac{\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2 + \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^3 + \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1}$$

为研究 Z_{3c}^*，在 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 65 页) 中，分解

$$Z_{3c}^* = \frac{1}{v}\sum_{i,k,\ell(dist)} \alpha_{ik\ell}W_{ik}^2W_{\ell i} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\neq k,(s,t)\neq(k,i)}} \alpha_{ik\ell}W_{is}W_{kt}W_{\ell i} \equiv Z_{3c,1}^* + Z_{3c,2}^*$$

在此使用，其中回忆 $\alpha_{ik\ell} = \sum_{j\notin\{i,k,\ell\}}\eta_j^2\Omega_{k\ell}$。通过与之前类似的论证，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z_{3c,1}^*) &\lesssim \frac{\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\bigg(\sum_{ik\ell}\beta_k^2\beta_\ell^2\theta_i^2\theta_k^3\theta_\ell^3 + \sum_{ik\ell k'}[\beta_k\beta_{k'}\beta_\ell^2 + \beta_k\beta_{k'}\beta_i\beta_\ell]\theta_i^3\theta_k^2\theta_\ell^3\theta_{k'}^2\bigg)\\ &\lesssim \frac{\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^2 + \|\theta\|_2^4\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_3^3 + \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^{10}}{\|\theta\|_1^4}.\end{aligned}$$

我们省略$Z_{3c,2}^*$ 的论证，因为它类似，并直接给出界：

$$\mathrm{Var}(Z_{3c,2}^*) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2}.$$

˜结合 Z_{3c} 和 Z_{3c}^*的结果，我们得到

$$\mathrm{Var}(Z_{3c}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1} \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6.$$

接下来我们研究 Z_{3d}，其定义为

$$Z_{3d} = \sum_{\substack{i,j,k,\ell\\(dist)}}(\eta_k\eta_j\tilde{\Omega}_{j\ell})(\eta_i-\tilde{\eta}_i)(\eta_k-\tilde{\eta}_k)W_{\ell i} = \sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ s\neq i,t\neq k}}\alpha_{ik\ell}W_{is}W_{kt}W_{\ell i}$$

˜其中 $\alpha_{ik\ell} = \sum_{j\notin\{i,k,\ell\}}\eta_k\eta_j\Omega_{j\ell}$。我们看到 $\mathbb{E}Z_{3d} = 0$。为研究方差，我们采用与 Z_{3c}类似的分解。令

$$Z_{3d} = \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ t\neq k}}\alpha_{ik\ell}W_{i\ell}^2W_{kt} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\neq k}}\alpha_{ik\ell}W_{is}W_{kt}W_{\ell i} \equiv \widetilde{Z}_{3d} + Z_{3d}^*.$$

˜仿照 Z_{3c} 和 Z_{3c}^* 的论证，我们得到

$$\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{3d}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1},$$

and

$$\mathrm{Var}(Z_{3d}^*) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^{10}}{\|\theta\|_1^4}.$$

因此

$$\mathrm{Var}(Z_{3d}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1}.$$

结合 Z_{3a}、.....、 Z_{3d}的结果，我们得到

$$\mathbb{E}Z_3 = 0, \quad \mathrm{Var}(Z_3) \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6.$$

We p继续研究 Z_4。在（Jin 等人，2021c，补充材料，第67页）中，给出了以下分解
给定

$$Z_4 = 2\sum_{i,j,k,\ell(dist)}\eta_i(\eta_j-\tilde{\eta}_j)\widetilde{\Omega}_{jk}\eta_k(\eta_\ell-\tilde{\eta}_\ell)W_{\ell i}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \eta_i(\eta_j - \tilde{\eta}_j)\widetilde{\Omega}_{jk}(\eta_k - \tilde{\eta}_k)\eta_\ell W_{\ell i} \\
&+ \sum_{i,j,k,\ell(dist)} (\eta_i - \tilde{\eta}_i)\eta_j\widetilde{\Omega}_{jk}\eta_k(\eta_\ell - \tilde{\eta}_\ell)W_{\ell i} \\
&\equiv Z_{4a} + Z_{4b} + Z_{4c}. \qquad \text{(E.39)}
\end{aligned}
$$

其中证明了 $\mathbb{E}Z_{4a} = 0$。为了研究方差(Z_{4a})，我们注意到 Z_{4a} 和 Z_{3c} 具有相似的结构。特别地，我们有如下分解

$$
Z_{4a} = \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ t\neq k}} \alpha_{ik\ell}W_{i\ell}^2 W_{kt} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\neq k}} \alpha_{ik\ell}W_{is}W_{kt}W_{\ell i} \equiv \widetilde{Z}_{4a} + Z_{4a}^*.
$$

其中 $\alpha_{ik\ell} = \sum_{j\notin\{i,k,\ell\}} \eta_j\eta_\ell\Omega_{k\ell}$。仿照 Z_{3c} 的论证，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{4a}) &\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1^4}\Bigg(\sum_{ik\ell t}\big[\beta_k^2(\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t + \theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t) + \beta_k\beta_t\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2 + \beta_k\beta_t\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2 \\
&\quad + \beta_k^2\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t + \beta_k\beta_t\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2\big] + \sum_{ik\ell ti'\ell'}\big[\beta_k^2\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t\theta_{i'}\theta_{\ell'}^2 + \beta_k\beta_t\theta_i\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_t^2\theta_{i'}\theta_{\ell'}^2\big]\Bigg) \\
&\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2\|\theta\|_1 + \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1 + \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^3 + \\
&\quad \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1}.
\end{aligned}
$$

对于 Z_{4a}^*，我们调整了用于 Z_{4c}^* 的分解:

$$
Z_{4a}^* = \frac{1}{v}\sum_{i,k,\ell(dist)} \alpha_{ik\ell}W_{ik}^2 W_{\ell i} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,k,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\neq k,(s,t)\neq(k,i)}} \alpha_{ik\ell}W_{is}W_{kt}W_{\ell i} =: Z_{4a,1}^* + Z_{4a,2}^*
$$

仿照$Z_{3c,\ 1}^*$ 和 $Z_{3c,\ 2}^*$的论证，我们有

$$
\mathrm{Var}(Z_{4a,1}^*) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1^4}\big(\sum_{ik\ell}\beta_k^2\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2 + \sum_{ik\ell k'}\beta_k\beta_{k'}\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_{k'}^2\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^4},
$$

and

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Z_{4a,2}^*) &\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1^4}\sum_{ik\ell st}\big[\beta_k^2\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_s\theta_t + \beta_k\beta_t\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_s\theta_t^2 + \beta_k\beta_s\theta_i^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_s^2\theta_t^2\big] \\
&\lesssim \frac{\|\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2}.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\mathrm{Var}(Z_{4a}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1}.
$$

接下来我们研究

$$
\begin{aligned}
Z_{4b} &= \sum_{\substack{i,j,k,\ell\\ (dist)}} \eta_i(\eta_j - \tilde{\eta}_j)\widetilde{\Omega}_{jk}(\eta_k - \tilde{\eta}_k)\eta_\ell W_{\ell i} = \sum_{\substack{i,j,k,\ell\\ (dist)}} \alpha_{ijk\ell}(\eta_j - \tilde{\eta}_j)(\eta_k - \tilde{\eta}_k)W_{\ell i} \\
&= \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,j,k,\ell(dist)\\ s\neq j,t\neq k}} \alpha_{ijk\ell}W_{js}W_{kt}W_{\ell i}
\end{aligned}
$$

~其中 $\alpha_{ijk\ell} = \eta_i\eta_\ell\Omega_{jk}$。仿照对 Z_{3a}的研究，我们有如下分解

$$\begin{aligned} Z_{4b} &= \frac{1}{v}\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \alpha_{ijk\ell}W_{jk}^2W_{\ell i} + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,j,k,\ell(dist)\\ s\neq j,t\neq k,(s,t)\neq(k,j)}} \alpha_{ijk\ell}W_{js}W_{kt}W_{\ell i} \\ &\equiv \widetilde{Z}_{4b} + Z_{4b}^*. \end{aligned}$$

此外，利用 (E.1)、(E.2)、(E.20) 和 (E.24)，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\tilde{Z}_{4b}) &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\Big(\sum_{ijk\ell}\big[\,[\beta_j^2\beta_k^2+\beta_j\beta_k\beta_\ell\beta_i]\theta_i^3\theta_j^3\theta_k^3\theta_\ell^3\big] + \sum_{ijk\ell j'k'}\beta_j\beta_k\beta_{j'}\beta_{k'}\theta_i^3\theta_j^2\theta_k^2\theta_\ell^3\theta_{j'}^2\theta_{k'}^2\Big) \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4 + \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^4}. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z_{4b}^*) &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\Big(\sum_{ijk\ell st}\big[\beta_j^2\beta_k^2\theta_i^2\theta_j^2\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_s\theta_t + \beta_k^2\beta_\ell\beta_j\theta_i^2\theta_j^3\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_s^2\theta_t + \beta_j\beta_k^2\beta_\ell\theta_i^2\theta_j^3\theta_k^3\theta_\ell^3\theta_s^2\theta_t\Big) \\ &\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(Z_{4b}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}.$$

我们使用 Z_{4c} 分解进行研究

$$\begin{aligned} Z_{4c} &= \frac{1}{v}\sum_{i,\ell(dist)}\beta_{i\ell}W_{\ell i}^3 + \frac{2}{v}\sum_{\substack{i,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\}}}\beta_{i\ell}W_{is}W_{\ell i}^2 + \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\notin\{\ell,i\}}}\beta_{i\ell}W_{is}W_{\ell t}W_{\ell i} \\ &\equiv \widetilde{Z}_{4c} + Z_{4c}^* + Z_{4c}^\dagger. \end{aligned}$$

该分解来自 Jin 等人，2021c，补充材料，第 68 页。仅

$$\tilde{Z}_{4c} = \frac{1}{v}\sum_{i,\ell(dist)}\alpha_{i\ell}W_{\ell i}^3$$

~具有非零均值，其中 $\alpha_{i\ell} = \sum_{j,\ k\ (dist)\ \notin\{i,\ell\}}\eta_j\eta_k\Omega_{jk}$。根据 (E.20)

$$|\alpha_{i\ell}| \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2.$$

因此

$$|\mathbb{E}\tilde{Z}_{4c}| \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^2}\sum_{i\ell}\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2\theta_i\theta_\ell \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2.$$

~除非 $(i,\ \ell) = (\ell,\ i)$，否则 Z_{4c}的各项彼此不相关。因此

$$\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{4c}) \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\sum_{i\ell}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\theta_i\theta_\ell \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}.$$

应用（Jin 等人，2021c，补充材料，第 68 页）中的分类讨论，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z_{4c}^*) &\lesssim \sum_{\substack{i,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\}}}\sum_{\substack{i',\ell'(dist)\\ s'\notin\{i',\ell'\}}}|\alpha_{i\ell}\alpha_{i'\ell'}|\mathrm{Cov}(W_{is}W_{\ell i}^2, W_{i's'}W_{\ell' i'}^2)| \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^4}\big(\sum_{i\ell s}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\theta_i^2\theta_\ell\theta_s + \sum_{i\ell s\ell'}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\theta_i^3\theta_\ell\theta_s\theta_{\ell'}\big) \end{aligned}$$

$$\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\big(\|\theta\|_2^2\|\theta\|_1^2+\|\theta\|_2^2\|\theta\|_1^3\big)\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1}.$$

接下来，（Jin 等人，2021c，补充材料，第 69 页）中证明了

$$\mathrm{Var}(Z_{4c}^{\dagger})\lesssim \frac{1}{v^2}\sum_{\substack{i,\ell(dist)\\ s\notin\{i,\ell\},t\notin\{\ell,i\}}}\alpha_{i\ell}^2\cdot\mathrm{Var}(W_{is}W_{\ell t}W_{\ell i})$$

Thus

$$\mathrm{Var}(Z_{4c}^{\dagger})\lesssim\sum_{i\ell s}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\theta_i^2\theta_\ell^2\theta_s\theta_t\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^2}.$$

结合 $\tilde{Z}_{4c}, Z_{4c}^{*}, Z_{4c}^{\dagger}$ 的结果，我们有

$$|\mathbb{E}Z_{4c}|\lesssim\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2,\quad \mathrm{Var}(Z_{4c})\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1}.$$

结合 Z_{4a}, Z_{4b}, 和 Z_{4c} 的结果，我们有

$$|\mathbb{E}Z_4|\lesssim\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^2,\quad \mathrm{Var}(Z_4)\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1}$$

为研究 Z_5，我们使用如下分解

$$\begin{aligned}Z_5 &= 2\sum_{i,j,k,\ell(dist)}\eta_i(\eta_j-\tilde{\eta}_j)\eta_j(\eta_k-\tilde{\eta}_k)\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}+\sum_{i,j,k,\ell(dist)}\eta_i(\eta_j-\tilde{\eta}_j)^2\eta_k\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}\\ &\quad+\sum_{i,j,k,\ell(dist)}(\eta_i-\tilde{\eta}_i)\eta_j^2(\eta_k-\tilde{\eta}_k)\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}\\ &\equiv Z_{5a}+Z_{5b}+Z_{5c}.\end{aligned}\tag{E.40}$$

参见（Jin 等人，2021c，补充材料，第 70 页）。我们进一步按照（Jin 等人，2021c，补充材料，第 70 页）将 Z_{5a} 分解为:

$$Z_{5a}=\frac{2}{v}\sum_{j,k(dist)}\alpha_{jk}W_{jk}^2+\frac{2}{v}\sum_{\substack{j,k(dist)\\ s\neq j,t\neq k,\\ (s,t)\neq(k,j)}}\alpha_{jk}W_{js}W_{kt}\equiv\widetilde{Z}_{5a}+Z_{5a}^{*}.$$

~ ~其中 $\alpha_{jk}=\sum_{i,\ell(dist)\notin\{j,k\}}\eta_i\eta_j\Omega_{k\ell}\Omega_{\ell i}$。注意，由（E.20）和（E.24）可知,

$$|\alpha_{jk}|\lesssim\sum_{i\ell}(\beta_k\theta_k)(\beta_\ell\theta_\ell)^2(\beta_i\theta_i)\lesssim\theta_j(\beta_k\theta_k)\|\beta\circ\theta\|_2^3\|\theta\|_2.$$

~只有 Z_{5a} 具有非零均值。由 (E.1) 和 (E.2) 可得,

$$|\mathbb{E}Z_{5a}|=|\mathbb{E}\tilde{Z}_{5a}|\lesssim\frac{1}{\|\theta\|_1^2}\sum_{jk}\theta_j(\beta_k\theta_k)\|\beta\circ\theta\|_2^3\|\theta\|_2\cdot\theta_j\theta_k\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}.$$

现在我们研究 Z_{5a}的方差。在 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 70 页) 中证明了

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\widetilde{Z}_{5a})&\lesssim\frac{1}{v^2}\sum_{j,k(dist)}\alpha_{jk}^2\,\mathrm{Var}(W_{jk}^2)\\ \mathrm{Var}(Z_{5a}^{*})&\lesssim\frac{1}{v^2}\sum_{\substack{j,k(dist)\\ s\neq j,t\neq k,\\ (s,t)\neq(k,j)}}\alpha_{jk}^2\,\mathrm{Var}(W_{js}W_{kt}).\end{aligned}$$

因此，根据 (E.2) 和 (E.24),

$$\mathrm{Var}(\widetilde{Z}_{5a})\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^6\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\big(\sum_{jk}\theta_j^3\beta_k^2\theta_k^3\big)\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^4}$$

$$\mathrm{Var}(Z_{5a}^*) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^6\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\big(\sum_{jk}\theta_j^2\beta_k^2\theta_k^2\cdot\theta_j\theta_s\theta_k\theta_t\big) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2}.$$

我们得出结论：

$$\mathrm{Var}(Z_{5a}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2}.$$

接下来，我们利用以下分解进行研究 Z_{5b}

$$Z_{5b} = \frac{1}{v}\sum_{j,s(dist)}\alpha_j W_{js}^2 + \frac{1}{v}\sum_{\substack{j\\ s,t(dist)\notin\{j\}}}\alpha_j W_{js}W_{jt} \equiv \widetilde{Z}_{5b} + Z_{5b}^*.$$

~ ~引自（Jin 等人，2021c，补充材料，第 71 页），其中 $\alpha_j = \sum_{i,\ k,\ \ell\ (dist)\notin\{j\}}\eta_i\eta_k\Omega_{k\ell}\Omega_{\ell i}$。注意，根据（E.2）和（E.20），

$$|\alpha_j| \lesssim \sum_{ik\ell}\theta_i\theta_k(\beta_k\theta_k)(\beta_\ell\theta_\ell)^2(\beta_i\theta_i) \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^2.$$

~只有上述 Z_{5b} 的均值非零，且我们有

$$|\mathbb{E}Z_{5b}| = |\mathbb{E}Z_{5b}| \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1^2}\sum_{j,s}\theta_j\theta_s \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^2.$$

方差的情况类似，

$$\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{5b}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\sum_{js}\theta_j\theta_s \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}$$
$$\mathrm{Var}(Z_{5b}^*) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^4}\sum_{jst}\theta_j^2\theta_s\theta_t \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2},$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(Z_{5b}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2}.$$

接下来我们研究

$$Z_{5c} = \sum_{\substack{i,j,k,\ell\\(dist)}}(\eta_j-\tilde{\eta}_j)\eta_i^2(\eta_k-\tilde{\eta}_k)\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell j} = \sum_{\substack{i,j,k,\ell\\(dist)}}(\eta_i^2\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell j})(\eta_j-\tilde{\eta}_j)(\eta_k-\tilde{\eta}_k)$$
$$= \frac{1}{v}\sum_{\substack{i,j,k,\ell(dist)\\ s\neq j,t\neq k}}(\eta_i^2\widetilde{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell j})W_{js}W_{kt} = \frac{1}{v}\sum_{\substack{j,k(dist)\\ s\neq j,t\neq k}}\alpha_{jk}W_{js}W_{kt}$$

其中 $\alpha_{jk} = \sum_{i,\ \ell(dist)}\eta_i^2\widetilde{\ }\Omega_{k\ell}\widetilde{\ }\Omega\ell j$。注意，根据 (E.20) 和 (E.18)，$_{i,\ \ell\notin\{j,k\}}$

$$|\alpha_{jk}| \lesssim \sum_{i\ell}\theta_i^2(\beta_k\theta_k)(\beta_\ell\theta_\ell)^2(\beta_j\theta_j) \lesssim (\beta_j\theta_j)(\beta_k\theta_k)\|\theta\|_2^2\|\beta\circ\theta\|_2^2. \tag{E.41}$$

我们进一步分解

$$Z_{5c} = \frac{1}{v}\sum_{\substack{j,k\\(dist)}}\alpha_{jk}W_{jk}^2 + \frac{1}{v}\sum_{\substack{j,k(dist)\\ s,t\notin\{j,k\}}}\alpha_{jk}W_{js}W_{kt} \equiv \tilde{Z}_{5c} + Z_{5c}^*.$$

只有第一项的均值非零。因此，

$$|\mathbb{E}Z_{5c}| = |\mathbb{E}\tilde{Z}_{5c}| \lesssim \frac{\|\theta\|_2^2\|\beta\circ\theta\|_2^2}{\|\theta\|_1^2}\sum_{j,k,s,t}(\beta_j\theta_j)(\beta_k\theta_k)\cdot\theta_j\theta_k \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}.$$

请注意， Z_{5c} 和 Z_{5a} 形式相同，但系数 α_{jk}的取值不同。仿照 Z_{5a} 的方差界，我们得到以下界

$$\mathrm{Var}(Z_{5c}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}.$$

结合前面的界，我们得到

$$|\mathbb{E}Z_5| \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^2, \quad \mathrm{Var}(Z_5) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2}.$$

接下来，我们研究 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 72 页) 中定义的 $Z_6 = Z_{6a} + Z_{6b}$，其中

$$Z_{6a} = \sum_{\substack{i,j,k,\ell\\(dist)}} (\eta_i\eta_\ell\widetilde{\Omega}_{j\ell}\widetilde{\Omega}_{ki})(\eta_j-\tilde{\eta}_j)(\eta_k-\tilde{\eta}_k) = \frac{1}{v}\sum_{\substack{j,k(dist)\\ s\neq j,t\neq k}} \alpha_{jk}^{(6a)} W_{js}W_{kt}$$

$$Z_{6b} = 2\sum_{\substack{i,j,k,\ell\\(dist)}} (\eta_i\eta_\ell\widetilde{\Omega}_{jk}\widetilde{\Omega}_{\ell i})(\eta_j-\tilde{\eta}_j)(\eta_k-\tilde{\eta}_k) = \frac{1}{v}\sum_{\substack{j,k(dist)\\ s\neq j,t\neq k}} \alpha_{jk}^{(6b)} W_{js}W_{kt}$$

and

$$\alpha_{jk}^{(6a)} = \sum_{\substack{i,\ell(dist)\\ i,\ell\notin\{j,k\}}} \eta_i\eta_\ell\tilde{\Omega}_{jk}\tilde{\Omega}_{\ell i}$$
$$\alpha_{jk}^{(6b)} = \sum_{\substack{i,\ell(dist)\\ i,\ell\notin\{j,k\}}} \eta_i\eta_\ell\tilde{\Omega}_{j\ell}\tilde{\Omega}_{ki}.$$

因此， Z_{6a} 和 Z_{6b} 的形式与 Z_{5c} 相同，但 α_{jk} 的设置不同。注意，根据 (E.24) 以及之前类似的论证，

$$\max(|\alpha_{jk}^{(6a)}|, |\alpha_{jk}^{(6b)}|) \lesssim (\beta_j\theta_j)(\beta_k\theta_k)\|\theta\|_2^2\|\beta\circ\theta\|_2^2,$$

这与 (E.41) 中给出的、与 Z_{5c} 相关的 $|\alpha_{jk}|$ 的上界相同。因此

$$|\mathbb{E}Z_6| \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}, \quad \mathrm{Var}(Z_6) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^8\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}.$$

我们已经证明了引理 E.9 中的所有结论。 □

E.4.5 引理 E.10 的证明

˜项 T_1 和 F 与 Ω 无关，因此所声称的界可直接由 (Jin 等人，2021c，引理 G.9) 得出。因此，我们重点关注 T_2。我们使用 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 73 页) 中的分解 $T_2 = 2(T_{2a}+T_{2b}+T_{2c}+T_{2d})$，其中

$$T_{2a} = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\big[(\eta_{i_1}-\tilde{\eta}_{i_1})(\eta_{i_2}-\tilde{\eta}_{i_2})(\eta_{i_3}-\tilde{\eta}_{i_3})\big]\cdot\widetilde{\Omega}_{i_4i_1},$$
$$T_{2b} = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \eta_{i_2}\eta_{i_3}^2\big[(\eta_{i_1}-\tilde{\eta}_{i_1})(\eta_{i_2}-\tilde{\eta}_{i_2})(\eta_{i_4}-\tilde{\eta}_{i_4})\big]\cdot\widetilde{\Omega}_{i_4i_1},$$
$$T_{2c} = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\big[(\eta_{i_2}-\tilde{\eta}_{i_2})^2(\eta_{i_3}-\tilde{\eta}_{i_3})\big]\cdot\widetilde{\Omega}_{i_4i_1},$$
$$T_{2d} = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \eta_{i_1}\eta_{i_3}^2\big[(\eta_{i_2}-\tilde{\eta}_{i_2})^2(\eta_{i_4}-\tilde{\eta}_{i_4})\big]\cdot\widetilde{\Omega}_{i_4i_1}.$$

我们分别研究每个项。

对于 T_{2a}，在（Jin 等人，2021c，补充材料，第89页）中，我们有分解式 $T_{2a} = X_{a1} + X_{a2} + X_{a3} + X_b$ 其中

$$X_{a1} = -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{j_3 \neq i_3} \eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4} W_{i_1 i_2}^2 W_{i_3 j_3} \widetilde{\Omega}_{i_1 i_4},$$

$$X_{a2} = -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{j_2 \neq i_2} \eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4} W_{i_1 i_3}^2 W_{i_2 j_2} \widetilde{\Omega}_{i_1 i_4},$$

$$X_{a3} = -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{j_1 \neq i_1} \eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4} W_{i_2 i_3}^2 W_{i_1 j_1} \widetilde{\Omega}_{i_1 i_4},$$

$$X_b = -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{\substack{j_1,j_2,j_3 \\ j_k \neq i_\ell, k,\ell=1,2,3}} \eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4} W_{i_1 j_1} W_{i_2 j_2} W_{i_3 j_3} \widetilde{\Omega}_{i_1 i_4}.$$

文中证明了 $\mathbb{E}T_{2a} = 0$。此外，还论证了

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_{a1}) &= \mathbb{E}X_{a1}^2 \\ &= \frac{1}{v^3} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4(dist) \\ i_1',i_2',i_3',i_4'(dist)}} \sum_{\substack{j_3,j_3' \\ j_3 \neq i_3, j_3' \neq i_3'}} \eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\eta_{i_2'}\eta_{i_3'}\eta_{i_4'} \mathbb{E}[W_{i_1 i_2}^2 W_{i_3 j_3} W_{i_1' i_2'}^2 W_{i_3' j_3'}] \widetilde{\Omega}_{i_1 i_4} \widetilde{\Omega}_{i_1' i_4'} \\ &\equiv V_A + V_B + V_C, \end{aligned} \tag{E.42}$$

其中，项 V_A, V_B, V_C 分别对应于情形 A, B, C的贡献，相关描述见（Jin 等人，2021c，补充材料，第89页）。具体而言，(E.42) 中的非零项分为以下三种情形:

情形 A。$\{i_1, i_2\} = \{i_3', j_3'\}$ 和 $\{i_3, j_3\} = \{i_1', i_2'\}$
情形 B。 $\{i_3, j_3\} = \{i_3', j_3'\}$ 和 $\{i_1, i_2\} = \{i_1', i_2'\}$
情形 C。 $\{i_3, j_3\} = \{i_3', j_3'\}$ 和 $\{i_1, i_2\} \neq \{i_1', i_2'\}$。

这里， V_A， V_B，和 V_C 定义为各情形的贡献。

应用 (E.2)、(E.22) 和 (E.20)，

$$\begin{aligned} |\eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\eta_{i_2'}\eta_{i_3'}\eta_{i_4'} \widetilde{\Omega}_{i_1 i_4} \widetilde{\Omega}_{i_1' i_4'}| &\lesssim \theta_{i_2}\theta_{i_3}\theta_{i_4}\theta_{i_2'}\theta_{i_3'}\theta_{i_4'} (\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})(\beta_{i_1'}\theta_{i_1'})(\beta_{i_4'}\theta_{i_4'}) \\ &\lesssim \theta_{i_2}\theta_{i_3}\theta_{i_4}\theta_{i_2'}\theta_{i_3'}\theta_{i_4'} (\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\theta_{i_1'}(\beta_{i_4'}\theta_{i_4'}). \end{aligned} \tag{E.43}$$

注意，使用最后一个不等式可以减少所需的分类讨论，同时仍能得到足够好的界。仿照 Jin 等人（2021c，补充材料，第 90 页）中情形 A 的分类讨论，并应用 (E.24)，我们有

$$\begin{aligned} V_A &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3 \\ i_4,i_4',j_3}} \sum_{\substack{b_1,b_2 \\ (b_1+b_2=1)}} \beta_{i_1}\beta_{i_4}\beta_{i_4'} \theta_{i_1}^{2+b_1} \theta_{i_2}^{2+b_2} \theta_{i_3}^3 \theta_{j_3}^2 \theta_{i_4}^2 \theta_{i_4'}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6} \big(\|\beta \circ \theta\|_2^3 \|\theta\|_2^3 \|\theta\|_2^4 \|\theta\|_3^3 + \|\beta \circ \theta\|_2^3 \|\theta\|_2^3 \|\theta\|_2^2 \|\theta\|_3^6 \big) \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^3 \|\theta\|_2^9}{\|\theta\|_1^6}. \end{aligned}$$

类似地，将 (E.43) 与 (E.22)、(E.20) 和 (E.24) 结合可得

$$V_B \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3 \\ i_4,i_4',j_3}} \sum_{\substack{c_1,c_2 \\ (c_1+c_2=1)}} \beta_{i_1}\beta_{i_4}\beta_{i_4'} \theta_{i_1}^3 \theta_{i_2}^3 \theta_{i_3}^{2+c_1} \theta_{j_3}^{1+c_2} \theta_{i_2}^2 \theta_{i_4'}^2 \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^3 \|\theta\|_2^7}{\|\theta\|_1^5}.$$

and

$$V_C \lesssim \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4 \\ i_1',i_2',i_4',j_3}} \sum_{\substack{c_1,c_2 \\ (c_1+c_2=1)}} \beta_{i_1}\beta_{i_4}\beta_{i_1'}\beta_{i_4'} \theta_{i_1}^2 \theta_{i_2}^2 \theta_{i_3}^{2+c_1} \theta_{j_3}^{1+c_2} \theta_{i_4}^2 \theta_{i_1'}^2 \theta_{i_2'}^2 \theta_{i_4'}^2 \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^{10}}{\|\theta\|_1^5}.$$

Thus

$$\mathrm{Var}(X_{a1}) \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4.$$

关于 X_{a2} 和 X_{a3} 的论证类似，相应的 V_A，V_B，V_C 满足上述相同的不等式。我们直接给出这些界：

$$\mathbb{E}X_{a_2} = \mathbb{E}X_{a3} = 0, \quad \mathrm{Var}(X_{a2}) \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4, \quad \mathrm{Var}(X_{a3}) \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4.$$

接下来我们考虑 X_b，其定义见（Jin 等人，2021c，补充材料，第 89 页）。我们有 $\mathbb{E}X_b = 0$，并着重考察方差。在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 91 页）中证明了

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_b) &= \mathbb{E}[X_b^2] \\ &= v^{-3} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4(dist) \\ i_1',i_2',i_3',i_4'(dist)}} \sum_{\substack{j_3,j_3' \\ j_3 \neq i_3, j_3' \neq i_3'}} \eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\eta_{i_2'}\eta_{i_3'}\eta_{i_4'} \mathbb{E}[W_{i_1j_1}W_{i_2j_2}W_{i_3j_3}W_{i_1'j_1'}W_{i_2'j_2'}W_{i_3'j_3'}]\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}\widetilde{\Omega}_{i_1'i_4'},\end{aligned}$$

注意

$$\mathbb{E}[W_{i_1j_1}W_{i_2j_2}W_{i_3j_3}W_{i_1'j_1'}W_{i_2'j_2'}W_{i_3'j_3'}] \neq 0$$

当且仅当两组随机变量 $\{W_{i_1j_1}, W_{i_2j_2}, W_{i_3j_3}\}$ 和 $\{W_{i_1'j_1'}, W_{i_2'j_2'}, W_{i_3'j_3'}\}$ 相同时。应用（E.22）和（E.20），

$$\begin{aligned}|\eta_{i_2}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\eta_{i_2'}\eta_{i_3'}\eta_{i_4'}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}\widetilde{\Omega}_{i_1'i_4'}| &\lesssim \theta_{i_2}\theta_{i_3}\theta_{i_4}\theta_{i_2'}\theta_{i_3'}\theta_{i_4'}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\theta_{i_1'}(\beta_{i_4'}\theta_{i_4'}) \\ &\lesssim \beta_{i_1}\beta_{i_4}\beta_{i_4'}\theta_{i_1}^{1+a_1}\theta_{j_1}^{a_2}\theta_{i_2}^{1+a_3}\theta_{j_2}^{a_4}\theta_{i_3}^{1+a_5}\theta_{j_3}^{a_6}\theta_{i_4}^2\theta_{i_4'}^2\end{aligned}$$

若 $\mathbb{E}[W_{i_1j_1}W_{i_2j_2}W_{i_3j_3}W_{i_1'j_1'}W_{i_2'j_2'}W_{i_3'j_3'}] \neq 0$，其中 $a_i \in \{0,1\}$ 且 $\sum_{i=1}^6 a_i = 3$。因此，由（E.1）、（E.2）和（E.24），

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_b) &\lesssim \max_a \frac{1}{\|\theta\|_1^6} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4 \\ i_4',j_1,j_2,j_3}} \beta_{i_1}\beta_{i_4}\beta_{i_4'}\theta_{i_1}^{2+a_1}\theta_{j_1}^{1+a_2}\theta_{i_2}^{2+a_3}\theta_{j_2}^{1+a_4}\theta_{i_3}^{2+a_5}\theta_{j_3}^{1+a_6}\theta_{i_4}^2\theta_{i_4'}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4 \\ i_4',j_1,j_2,j_3}} \beta_{i_1}\beta_{i_4}\beta_{i_4'}\theta_{i_1}^2\theta_{j_1}^1\theta_{i_2}^2\theta_{j_2}^1\theta_{i_3}^2\theta_{j_3}^1\theta_{i_4}^2\theta_{i_4'}^2 \\ &\lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^3\|\theta\|_2^3\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^3}{\|\theta\|_1^6} \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^3\|\theta\|_2^7}{\|\theta\|_1^3} \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^3\|\theta\|_2.\end{aligned}$$

综合关于 X_{a1}，X_{a2}，X_{a3} 和 X_b 的结果，我们得出结论：

$$\mathbb{E}T_{2a} = 0, \qquad \mathrm{Var}(T_{2a}) \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4\|\theta\|_2.$$

关于 T_{2b} 的论证与关于 T_{2a} 的论证类似，因此我们仅陈述结果：

$$\mathbb{E}T_{2b} = 0, \qquad \mathrm{Var}(T_{2b}) \lesssim \|\beta \circ \theta\|_2^4\|\theta\|_2.$$

接下来我们研究 T_{2c}，并为保证完整性提供详细说明。根据 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 92 页) 中 T_{2c} 的定义，经过仔细的分类讨论，我们得到以下分解。

$$\begin{aligned}Y_a &= -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}W_{i_2i_3}^3\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}, \\ Y_{b1} &= -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{\substack{(i_2,j_2)\neq(j_3,i_3) \\ j_2\neq i_2, j_3\neq i_3}} \eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}W_{i_2j_2}^2W_{i_3j_3}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}, \\ Y_{b2} &= -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{\ell_2\notin\{i_3,i_2\}} \eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}W_{i_2i_3}^2W_{i_2\ell_2}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}, \\ Y_{b3} &= -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{j_2\notin\{i_3,i_2\}} \eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}W_{i_2i_3}^2W_{i_2j_2}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4},\end{aligned}$$

$$Y_c = -\frac{1}{v^{3/2}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)} \sum_{\substack{j_2,\ell_2,j_3 \\ j_2\neq i_2,\ell_2\neq i_2,j_3\neq i_3 \\ j_2\neq\ell_2,(i_2,j_2)\neq(j_3,i_3),(i_2,\ell_2)\neq(j_3,i_3)}} \eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4} W_{i_2j_2}W_{i_2\ell_2}W_{i_3j_3}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}.$$

请注意，根据变量替换 $\ell_2 \to j_2$，有 $Y_{b2} = Y_{b3}$。

唯一具有非零均值的项是 Y_a。由 (E.18)、(E.20)、(E.22) 和 (E.24)，可得

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}Y_a| &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^3}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}\theta_{i_1}\theta_{i_3}\theta_{i_4}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\cdot|\mathbb{E}W_{i_2i_3}^3| \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^3}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}\beta_{i_1}\beta_{i_4}\theta_{i_1}^2\theta_{i_2}\theta_{i_3}^2\theta_{i_4}^2 \\ &\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}.\end{aligned}$$

对于方差，由于 $\{W_{ij}\}_{i>j}$的独立性，根据 (E.2)、(E.20) 和 (E.24)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_a) &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2,i_3}\Big(\sum_{i_1,i_4}\theta_{i_1}\theta_{i_3}\theta_{i_4}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\Big)^2\theta_{i_2}\theta_{i_3} \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2,i_3}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\theta_{i_2}\theta_{i_3}^2 \\ &\lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^5}.\end{aligned}$$

对于 Y_{b1}，Y_{b2}，Y_{b3}，我们注意到以下恒等式

$$W_{ij}^2 = (1-2\Omega_{ij})W_{ij} + \Omega_{ij}(1-\Omega_{ij}) \equiv A_{ij}W_{ij} + B_{ij}. \tag{E.44}$$

记

$$\begin{aligned}Y_{b1} = &-\frac{1}{v^{3/2}}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)}\sum_{\substack{(i_2,j_2)\neq(j_3,i_3) \\ j_2\neq i_2,j_3\neq i_3}}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}A_{i_2j_2}W_{i_2j_2}W_{i_3j_3}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4} \\ &-\frac{1}{v^{3/2}}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)}\sum_{\substack{(i_2,j_2)\neq(j_3,i_3) \\ j_2\neq i_2,j_3\neq i_3}}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}B_{i_2j_2}W_{i_3j_3}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4} \equiv Y_{b1,A} + Y_{b1,B}.\end{aligned}$$

通过与前面类似的论证，并注意到$A_{i_2,\ j_2}| \lesssim 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_{b1,A}) &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{\substack{(i_2,j_2)\neq(j_3,i_3) \\ j_2\neq i_2,j_3\neq i_3}}\Big(\sum_{i_1,i_4}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\Big)^2|\mathbb{E}W_{i_2j_2}W_{i_3j_3}| \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2,j_2,i_3,j_3}\Big(\sum_{i_1,i_4}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\Big)^2\cdot\theta_{i_2}\theta_{j_2}\theta_{i_3}\theta_{j_3} \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2,j_2,i_3,j_3}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\theta_{i_2}\theta_{j_2}\theta_{i_3}^3\theta_{j_3} \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^3}.\end{aligned}$$

同理，利用 $|B_{ij}| \lesssim \Omega_{ij} \lesssim \theta_i\theta_j$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_{b1,B}) &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_3,j_3(dist)}\Big(\sum_{i_1,i_2,i_4,j_2}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\theta_{i_2}\theta_{j_2}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\Big)^2\cdot|\mathbb{E}W_{i_3,j_3}| \\ &\lesssim \frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_3,j_3}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\|\theta\|_1^2\theta_{i_3}^3\theta_{j_3} \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^3}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(Y_{b1}) \lesssim \frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^3}$$

为了控制方差(Y_{b2})，我们再次利用恒等式 (E.44)，得到

$$Y_{b2} = -\frac{1}{v^{3/2}}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)}\sum_{\ell_2\notin\{i_3,i_2\}}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}A_{i_2i_3}W_{i_2i_3}W_{i_2\ell_2}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}$$

$$-\frac{1}{v^{3/2}}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)}\sum_{\ell_2\notin\{i_3,i_2\}}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}B_{i_2i_3}W_{i_2\ell_2}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}\equiv Y_{b2,A}+Y_{b2,B}.$$

使用与之前类似的论证，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_{b2,A})&\lesssim\frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2i_3\ell_2}\left(\sum_{i_1i_4}\theta_{i_1}\theta_{i_3}\theta_{i_4}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\right)^2\theta_{i_2}^2\theta_{i_3}\theta_{\ell_2}\\&\lesssim\frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2i_3\ell_2}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4\theta_{i_2}^2\theta_{i_3}^3\theta_{\ell_2}\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^5}.\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_{b2,B})&\lesssim\frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2,\ell_2}\left(\sum_{i_1,i_3,i_4}\theta_{i_1}\theta_{i_3}\theta_{i_4}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\theta_{i_2}\theta_{i_3}\right)^2\theta_{i_2}\theta_{\ell_2}\\&\lesssim\frac{1}{\|\theta\|_1^6}\sum_{i_2,\ell_2}\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8\theta_{i_2}^3\theta_{\ell_2}\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^{10}}{\|\theta\|_1^5}.\end{aligned}$$

由于 $Y_{b2}=Y_{b3}$，我们有

$$\mathrm{Var}(Y_{b2})=\mathrm{Var}(Y_{b3})\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^{10}}{\|\theta\|_1^5}.$$

接下来我们研究 Y_{2c}的方差。为简化记号，令

$$\mathcal{R}_{i_1,i_2,i_3}=\left\{(j_2,\ell_2,j_3)\middle|j_2\neq i_2,\ell_2\neq i_2,j_3\neq i_3 j_2\neq\ell_2,(i_2,j_2)\neq(j_3,i_3),(i_2,\ell_2)\neq(j_3,i_3)\right\}.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(Y_c)\\&=\frac{1}{v^3}\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4(dist)\\i_1',i_2',i_3',i_4'(dist)}}\sum_{\substack{(j_2,\ell_2,j_3)\in\mathcal{R}_{i_1,i_2,i_3}\\(j_2',\ell_2',j_3')\in\mathcal{R}_{i_1',i_2',i_3'}}}\eta_{i_1}\eta_{i_3}\eta_{i_4}\widetilde{\Omega}_{i_1i_4}\eta_{i_1'}\eta_{i_3'}\eta_{i_4'}\widetilde{\Omega}_{i_1'i_4'}\mathbb{E}\left[W_{i_2j_2}W_{i_2\ell_2}W_{i_3j_3}W_{i_2'j_2'}W_{i_2'\ell_2'}W_{i_3'j_3'}\right]\end{aligned}\tag{E.45}$$

注意，除非.....，否则上面的$W_{i_2j_2}W_{i_2\ell_2}W_{i_3j_3}$和 $W_{i_2'j_2'}W_{i_2'\ell_2'}W_{i_3'j_3'}$ 不相关

$$\left\{\{i_2,j_2\},\{i_2,\ell_2\},\{i_3,j_3\}\right\}=\left\{\{i_2',j_2'\},\{i_2',\ell_2'\},\{i_3',j_3'\}\right\}.$$

特别地，当上述条件成立时，$i_3'\in\{i_2,j_2,\ell_2,i_3,j_3\}$。因此，存在某种选择 $a_i\in\{0,1\}$，使得 $\sum_{i=1}^5 a_i=1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_c)&\lesssim\frac{1}{v^3}\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4\\i_1',i_4',j_2,\ell_2,j_3}}\theta_{i_2}^{a_1}\theta_{j_2}^{a_2}\theta_{\ell_2}^{a_3}\theta_{i_3}^{a_4}\theta_{j_3}^{a_5}\cdot\theta_{i_1}\theta_{i_3}\theta_{i_4}(\beta_{i_1}\theta_{i_1})(\beta_{i_4}\theta_{i_4})\theta_{i_1'}\theta_{i_4'}(\beta_{i_1'}\theta_{i_1'})(\beta_{i_4'}\theta_{i_4'})\cdot\theta_{i_2}^2\theta_{j_2}\theta_{\ell_2}\theta_{i_3}\theta_{j_3}\\&\lesssim\frac{1}{v^3}\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4\\i_1',i_4',j_2,\ell_2,j_3}}\beta_{i_1}\beta_{i_1'}\beta_{i_4}\beta_{i_4'}\theta_{i_1}^2\theta_{i_2}^{2+a_1}\theta_{i_3}^{2+a_4}\theta_{i_4}^2\theta_{i_1'}^2\theta_{i_4'}^2\theta_{j_2}^{1+a_2}\theta_{\ell_2}^{1+a_3}\theta_{j_3}^{1+a_5}\\&\lesssim\frac{1}{v^3}\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4\\i_1',i_4',j_2,\ell_2,j_3}}\beta_{i_1}\beta_{i_1'}\beta_{i_4}\beta_{i_4'}\theta_{i_1}^2\theta_{i_2}^2\theta_{i_3}^2\theta_{i_4}^2\theta_{i_1'}^2\theta_{i_4'}^2\theta_{j_2}^1\theta_{\ell_2}^1\theta_{j_3}^1\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^3},\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们先应用 (E.2)，再应用 (E.24)。综合以上结果，我们得到

$$|\mathbb{E}T_{2c}|\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2},\qquad\mathrm{Var}(T_{2c})\lesssim\frac{\|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^6}{\|\theta\|_1^2}.$$

省略了 T_{2d} 的论证，因为它与 T_{2c} 的论证类似（注意，这两项的结构相似）。结果陈述如下。

$$|\mathbb{E}T_{2d}| \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^2 \|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}, \qquad \mathrm{Var}(T_{2d}) \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^3}.$$

合并 T_{2a}、……、T_{2d} 的结果可得

$$|\mathbb{E}T_2| \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^2 \|\theta\|_2^4}{\|\theta\|_1^2}, \qquad \mathrm{Var}(T_2) \lesssim \frac{\|\beta \circ \theta\|_2^4 \|\theta\|_2^8}{\|\theta\|_1^2},$$

如所需。 □

E.4.6 引理 E.11 的证明

与前文一样，我们只需分析备择假设。在（Jin 等人，2021c，补充材料，第 103 页）˜中证明了，$Q^* - Q^*$ 是由 $O(1)$ 个如下形式的项求和得到的

$$Y = \Big(\frac{v}{V}\Big)^{N_{\tilde{r}}} \sum_{i,j,k,\ell(dist)} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} d_{\ell i}, \tag{E.46}$$

其中 a，b，c，$d \in \{\tilde{\Omega}\ W$，$\delta$，$-(\tilde{\eta}-\eta)(\tilde{\eta}-\eta)^\intercal\}$，并且 $N_{\tilde{r}}$ 表示等于 $-(\tilde{\eta}-\eta)(\tilde{\eta}-\eta)^\intercal$ 的 a，b，c，d 的数量。

类似地，令 N_W 表示等于 W 的 a、b、c、d 的数量，并类似地定义 $N_{\tilde{\Omega}}$ 和 N_δ。记

$$Y = \Big(\frac{v}{V}\Big)^{m} X, \qquad \text{where} \quad X = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} d_{\ell i}. \tag{E.47}$$

注意，在这个证明中，我们不需要明确的分解：只需利用这样一个事实，即

˜ $Q^* - Q^*$ 是 O 个 (1) 项的和。有时，我们将构成 $Q^* - Q^*$ 的这类 Y 项称为展开后求和。

Jin 等人（2021c）证明了，对于每个展开后求和，$4 \geq N_{\tilde{r}} \geq 1$（注意，4 这个上界显然成立）。事实证明，这是对展开后求和唯一的约束；因此，我们需要分析所有可能的非负整数组合（$N_{\tilde{\Omega}}$、N_W、N_δ、$N_{\tilde{r}}$），其中它们的和为 4，且 $N_{\tilde{r}} \geq 1$，然后根据 (E.46) 以所有可能的方式排列 a、b、c、$d \in \{\tilde{\Omega}\ W$、$\delta$、$-(\tilde{\eta}-\eta)(\tilde{\eta}-\eta)^\intercal\}$。这总共得到 34 种可能性，均列于摘自 Jin 等人（2021c）的表 1 中。

（Jin 等人，2021c，补充材料，第 103 页）证明了

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Y - X]| &\leq o(\|\theta\|_2^{-2}) \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} + o(1), \text{ and} \\ \mathrm{Var}(Y) &\leq 2\mathrm{Var}(X) + o(\|\theta\|_2^{-4}) \mathbb{E}[X^2] + o(1). \end{aligned} \tag{E.48}$$

Jin 等人（2021c）中（E.48）的证明仅需异质性假设（E.2）–（E.4）以及以下两个条件。首先，必须满足尾部不等式

$$\mathbb{P}(|V - v| > t) \leq \begin{cases} 2\exp\big(-\frac{C_1}{\|\theta\|_1^2} t^2\big), & \text{when } x_n \|\theta\|_1 \leq t \leq \|\theta\|_1^2, \\ 2\exp\big(-C_2 t\big), & \text{when } t > \|\theta\|_1^2. \end{cases} \tag{E.49}$$

其次，$|Y - X|$ 必须受 V 的一个多项式支配。更多细节请参见（Jin 等人，2021c，引理 G.10 和 G.11）。在我们的设定中，这两个条件均得到满足，因此（E.48）确实适用。

令 N_W 和 N_δ 分别表示等于 W 和 δ 的 a, b, c, d 的数量。与 Jin 等人（2021c）一样，我们定义

$$N_W^* = N_W + N_\delta + 2N_{\tilde{r}} \tag{E.50}$$

并根据这一参数将我们的分析划分为不同部分。

表 1：注：本表及其说明转载自 *Jin* 等人（*2021c*）的表 *G.4*。34 种类型$\widetilde{}$的 175 个展开后求和，对应于 $(Q_n^* - Q_n^*)$。

记号	#	$N_{\tilde{r}}$	$(N_\delta, N_{\widetilde{\Omega}}, N_W)$	示例	N_W^*
R_1	4	1	(0, 0, 3)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} W_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i}$	5
R_2	8	1	(0, 1, 2)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i}$	4
R_3	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} W_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{\ell i}$	4
R_4	8	1	(0, 2, 1)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{\ell i}$	3
R_5	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} W_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	3
R_6	4	1	(0, 3, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	2
R_7	8	1	(1, 0, 2)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i}$	5
R_8	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} W_{jk} \delta_{k\ell} W_{\ell i}$	5
R_9	8	1	(1, 1, 1)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{\ell i}$	5
R_{10}	8			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} W_{k\ell} \delta_{\ell i}$	4
R_{11}	8			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} W_{jk} \delta_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	4
R_{12}	8	1	(1, 2, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	4
R_{13}	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \delta_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	3
R_{14}	8	1	(2, 0, 1)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \delta_{k\ell} W_{\ell i}$	3
R_{15}	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} W_{k\ell} \delta_{\ell i}$	5
R_{16}	8	1	(2, 1, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \delta_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	5
R_{17}	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \delta_{\ell i}$	4
R_{18}	4	1	(3, 0, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \delta_{k\ell} \delta_{\ell i}$	4
R_{19}	4	2	(0, 0, 2)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} W_{k\ell} W_{\ell i}$	5
R_{20}	2			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} W_{jk} \tilde{r}_{k\ell} W_{\ell i}$	6
R_{21}	4	2	(0, 2, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	6
R_{22}	2			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \tilde{r}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	4
R_{23}	4	2	(2, 0, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \delta_{k\ell} \delta_{\ell i}$	4
R_{24}	2			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \tilde{r}_{k\ell} \delta_{\ell i}$	6
R_{25}	8	2	(0, 1, 1)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \widetilde{\Omega}_{k\ell} W_{\ell i}$	6
R_{26}	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \widetilde{\Omega}_{jk} \tilde{r}_{k\ell} W_{\ell i}$	5
R_{27}	8	2	(1, 1, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \delta_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	5
R_{28}	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \tilde{r}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	5
R_{29}	8	2	(1, 0, 1)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \delta_{k\ell} W_{\ell i}$	5
R_{30}	4			$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \delta_{jk} \tilde{r}_{k\ell} W_{\ell i}$	6
R_{31}	4	3	(0, 0, 1)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \tilde{r}_{k\ell} W_{\ell i}$	6
R_{32}	4	3	(0, 1, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \tilde{r}_{k\ell} \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	7
R_{33}	4	3	(1, 0, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \tilde{r}_{k\ell} \delta_{\ell i}$	6
R_{34}	1	4	(0, 0, 0)	$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{jk} \tilde{r}_{k\ell} \tilde{r}_{\ell i}$	7

关于含有 $N_W^* \leq 4$ 的项的分析。为方便起见，我们在表 2 中重现 Jin 等人（2021c）的表 G.5。表 2 左列列出了所有含有 $N_W^* \leq 4$ 的项，请注意，其中的 $(\frac{v}{V})^{N_{\tilde{r}}}$ 因子已被去除。右列列出了与左列中各项结构相似的项。具体而言，左列中的一项具有如下形式

$$X = \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}} c_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m},$$

其右侧列中的相邻项形式为

$$X^* = \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{R}} c^*_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m},$$

表 2：为清晰起见，本表及其说明借自 *Jin* 等人（*2021c*）的表 *G.5*。含有 $N_W^* \le 4$ 的 14 类展开后求和。右侧列展示了前文定义的展开后求和，其形式与左侧列中的展开后求和相似。对于右侧列中的某些项，为便于与左侧列比较，我们对原始定义中的 $(i,\ j,\ k,\ \ell)$ 进行了置换。（所有表达式中均省略下标"$i,\ j,\ k,\ \ell(dist)$"。）

	表达式		表达式
R_2	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \widetilde{\Omega}_{jk}\underset{\sim}{W}_{k\ell}W_{\ell i}$	Z_{1b}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)\eta_j(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_k W_{k\ell}W_{\ell i}$
R_3	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)W_{jk}\ \underset{\sim}{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i}$	Z_{2a}	$\sum\eta_\ell(\tilde{\eta}_j-\eta_j)W_{jk}\eta_k(\tilde{\eta}_i-\eta_i)W_{i\ell}$
R_4	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \underset{\sim}{\Omega}_{jk}\Omega_{k\ell}\underset{\sim}{W}_{\ell i}$	Z_{3d}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)\eta_j(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_k\ \widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i}$
R_5	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \underset{\sim}{\Omega}_{jk}\underset{\sim}{W}_{k\ell}\underset{\sim}{\Omega}_{\ell i}$	Z_{4b}	$\sum\widetilde{\Omega}_{ij}(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_k W_{k\ell}\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
R_6	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \underset{\sim}{\Omega}_{jk}\widetilde{\Omega}_{k\ell}\underset{\sim}{\Omega}_{\ell i}$	Z_{5a}	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \underset{\sim}{\Omega}_{jk}\Omega_{k\ell}\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
R_9	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k\ \widetilde{\Omega}_{k\ell}\underset{\sim}{W}_{\ell i}$	T_{1d}	$\sum\eta_\ell(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k^2(\tilde{\eta}_i-\eta_i)W_{i\ell}$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\ \widetilde{\Omega}_{k\ell}W_{\ell i}$	T_{1a}	$\sum\eta_\ell(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_k(\tilde{\eta}_i-\eta_i)W_{i\ell}$
R_{10}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)^2(\tilde{\eta}_j-\underset{\sim}{\eta}_j)\ \underset{\sim}{\Omega}_{jk}W_{k\ell}\eta_\ell$	T_{1c}	$\sum(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_k W_{k\ell}\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)^2\eta_j$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \underset{\sim}{\Omega}_{jk}W_{k\ell}(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\underset{\sim}{\eta}_i$	T_{1a}	$\sum(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_k W_{k\ell}(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_i(\tilde{\eta}_i-\eta_i)\eta_j$
R_{11}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)W_{jk}\eta_k(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\ \underset{\sim}{\Omega}_{\ell i}$	T_{1a}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)\eta_k W_{kj}(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_\ell(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_i$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)W_{jk}(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_\ell\ \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	T_{1b}	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_k-\eta_k)W_{kj}(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_\ell^2(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
R_{12}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k\ \widetilde{\Omega}_{k\ell}\underset{\sim}{\Omega}_{\ell i}$	T_{2c}	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k\ \widetilde{\Omega}_{k\ell}\underset{\sim}{\eta}_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\ \underset{\sim}{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}$	T_{2a}	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\ \underset{\sim}{\Omega}_{k\ell}\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
R_{13}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \underset{\sim}{\Omega}_{jk}(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_\ell\ \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	T_{2b}	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \widetilde{\Omega}_{jk}(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_\ell^2(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
R_{16}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_\ell\ \underset{\sim}{\Omega}_{\ell i}$	F_b	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_\ell^2(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k^2(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\ \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	F_b	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k^2(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)^2\eta_\ell\ \underset{\sim}{\Omega}_{\ell i}$	F_b	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)^2\eta_\ell^2(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_k(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\ \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	F_a	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_k(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
R_{17}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\ \widetilde{\Omega}_{k\ell}(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_i$	F_a	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_k(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k\ \underset{\sim}{\Omega}_{k\ell}(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_i$	F_b	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k^2(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)^2(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k\ \underset{\sim}{\Omega}_{k\ell}\underset{\sim}{\eta}_\ell$	F_c	$\sum\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)^2\eta_k^2(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_\ell$
R_{21}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\ \underset{\sim}{\Omega}_{k\ell}\widetilde{\Omega}_{\ell i}$	F_b	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)^2\eta_k(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_\ell^2(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$
R_{22}	$\sum(\tilde{\eta}_i-\eta_i)(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\ \widetilde{\Omega}_{jk}(\tilde{\eta}_k-\eta_k)(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\ \widetilde{\Omega}_{\ell i}$	F_a	$\sum\eta_i(\tilde{\eta}_j-\eta_j)\eta_j(\tilde{\eta}_k-\eta_k)\eta_k(\tilde{\eta}_\ell-\eta_\ell)\eta_\ell(\tilde{\eta}_i-\eta_i)$

类似于引理 E.13 中的 T 和 T^*。经检查可知，对于左列中的每一项，系数 $c_{i_1,\ldots,i_m}$ 和 $c^*_{i_1,\ldots,i_m}$ 的规范上界 $c_{i_1,\ldots,i_m}$ 和 $\overline{c^*_{i_1,\ldots,i_m}}$ 满足

$$\overline{c_{i_1,\ldots,i_m}} \lesssim \overline{c^*_{i_1,\ldots,i_m}}.$$

回顾一下，这些规范上界是在 E.4.1节中定义的。因此，引理 E.13 的结论适用，对于表 2 左列中的每一项 X，我们有

$$|\mathbb{E}X| \lesssim \overline{\mathbb{E}X^*}, \qquad \mathrm{Var}(X) \lesssim \overline{\mathrm{Var}(X^*)}.$$

如 E.4.1节所述，引理 E.7–E.10 中关于均值和方差的上界实际上是对 $\mathbb{E}X^*$ 和 $\mathsf{Var}(X^*)$ 的上界。根据式 (E.48) 以及引理 E.7–E.10，对于每个满足 $N_W^* \le 4$ 的后扩展和 Y，我们有

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}Y| &\le |\mathbb{E}X| + o(\|\theta\|_2^{-2})\sqrt{\mathbb{E}[X^2]} = |\mathbb{E}X| + o(\|\theta\|_2^{-2})\sqrt{\mathbb{E}[X]^2 + \mathrm{Var}(X)} \\
&\lesssim \tilde{\lambda}^2\lambda_1 + o(\|\theta\|_2^{-2})\cdot\sqrt{\tilde{\lambda}^4\lambda_1^2 + \lambda_1^4 + \tilde{\lambda}^6 + \tilde{\lambda}^2\lambda_1^3} \\
&\lesssim \tilde{\lambda}^2\lambda_1 + \lambda_1^2 + \tilde{\lambda}^3 + |\tilde{\lambda}|\lambda_1^{3/2} = o(\tilde{\lambda}^4)
\end{aligned}$$

根据假设 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$。同理，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &\lesssim \mathrm{Var}(X) + o(\|\theta\|_2^{-4})\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) + o(\|\theta\|_2^{-4})(\mathbb{E}[X]^2 + \mathrm{Var}(X)) \\
&\lesssim \lambda_1^4 + \tilde{\lambda}^6 + \tilde{\lambda}^2\lambda_1^3 + o(\|\theta\|_2^{-4})\cdot\left(\tilde{\lambda}^4\lambda_1^2 + \lambda_1^4 + \tilde{\lambda}^6 + \tilde{\lambda}^2\lambda_1^3\right) \lesssim o(\tilde{\lambda}^8).
\end{aligned}$$

使用 $N_W^* > 4$ 回想一下 **分析项**

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{v}}(\mathbb{E}A)\mathbf{1}_n,\ \ \tilde{\eta} = \frac{1}{\sqrt{v}}A\mathbf{1}_n,\ \ v = \mathbf{1}_n'(\mathbb{E}A)\mathbf{1}_n$$

.

定义

$$G_i = \tilde{\eta}_i - \eta_i. \tag{E.51}$$

表 (1) 中满足 $N_W^* = 5$ 的展开后求和里，只有 R_7、 R_8，以及 R_{25}–R_{28} 依赖 Ω。这些项都属于以下类型

$$\begin{aligned}
J_5' &= \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{jk}(G_i G_j G_k G_\ell W_{\ell i}),\\
J_6' &= \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{k\ell}(G_i G_j^2 G_k W_{\ell i})\\
J_9 &= \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \eta_k \widetilde{\Omega}_{\ell i}(G_i G_j^2 G_k G_\ell)\\
J_{10} &= \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \eta_\ell \widetilde{\Omega}_{\ell i}(G_i G_j^2 G_k^2).
\end{aligned}$$

更多细节请参见（Jin 等人，2021c，补充材料，G.4.10.2 节）。

为处理 J_5' 和 J_6'，我们将它们与以下内容进行比较

$$\begin{aligned}
J_5 &= \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \eta_j \eta_k (G_i G_j G_k G_\ell W_{\ell i})\\
J_6 &= \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \eta_k \eta_\ell (G_i G_j^2 G_k W_{\ell i}),
\end{aligned}$$

这两者都在（Jin 等人，2021c，补充材料，G.4.10.2 节）中进行了讨论。注意，

~ ~J5 和 J_5 均不依赖 Ω。在引理 E.13 中令 $T = J_5'$ 和 $T^* = J_5$ 取相应值，并注意到根据 (E.24)，$|\Omega_{jk}| \lesssim \theta_j \theta_k$，可知引理 E.13 的假设均得到满足。（Jin 等人，2021c，补充材料，G.4.10.2 节）中证明了

$$\mathbb{E}[J_5^2] \le \overline{\mathbb{E}[J_5]}^2 + \overline{\mathrm{Var}(J_5)} = o(\|\theta\|_2^8).$$

应用引理 E.13，我们得出

$$\mathbb{E}[J_5'^2] = o(\|\theta\|_2^8).$$

类似地，(Jin 等人，2021c，补充材料，G.4.10.2 节) 中证明了

$$\mathbb{E}[J_6^2] \le \overline{\mathbb{E}[J_6]}^2 + \overline{\mathrm{Var}(J_6)} = o(\|\theta\|_2^8).$$

Sett ˜ing $T = J_6'$ and $T^* = J_6$，引理 E.13 的假设得以满足，因为 $|\Omega_{k\ell}| \lesssim \theta_k \theta_\ell$。W e con得出

$$\mathbb{E}[J_6'^2] = o(\|\theta\|_2^8).$$

项 J_9 and J_{10} 可使用 E.4.1节中描述的策略进行显式分析。我们省略完整细节，转而在 $\|\theta\|_2 \gg [\log(n)]^{5/2}$ 的情况下给出简化证明。事件

$$E = \cap_{i=1}^n E_i, \qquad \text{where} \quad E_i = \left\{\sqrt{v}|G_i| \le C_0 \sqrt{\theta_i \|\theta\|_1 \log(n)}\right\}. \tag{E.52}$$

在 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 110 页) 中引入。通过应用伯恩斯坦不等式和并集界，可以证明 E 以至少 $1 - n^{-C_0/2.01}$ 的概率成立。应用粗略界 $|G_i| \le n$ 和三角不等式，我们看到 $|J_9| \lesssim n^9$ 以高概率成立，因此对于充分大的 C_0,

$$\mathbb{E}[|J_9|^2 \cdot \mathbf{1}_{E^c}] = o(1).$$

在事件 E下，由（E.20）可得,

$$|J_9| \le \sum_{i,j,k,\ell} |\eta_k \widetilde{\Omega}_{\ell i}||G_i G_j^2 G_k G_\ell|$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{i,j,k,\ell} (\theta_i\theta_k\theta_\ell)\frac{\sqrt{\theta_i\theta_j^2\theta_k\theta_\ell\|\theta\|_1^5[\log(n)]^5}}{\sqrt{v^5}}\\
&\lesssim \frac{[\log(n)]^{5/2}}{\sqrt{\|\theta\|_1^5}}\Big(\sum_i \theta_i^{3/2}\Big)\Big(\sum_j \theta_j\Big)\Big(\sum_k \theta_k^{3/2}\Big)\Big(\sum_\ell \theta_\ell^{3/2}\Big)\\
&\lesssim \frac{[\log(n)]^{5/2}}{\sqrt{\|\theta\|_1^3}}\Big(\sum_i \theta_i^{3/2}\Big)^3\\
&\lesssim \frac{[\log(n)]^{5/2}}{\sqrt{\|\theta\|_1^3}}\Big(\sum_i \theta_i^{2}\Big)^{3/2}\Big(\sum_i \theta_i\Big)^{3/2}\\
&\lesssim [\log(n)]^{5/2}\|\theta\|^3.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$\mathbb{E}[J_9^2] = \mathrm{Var}(J_9) + \mathbb{E}[J_9]^2 = o(\|\theta\|_2^8).$$

我们给出一种类似但更简化的论证，并假设 J_{10} $\|\theta\|_2 \gg [\log(n)]^{5/2}$。在事件 E 下，我们有

$$
\begin{aligned}
|J_{10}| &\le \sum_{i,j,k,\ell} |\eta_\ell\widetilde{\Omega}_{\ell i}||G_iG_j^2G_k^2|\\
&\lesssim \sum_{i,j,k,\ell} (\theta_i\theta_\ell^2)\frac{\sqrt{\theta_i\theta_j^2\theta_k^2\|\theta\|_1^5[\log(n)]^5}}{\sqrt{v^5}}\\
&\lesssim \frac{[\log(n)]^{5/2}}{\sqrt{\|\theta\|_1^5}}\Big(\sum_i \theta_i^{3/2}\Big)\Big(\sum_j \theta_j\Big)\Big(\sum_k \theta_k\Big)\Big(\sum_\ell \theta_\ell^{2}\Big)\\
&\lesssim \frac{[\log(n)]^{5/2}}{\sqrt{\|\theta\|_1^5}}\big(\|\theta\|\sqrt{\|\theta\|_1}\big)\|\theta\|_1^2\|\theta\|^2\\
&\lesssim [\log(n)]^{5/2}\|\theta\|^3;
\end{aligned}
$$

因此

$$\mathbb{E}[J_{10}^2] = \mathrm{Var}(J_{10}) + \mathbb{E}[J_{10}]^2 = o(\|\theta\|_2^8).$$

˜接下来我们考虑含有 $N_W^* = 6$ 的项。唯一依赖于 Ω 的项是 R_{32}，其形式为

$$K_5' = \sum_{i,j,k,\ell(dist)} \widetilde{\Omega}_{ik}G_iG_j^2G_kG_\ell^2.$$

K_5' 可以使用 E.4.1 节中描述的策略，对其方差进行显式分析。为节省篇幅，当 $\|\theta\|_2 \gg [\log(n)]^{3/2}$ 时，我们给出一个简化的论证。同样，令 E 表示事件 (E.52)。在此事件下，我们有

$$
\begin{aligned}
|K_5'| &\lesssim \sum_{i,j,k,\ell} (\theta_i\theta_k)\frac{\sqrt{\theta_i\theta_j^2\theta_k\theta_\ell^2}\|\theta\|_1^3[\log(n)]^3}{v^3}\\
&\lesssim \frac{[\log(n)]^3}{\|\theta\|_1^3}\Big(\sum_i \theta_i^{3/2}\Big)\Big(\sum_j \theta_j\Big)\Big(\sum_k \theta_k^{3/2}\Big)\Big(\sum_\ell \theta_\ell\Big)\\
&\lesssim \frac{[\log(n)]^3}{\|\theta\|_1^3}\big(\|\theta\|\sqrt{\|\theta\|_1}\big)^2\|\theta\|_1^2\\
&\lesssim [\log(n)]^3\|\theta\|^2,
\end{aligned}
$$

上文应用了 (E.20) 和 (E.24)，以及柯西–施瓦茨不等式。因此，

$$\mathbb{E}[K_5'^2] = \mathrm{Var}(K_5') + \mathbb{E}[K_5']^2 = o(\|\theta\|_2^8).$$

˜最后，所有包含 $N_W^* \geq 7$ 的项都与 Ω 无关，因此这些界可直接沿用（详情请参见 (Jin 等人，2021c，补充材料，第 G.4.10.4 节)）。引理的证明至此完成。 □

E.4.7 引理 E.12 的证明

定义

$$\epsilon_{ij}^{(1)} = \eta_i^* \eta_j^* - \eta_i \eta_j, \quad \epsilon_{ij}^{(2)} = (1 - \frac{v}{V})\eta_i \eta_j, \quad \epsilon_{ij}^{(3)} = -(1 - \frac{v}{V})\delta_{ij}.$$

注意， $\epsilon_{ij}^{(1)}$ 是一个非随机项。如 Jin 等人（2021c，补充材料，第 119 页）所示，我们有

$$|\epsilon_{ij}^{(1)}| \lesssim \frac{\|\theta\|_\infty}{\|\theta\|_1} \cdot \theta_i \theta_j,$$

这意味着

$$|\epsilon_{ij}^{(1)}| \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_2^2} \cdot \theta_i \theta_j \tag{E.53}$$

根据（E.2）。

如（Jin 等人，2021c，补充材料，G.3 节）中所述， $Q - Q^*$ 是以下形式的有限和：

$$\sum_{i,j,k,\ell(dist)} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} d_{\ell i}, \qquad \text{where} \quad a, b, c, d \in \{\widetilde{\Omega}, W, \delta, \tilde{r}, \epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \epsilon^{(3)}\}. \tag{E.54}$$

令 Y表示上述形式的任意一项。给定 $X \in \{\widetilde{\ }\Omega\ W,\ \delta,\ \tilde{r},\ \epsilon^{(1)},\ \epsilon^{(2)},\ \epsilon^{(3)}\}$，令 N_X表示等于 X的 $a,\ b,\ c,\ d$ 的总数。则有

$$Y = \big(\frac{v}{V}\big)^{N_{\tilde{r}}} (-1)^{N_\epsilon^{(3)}} \Big(1 - \frac{v}{V}\Big)^{N_\epsilon^{(2)} + N_\epsilon^{(3)}} X, \qquad X \equiv \sum_{i,j,k,\ell(dist)} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} d_{\ell i}.$$

其中

$$\begin{cases} a, b, c, d \in \{\widetilde{\Omega}, W, \delta, (V/v)\tilde{r}, \epsilon^{(1)}, \eta\eta^\mathsf{T}\}, \\ \text{number of } \eta_i \eta_j \text{ in the product is } N_\epsilon^{(2)}, \\ \text{number of } \delta_{ij} \text{ in the product is } N_\delta + N_\epsilon^{(3)}, \\ \text{number of any other term in the product is same as before.} \end{cases} \tag{E.55}$$

令 x_n 表示一个实数序列，满足 $\sqrt{\log(\|\theta\|_1)} \ll x_n \ll \|\theta\|_1$。仿照（Jin 等人，2021c，补充材料，第 121 页）中的论证，可得

$$\mathbb{E}[Y^2] \lesssim \Big(\frac{x_n^2}{\|\theta\|_1^2}\Big)^{N_\epsilon^{(2)} + N_\epsilon^{(3)}} \cdot \mathbb{E}[X^2] + o(1),$$

由（E.4），存在一个序列 $\log(\|\theta\|_1) \ll x_n \ll \|\theta\|_1 / \|\theta\|_2^2$。因此，

$$\mathbb{E}[Y^2] \lesssim \Big(\frac{1}{\|\theta\|_2^4}\Big)^{N_\epsilon^{(2)} + N_\epsilon^{(3)}} \cdot \mathbb{E}[X^2] + o(1), \tag{E.56}$$

因此，我们着重于控制 $\mathbb{E}[X^2]$。

考虑定义一个新的随机变量 X^* 为

$$X^* \equiv \sum_{i,j,k,\ell(dist)} a_{ij}^* b_{jk}^* c_{k\ell}^* d_{\ell i}^*$$

其中

$$a^* = \begin{cases} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} \cdot \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } a = \epsilon^{(1)} \\ \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } a \in \{\tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$b^* = \begin{cases} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} \cdot \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } b = \epsilon^{(1)} \\ \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } b \in \{\tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c^* = \begin{cases} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} \cdot \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } c = \epsilon^{(1)} \\ \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } c \in \{\tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ c & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d^* = \begin{cases} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} \cdot \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } d = \epsilon^{(1)} \\ \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } \in \{\tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ d & \text{otherwise .} \end{cases}$$

另定义

$$\tilde{X} = \sum_{ijk\ell(dist)} \tilde{a}_{ij}\tilde{b}_{jk}\tilde{c}_{k\ell}\tilde{d}_{\ell i}$$

其中

$$\tilde{a} = \begin{cases} \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } a \in \{\epsilon^{(1)}, \tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{b} = \begin{cases} \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } b \in \{\epsilon^{(1)}, \tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{c} = \begin{cases} \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } c \in \{\epsilon^{(1)}, \tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ c & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{d} = \begin{cases} \theta\theta^\mathsf{T} & \text{if } d \in \{\epsilon^{(1)}, \tilde{\Omega}, \eta\eta^\mathsf{T}\} \\ d & \text{otherwise .} \end{cases}$$

注意， $X^* = \underbrace{\big(\frac{1}{\|\theta\|_2^2}\big)^{N_\epsilon^{(1)}}}\tilde{X}$和 $\tilde{a}$， $\tilde{b}$， $\tilde{c}$， $\tilde{d} \in \{\theta\theta^\mathsf{T}, W, \delta, (V/v)\tilde{r}\}$。稍后我们将证明

$$\mathbb{E}[X^2] \lesssim \mathbb{E}[X^{*2}] \tag{E.57}$$

首先，我们在 $N_W + N_\delta + N_{\tilde{r}} = 0$ 的情况下给出 $\mathbb{E}[\tilde{X}^2]$ 的上界。注意，对于 $Q - Q^*$ 中所有此类项，我们都有 $N_\epsilon^{(1)} + N_\epsilon^{(2)} + N_\epsilon^{(3)} + N_{\tilde{\Omega}} = 4$ 和 $N_{\tilde{\Omega}} < 4$。特别地， $\tilde{X}$ 和 X^* 是非随机的。若 $N_{\tilde{\Omega}} = 3$，则由 (E.22) 和 (E.24) 可得，

$$|\tilde{X}| = \big|\sum_{ijk\ell(dist)} \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{jk}\tilde{\Omega}_{k\ell}\theta_i\theta_\ell\big| \lesssim \frac{1}{\|\theta\|_2^2}\sum_{ijk\ell}\beta_i\theta_i^2\beta_j^2\theta_j^2\beta_k^2\theta_k^2\beta_\ell\theta_\ell^2 \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^6\|\theta\|_2^2$$

如果 $N_{\tilde{\Omega}} = 2$，则有两种情况。首先，

$$|\tilde{X}| = \big|\sum_{ijk\ell(dist)} \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{jk}\theta_k\theta_\ell\theta_\ell\theta_i\big| \lesssim \sum_{ijk\ell}\beta_i\theta_i\beta_j^2\theta_j^2\beta_k\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_i \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4,$$

其次

$$|\tilde{X}| = \big|\sum_{ijk\ell(dist)} \tilde{\Omega}_{ij}\theta_j\theta_k\tilde{\Omega}_{k\ell}\theta_\ell\theta_i\big| \lesssim \sum_{ijk\ell}\beta_i\theta_i^2\beta_j\theta_j^2\beta_k\theta_k^2\beta_\ell\theta_\ell^2 \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^4\|\theta\|_2^4$$

最后，如果 $N_{\tilde{\Omega}} = 1$，

$$|\tilde{X}| = \big|\sum_{ijk\ell(dist)} \tilde{\Omega}_{ij}\theta_j\theta_k^2\theta_\ell^2\theta_i\big| \lesssim \sum_{ijk\ell}\tilde{\beta}_i\theta_i^2\beta_j\theta_j^2\theta_k^2\theta_\ell^2 \lesssim \|\beta\circ\theta\|_2^2\|\theta\|_2^6.$$

注意，当 $N_W + N_\delta + N_{\tilde{r}} = 0$

$$|X| \lesssim |X^*|$$

由 (E.22)、(E.20) 和 (E.53) 得出。根据上述界，我们可以得出

$$|Y| \lesssim \big(\frac{1}{\|\theta\|_2^2}\big)^{N_\varepsilon^{(1)}+N_\varepsilon^{(2)}+N_\varepsilon^{(3)}}|\tilde{X}| \lesssim \max_{1\le k\le 3}\|\beta\circ\theta\|_2^{2k}\|\theta\|_2^{2(4-k)} \lesssim |\tilde{\lambda}|^3. \tag{E.58}$$

接下来，我们在 $N_W + N_\delta + N_{\tilde{r}} > 0$ 的情况下对 $\mathbb{E}[\tilde{X}^2]$ 进行界定。根据引理 E.2 及其中 $f \in \mathbb{R}^2$ 的定义，我们有 $\tilde{\Omega}_{ij} = \alpha_i \alpha_j \theta_i \theta_j$，其中 $\alpha = \Pi f$。注意，在引理 E.7–E.11 中，我们对所有形如以下形式的项的均值和方差进行了界定

$$Z \equiv \sum_{i,j,k,\ell(dist)} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} d_{\ell i}, \qquad \text{where} \quad a,b,c,d \in \{\widetilde{\Omega}, W, \delta, (V/v)\tilde{r}\}.$$

因此，引理 E.7–E.11 的证明得到了一个函数 F，使得

$$\mathbb{E}[Z^2] \le F(\theta, \beta; N_{\tilde{\Omega}}, N_W, N_\delta, N_{\tilde{r}}),$$

其中回忆一下，$|\alpha_i| \le \beta_i$。

请注意，在下文中，我们用 $'$ 表示一个新变量，而非转置。作为引理 E.7–E.11 证明的直接推论，若我们定义一个新矩阵 $\Omega' = \alpha'_i \alpha'_j \theta_i \theta_j$，其中 α' 是一个满足如下逐坐标界的向量：$|\alpha'_i| \le \beta'_i$，则

$$Z' \equiv \sum_{i,j,k,\ell(dist)} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} d_{\ell i}, \qquad \text{where} \quad a,b,c,d \in \{\widetilde{\Omega}', W, \delta, (V/v)\tilde{r}\}$$

满足

$$\mathbb{E}[Z'^2] \le F(\theta, \beta'; N'_{\tilde{\Omega}'}, N'_W, N'_\delta, N'_{\tilde{r}}),$$

其中，例如，N'_δ 统计 δ 在 Z'中出现的次数。只需逐行检查引理 E.7–E.11 中的每一步计算，将所有 Ω 替换为 Ω'，并将每次使用界 $|\alpha_i| \le \beta_i$ 的地方替换为 $|\alpha'_i| \le \beta'_i$，即可验证这一点。换言之，我们的证明并未利用 $\alpha = \Pi f$的具体取值。

特别地，如果 $\alpha = \mathbf{1}$，则 $\tilde{\Omega}' = \theta\theta^\mathsf{T}$。在这种情况下，我们可以令 $\beta = \mathbf{1}$。注意，采用此 Ω' 的取值后，$\tilde{X}$ 具有的形式，其中 Z'。因此，

$$\mathbb{E}[\tilde{X}^2] \le F(\theta, \mathbf{1}; \tilde{N}_{\tilde{\Omega}'}, \tilde{N}_W, \tilde{N}_\delta, \tilde{N}_{\tilde{r}}). \tag{E.59}$$

仔细检查引理 E.7–E.11 中的界，我们看到

$$F(\theta, \mathbf{1}; N_{\tilde{\Omega}'}, N_W, N_\delta, N_{\tilde{r}}) \lesssim \|\theta\|_2^{12}. \tag{E.60}$$

在（Jin 等人，2021c，补充材料，G.3 节）中，证明了$Q - Q^*$ 分解中的所有项都满足 $N_\epsilon^{(1)} + N_\epsilon^{(2)} + N_\epsilon^{(3)} > 0$。结合这一事实以及（E.56）、（E.57）、（E.59）和（E.60），

$$\mathbb{E}[Y^2] \lesssim \Big(\frac{1}{\|\theta\|_2^4}\Big)^{N_\epsilon^{(2)} + N_\epsilon^{(3)}} \cdot \Big(\frac{1}{\|\theta\|_2^2}\Big)^{2N_\epsilon^{(1)}} \cdot \mathbb{E}[\tilde{X}^2] + o(1) \lesssim \|\theta\|_2^8. \tag{E.61}$$

注意，（E.58）和（E.61）在备择假设下给出了引理 E.12 中的界，而零假设下的界则直接由（Jin 等人，2021c，引理 G.12）得到。因此，只需证明当 $N_W + N_\delta + N_{\tilde{r}} > 0$ 时（E.57）成立。令

$$X = \sum_{i_1,\ldots,i_m} c_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m}$$
$$X^* = \sum_{i_1,\ldots,i_m} c^*_{i_1,\ldots,i_m} G_{i_1,\ldots,i_m}$$

采用 E.4.1节中所述的形式，此时

- $c_{i_1,\ldots,i_m} = \prod_{(s,s')\in A} \Gamma^{(s,s')}_{i_s,i_{s'}}$ is a nonstochastic term where $A \subset [m] \times [m]$ and
$$\Gamma^{(s,s')} \in \{\tilde{\Omega}, \eta^* \mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}, \eta \mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}, \mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}, \epsilon^{(1)}, \eta\eta^\mathsf{T}\}$$
- $c^*_{i_1,\ldots,i_m} = \prod_{(s,s')\in A} \Gamma^{(s,s')}_{i_s,i_{s'}}$ is a nonstochastic term where $A \subset [m] \times [m]$ and
$$\Gamma^{(s,s')} \in \{\eta^* \mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}, \eta \mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}, \mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}, \theta\theta^\mathsf{T}/\|\theta\|_2^2, \theta\theta^\mathsf{T}\}$$

- $G_{i_1,\ldots,i_m} = \prod_{(s,s')\in B} W_{i_s,i_{s'}}$ where $B \subset [m] \times [m]$.

如果 $\Gamma^{(s,s')} \in \{\theta\theta^\mathsf{T}, \theta\theta^\mathsf{T}/\|\theta\|_2^2\}$，我们只需令 $\overline{\Gamma^{(s,s')}} = \Gamma^{(s,s')}$ 并定义

$$\overline{c^*_{i_1,\ldots,i_m}} = \prod_{(s,s')\in A} \overline{\Gamma^{(s,s')}_{i_s,i_{s'}}}$$

与 E.4.1节中一样。我们还按照 E.4.1节中的方式，定义 $\overline{\mathbb{E}X^*}$ 在 $|\mathbb{E}X^*|$ 上的规范上界，以及 $\overline{\mathrm{Var}(X^*)}$ 在 $\mathrm{Var}(X^*)$ 上的规范上界。根据上述讨论和 (E.59),

$$\overline{\mathbb{E}[X^*]} \equiv \big(\frac{1}{\|\theta\|_2^2}\big)^{N_\epsilon^{(1)}} \sqrt{F(\theta, \mathbf{1}; \tilde{N}_{\tilde{\Omega}'}, \tilde{N}_W, \tilde{N}_\delta, \tilde{N}_{\tilde{r}})},$$

and

$$\overline{\mathrm{Var}(X^*)} \equiv \big(\frac{1}{\|\theta\|_2^2}\big)^{2N_\epsilon^{(1)}} F(\theta, \mathbf{1}; \tilde{N}_{\tilde{\Omega}'}, \tilde{N}_W, \tilde{N}_\delta, \tilde{N}_{\tilde{r}}).$$

接下来注意到

$$|c_{i_1,\ldots,i_m}| \lesssim |c^*_{i_1,\ldots,i_m}| \lesssim |\overline{c^*_{i_1,\ldots,i_m}}|.$$

由引理 E.13 的一个简单扩展可得

$$|\mathbb{E}X| \lesssim \overline{\mathbb{E}X^*}$$
$$\mathrm{Var}(X) \lesssim \overline{\mathrm{Var}(X^*)},$$

这验证了 (E.57)，并完成了证明。 □

E.5 随机区块模型设定下的计算

˜我们计算随机区块模型设定中 λ_1 和 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的阶（它们是 Ω 的两个非零特征值）。根据基本代数，λ_1, λ_2 也是下列矩阵的两个非零特征值

$$\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & n-N \end{bmatrix}^{1/2} \times \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & n-N \end{bmatrix}^{1/2} = \begin{bmatrix} aN & \sqrt{N(n-N)}b \\ \sqrt{N(n-N)}b & (n-N)c \end{bmatrix},$$

其中 b 由式 (H.1) 给出。通过直接计算并代入 b的定义,

$$\begin{aligned}\lambda_1 =& \frac{aN + (n-N)c + \sqrt{(aN-(n-N)c)^2 + 4N(n-N)b^2}}{2} \\ =& \frac{aN + (n-N)c + |(n-N)c - aN|\frac{n}{n-2N}}{2}.\end{aligned}$$

回顾一下,

$$b = \frac{nc - N(a+c)}{n-2N}.$$

要求 $b \geq 0$。因此,

$$nc - (a+c)N \geq 0, \qquad \text{and so} \qquad (n-N)c \geq aN. \tag{E.62}$$

通过直接计算可得

$$\lambda_1 = \frac{(n-N)^2c - aN^2}{n-2N} = \frac{(n-N)c((n-N) - \frac{aN}{(n-N)c}N)}{n-2N} \sim \frac{(n-N)c(n-N)}{n-2N} \sim nc$$

其中，最后两个 $\asymp$, 中我们使用了 $(n-N)c \geq aN$ 和 $N = o(n)$。类似地,

$$\lambda_2 = \frac{aN + (n-N)c - \sqrt{(aN-(n-N)c)^2 + 4N(n-N)b^2}}{2} = \frac{(a-c)N(n-N)}{n-2N} \sim N(a-c).$$

F 定理 2.3 的证明（ χ^2 检验的无效性）

我们将 SgnQ 检验与 χ^2 检验进行比较。回顾一下，我们假设 $\theta_i = \mathbf{1}_n$。 χ^2 检验统计量定义为

$$X_n = \frac{1}{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \big((A\mathbf{1}_n)_i - \hat{\alpha}n\big)^2, \qquad \text{where } \hat{\alpha} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} A_{ij}.$$

我们还定义了一个理想化的 χ^2 检验统计量:

$$\tilde{X}_n = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \big((A\mathbf{1}_n)_i - \alpha n\big)^2, \qquad \text{where } \alpha = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}.$$

χ^2 检验定义为

$$\chi_n^2 = \mathbf{1}\left[\frac{|X_n - n|}{\sqrt{2n}} > z_{\gamma/2}\right],$$

其中 z_γ 满足 $\mathbb{P}[|N(0,\ 1)| \geq z_\gamma] = \gamma$。类似地，理想化的 χ^2 检验定义为

$$\tilde{\chi}_n^2 = \mathbf{1}\left[\frac{|\tilde{X}_n - n|}{\sqrt{2n}} > z_{\gamma/2}\right],$$

在某些度齐次情形下，已知 χ^2 检验具有完全检验功效 Arias-Castro & Verzelen (2014); Cammarata & Ke(2022)。

我们证明以下结论，它直接推出定理 2.3。

定理 F.1. 假设(2.7) 成立，且 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$；回顾一下，在这些条件下，*SgnQ* 检验的检验功效趋于1。接下来假设在零假设和备择假设下，以下正则性条件均成立:

(i) $\theta = \mathbf{1}_n$*(ii)* $\alpha \to 0$*(iii)*
$\alpha^2 n \to \infty$*(iv)* $\sum_{ij}(\Omega_{ij} - \alpha)$
$^2 = o(\alpha n^{3/2})$.

那么， χ^2 检验和理想化的 χ^2 检验的检验功效都趋于 γ （即该检验的预设检验水平）。

请注意，前一定理推出定理 2.3。根据定理 2.2，即使不满足额外的正则性条件 (i)–(iv)，SgnQ 仍具有完全检验功效。另一方面，对于任意固定的、满足条件 (i)–(iv) 的备择假设度修正块模型，定理 F.1 表明， χ^2 的检验功效为 κ。

定理 *F.1* 的证明。 定理 2.2 证实，只要满足 (2.7) 且 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \to \infty$，SgnQ 就具有满检验功效。剩下需要证明的是 χ^2 检验的无效性。

考虑一个处于备择假设下的随机块模型，使得 $\Omega\mathbf{1} = (\alpha n)\mathbf{1}$ 且 $|\tilde{\lambda}|/\sqrt{\lambda_1} \asymp N(a-c)$ $/\sqrt{nc} \to \infty$。为此，我们选取一个整数 $N > 0$ 作为较小社区的规模，并设定 $b = \frac{cn-}{a+c\ N}$。若满足 $c \to 0$ 且 $cn \ll N(a-c)^2 \ll cn^{3/2}$，则其余正则性条件也成立。我们证明在所指定的备择假设下， X_n 和 X_n 都渐近服从正态分布，这足以推出定理 F.1。

Cammarata & Ke（2022）证明了

$$\hat{T}_n \equiv [(n-1)\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})](X_n - n) = \sum_{i,j,k \text{ (dist.)}} (A_{ik} - \hat{\alpha})(A_{jk} - \hat{\alpha}). \tag{F.1}$$

ˆ 我们介绍一个理想化版本 T_n 的 T_n，它是

$$T_n = \sum_{i,j,k \text{ (dist.)}} (A_{ik} - \alpha)(A_{jk} - \alpha),$$

沿用 Cammarata & Ke (2022) 的方法，我们有

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{1/2} U_n V_n Z_n. \tag{F.2}$$

其中

$$U_n = \frac{\alpha_n(1-\alpha_n)}{\hat{\alpha}_n(1-\hat{\alpha}_n)}, \qquad V_n = \frac{\hat{T}_n}{T_n}, \qquad Z_n = \frac{\frac{T_n}{(n-1)\alpha_n(1-\alpha_n)}}{\sqrt{\frac{2n(n-2)}{(n-1)}}}.$$

由于 $\hat{}\alpha$ 的各项有界，大数定律意味着 $U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$。此外，由于根据 $\alpha^2 n \to \infty$ 这一假设有 $\alpha n \to \infty$，直接应用 Berry-Esseen 定理可得

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\hat{\alpha}_n - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n(1-\alpha_n)}} \Rightarrow \mathcal{N}(\mu, 1).$$

结合前述事实，仿照 (Cammarata & Ke, 2022, pg.32) 中的论证，也可推出

$$V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

只要我们能证明 $Z_n \Rightarrow N(0,1)$。由于论证非常相似，我们省略细节。

因此，只需研究 Z_n。我们首先分析 T_n，并将其分解为

$$\begin{aligned} T_n = &\sum_{i,j,k \text{ (dist.)}} (A_{ik} - \Omega_{ik})(A_{jk} - \Omega_{jk}) + 2 \sum_{ijk(dist)} (\Omega_{ik} - \alpha)(A_{jk} - \Omega_{jk}) \\ &+ \sum_{ijk(dist)} (\Omega_{ik} - \alpha)(\Omega_{jk} - \alpha) \equiv T_{n1} + T_{n2} + T_{n3}. \end{aligned}$$

Obs注意到 T_{n3} 是非随机的。第二项和第三项与 T_{n1}相比可以忽略。定义 e $\overline{\Omega} = \Omega - \alpha \mathbf{1}\mathbf{1}'$。通过直接计算,

$$\mathbb{E}T_{n2} = 0,$$

and

$$\mathrm{Var}(T_{n2}) = 8 \sum_{j<k(dist)} \Big(\sum_{i \notin \{j,k\}} \overline{\Omega}_{ik} \Big)^2 \Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) = 8 \sum_{j<k(dist)} \big(\overline{\Omega}_{jk} + \overline{\Omega}_{kk}\big)^2 \Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) \lesssim \alpha n^2.$$

接下来,

$$\begin{aligned} |T_{n3}| &= \Big| \sum_{ijk} \overline{\Omega}_{ik}\overline{\Omega}_{jk} - \sum_{ijk(not\, dist.)} \overline{\Omega}_{ik}\overline{\Omega}_{jk} \Big| = \Big| \sum_{ijk(not\, dist.)} \overline{\Omega}_{ik}\overline{\Omega}_{jk} \Big| \\ &\lesssim \Big| \sum_{ij} \overline{\Omega}_{ii}\overline{\Omega}_{ji} \Big| + \Big| \sum_{ik} \overline{\Omega}_{ik}^2 \Big| + \Big| \sum_{i} \overline{\Omega}_{ii}^2 \Big| = 0 + o(\alpha n^{3/2}) + n = o(\alpha n^{3/2}), \end{aligned}$$

其中我们应用了第三正则性条件。

现在我们关注 T_{n1}。通过直接计算

$$\mathbb{E}T_{n1} = 0,$$

and

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\, T_{n1} &= 2 \sum_{i,j,k(dist)} \Omega_{ik}(1-\Omega_{ik})\Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) \\ &= 2 \sum_{i,j,k} \Omega_{ik}(1-\Omega_{ik})\Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) - 2 \sum_{i,j,k(not\, dist.)} \Omega_{ik}(1-\Omega_{ik})\Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) \\ &= 2\mathbf{1}'\Omega^2\mathbf{1} - 2 \sum_{i,j,k(not\, dist.)} \Omega_{ik}(1-\Omega_{ik})\Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) \end{aligned}$$

注意，

$$2\mathbf{1}'\Omega^2\mathbf{1} \sim 2n(n-1)(n-2)\alpha^2$$

因为 $\alpha \to 0$。此外，通过一些简单的分类讨论，我们可以证明

$$\sum_{i,j,k(not\ dist.)} \Omega_{ik}(1-\Omega_{ik})\Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) \lesssim \alpha n^2 = o(\alpha^2 n^3),$$

这里我们利用 $\alpha n \to \infty$（因为 $\alpha^2 n \to \infty$）。因此

$$\operatorname{Var} T_{n1} \sim 2n(n-1)(n-2)\alpha^2(1-\alpha)^2 \sim 2n(n-1)(n-2)\alpha^2(1-\alpha)^2.$$

为研究 T_{n1}，我们采用与 Cammarata & Ke (2022) 类似的论证，应用鞅中心极限定理）。定义 $W_{ij} = A_{ij} - \Omega_{ij}$ 并

$$T_{n,m} = \sum_{(i,j,k)\in I_m} W_{ik}W_{jk}, \qquad \text{and} \qquad T_{n,0} = 0,$$

$$Z_{n,m} = \sqrt{\frac{n-1}{2n(n-2)}}\frac{T_{n,m}}{(n-1)\alpha_n(1-\alpha_n)}, \qquad \text{and} \qquad Z_{n,0} = 0.$$

其中

$$I_m = \{(i,j,k) \in [m]^3 \text{ s.t. } i,j,k \text{ are distinct}\},$$

且 $m \le n$。定义一个滤过 $\{\mathcal{F}_{n,m}\}$，其中 $\mathcal{F}_{n,m} = \sigma\{W_{ij}, (i,j) \in [m]^2\}$ 对所有 $m \in [n]$ 均成立，并令 $\mathcal{F}_{n,0}$ 为平凡的 σ-域。容易验证，$T_{n,m}$ 和 $Z_{n,m}$ 相对于此滤过都是鞅。我们进一步定义一个鞅差序列

$$X_{n,m} = Z_{n,m} - Z_{n,m-1}$$

对所有 $m \in [n]$。

如果我们能证明以下条件成立，

$$\text{(a)} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,m}^2 | \mathcal{F}_{n,m-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \tag{F.3}$$

$$\text{(b)} \ \forall \epsilon > 0, \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}\{|X_{n,m} > \epsilon|\} | \mathcal{F}_{n,m-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \tag{F.4}$$

那么鞅中心极限定理意味着 $Z_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$。

我们的论证与 Cammarata & Ke (2022) 非常相似。首先考虑 (F.3)。只需证明

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,m}^2 | \mathcal{F}_{n,m-1}]\right] \xrightarrow{n\to\infty} 1, \tag{F.5}$$

and

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,m}^2 | \mathcal{F}_{n,m-1}]\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{F.6}$$

为使记号简洁，定义

$$C_n := (n-1)\alpha_n(1-\alpha_n)\sqrt{\frac{2n(n-2)}{n-1}}.$$

仿照（Cammarata & Ke，2022，第 33–34 页）中的论证，可得如下结果。注意，以下所有求和的指标均取至 $m-1$。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_n^2 X_{n,m}^2 | \mathcal{F}_{n,m-1}] = 4 \sum_{k\neq j;\ i\neq l} W_{jk}W_{il}\mathbb{E}\left[W_{mk}W_{mi}\right] + 4 \sum_{k\neq j;\ i\neq l} W_{jk}\mathbb{E}\left[W_{im}W_{km}W_{lm}\right] \\ + \sum_{i\neq j;\ k\neq l} \mathbb{E}\left[W_{im}W_{jm}W_{km}W_{lm}\right].\end{aligned} \tag{F.7}$$

继续推导，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_n^2 X_{n,m}^2|\mathcal{F}_{n,m-1}] &= 4\sum_i \sum_{j\neq i, l\neq i} W_{ij}W_{il}\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) + 2\sum_{i,j(dist)} \Omega_{im}(1-\Omega_{im})\Omega_{jm}(1-\Omega_{jm}) \\ &= 4\sum_{ij\ell(dist)} W_{ij}W_{il}\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) + 4\sum_{i,j(dist)} W_{ij}^2\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) \\ &\quad + 2\sum_{i,j(dist)} \Omega_{im}(1-\Omega_{im})\Omega_{jm}(1-\Omega_{jm}). \end{aligned} \tag{F.8}$$

计算期望，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\mathbb{E}[C_n^2 X_{n,m}^2|\mathcal{F}_{n,m-1}]] \\ &\quad = 4\sum_{i,j(dist)} \Omega_{ij}(1-\Omega_{ij})\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) + 2\sum_{i,j(dist)} \Omega_{im}(1-\Omega_{im})\Omega_{jm}(1-\Omega_{jm})\end{aligned}$$

对 m 求和，并通过一个简单的组合论论证可得

$$C_n^2\mathbb{E}\big[\sum_{m=1}^n \mathbb{E}[X_{n,m}^2|\mathcal{F}_{n,m-1}]\big] = 2\sum_{i,j,k(dist)} \Omega_{ik}(1-\Omega_{ik})\Omega_{jk}(1-\Omega_{jk}) \sim C_n^2.$$

利用恒等式

$$W_{ij}^2 = (1-2\Omega_{ij})W_{ij} + \Omega_{ij}(1-\Omega_{ij}),$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_n^2 X_{n,m}^2|\mathcal{F}_{n,m-1}] &= 4\sum_{ij\ell(dist)} W_{ij}W_{il}\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) + 4\sum_{i,j(dist)} W_{ij}^2\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) \\ &= 24\sum_{i<j<\ell} W_{ij}W_{il}\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) + 8\sum_{i<j} W_{ij}(1-2\Omega_{ij})\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}) \\ &\quad + 4\sum_{i<j} \Omega_{ij}(1-\Omega_{ij})\Omega_{mi}(1-\Omega_{mi}).\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n \mathbb{E}[C_n^2 X_{n,m}^2|\mathcal{F}_{n,m-1}] &= 24\sum_{i<j<\ell} \Big(\sum_{m>\max(i,j,\ell)} \Omega_{mi}(1-\Omega_{mi})\Big) W_{ij}W_{i\ell} \\ &\quad + 8\sum_{i<j} \Big(\sum_{m>\max(i,j,\ell)} \Omega_{mi}(1-\Omega_{mi})\Big)(1-2\Omega_{ij})W_{ij}.\end{aligned}$$

上述各项彼此不相关。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{m=1}^n \mathbb{E}[C_n^2 X_{n,m}^2|\mathcal{F}_{n,m-1}]\right) &= 24^2\sum_{i<j<\ell} \Big(\sum_{m>\max(i,j,\ell)} \Omega_{mi}(1-\Omega_{mi})\Big)^2 \Omega_{ij}(1-\Omega_{ij})\Omega_{i\ell}(1-\Omega_{i\ell}) \\ &\quad + 64\sum_{i<j} \Big(\sum_{m>\max(i,j,\ell)} \Omega_{mi}(1-\Omega_{mi})\Big)^2 (1-2\Omega_{ij})^2\Omega_{ij}(1-\Omega_{ij}) \\ &\lesssim n^2\cdot C_n^2,\end{aligned}$$

由此，

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{m=1}^n \mathbb{E}[X_{n,m}^2|\mathcal{F}_{n,m-1}]\right) \lesssim \frac{n^2}{C_n^2} \asymp \frac{n^2}{\alpha^2 n^3} \to 0$$

由于 $\alpha^2 n \to \infty$。因此，我们证明了 (F.5) 和 (F.6)，二者共同证明了 (F.3)。

接下来我们证明（F.4），同样沿用 Cammarata & Ke (2022) 中的论证。在（Cammarata & Ke, 2022, 第36页）中已证明，只需证明

$$\sum_{m=1}^n \mathbb{E}[X_{n,m}^4] \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{F.9}$$

此外，（Cammarata & Ke, 2022, 第37页）中已证明

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_n^4 X_{n,m}^4] =& 16\Bigg[\sum_{i<j}\mathbb{E}[W_{jm}^4]\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^4] \\ &+ 3\sum_{\substack{i<j,u<v\\ i\neq u,j\neq v}}\mathbb{E}[W_{jm}^2]\,\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^2]\,\mathbb{E}[W_{vm}^2]\,\mathbb{E}[(W_{uv}+W_{um})^2] \\ &+ 3\sum_{\substack{i<j,v\\ j\neq v}}\mathbb{E}[W_{jm}^2]\,\mathbb{E}[W_{vm}^2]\,\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^2(W_{iv}+W_{im})^2] \\ &+ 3\sum_{\substack{i,u<j\\ i\neq u}}\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^2]\,\mathbb{E}[(W_{uj}+W_{um})^2]\,\mathbb{E}[W_{jm}^4]\Bigg].\end{aligned}$$

逐项考察，当 n足够大时，我们有

$$\sum_{i<j}\mathbb{E}[W_{jm}^4]\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^4] \lesssim \sum_{i,j}\Omega_{jm}\big(\Omega_{ij}+\Omega_{im}\big) \lesssim \alpha^2 n^2$$

Next

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i<j,u<v\\ i\neq u,j\neq v}}\mathbb{E}[W_{jm}^2]\,\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^2]\,\mathbb{E}[W_{vm}^2]\,\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^2] &\lesssim \sum_{ijuv}\Omega_{jm}(\Omega_{ij}+\Omega_{jm})\Omega_{vm}(\Omega_{uv}+\Omega_{um}) \\ &= \sum_{ijuv}\Omega_{jm}\Omega_{ij}\Omega_{vm}\Omega_{uv}+\sum_{ijuv}\Omega_{jm}\Omega_{ij}\Omega_{vm}\Omega_{um}+\sum_{ijuv}\Omega_{jm}^2\Omega_{vm}\Omega_{uv} \\ &\quad+\sum_{ijuv}\Omega_{jm}^2\Omega_{vm}\Omega_{um} \\ &\lesssim \alpha^4 n^4+\alpha^3 n^3\end{aligned}$$

通过类似的论证，当 n 足够大时，我们也有，

$$\sum_{\substack{i<j,v\\ j\neq v}}\mathbb{E}[W_{jm}^2]\,\mathbb{E}[W_{vm}^2]\,\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^2(W_{iv}+W_{im})^2] \lesssim \alpha^2 n^2+\alpha^3 n^3$$

$$\sum_{\substack{i,u<j\\ i\neq u}}\mathbb{E}[(W_{ij}+W_{im})^2]\,\mathbb{E}[(W_{uj}+W_{um})^2]\,\mathbb{E}[W_{jm}^4]\Bigg] \lesssim \alpha^3 n^3+\alpha^2 n^2.$$

Thus

$$\sum_{m=1}^{n}\mathbb{E}[X_{n,m}^4] \lesssim \frac{\alpha^4 n^5}{C_n^4} \sim \frac{\alpha^4 n^5}{\alpha^4 n^6} \to 0,$$

这验证了 (F.9)。由于 (F.9) 推出 (F.4)，证明至此完成。 □

G 定理 2.4 的证明（统计下界）

设 $f_0(A)$ 是零假设下的密度。设 $\mu(\Pi)$ 是 Π 的密度，并设 $f_1(A|\Pi)$ 是给定 Π时 A 的条件密度。两个假设之间的 L_1 距离为

$$\ell^* \equiv \frac{1}{2}\mathbb{E}_{A\sim f_0}\big|\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L(A,\Pi)-1\big|, \qquad L(A,\Pi)=f_1(A|\Pi)/f_0(A).$$

定义

$$\mathcal{M}=\big\{\Pi:\Pi \text{ is an eligible membership matrix and } \textstyle\sum_i \pi_i(1)\le 2n\epsilon\big\}. \tag{G.1}$$

写出 $L^{\mathcal{M}}(A,\Pi) = L(A,\Pi)\cdot 1\{\Pi\in\mathcal{M}\}$，并类似地定义 $L^{\mathcal{M}^c}(A,\Pi)$。通过直接计算，我们得到

$$\ell^* = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{A\sim f_0}\big|\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)-1+\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}^c}(A,\Pi)\big|$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_{A\sim f_0}\big|\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)-1\big|+\frac{1}{2}\mathbb{E}_{A\sim f_0}\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}^c}(A,\Pi)$$
$$\equiv \frac{1}{2}\ell_0+\frac{1}{2}\ell_1. \tag{G.2}$$

注意，$\mathbb{E}_{A\sim f_0}\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}^c}(A,\Pi)=\int_{\Pi\in\mathcal{M}^c}f_1(A|\Pi)\mu(\Pi)d\Pi dA=\int_{\Pi\in\mathcal{M}^c}\mu(\Pi)d\Pi=\mu(\mathcal{M}^c)$。我们对 $\mu\in\mathcal{M}^c$ 的概率进行界定。注意，$\pi_i(1)$ 是均值为 ϵ 的独立伯努利变量，其中 $\epsilon\asymp n^{-1}N$。根据伯恩斯坦不等式，若 $t=100\sqrt{N\log N}$，则保守地有，

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_i\pi_i(1)-N\Big|>t\Big)\leq 2\exp\Big(-\frac{t^2/2}{n\varepsilon+t/3}\Big)\leq 2\exp\Big(-\frac{100^2N(\log N)/2}{200N}\Big)\lesssim N^{-c}=o(1) \tag{G.3}$$

对于某个 $c>0$。由此可得

$$\ell_1=\mu(\mathcal{M}^c)=o(1). \tag{G.4}$$

根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\ell_0^2&\leq \mathbb{E}_{A\sim f_0}\big|\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)-1\big|^2\\&=\mathbb{E}_{A\sim f_0}\big(\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)\big)^2-2\mathbb{E}_{A\sim f_0}\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)+1\\&=\mathbb{E}_{A\sim f_0}\big(\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)\big)^2-2\big[1-\mathbb{E}_{A\sim f_0}\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}^c}(A,\Pi)\big]+1\\&\leq \mathbb{E}_{A\sim f_0}\big(\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)\big)^2-1+o(1),\end{aligned}$$

whe因为第三行来自 $\mathbb{E}_{A\sim f_0}\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L(A,\Pi)=1$，而最后一行来自 (G.4)。我们将其代入 o (G.2) 得到

$$\ell^*\leq\sqrt{\ell_2-1}+o(1),\qquad\text{where}\quad \ell_2\equiv\mathbb{E}_{A\sim f_0}\big(\mathbb{E}_{\Pi\sim\mu}L^{\mathcal{M}}(A,\Pi)\big)^2. \tag{G.5}$$

只需证明 $\ell_2\leq 1+o(1)$。

~下面，我们研究 ℓ_2。令 Π 为 Π的一个独立副本。定义

$$S(A,\Pi,\widetilde{\Pi})=L(A,\Pi)\cdot L(\widetilde{\Pi},A).$$

容易看出

$$\ell_2=\mathbb{E}_{A\sim f_0,\Pi,\tilde{\Pi}\sim\mu}\big[S(A,\Pi,\widetilde{\Pi})\cdot 1\{\Pi\in\mathcal{M},\widetilde{\Pi}\in\mathcal{M}\}\big]. \tag{G.6}$$

分别用 p_{ij} 和 $q_{ij}(\Pi)$表示零假设和备择假设下 Ω_{ij} 的取值。记$\delta_{ij}(\Pi)=(q_{ij}(\Pi)-p_{ij})/p_{ij}$。根据定义，

$$S(A,\Pi,\widetilde{\Pi})=\prod_{i<j}\left[\frac{q_{ij}(\Pi)q_{ij}(\widetilde{\Pi})}{p_{ij}^2}\right]^{A_{ij}}\left[\frac{(1-q_{ij}(\Pi))(1-q_{ij}(\widetilde{\Pi}))}{(1-p_{ij})^2}\right]^{1-A_{ij}}.$$

~ ~ ~简记 $q_{ij}(\Pi)=q_{ij}$, $q_{ij}(\Pi)=\tilde{q}_{ij}$, $\delta_{ij}(\Pi)=\delta_{ij}$ 和 $\delta_{ij}(\Pi)=\delta_{ij}$。通过直接计算，我们得到以下结论：

$$\mathbb{E}_{A\sim f_0}[S(A,\Pi,\widetilde{\Pi})]=\prod_{i<j}\Big(1+\frac{p_{ij}\delta_{ij}\tilde{\delta}_{ij}}{1-p_{ij}}\Big), \tag{G.7}$$

and

$$\begin{aligned}\ln S(A,\Pi,\widetilde{\Pi})=&\sum_{i<j}A_{ij}\ln\Big[\frac{(1+\delta_{ij})(1+\tilde{\delta}_{ij})}{(1-\frac{p_{ij}}{1-p_{ij}}\delta_{ij})(1-\frac{p_{ij}}{1-p_{ij}}\tilde{\delta}_{ij})}\Big]\\&+\ln\Big[\Big(1-\frac{p_{ij}}{1-p_{ij}}\delta_{ij}\Big)\Big(1-\frac{p_{ij}}{1-p_{ij}}\tilde{\delta}_{ij}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{G.8}$$

表达式 (G.8) 可能适用于 $Nc\to 0$ 的情形。对于当前的 $Nc\to\infty$ 情形，我们使用 (G.7)。由 (G.6) 可得

$$\ell_2=\mathbb{E}_{\Pi,\tilde{\Pi}\sim\mu}\Big[\prod_{i<j}\Big(1+\frac{p_{ij}\delta_{ij}\tilde{\delta}_{ij}}{1-p_{ij}}\Big)\cdot 1\{\Pi\in\mathcal{M},\widetilde{\Pi}\in\mathcal{M}\}\Big]$$

$$= \mathbb{E}_{\Pi,\tilde{\Pi}\sim\mu}\Big[\exp\Big(\sum_{i<j}\ln\Big(1+\frac{p_{ij}\delta_{ij}\tilde{\delta}_{ij}}{1-p_{ij}}\Big)\Big)\cdot 1\{\Pi\in\mathcal{M},\widetilde{\Pi}\in\mathcal{M}\}\Big]$$

$$\leq \mathbb{E}_{\Pi,\tilde{\Pi}\sim\mu}\Big[\exp(X)\cdot 1\{\Pi\in\mathcal{M},\widetilde{\Pi}\in\mathcal{M}\}\Big],\quad \text{with } X\equiv\sum_{i<j}\frac{p_{ij}\delta_{ij}\tilde{\delta}_{ij}}{1-p_{ij}}. \tag{G.9}$$

其中最后一行由 $\ln(1+t)\leq t$ 的普适不等式得出。

˜我们进一步推导出 p_{ij}、δ_{ij} 和 δ_{ij}的显式表达式。令 $h=(\epsilon,1-\epsilon)'$，并回忆 $\alpha_0=a\epsilon+b(1-\epsilon)$。(H.1) 中 b 的条件保证

$$Ph=\alpha_0\mathbf{1}_2,\qquad \alpha_0=a\epsilon+b(1-\epsilon).$$

通过直接计算，

$$\alpha_0=\frac{c(1-\epsilon)^2-a\epsilon^2}{1-2\epsilon}. \tag{G.10}$$

由此可得

$$P=\alpha_0\mathbf{1}_2\mathbf{1}_2'+M,\qquad \text{where}\quad M=\frac{a-c}{1-2\epsilon}\xi\xi',\quad \xi=(1-\epsilon,-\epsilon)'. \tag{G.11}$$

记 $z_i=\pi_i-h$。由于 $Ph=\alpha_0\mathbf{1}_2$ 和 $z_i'\mathbf{1}_2=0$，我们有

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}&=\theta_j\theta_j(h+z_i)'P(h+z_i)\\&=\theta_i\theta_j(h'Ph+z_i'Pz_j)\\&=\theta_i\theta_j(\alpha_0+z_i'Pz_j)\\&=\theta_i\theta_j(\alpha_0+z_i'Mz_j)\\&=\theta_i\theta_j\Big[\alpha_0+\frac{a-c}{1-2\epsilon}(\xi'z_i)(\xi'z_j)\Big].\end{aligned}$$

令 t_i 为指示变量，表示节点 i 属于第一个社区，并记 $u_i=t_i-\frac{N}{n}$。那么，$\pi_i=(t_i,1=t_i)$ 和 $z_i=u_i(1,-1)'$。由此可得 $\xi'z_i=u_i$。因此，

$$\Omega_{ij}=\theta_i\theta_j\Big[\alpha_0+\frac{a-c}{1-2\epsilon}u_iu_j\Big],\qquad \text{where}\quad u_i\overset{iid}{\sim}\text{Bernoulli}(\epsilon)-\epsilon. \tag{G.12}$$

因此，

$$p_{ij}=\alpha_0\theta_i\theta_j,\qquad \delta_{ij}(\Pi)=\frac{a-c}{(1-2\epsilon)\alpha_0}u_iu_j.$$

将其代入 (G.9)，得到

$$X=\sum_{i<j}\frac{\theta_i\theta_j}{1-\alpha_0\theta_i\theta_j}\frac{(a-c)^2}{(1-2\epsilon)^2\alpha_0}u_iu_j\tilde{u}_i\tilde{u}_j. \tag{G.13}$$

下面，我们利用 (G.13) 来界定 ℓ^2。由于 $\alpha_0\theta_{\max}^2=O(c\theta_{\max}^2)=o(1)$，对 $(1-\alpha_0\theta_i\theta_j)^{-1}$ 进行泰勒展开，可得

$$X=\frac{(a-c)^2}{(1-2\epsilon)^2\alpha_0}\sum_{i<j}\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_0^{s-1}\theta_i^s\theta_j^su_iu_j\tilde{u}_i\tilde{u}_j.$$

令 $b_i=\theta_i\theta_{\max}^{-1}<1$。我们将 X 改写为

$$X=\gamma\sum_{s=1}^{\infty}w_sX_s,$$

其中

$$\gamma=\frac{\theta_{\max}^2(a-c)^2}{(1-\alpha_0\theta_{\max}^2)(1-2\epsilon)^2\alpha_0},\quad w_s=(1-\alpha_0\theta_{\max}^2)\alpha_0^{s-1}\theta_{\max}^{2s-2},\quad \text{and } X_s=\sum_{i<j}b_i^sb_j^su_iu_j\tilde{u}_i\tilde{u}_j. \tag{G.14}$$

设 $\check{\mathbb{E}}$ 为以 $\{\Pi \in \mathcal{M}, \widetilde{\Pi} \in \mathcal{M}\}$事件为条件的条件期望。由 (G.9) 可得

$$\begin{aligned}\ell_2 &= \mathbb{P}(\Pi \in \mathcal{M}, \widetilde{\Pi} \in \mathcal{M}) \cdot \check{\mathbb{E}}[\exp(X)] \\ &= \mathbb{P}(\Pi \in \mathcal{M}, \widetilde{\Pi} \in \mathcal{M}) \cdot \check{\mathbb{E}}\Big[\exp\Big(\gamma \sum_{s=1}^{\infty} w_s X_s\Big)\Big] \\ &\le \mathbb{P}(\Pi \in \mathcal{M}, \widetilde{\Pi} \in \mathcal{M}) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} w_s \check{\mathbb{E}}[\exp(\gamma X_s)] \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} w_s \, \mathbb{E}\big[\exp(\gamma X_s) \cdot 1\{\Pi \in \mathcal{M}, \widetilde{\Pi} \in \mathcal{M}\}\big]. \end{aligned} \tag{G.15}$$

第三行利用詹森不等式以及 $\sum_{s\ge 1} w_s = 1$ 得出。

只需对每个 $s \ge 1$ 给出 (G.15) 中该项的界。注意

$$X_s \le Y_s^2, \qquad Y_s = \sum_i b_i^s u_i \tilde{u}_i. \tag{G.16}$$

~我们回顾一下，$u_i = t_i - \epsilon$，其中 $t_i = \pi_i$(1) $\in \{0, 1\}$。事件 $\{\Pi \in \mathcal{M}, \Pi \in \mathcal{M}\}$ 转化为 max$\{\sum_i t_i, \sum_i \tilde{t}_i\} \le 2n\epsilon$。注意

$$u_i \tilde{u}_i = \begin{cases} (1-\epsilon)^2, & \text{when } t_i + \tilde{t}_i = 2, \\ -\epsilon(1-\epsilon), & \text{when } t_i + \tilde{t}_i = 1, \\ \epsilon^2, & \text{where } t_i + \tilde{t}_i = 0. \end{cases}$$

由此可得 $|u_i \tilde{u}_i| \le (t_i + \tilde{t}_i)/2 + \epsilon^2$。注意 $\epsilon = O(N/n)$。因此，在此事件下，

$$|Y_s| \le \sum_i [(t_i + \tilde{t}_i)/2 + \epsilon^2] \le 2n\epsilon + n\epsilon^2 \le 3N.$$

我们立即得到

$$\mathbb{E}\big[\exp(\gamma X_s) \cdot 1\{\Pi \in \mathcal{M}, \widetilde{\Pi} \in \mathcal{M}\}\big] \le \mathbb{E}\Big[\exp(\gamma Y_s^2) \cdot 1\{|Y_s| \le 3N\}\Big]. \tag{G.17}$$

下面的引理很有用。

引理 G.1. 设 Z 是满足以下条件的随机变量

$$\mathbb{P}(|Z| > t) \le 2\exp\Big(-\frac{t^2/2}{\sigma^2 + bt}\Big), \qquad \textit{for all } t > 0.$$

那么，对于任意满足 $\gamma(\sigma^2 + bB) < 1/2$ 的 $\gamma > 0$ 和 $B > 0$，有

$$\mathbb{E}\big[\exp(\gamma Z^2) 1\{|Z| \le B\}\big] \le 1 + \frac{4\gamma(\sigma^2 + bB)}{1 - 2\gamma(\sigma^2 + bB)}.$$

注意，$Y_s = \sum_i b_i^s u_i \tilde{u}_i$是若干独立零均值变量之和，其中 $|b_i^s u_i \tilde{u}_i| \le 2$且$\sum_i$方差$(b_i^s u_i \tilde{u}_i)$ $\le \sum_i b_i^{2s} 2\epsilon^2 \le 2n\epsilon^2$。由伯恩斯坦不等式可得

$$\mathbb{P}(|Y_s| > t) \le \exp\Big(-\frac{t^2/2}{2n\epsilon^2 + 2t}\Big), \qquad \text{for all } t > 0.$$

为应用引理 G.1，我们令

$$b = 2, \qquad \sigma^2 = 2n\epsilon^2 \le 2n^{-1}N^2, \qquad Z = Y_s, \qquad B = 3N,$$

and γ 如 (G.14) 中所示。根据 (G.17)，选择 B。此外，由 (G.10) 可得 $\alpha_0 \asymp$ c. Als因此我们有 $\theta_{\max}^2 \alpha_0 \to 0$。于是，

$$\gamma = \frac{\theta_{\max}^2 (a-c)^2}{(1 - \alpha_0 \theta_{\max}^2)(1-2\epsilon)^2 \alpha_0} \le C \cdot \big(\frac{\theta_{\max}^2 (a-c)^2}{c}\big).$$

因此，根据假设 $\frac{\theta^2 \max N(a-c)^2}{c} \to 0$)，对于充分大的 n，有 $\gamma(\sigma^2+bB) < 1/2$。应用引理 G.1，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp(\gamma X_s)\cdot 1\{\Pi\in\mathcal{M},\widetilde{\Pi}\in\mathcal{M}\}\big] &\le 1+C(\gamma(\sigma^2+bB))\\ &\le 1+C\cdot\big(\frac{\theta_{\max}^2 N(a-c)^2}{c}\big)\end{aligned}$$

我们进一步将其代入 (G.15)，得到

$$\ell_2 \le \sum_{s=1}^{\infty} w_s\Big[1+C\cdot\big(\frac{\theta_{\max}^2 N(a-c)^2}{c}\big)\Big] \le 1+\big(\frac{\theta_{\max}^2 N(a-c)^2}{c}\big),$$

其中我们利用了 $\sum w_s = 1$。

由此立即可得

$$\ell_2 \le 1+o(1), \qquad \text{if} \quad \theta_{\max}\frac{\sqrt{N}(a-c)}{\sqrt{c}} \to 0.$$

这就证明了该结论。 □

G.1 引理 G.1 的证明

令 X 表示一个非负随机变量，并定义 $F(x) = \mathbb{P}_X[X \overline{\ge} x]$。对于任意正数 $\beta > 0$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\gamma X)1\{X<\beta\}] &= \int_0^{\beta} e^{\gamma x}\,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\\ &= -e^{\gamma x}\bar{F}(x)\Big|_0^{\beta} + \int_0^{\beta}\gamma e^{\gamma x}\bar{F}(x)dx\\ &= 1-e^{\gamma\beta}\bar{F}(\beta)+\int_0^{\beta}\gamma e^{\gamma x}\bar{F}(x)dx\\ &\le 1+\int_0^{\beta}\gamma e^{\gamma x}\bar{F}(x)dx.\end{aligned}$$

我们将其应用于 $X = Z^2$ 和 $\beta = B^2$，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp(\gamma Z^2)1\{|Z|\le B\}\big] &\le 1+\int_0^{B^2}\gamma\exp(\gamma x)\mathbb{P}(|Z|>\sqrt{x})dx\\ &\le 1+2\gamma\int_0^{B^2}\exp(\gamma x)\exp\Big\{-\frac{x}{2(\sigma^2+b\sqrt{x})}\Big\}dx\\ &\le 1+2\gamma\int_0^{B^2}\exp(\gamma x)\exp\Big\{-\frac{x}{2(\sigma^2+bB)}\Big\}dx\\ &\le 1+2\gamma\int_0^{\infty}\exp\Big\{-\frac{1-2\gamma(\sigma^2+bB)}{2(\sigma^2+bB)}x\Big\}dx\\ &\le 1+\frac{4\gamma(\sigma^2+bB)}{1-2\gamma(\sigma^2+bB)}.\end{aligned}$$

这就证明了该命题。 □

H 定理 2.5 的证明（统计下界的紧致性)

令 $\rho\in\mathbb{R}^n$。我们考虑度修正块模型中的全局检验问题，其中

A) $P = \begin{pmatrix}1 & b\\ b & 1\end{pmatrix}$

B) $b = \tilde{b}/\sqrt{ac}$,
C) $\theta_i = \rho_i\sqrt{a}$ for $i \in S$,
D) $\theta_i = \rho_i\sqrt{c}$ for $i \notin S$, and
E) $aN_0 + \tilde{b}(n - N_0) = \tilde{b}N_0 + c(n - N_0)$,

回顾一下， $h = (N_0/n,\ 1 - N_0/n)^\mathsf{T}$，且 N_0 是备择假设中较小社区的规模。˜注意，原假设模型 $K = 1$通过设置 $a = c = b = 1$进行参数化。
回顾一下 $\varepsilon = N/n$。我们定义

$$\alpha_0 \equiv \frac{aN_0 + \tilde{b}(n - N_0)}{n}.$$

注意，根据假设（*E*），

$$\tilde{b} = \frac{nc - (a + c)N_0}{n - 2N_0} \tag{H.1}$$

$$a\epsilon = O(c), \text{ and} \tag{H.2}$$

$$c \sim \tilde{b} \sim \alpha_0. \tag{H.3}$$

本节中的假设如下：

a) 存在一个绝对常数 $C_\rho > 0$，使得 $\rho_{\max} \le C_\rho\, \rho_{\min}$*b*) $\rho^{2}{}_{\max}$
✓ $\frac{\alpha_0 n_{\log n}}{}$ $\to \infty$*c*) 已知一个整数 N，使得 $N_0 = N[1 + o(1)]$。

注意，由于根据假设（c）我们允许团大小存在少量误差，因此根据（G.3），我们的设定确实与统计下界的设定相符。
定义有符号扫描统计量

$$\phi_{sc} = \max_{D\subset[n]:|D|=N} \mathbf{1}_D'\big(A - \hat{\eta}\hat{\eta}^\mathsf{T}\big)\mathbf{1}_D. \tag{H.4}$$

为简洁起见，定义 $n^{(2)} = \binom{n}{2}$。令

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n^{(2)}}\sum_{i,j} A_{ij}.$$

估计量 $\hat{}\gamma$ 给出了最不利零模型边密度的常数因子近似。更多细节请参见引理 H.1。

接下来令

$$h(u) = (1 + u)\log(1 + u) - u, \tag{H.5}$$

并注意，该函数在 $\mathbb{R}_{\ge 0}$上严格递增。定义随机阈值 $\hat{}\tau$ 为

$$\hat{\tau} = C^*\hat{\gamma}N^2 h^{-1}\left(\frac{C^* N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\right) \tag{H.6}$$

令 $C^* > 0$ 表示一个充分大的常数，其值待定，且仅取决于假设(*a*)中的 C_ρ。最后，定义扫描检验为

$$\varphi_{sc} = \mathbf{1}\big[|\phi_{sc}| > \hat{\tau}\big]$$

注意，如果我们像正文中那样假设 $a \ge c$，那么 $b < 1$。在这种情况下，我们只需取

$$\varphi_{sc} = \mathbf{1}\big[\phi_{sc} > \hat{\tau}\big],$$

并且同样的保证依然成立。另一方面，如果 $b > 1$，那么扫描检验会偏向阴性结果，正如我们的证明所示。

定理 H.1。如果

$$h\left(\frac{\|\theta_S\|_1^2|1-b^2|}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0^2}\right) \gg \frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0}, \tag{H.7}$$

那么， φ_{sc} 的第一类和第二类错误率会随着 $n\to\infty$ 趋于 0 。

我们在以下具体情形中解读前述结果。

推论 H.1。如果

$$\frac{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0}{\log\frac{ne}{N_0}} \to 0,$$

那么 φ_{sc} 的第 *1* 类和第 *2* 类错误趋于0 ， 当 $n\to\infty$时，前提是

$$\frac{\rho_{\max}^2 N_0(a-c)}{\log\frac{ne}{N_0}} \gg 1.$$

If

$$\frac{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0}{\log\frac{ne}{N_0}} \to \infty,$$

那么 φ_{sc} 的第 *1* 类和第 *2* 类错误趋于0 ， 当 $n\to\infty$时，前提是

$$\frac{\rho_{\max}^2 N_0(a-c)}{\sqrt{\rho_{\max}^2 N_0\alpha_0\log\frac{ne}{N_0}}} \gg 1.$$

证明。 注意到

$$\|\theta_S\|_1^2|1-b^2| = \rho_{\max}^2 N_0^2(a-\tilde{b}^2/\sqrt{c}) \sim \rho_{\max}^2 N_0^2(a-c).$$

在第一种情况下,

$$h\left(\frac{\|\theta_S\|_1^2|1-b^2|}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0^2}\right) \gg h\left(\frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0}\right) \gtrsim \frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0}.$$

我们利用以下事实： $h(u)\gtrsim u$对于 $u\geq 1$。

在第二种情况下,

$$h\left(\frac{\|\theta_S\|_1^2|1-b^2|}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0^2}\right) \gg h\left(\frac{N_0\cdot\sqrt{\rho_{\max}^2 N_0\alpha_0\log\frac{ne}{N_0}}}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0^2}\right) = h\left(\sqrt{\frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0}}\right) \gtrsim \frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\rho_{\max}^2\alpha_0 N_0}.$$

□

推论 H.1 第二部分中的上界是最优的，至多相差对数因子。例如，假设在定理 2.4 中 $\theta_{\max}\lesssim\theta_{\min}$。那么，推论 H.1 第二种情况下的上界与定理 2.4 的下界至多相差对数因子。

为了证明定理 2.5，我们首先证明 $\hat{}\gamma$ 的集中性。

引理 H.1. 回顾

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n^{(2)}}\sum_{i,j(dist)} A_{ij}.$$

存在一个绝对常数 $C>0$ ，使得对于所有 $\delta>0$，均有

$$|\hat{\gamma}-\mathbb{E}\hat{\gamma}| \leq \frac{C\sqrt{\rho_{\max}^2\alpha_0\log(1/\delta)}}{n}$$

以至少 $1-\delta$ 的概率。

证明。 作为预备，我们提出如下断言：

$$(\Omega\mathbf{1})_i \asymp \rho_{\max}^2 \alpha_0 n. \tag{H.8}$$

为说明这一点，注意，如果 $i \in S$，那么根据（E）

$$\begin{aligned}(\Omega\mathbf{1})_i &= \sum_j \Omega_{ij} = \theta_i(\|\theta_S\|_1 + b\|\theta_{S^c}\|_1) \\ &\asymp \rho_{\max}\sqrt{a}\cdot\big(\sqrt{a}N\rho_{\max} + \frac{\tilde{b}}{\sqrt{ac}}\cdot\sqrt{c}\rho_{\max}\big) = \rho_{\max}^2\alpha_0 n.\end{aligned}$$

对 $i \notin S$ 的论断可通过类似的论证并应用（E）得出。因此，

$$v_0 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\Omega\mathbf{1} \asymp \rho_{\max}^2\alpha_0 n^2$$

期望为

$$\mathbb{E}\hat{\gamma} = \frac{1}{n^{(2)}}\sum_{i,j(dist)}\Omega_{ij},$$

方差为

$$\mathrm{Var}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{(n^{(2)})^2}\sum_{i,j(dist)}\Omega_{ij}(1-\Omega_{ij}).$$

根据伯恩斯坦不等式，

$$\mathbb{P}\big[n^{(2)}\big|\hat{\gamma} - \mathbb{E}\hat{\gamma}\big| > t\big] \le 2\exp\bigg(-\frac{ct^2}{\sum_{i,j(dist)}\Omega_{ij} + t}\bigg). \tag{H.9}$$

由假设（a）和（b），

$$\sum_{i,j(dist)}\Omega_{ij} \asymp \rho_{\max}^2\alpha_0 n^2 \gg n.$$

令

$$t = \tau \equiv C\sqrt{\rho_{\max}^2\alpha_0 n^2\log(1/\delta)}$$

对于足够大的绝对常数 $C > 0$，**(H.9)** 蕴含

$$|\hat{\gamma} - \mathbb{E}\hat{\gamma}| \le \frac{\tau}{n^2} \asymp \frac{\sqrt{\rho_{\max}^2\alpha_0\log(1/\delta)}}{n}$$

其成立概率至少为 $1-\delta$。 □

接下来，我们控制将 η^* 近似为 $\hat{}\eta$所产生的插件效应误差。**引理 H.2**。 给定 $D \subset [n]$，定义

$$L_D \equiv \mathbf{1}_D^\mathsf{T}(\eta^*\eta^{*\mathsf{T}} - \hat{\eta}\hat{\eta}^\mathsf{T})\mathbf{1}_D.$$

那么，在零假设和备择假设下，

$$\max_{|D|=N}|L_D| \lesssim \sqrt{N_0^3\rho_{\max}^2\alpha_0\log(\frac{ne}{N_0})}$$

以至少 $1 - \binom{n}{N}^{-1} - 2v_0^{-c_1}$ 的概率，其中 $c_1 > 0$ 为某个绝对常数。

证明。 在此证明中， $c > 0$ 是一个绝对常数，其值可能随行而变化。
给定 $D \subset [n]$，令

$$L_D \equiv \mathbf{1}_D^\mathsf{T}(\eta^*\eta^{*\mathsf{T}} - \hat{\eta}\hat{\eta}^\mathsf{T})\mathbf{1}_D = \mathbf{1}_D^\mathsf{T}\eta^*(\eta^* - \hat{\eta})^\mathsf{T}\mathbf{1}_D + \mathbf{1}_D^\mathsf{T}(\eta^* - \hat{\eta})\hat{\eta}^\mathsf{T}\mathbf{1}_D \tag{H.10}$$

我们的首要目标是控制

$$\big|\mathbf{1}_D^\mathsf{T}(\hat{\eta}-\eta^*)\big|.$$

定义 $\overline{\Omega}=\Omega-\mathrm{diag}(\Omega)$。注意

$$\hat{\eta}-\eta^*=\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{V}}-\frac{\Omega\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}=\big(\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{V}}-\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}\big)+\big(\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}-\frac{\overline{\Omega}\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}\big)+\big(\frac{\overline{\Omega}\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}-\frac{\Omega\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}\big) \tag{H.11}$$

我们研究 (H.11) 中的每一项。首先注意

$$(\overline{\Omega}\mathbf{1})_i=(\Omega\mathbf{1})_i-\Omega_{ii}=\rho_{\max}^2\alpha_0 n+O(1),$$

因此

$$v_0=\sum_i(\Omega\mathbf{1})_i\sim\sum_i(\overline{\Omega}\mathbf{1})_i=v,\ \text{and}$$
$$|v_0-v|\lesssim 1 \tag{H.12}$$

接下来注意

$$\mathrm{Var}\big(\mathbf{1}_D^\mathsf{T}\big(A\mathbf{1}-\overline{\Omega}\mathbf{1}\big)\big)\lesssim\sum_{\substack{i\in[n],j\in D\\ i\neq j}}\Omega_{ij}\lesssim|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n.$$

根据伯恩斯坦不等式,

$$\mathbb{P}\big[\big|\mathbf{1}_D^\mathsf{T}\big(A\mathbf{1}-\overline{\Omega}\mathbf{1}\big)\big|\geq t\big]\leq 2\exp\bigg(-\frac{ct^2}{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n+t}\bigg) \tag{H.13}$$

对所有 $t>0$。令

$$t=\tau\equiv\sqrt{4/c}\cdot\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)},$$

我们有

$$\frac{1}{\sqrt{v_0}}\big|\mathbf{1}_D^\mathsf{T}\big(A\mathbf{1}-\overline{\Omega}\mathbf{1}\big)\big|\lesssim\frac{\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)}}{\sqrt{\rho_{\max}^2\alpha_0 n^2}}=\sqrt{(|D|/n)\cdot\log(1/\delta)} \tag{H.14}$$

以至少 $1-\delta$ 的概率。

接下来，(Jin 等人，2021c，补充材料，第 100 页) 中证明，对于 $\sqrt{\log\|\theta\|_1}\ll x_n\ll\|\theta\|_1$,

$$\mathbb{P}\big[|V-v|>x_n\|\theta\|_1\big]=\mathbb{P}\bigg[|\sqrt{V}-\sqrt{v}|>\frac{x_n\|\theta\|_1}{\sqrt{V}+\sqrt{v}}\bigg]\leq 2\exp(-cx_n^2).$$

因此

$$\mathbb{P}\bigg[|\sqrt{V}-\sqrt{v}|>\frac{x_n\|\theta\|_1}{\sqrt{v}}\bigg]\leq 2\exp(-cx_n^2),$$

注意，由 (H.2) 和 (H.3),

$$\frac{\|\theta\|_1}{\sqrt{v}}\asymp\frac{N_0\rho_{\max}\sqrt{a}+(n-N_0)\rho_{\max}\sqrt{c}}{\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}n}\asymp 1.$$

由 (H.12) 可得

$$\mathbb{P}\bigg[|\sqrt{V}-\sqrt{v_0}|>\frac{x_n\|\theta\|_1}{\sqrt{v}}\bigg]\leq 2\exp(-cx_n^2). \tag{H.15}$$

因此，概率至少为 $1-2\exp(-cx_n^2)$,

$$V\gtrsim v_0.$$

由此可得

$$\mathbb{P}\bigg[\big|\frac{1}{\sqrt{V}}-\frac{1}{\sqrt{v_0}}\big|\geq\frac{x_n\|\theta\|_1}{v_0\sqrt{v}}\bigg]=\mathbb{P}\bigg[\frac{|\sqrt{V}-\sqrt{v_0}|}{\sqrt{V\cdot v_0}}\geq\frac{x_n\|\theta\|_1}{v_0\sqrt{v}}\bigg]\leq 2\exp(-cx_n^2).$$

因此，以至少 $1-\delta-2\exp(-cx_n^2)$ 的概率，

$$\left|\mathbf{1}_D^\intercal\left(\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{V}}-\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}\right)\right| \le \frac{x_n\cdot\left(|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n+\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)}\right)}{v_0} \asymp \frac{x_n\cdot\left(|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n+\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)}\right)}{\rho_{\max}^2\alpha_0 n^2}. \tag{H.16}$$

对于 (H.11) 的最后一项，

$$\mathbf{1}_D^\intercal\left(\frac{\overline{\Omega}\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}-\frac{\Omega\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}\right)=\frac{\sum_{i\in D}\Omega_{ii}}{\sqrt{v_0}}\asymp\frac{\rho_{\max}^2 a|D\cap S|+\rho_{\max}^2 c|D\cap S^c|}{\sqrt{\rho_{\max}^2\alpha_0 n^2}} \lesssim \rho_{\max}a\epsilon/\sqrt{\alpha_0}\lesssim\rho_{\max}\sqrt{c}\lesssim 1. \tag{H.17}$$

接下来，我们控制 $\mathbf{1}_D^\intercal\hat{\eta}$。由 (H.13) 和 (H.15)，

$$|\mathbf{1}_D^\intercal\hat{\eta}|=\frac{|\mathbf{1}_D^\intercal A\mathbf{1}|}{\sqrt{V}}\lesssim\frac{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n+\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)}}{\sqrt{v_0}-cx_n} \tag{H.18}$$

其成立的概率至少为 $1-\delta-2\exp(-cx_n^2)$。此外，

$$|\mathbf{1}_D^\intercal\eta^*|=\frac{|\mathbf{1}_D^\intercal\Omega\mathbf{1}|}{\sqrt{v_0}}=\frac{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n}{\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}n}=|D|\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}. \tag{H.19}$$

接下来，我们令 $x_n=\overline{\sqrt{\log\ \|\theta\|_1}}\asymp\sqrt{\log v_0}$。于是，由 (H.16) 和 (H.18)，

$$\left|\mathbf{1}_D^\intercal\left(\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{V}}-\frac{A\mathbf{1}}{\sqrt{v_0}}\right)\right|\asymp\frac{\sqrt{\log v_0}\cdot\left(|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n+\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)}\right)}{\rho_{\max}^2\alpha_0 n^2} \asymp\sqrt{\log v_0}\cdot\left((|D|/n)+\frac{\sqrt{(|D|/n)\log(1/\delta)}}{\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}n}\right), \tag{H.20}$$

and

$$|\mathbf{1}_D^\intercal\hat{\eta}|\lesssim\frac{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n+\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)}}{\sqrt{v_0}} \asymp\frac{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n+\sqrt{|D|\rho_{\max}^2\alpha_0 n\log(1/\delta)}}{\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}n} \asymp|D|\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}+\sqrt{(|D|/n)\cdot\log(1/\delta)} \tag{H.21}$$

其成立的概率至少为 $1-\delta-2v_0^{-c_1}$。

由 (H.14)、(H.17)、(H.19)、(H.20) 和 (H.21)

$$\begin{aligned}|L_D|&\le\left|\mathbf{1}_D^\intercal\eta^*(\eta^*-\hat{\eta})^\intercal\mathbf{1}_D\right|+\left|\mathbf{1}_D^\intercal(\eta^*-\hat{\eta})\hat{\eta}^\intercal\mathbf{1}_D\right|\\&\lesssim\left(|D|\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}+\sqrt{(|D|/n)\cdot\log(1/\delta)}\right)\cdot\left(\sqrt{\log v_0}(|D|/n)+\sqrt{(|D|/n)\log(1/\delta)}+1\right).\end{aligned}$$

以至少 $1-\delta-2v_0^{-c_1}$ 的概率。

因此，令上述 $\delta=1/\binom{n}{N}^2$，并应用并集界，

$$\max_{|D|=N}|L_D|\lesssim\left(N\rho_{\max}\sqrt{\alpha_0}+\sqrt{N\epsilon\cdot\log(\frac{ne}{N})}\right)\cdot\left(\epsilon\sqrt{\log v_0}+\sqrt{N\epsilon\cdot\log(\frac{ne}{N})}+1\right)$$

以至少 $1-\binom{n}{N}^{-1}-2v_0^{-c_1}\to 1$ 的概率。注意，

$$\frac{n\log\frac{ne}{N}}{\log v_0}\asymp\frac{n\log\frac{ne}{N}}{\log(\rho_{\max}^2\alpha_0 n^2)}\gtrsim 1\Rightarrow$$

$$\frac{N^2}{n}\log\frac{ne}{N} \gtrsim \frac{N^2}{n^2}\log(\rho_{\max}^2\alpha_0 n^2) \Rightarrow$$
$$\sqrt{N\epsilon\cdot\log(\frac{ne}{N})} \gtrsim \epsilon\sqrt{\log v_0}.$$

此外，由假设（b），由于 $(N/n)\log\frac{ne}{N} \ll 1$ and $\rho_{\max}^2\alpha_0 n \to \infty$，

$$N\log\frac{ne}{N} \lesssim \rho_{\max}^2\alpha_0 n^2 \Rightarrow$$
$$\frac{N}{n}\sqrt{\log\frac{ne}{N}} \lesssim \sqrt{N\rho_{\max}^2\alpha_0} \Rightarrow$$
$$N\epsilon\log\frac{ne}{N} \lesssim \sqrt{N^3\rho_{\max}^2\alpha_0\log\frac{ne}{N}}.$$

因此

$$\max_{|D|=N}|L_D| \lesssim \sqrt{N^3\rho_{\max}^2\alpha_0\log(\frac{ne}{N})} + N\epsilon\log(\frac{ne}{N}) \lesssim \sqrt{N^3\rho_{\max}^2\alpha_0\log(\frac{ne}{N})}$$

概率至少为 $1-\binom{n}{N}^{-1}-2v_0^{-c_1}$。回顾 $N=N_0[1+o(1)]$，即可得到该引理的结论。

□

接下来，我们研究 ϕ_{sc} 的理想版本。

引理 H.3。定义理想扫描统计量

$$\tilde{\phi}_{sc} = \max_{|D|=N}\mathbf{1}_D^{\mathsf{T}}(A-\eta^*\eta^{*\mathsf{T}})\mathbf{1}_D,$$

以及相应的检验

$$\tilde{\varphi}_{sc} = \mathbf{1}\Big[\tilde{\phi}_{sc} > \tilde{\tau}\Big],$$

其中

$$\tilde{\tau} \equiv \tilde{C}\hat{\gamma}N^2h^{-1}\bigg(\frac{\tilde{C}N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\bigg),$$

且 $C>0$ 是一个充分大的绝对常数，它仅取决于假设 (a) 中的 C_ρ。那么在零假设下，

$$\mathbb{P}\big[|\tilde{\phi}_{sc}| > \tilde{\tau}\big] \le n^{-c_0} + \exp\big(-N\log\frac{ne}{N}\big)$$

而在备择假设下，

$$\mathbb{P}\big[|\tilde{\phi}_{sc}| \le \tilde{\tau}\big] \le n^{-c_0} + \big(\frac{N}{ne}\big)^{10}$$

对于充分大的 n，其中 c_0 是一个绝对常数。

证明。在本证明中，$c>0$ 是一个绝对常数，可能逐行变化。

定义理想扫描统计量

$$\tilde{\phi}_{sc} = \max_{|D|=N}\mathbf{1}_D^{\mathsf{T}}(A-\eta^*\eta^{*\mathsf{T}})\mathbf{1}_D.$$

另外定义

$$Z_D \equiv \sum_{i,j\in D(dist)}(A_{ij}-\Omega_{ij})$$

Firs考虑第一类错误。在零假设下，我们有 $\eta^*=\theta=\rho$ 和 $\alpha_0=1$。观察 e that

$$\sigma_D^2 \equiv \mathrm{Var}(Z_D) = \mathrm{Var}\big(\sum_{i,j\in D(dist)}(A_{ij}-\theta_i\theta_j)\big) \lesssim \|\theta_D\|_1^2 \asymp \rho_{\max}^2N^2 \sim \rho_{\max}^2N_0^2$$

根据贝内特不等式（Vershynin，2018年，定理 2.9.2），

$$\mathbb{P}\big[\sum_{i,j\in D}(A_{ij}-\theta_i\theta_j)>t\big]\le\exp\bigg(-\sigma_D^2\,h\Big(\frac{t}{\sigma_D^2}\Big)\bigg), \tag{H.22}$$

其中 $h(u)=(1+u)\log(1+u)-u$。

接下来，根据引理 H.1,

$$|\hat\gamma-\mathbb{E}\hat\gamma|\lesssim\frac{\sqrt{\log n}}{n}$$

以概率 n^{-c_0}。另回顾一下,

$$\mathbb{E}\,\hat\gamma=\frac{1}{n^{(2)}}\sum_{i,j(dist)}\Omega_{ij}\asymp\rho_{\max}^2\alpha_0=\rho_{\max}^2\gg\frac{\sqrt{\log n}}{n}$$

根据假设（a）和（b）。由此可知，存在绝对常数 c_0,$c_\gamma,C_\gamma>0$，使得

$$c_\gamma\rho_{\max}^2<\hat\gamma<C_\gamma\rho_{\max}^2 \tag{H.23}$$

˜以概率 n^{-c_0}。令 $\mathcal{E}$ 表示该事件。在 $\mathcal{E}$条件下，对于充分大的 C，

$$\tilde C\hat\gamma N^2h^{-1}\bigg(\frac{\tilde CN\log(\frac{ne}{N})}{\hat\gamma N^2}\bigg)\ge\sigma_D^2h^{-1}\bigg(\frac{2N\log\frac{ne}{N}}{\sigma_D^2}\bigg)$$

由此、并集界和贝内特不等式可得,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\bigg[|\tilde\phi_{sc}|>\tilde C\hat\gamma N^2h^{-1}\bigg(\frac{\tilde CN\log(\frac{ne}{N})}{\hat\gamma N^2}\bigg)\bigg]&\le\mathbb{P}[\mathcal{E}^c]+\mathbb{P}\bigg[|\tilde\phi_{sc}|>\tilde C\hat\gamma N^2h^{-1}\bigg(\frac{\tilde CN\log(\frac{ne}{N})}{\hat\gamma N^2}\bigg),\ \mathcal{E}\bigg]\\&\le n^{-c_0}+\sum_{|D|=N}\mathbb{P}\bigg[|Z_D|>\tilde C\hat\gamma N^2h^{-1}\bigg(\frac{\tilde CN\log(\frac{ne}{N})}{\hat\gamma N^2}\bigg)\bigg]\\&\le n^{-c_0}+\sum_{|D|=N}\mathbb{P}\bigg[|Z_D|>\sigma_D^2h^{-1}\bigg(\frac{2N\log\frac{ne}{N}}{\sigma_D^2}\bigg)\bigg]\\&\le n^{-c_0}+\big(\frac{ne}{N}\big)^N\exp\big(-2N\log\frac{ne}{N}\big).\end{aligned}$$

这表明理想扫描统计量的第一类错误为 $o(1)$。

接下来考虑第二类错误。由引理 (E.2),

$$\mathbf{1}_S^\intercal(A-\eta^*\eta^{*\intercal})\mathbf{1}_S=\sum_{i,j\in S(dist)}(A_{ij}-\Omega_{ij})+\mathbf{1}_S^\intercal\tilde\Omega\mathbf{1}_S=Z_S+\|\theta_S\|_1^2(1-b^2)\cdot\frac{\|\theta_{S^c}\|_1^2}{v_0}.$$

注意，由 (H.12) 可知

$$\|\theta_S\|_1^2(1-b^2)\cdot\frac{\|\theta_{S^c}\|_1^2}{v_0}\sim\|\theta_S\|_1^2(1-b^2).$$

接下来,

$$\mathrm{Var}(Z_S)=\sum_{i,j\in S(dist)}\Omega_{ij}(1-\Omega_{ij})\lesssim\|\theta_S\|_1^2\asymp\rho_{\max}^2Na\sim\rho_{\max}^2N_0a$$

由伯恩斯坦不等式可得,

$$|Z_S|\lesssim\sqrt{\|\theta_S\|_1^2\log(1/\delta)}\vee\log(1/\delta)\le\|\theta_S\|_1\log(1/\delta)$$

其概率至少为 $1-\delta$。令 $\delta=(\frac{N}{ne})^{10},$，则有

$$|Z_S|\lesssim\|\theta_S\|_1\log\big(\frac{ne}{N}\big)$$

其概率至少为 $1-(\frac{N}{ne})^{10}$。—

接下来我们证明

$$\|\theta_S\|_1|1-b^2| \gtrsim \log\frac{ne}{N} \tag{H.24}$$

利用 (H.7)，将其改写为

$$\|\theta_S\|_1^2|1-b^2| \gg \gamma N_0^2 h^{-1}\left(\frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\gamma N_0}\right) \sim \gamma N^2 h^{-1}\left(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}\right) \tag{H.25}$$

其中 $\gamma=\rho_{\max}^2\alpha_0$。回想一下，在零假设下 $\alpha_0=1$，而在备择假设下 $\alpha_0\sim c$。Le t

$$u=\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}.$$

考虑两种情况：(i) $u\le 0.01$，以及 (ii) $u\ge 0.01$。对于 $u'\le h^{-1}(0.01)$，我们有 $h(u')\asymp(u')^2$, ，因此 $h^{-1}(u)\asymp u^2$，对于 $u\le 0.01$。在这种情况下，(H.25) 意味着

$$\|\theta_S\|_1^2|1-b^2| \gg \gamma N^2\sqrt{\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}}=\sqrt{\gamma N^3\log\frac{ne}{N}}.$$

此外，

$$\|\theta_S\|_1 = N\sqrt{a}\rho_{\max},$$

因此

$$\|\theta_S\|_1(1-b^2) \gg \sqrt{\frac{\gamma N\log\frac{ne}{N}}{a\rho_{\max}^2}} \gtrsim \log\frac{ne}{N}$$

因为 $u\le 0.01$ 和 $a\rho_{\max}^2\lesssim 1$。因此，在情形 (i) 中，当 n 充分大时，(H.24) 成立 e.

现在考虑情形 (ii)，其中 $u\ge 0.01$。注意， $h(u)\le(u+1)\log(u+1)$，因此

$$\frac{1}{2}(u+1)\le u\le h^{-1}((u+1)\log(u+1)).$$

令 $\varphi\equiv(u+1)\log(u+1)\ge u$，并注意到

$$u+1=\frac{\varphi}{\log(u+1)}\ge\frac{\varphi}{\log\varphi}.$$

因此

$$h^{-1}((u+1)\log(u+1))\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{(u+1)\log(u+1)}{\log\left[(u+1)\log(u+1)\right]}.$$

应用 (H.25)，

$$\|\theta_S\|_1^2|1-b^2| \gg \gamma N^2\cdot\frac{(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}+1)\log(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}+1)}{\log\left[(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}+1)\log(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}+1)\right]}\gtrsim N\log\frac{ne}{N}.$$

因此

$$\|\theta_S\|_1|1-b^2| \gg \frac{\log\frac{ne}{N}}{\sqrt{a}\rho_{\max}}\gtrsim\log\frac{ne}{N}.$$

因此，在情形 (ii) 下，(H.24) 也成立。

接下来有，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[|\tilde{\phi}_{sc}|\le\tilde{C}\hat{\gamma}N^2h^{-1}\left(\frac{\tilde{C}N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\right)\right]\\&\qquad\le n^{-c_0}+\mathbb{P}\left[|\tilde{\phi}_{sc}|\le\tilde{C}\hat{\gamma}N^2h^{-1}\left(\frac{\tilde{C}N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\right),\mathcal{E}\right]\end{aligned}$$

$$\leq n^{-c_0} + \mathbb{P}\bigg[\bigg| \|\theta_S\|_1^2(1-b^2) + Z_S \bigg| \leq C\gamma N^2 h^{-1}\Big(\frac{CN\log(\frac{ne}{N})}{\gamma N^2}\Big) \bigg]$$
$$\leq n^{-c_0} + \mathbb{P}\bigg[|Z_S| \geq \big| \|\theta_S\|_1^2(1-b^2) \big| - C\gamma N^2 h^{-1}\Big(\frac{CN\log(\frac{ne}{N})}{\gamma N^2}\Big) \bigg],$$

其中 $C > 0$ 是一个足够大的绝对常数。在第二行和第三行中，我们使用了式 (H.23) 中的事件 $\mathcal{E}$；在最后一行中，我们使用了三角不等式。由式 (H.7)，我们保守地得到

$$\big| \|\theta_S\|_1^2(1-b^2) \big| - C\gamma N^2 h^{-1}\Big(\frac{CN\log(\frac{ne}{N})}{\gamma N^2}\Big) \geq \frac{1}{2}\big| \|\theta_S\|_1^2(1-b^2) \big| \gg \|\theta_S\|_1 \log\frac{ne}{N}$$

当 n 足够大时。因此，当 n 足够大时，

$$\mathbb{P}\bigg[|\tilde{\phi}_{sc}| \leq \tilde{C}\hat{\gamma} N^2 h^{-1}\Big(\frac{\tilde{C}N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\Big) \bigg] \leq n^{-c_0} + \mathbb{P}\bigg[|Z_S| \geq \frac{1}{2}\big| \|\theta_S\|_1^2(1-b^2) \big| \bigg]$$
$$\leq n^{-c_0} + \big(\frac{N}{ne}\big)^{10}.$$

因此，理想扫描统计量的第二类错误也为 $o(1)$。 □

引理 H.4。 令 ϕ_{sc} 表示(H.4)中定义的扫描统计量，并令$\hat{}\tau$ 表示(H.6)中定义的随机阈值。那么在零假设下，

$$\mathbb{P}\big[|\phi_{sc}| > \hat{\tau}\big] \leq \binom{n}{N}^{-1} + v_0^{-c_1} + n^{-c_0} + \exp\big(-N\log\frac{ne}{N}\big),$$

在备择假设下，当 n 足够大时，我们有

$$\mathbb{P}\big[|\phi_{sc}| < \hat{\tau}\big] \leq \binom{n}{N}^{-1} + v_0^{-c_1} + n^{-c_0} + \big(\frac{N}{ne}\big)^{10}.$$

证明。 我们证明，与阈值和信号强度相比，插件效应可以忽略不计。根据引理 H.2,

$$\max_{|D|=N} |L_D| \lesssim \sqrt{N_0^3\gamma\log(\frac{ne}{N_0})}$$

以高概率。由于对于 $u \geq 0,\ \ h(u) \leq u^2$，因此可得

$$h\Big(\frac{\sqrt{N_0^3\gamma\log(\frac{ne}{N_0})}}{\gamma N_0^2}\Big) \leq \frac{N_0^3\gamma\log(\frac{ne}{N_0})}{\gamma^2 N_0^4} = \frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\gamma N_0} \Rightarrow$$
$$\sqrt{N_0^3\gamma\log(\frac{ne}{N_0})} \leq \gamma N_0^2 h^{-1}\Big(\frac{\log\frac{ne}{N_0}}{\gamma N_0}\Big) \Rightarrow$$
$$\sqrt{N^3\gamma\log(\frac{ne}{N})} \leq [1+o(1)]\gamma N^2 h^{-1}\Big(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}\Big).$$

在零假设下，根据引理 H.3 可得

$$\mathbb{P}\big[|\phi_{sc}| \geq \hat{\tau}\big] \leq \mathbb{P}\big[\,|\tilde{\phi}_{sc}| \geq \hat{\tau} - \max_{|D|=N}|L_D|\,\big]$$
$$\leq \binom{n}{N}^{-1} + v_0^{-c_1} + \mathbb{P}\bigg[|\tilde{\phi}_{sc}| \geq C^*\hat{\gamma}N^2h^{-1}\Big(\frac{C^*N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\Big) - \gamma N^2 h^{-1}\Big(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}\Big)\bigg]$$
$$\leq \binom{n}{N}^{-1} + v_0^{-c_1} + n^{-c_0} + \exp\big(-N\log\frac{ne}{N}\big)$$

˜对于 $C^* > 0$ 一个足够大的绝对常数。只需取 $C^* \geq 2C$。

在备择假设下，由引理 H.3 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[|\phi_{sc}| \le \hat{\tau}\big] &\le \mathbb{P}\big[\,|\tilde{\phi}_{sc}| \le \hat{\tau} + \max_{|D|=N} |L_D|\,\big] \\ &\le \binom{n}{N}^{-1} + v_0^{-c_1} + \mathbb{P}\left[|\tilde{\phi}_{sc}| \le C^*\hat{\gamma}N^2h^{-1}\left(\frac{C^*N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\right) + \gamma N^2 h^{-1}\left(\frac{\log\frac{ne}{N}}{\gamma N}\right)\right] \\ &\le \binom{n}{N}^{-1} + v_0^{-c_1} + \mathbb{P}\left[|\tilde{\phi}_{sc}| \le 2C^*\hat{\gamma}N^2h^{-1}\left(\frac{C^*N\log(\frac{ne}{N})}{\hat{\gamma}N^2}\right)\right] \\ &\le \binom{n}{N}^{-1} + v_0^{-c_1} + n^{-c_0} + (\frac{N}{ne})^{10}\end{aligned}$$

当 n 充分大时。

□

注意，定理 2.5 可直接由引理 H.4 得出。

I 定理 2.6 的证明（计算下界）

本节给出定理 2.6 的证明。为方便起见，我们记作 $b = \frac{nc-}{n-2N}(\ a+c\ N)$，$d = \frac{c(n-N^{\ 2}-aN^2}{n\ n-2N}()$。在 H_0 条件下，所有上三角元素 A 均服从参数为d的 Bernoulli 分布且相互独立。于是，图 D 的邻接矩阵的一组标准正交基为

$$f_\Gamma(A) = \prod_{i<j:(i,j)\in\Gamma} \frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}.$$

这里，$\Gamma \subseteq \{(i,\ j)\colon\ 1 \le i < j \le n\}$ 取遍 A的所有上三角元素的子集。记 $|\Gamma|$ 为 Γ 的基数，并将 $B(D) = \{\Gamma \subseteq \{$个无序对 $(i,\ j)\colon\ i \ne j,\ \ i,\ \ j \in [n]\},\ \ \Gamma \ne \emptyset,\ \ |\Gamma| \le D\}$记为 A 中基数至多为 D的所有非对角元素子集。根据命题 I.1 以及 A的标准正交基函数的性质，

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{f \text{ is polynomial; degree}(f)\le D \\ \mathbb{E}_{H_0} f(A)=0; \mathrm{Var}_{H_0}(A)=1}} \mathbb{E}_{H_1} f(A) = \|LR^{\le D} - 1\| \\ &= \left\{\sum_{\Gamma\in B(D)} \left(\mathbb{E}_{H_0} f_\Gamma(A)(LR^{\le D}(A) - 1)\right)^2\right\}^{1/2} \overset{(*)}{=} \left\{\sum_{\Gamma\in B(D)} \left(\mathbb{E}_{H_0} f_\Gamma(A) LR(A)\right)^2\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\sum_{\Gamma\in B(D)} \mathbb{E}_{H_1}\left(f_\Gamma(A)\right)^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{\Gamma\in B(D)} \left(\mathbb{E}_{H_1} \prod_{(i,j)\in\Gamma} \frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}\right)^2\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

这里，利用投影的性质，$(*)$ 由 $\mathbb{E}_{H_0} f_\Gamma LR^{\le D} = \mathbb{E}_{H_0} f_\Gamma LR$ 给出，并且对于任意 $\Gamma \in B(D)$，$\mathbb{E}_{H_0} f_\Gamma(A) = 0$。因此，为了建立所需的计算下界，我们只需证明

$$\sum_{\Gamma\in B(D)} \left(\mathbb{E}_{H_1} \prod_{(i,j)\in\Gamma} \frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}\right)^2 = o(1)$$

在所述渐近情形下。为方便起见，我们记

$$p_1 = \frac{a-d}{\sqrt{d(1-d)}}, \quad p_2 = \frac{b-d}{\sqrt{d(1-d)}}, \quad p_3 = \frac{c-d}{\sqrt{d(1-d)}}.$$

我们可以计算得出

$$a-d = \frac{(n-N)^2(a-c)}{n(n-2N)}, \quad b-d = -\frac{(n-N)N(a-c)}{n(n-2N)}, \quad c-d = \frac{N^2(a-c)}{n(2-2N)}.$$

and

$$c-d=-\frac{N}{n-N}\left(b-d\right)=\left(\frac{N}{n-N}\right)^{2}\left(a-d\right). \tag{I.1}$$

由于 $b=\frac{c\,(n-N)\,-aN}{n-2N}\geq 0$ 和 $N\leq n/3$，我们知道 $a\leq c\,(n-N)\,/N$ 和

$$c\geq d=\frac{c(n-N)^2-aN^2}{n(n-2N)}\geq\frac{c(n-N)^2-N(n-N)c}{n(n-2N)}\geq(n-N)/n\cdot c\geq 2/3\cdot c.$$

在该定理的渐近情形下，我们有 $d=\frac{c\,(n-N\ ^2-aN^2\,)\,()}{n\ n-2N}$ 和

$$p_1=\frac{(n-N)^2(a-c)}{n(n-2N)\sqrt{d(1-d)}}\asymp\frac{a-c}{\sqrt{c}}, \tag{I.2}$$

也就是说，存在常数 $\delta>1$，使得 $\delta^{-1}c\leq p_1\leq\delta c$。由 (I.1)，我们有 $p_3=-N/(n-N)$，$p_2=N^2/\ n-N\ ^2p_1$ $\Gamma\subseteq\{\ i\ j\quad 1\leq i<j\leq n\}$ ( )。对于任意固定的 (,) : ,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{H_1}\prod_{(i,j)\in\Gamma}\frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}=\mathbb{E}_{\Pi}\left\{\mathbb{E}\left\{\prod_{(i,j)\in\Gamma}\frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}\,\middle|\,A\text{ has two communities assigned by }\Pi\right\}\right\}\\
=&\mathbb{E}_{\Pi}p_1^{|\Gamma\cap K\otimes K|}\cdot p_2^{|\Gamma\cap K\otimes K^c|}\cdot p_3^{|\Gamma\cap K^c\otimes K^c|}=\mathbb{E}_{\Pi}\prod_{(i,j)\in\Gamma}\left\{p_1\cdot(-N/(n-N))^{\pi_i+\pi_j-2}\right\}\\
=&p_1^{|\Gamma|}\cdot\left(\frac{-N}{n-N}\right)^{\sum_{(i,j)\in\Gamma}(\pi_i+\pi_j-2)}=p_1^{|\Gamma|}\cdot\left(\frac{-N}{n-N}\right)^{\sum_{(i,j)\in\Gamma}(\pi_i+\pi_j-2)}\\
=&p_1^{|\Gamma|}\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{-N}{n-N}\right)^{(\pi_i-1)\cdot|\{j':(i,j')\in\Gamma\}|}\overset{(a)}{=}p_1^{|\Gamma|}\cdot\prod_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{N}{n}\right)+\frac{n-N}{n}\left(\frac{-N}{n-N}\right)^{|\{j':(i,j')\in\Gamma\}|}\right\}.
\end{aligned}$$

这里，(a) 是因为 $\mathbb{P}(\pi_i=1)=N/n$；$\mathbb{P}(\pi_i=2)=(n-N)/n$。因此，以下事实成立：如果存在一个节点 i，它在 Γ 中恰好出现一次，即 $|\{j':(i,\ j')\in\Gamma\}|=1$，$\mathbb{E}_{H_1}\prod_{(i,\ j)\in\Gamma}\frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}=0$。另一方面，对于所有满足每个节点出现零次或至少两次的 Γ，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{H_1}\prod_{(i,j)\in\Gamma}\frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}\leq p_1^{|\Gamma|}\cdot\left\{\frac{N}{n}+\frac{n-N}{n}\left(\frac{-N}{n-N}\right)^2\right\}^{|\{i:i\text{ appears at least 2 times in }\Gamma\}|}\\
\leq&p_1^{|\Gamma|}\cdot\left(\frac{2N}{n}\right)^{|\{i:i\text{ appears at least 2 times in }\Gamma\}|}.
\end{aligned}$$

最后，我们记作

$$B_0(D)=\{\Gamma\in B(D):\ \text{each node in }[n]\text{ appears zero time or at least 2 times}\},$$

$$m(\Gamma)=|\{i:i\text{ appears in some pair of }\Gamma\}|.$$

对于任意的 $\Gamma \in B_0(D)$，必须有 $m(\Gamma) \le |\Gamma| \le m(\Gamma)(m(\Gamma)-1)/2$。那么，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\Gamma\in B(D)}\left(\mathbb{E}_{H_1}\prod_{(i,j)\in\Gamma}\frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}\right)^2=\sum_{\Gamma\in B_0(D)}\left(\mathbb{E}_{H_1}\prod_{(i,j)\in\Gamma}\frac{A_{ij}-d}{\sqrt{d(1-d)}}\right)^2\\
=&\sum_{\Gamma\in B_0(D)}p_1^{2|\Gamma|}\cdot\left(\frac{2N}{n}\right)^{2|\{i:i \text{ appears at least 2 times in } \Gamma\}|}\le\sum_{\Gamma\in B_0(D)}p_1^{2|\Gamma|}\cdot\left(\frac{2N}{n}\right)^{2m(\Gamma)}\\
=&\sum_{m=2}^{D}\sum_{g=m}^{D\wedge m(m-1)/2}\sum_{\substack{\Gamma\in B_0(D)\\ m(\Gamma)=m\\ |\Gamma|=g}}p_1^{2g}\left(\frac{2N}{n}\right)^{2m}\overset{(a)}{\le}\sum_{m=2}^{D}\sum_{g=m}^{D\wedge\frac{m(m-1)}{2}}\binom{n}{m}m^g p_1^g\left(\frac{2N}{n}\right)^m\\
\le&\sum_{m=2}^{D}\sum_{g=m}^{D\wedge\frac{m(m-1)}{2}}\frac{m^g p_1^{2g}(2N)^{2m}}{m!\cdot n^m}\le\sum_{m=2}^{D}\frac{D\max\left\{(mp_1^2)^m,(mp_1^2)^{D\wedge m(m-1)/2}\right\}\cdot(2N)^{2m}}{n^m}\\
=&D\sum_{m=2}^{D}\left(\frac{\max\{mp_1^2,(mp_1^2)^M\}\cdot(2N)^2}{n}\right)^m\overset{(b)}{=}o(1)
\end{aligned}$$

这里，$M=\max_{m\ge 1}\frac{D\wedge m}{(m-1)/2}\le\sqrt{D/2-1}$；(a) 是因为满足 $m(\Gamma)=m$ 且 $|\Gamma|=g$ 的 $\Gamma\in B_0(D)$ 的数量至多为 $\binom{n}{m}\cdot m^g$；(b) 则源于渐近假设和 (I.2)，由此得到

$$\frac{N}{\sqrt{n}}\left(p_1\vee p_1^M\right)\le n^{-\varepsilon}.$$

至此，我们完成了该定理的证明。□

命题 *I.1*（*Kunisky* 等人（*2019*）的命题 *1.15*）。给定数据 A，考虑简单假设检验问题：H_0 与 H_1。设似然比函数为 $LR(A)=\frac{p_{H_1}(A)}{p_{H_0}(A)}$。定义 $\|f\|=\sqrt{\mathbb{E}_{H_0}f^2(A)}$，并令 $f^{\le D}$ 为任意函数 f 在次数至多为 D的多项式子空间上的投影，即 $f^{\le D}=\underline{argmin_g \text{ 为多项式}}\|f-g\|$。那么，对于任意正整数 D，$degree(g)\le D$

我们有

$$\|LR^{\le D}(A)-1\|=\max_{\substack{f:degree(f)\le D\\ \mathbb{E}_{H_0}f^2(A)=1\\ \mathbb{E}_{H_0}f(A)=0}}\mathbb{E}_{H_1}f(A);$$

$$\frac{LR^{\le D}(A)-1}{\|LR^{\le D}(A)-1\|}=argmax_{\substack{f:degree(f)\le D\\ \mathbb{E}_{H_0}f^2(A)=1\\ \mathbb{E}_{H_0}f(A)=0}}\mathbb{E}_{H_1}f(A).$$

J 定理 2.7 的证明（EST 的检验功效）

EST 统计量定义为

$$\phi_{EST}^{(v)}\equiv\sup_{|S|\le v}\sum_{i,j\in S}A_{ij},$$

且 EST 定义为

$$\varphi_{EST}=\mathbf{1}\left[\phi_{EST}^{(r)}\ge e\right],$$

其中 v，e 互素，且满足

$$\frac{\omega}{1-\beta}<\frac{v}{e}<\delta.$$

此类 v 和 e之所以存在，是因为

$$\frac{\omega}{1-\beta}<\delta,$$

根据假设。此外，我们有

$$v < e$$

因为 ω，$\delta \in (0, 1)$。

为证明该结论，我们需要一些预备知识。令 $G(n, p)$ 表示参数为 p 的 Erd˝os-R´enyi 图。若一个具有 v 个顶点和 e 条边的图 H 满足：对于所有具有 v' 个顶点和 e' 条边的（不一定是诱导）子图 $H' \subset H$，均有

$$e/v > e'/v'.$$

Next，EST 的检验功效取决于概率组合学中的两个著名事实。第一个事实关
任意图 H 在 $G(n, p)$ 中的出现。

定理 J.1（改编自 Alon & Spencer（2016）的定理 4.4.2）。令 H 表示一个有 v 个顶点和 e 条边的图。那么，如果 $p \ll n^{-v/e}$，随机图 $G(n, p)$ 以高概率不会以 H 为子图，当 $n \to \infty$ 时。

另一方面，如果 H 是平衡的且 $p \gg n^{-v/e}$，随机图 $G(n, p)$ 以高概率包含 H 作为子图，当 $n \to \infty$ 时。

定理 J.2（Ruci´nski & Vince（1986）；Catlin 等人（1988））。存在一个有 v 个顶点和 e 条边的平衡图，当且仅当 $1 \leq v - 1 \leq e \leq \binom{v}{2}$。

现在我们继续证明。回想一下，v 和 e 是满足 $\frac{\omega}{1-\beta} < v/e <$ 的整数 —— δ.

第一类错误：注意

$$b = \frac{cn - (a+c)N}{n - 2N} = c \cdot \frac{n-N}{n-2N} - a \cdot \frac{N}{n-2N},$$

因此

$$\alpha = a\varepsilon + b(1-\varepsilon) = a\varepsilon + (1-\varepsilon)\big(c \cdot \frac{n-N}{n-2N} - a \cdot \frac{N}{n-2N}\big)$$
$$= a\left(\frac{N}{n} - (1-\varepsilon)\frac{N}{n-2N}\right) + (1-\varepsilon) \cdot \frac{n-N}{n-2N} \cdot c = -a \cdot \frac{N^2}{n(n-2N)} + (1-\varepsilon) \cdot \frac{n-N}{n-2N} \cdot c \sim c.,$$

其中上文用到了 $a\varepsilon \leq c$。

因此，在备择假设下，A服从参数为.....的 Erdős–Rényi 分布

$$\alpha \sim c = n^{-\delta} \ll n^{-v/e},$$

根据我们对 v 和 e的选择。由定理 J.1 的第一部分，以高概率，当 $n \to \infty$时，A 的任意规模为 v 的子集都不会包含超过 e 条边。

更精确地说，存在有限个图 H_1、.....、H_L，它们有 v 个顶点和至少 e条边，其中 L 是仅依赖于 v的常数。对于每个图 H_i，当 $n \to \infty$时，定理 J.1 表明其中包含 H_i 作为子图的概率趋于 0。因此，由并集界可知，EST 的第一类错误趋于 0。

第二类错误：令 H 表示一个有 v 个顶点和 e 条边的平衡图，其存在性由定理 J.2 保证。考虑 $\mathcal{C}_1$（较小社区）上的导出子图，它是一个具有 N 个顶点、参数为 $a = n^{-\omega}$ 的 Erd˝os-R´enyi 随机图。根据我们对 v 和 e 的选择，有

$$a = n^{-\omega} = N^{-\frac{\omega}{1-\beta}} \gg N^{-v/e}.$$

根据定理 J.1，$\mathcal{C}_1$ 以高概率包含 H 的一个副本。由于 H 有 e 条边，我们得出 $\phi_{EST}^{(v)} \geq e$，因此以高概率拒绝零假设，因为 $n \to \infty$。

参考文献

Noga Alon 和 Joel H Spencer。《概率方法》。John Wiley & Sons，2016。

Noga Alon、Michael Krivelevich 和 Benny Sudakov。随机图中大型隐藏团的发现。*Random Structures & Algorithms*，13(3-4):457–466，1998。

Ery Arias-Castro 和 Nicolas Verzelen。稠密随机网络中的社区检测。《统计年刊》，42(3):940–969，2014。Aditya Bhaskara、Moses Charikar、Eden Chlamtac、Uriel Feige 和 Aravindan Vijayaraghavan。检测高对数密度：最稠密 k-子图的 o (n 1/4) 近似算法。载于第四十二届 *ACM* 计算理论研讨会论文集，第 201–210 页，2010 年。Kay Bogerd、Rui M Castro、Remco van der Hofstad 和 Nicolas Verzelen。非齐次随机图中植入社区的检测。*Bernoulli*，27(2):1159–1188，2021 年。Louis Cammarata 和 Zheng Tracy Ke。混合成员随机区块模型全局检验的检验力增强与相变。*arXiv* 预印本 *arXiv:2204.11109*，2022 年。Paul A Catlin、Jerrold W Grossman 和 Arthur M Hobbs。具有均匀密度的图。*Congr.Numer*，65:281–285，1988 年。Yudong Chen 和 Jiaming Xu。植入问题中的统计-计算权衡，以及簇和子矩阵数量增长时的子矩阵定位。《机器学习研究杂志》，17(1):882–938，2016 年。David Donoho 和 Jiashun Jin。用于检测稀疏异质混合的高阶检验。《统计年刊》，32(3):962–994，2004 年。David Donoho 和 Jiashun Jin。特邀论文：面向大规模推断的高阶检验，尤其针对稀有弱效应。《统计科学》，第 1–25 页，2015 年。Chao Gao 和 John Lafferty。利用小子图统计量检验全局网络结构。*arXiv:1710.00862*，2017 年。Bruce Hajek、Yihong Wu 和 Jiaming Xu。随机图社区检测的计算下界。载于学习理论会议，第 899–928 页。PMLR，2015 年。Paul W. Holland、Kathryn Blackmond Laskey 和 Samuel Leinhardt。随机区块模型：初步探索。《社会网络》，5(2):109–137，1983 年。Samuel B Hopkins 和 David Steurer。基于少量样本的高效贝叶斯估计：社区检测及相关问题。载于*2017 IEEE* 第 *58* 届计算机科学基础年会（*FOCS*），第 379–390 页。IEEE，2017 年。Samuel B Hopkins、Pravesh K Kothari、Aaron Potechin、Prasad Raghavendra、Tselil Schramm 和 David Steurer。平方和方法在检测隐藏结构中的威力。载于*2017 IEEE* 第 *58* 届计算机科学基础年会（*FOCS*），第 720–731 页。IEEE，2017 年。Samuel Brink Klevit Hopkins。统计推断与平方和方法。2018 年。Pengsheng Ji、Jiashun Jin、Zheng Tracy Ke 和 Wanshan Li。统计学家的共被引与合著网络（附讨论）。《商业与经济统计杂志》，40(2)，2022 年。Jiashun Jin。通过 SCORE 快速检测社区。《统计年刊》，43(1):57–89，2015 年。Jiashun Jin、Zheng Tracy Ke 和 Shengming Luo。通过计数图元进行网络全局检验。第 *35* 届国际机器学习会议，2018 年。Jiashun Jin、Zheng Tracy Ke 和 Jiajun Liang。超图检验的尖锐不可能性结果。《神经信息处理系统进展》，34:7220–7231，2021a。Jiashun Jin、Zheng Tracy Ke 和 S. Luo。带符号多边形统计量用于网络检验的最优自适应性。《统计年刊》，49(6):3408–3433，2021b。Jiashun Jin、Zheng Tracy Ke 和 Shengming Luo。带符号多边形统计量用于网络检验的最优自适应性。《统计年刊》，49(6):3408–3433，2021c。Jiashun Jin、Zheng Tracy Ke、Shengming Luo 和 Minzhe Wang。网络社区数量的最优估计。《美国统计协会杂志》，第 1–16 页，2022 年。

Brian Karrer 和 Mark EJ Newman。网络中的随机区块模型与社区结构。*Physical Review E*，83(1):016107，2011。Zheng Tracy Ke 和 Jiashun Jin。得分归一化，尤其针对高度异质的网络和文本数据。*arXiv* 预印本 *arXiv:2204.11097*，2022。Dmitriy Kunisky、Alexander S Wein 和 Afonso S Bandeira。关于假设检验计算难度的札记：基于低次似然比的预测。*arXiv* 预印本 *arXiv:1907.11636*，2019。Yan Liu、Zhiqiang Hou、Zhigang Yao、Zhidong Bai、Jiang Hu 和 Shurong Zheng。基于度修正块模型中特征向量的 ℓ_∞ 收敛性的社区检测。*arXiv* 预印本 *arXiv:1906.06713*，2019。Yuetian Luo 和 Anru R Zhang。具有植入结构的张量聚类：统计最优性与计算极限。《统计年刊》，50(1):584–613，2022。Shujie Ma、Liangjun Su 和 Yichong Zhang。确定度修正随机区块模型中的社区数量。机器学习研究杂志，22(69):1–63，2021。Dorit Ron 和 Uriel Feige。在线性时间内寻找隐藏团。离散数学与理论计算机科学，2010。Andrzej Ruci´nski 和 Andrew Vince。强平衡图与随机图。图论杂志，10(2):251–264，1986。Richard Sinkhorn。与具有指定行和与列和的矩阵对角等价。美国数学会会刊，(2):195–198，1974。Roman Vershynin。高维概率：数据科学应用导论，第47卷。剑桥大学出版社，2018。Nicolas Verzelen 和 Ery Arias-Castro。稀疏随机网络中的社区检测。应用概率年刊，25(6):3465–3510，2015。Mingao Yuan、Ruiqi Liu、Yang Feng 和 Zuofeng Shang。超图社区结构检验。《统计年刊》（即将出版），2021。Yunpeng Zhao、Elizaveta Levina 和 Ji Zhu。度修正随机区块模型下网络社区检测的一致性。《统计年刊》，40(4):2266–2292，2012。