arXiv:2303.05028v2 [math.NT] 6 Apr 2023

广义狄利克雷除数问题

Chiara Bellotti 和 Andrew Yang

Abstract. 我们改进了大 k 时广义除数函数余项 $\Delta_k(x)$ 的无条件估计。特别地，我们证明，对于所有充分大的固定 k， $\Delta_k(x) \ll x^{1-1.889k^{-2/3}}$ 。

1. Introduction

对于整数 $k \geq 2$，令 $d_k(n)$ 表示将 n 写成恰好 k 个因子之积的方法数。已知 $d_k(n)$ 的部分和满足渐近公式

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = xP_{k-1}(\log x) + \Delta_k(x)$$

其中 $P_{k-1}(t)$ 是一个 $k-1$ 次多项式，而 $\Delta_k(x)$ 是余项。广义狄利克雷除数问题关注当 $x \to \infty$ 时量 $\Delta_k(x)$ 的阶，是解析数论中的一个开放问题，吸引了广泛关注。人们猜想，对于任意 $\varepsilon > 0$，都有 $\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{1/2-1/(2k)+\varepsilon}$；这一结果将推出著名的林德勒夫假设 [（参见 Tit86，第 13] 章）。

尽管目前尚不清楚 $\Delta_k(x)$ 的真实阶，但我们已取得了大量部分进展。我们简要回顾两类形式如下的结果

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\alpha_k+\varepsilon}, \tag{1.1}$$

and

$$\|\Delta_k(x)\|_2 := \left(\frac{1}{x}\int_1^x \Delta_k^2(y)\mathrm{d}y\right)^{1/2} \ll_\varepsilon x^{\beta_k+\varepsilon}. \tag{1.2}$$

对于第一类界，例如已知 $\alpha_2 \leq 517/1648$ [BW17]„ 而对于较小的 $k > 2$ [，也已知各种界 03]Kol81；IO89；Ivi k。对于较大的 $\alpha_k \leq 1 - Dk^{-2/3}$，已知的结果要少得多，目前最优的界具有如下形式 $D > 0$，其中常数 [也称为 Karatsuba 常数11]Kol ζ。特别地，已证明，如果黎曼ζ函数 s([) 满足 Richert 界 67], Ric，其形式为

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll t^{B(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t, \tag{1.3}$$

对 $1/2 \leq \sigma \leq 1$ 和某个常数 $B > 0$一致成立，则存在 $c_0, c_1 > 0$，使得当固定的 k充分大时， $\alpha_k \leq 1 - c_0(Bk)^{-2/3}$ 且 $\beta_k \leq 1 - c_1(Bk)^{-2/3}$。式 (1.3) 中出现的常数 B 曾通过考察维诺格拉多夫积分逐步改进，目前已知的最佳值为 $B = 4.45$，这是 Ford [For02]得到的。Karatsuba [Kar72] 首先证明了 $D = 2^{-5/3}B^{-2/3} \approx 0.116$

Date：2023年4月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11N56, 11N37；次要分类号：11M06。*Key words and phrases.* 广义狄利克雷除数问题，Karatsuba 常数，黎曼ζ函数。

（取 $B = 4.45$ 后）。Fujii [Fuj76] 和 Panteleeva[Pan88] 随后给出了两个结果，分别声称 $D = 2^{-1/2}(\sqrt{8}-1)^{-1/3}B^{-2/3} \approx 0.214$ 和 $D = 2^{-2/3}B^{-2/3} \approx 0.232$；然而，这两项证明都存在错误（讨论见 [For02] ）。1989 年，Ivi´c 和 Ouellet [IO89] 改进了 $k > 10$ 的常数，证明了$D = 2^{2/3}B^{-2/3}/3 \approx 0.196$，并且 (1.2) 在 $c_1 = 2/3$ 下成立。2011 年，Kolpakova[Kol11] 进一步将这些估计对 $k \geq 186$[1] 改进为

$$D = \left(\frac{2}{3B(1-159.9k^{-1})}\right)^{2/3}, \qquad c_1 = \left(\frac{5}{6(1-79.95k^{-1})}\right)^{2/3},$$

其中，特别是，$D \to (2/3)^{2/3}B^{-2/3} \approx 0.282$ 当 $k \to \infty$ 时成立。然而，该论证使用了界 $\zeta(\sigma+it) \ll t^{4.45(1-\sigma)^{3/2}}$，并且对 $\sigma \in (0.9, 1)$ 一致成立；当 σ 充分接近 1 时，这比任何已知估计都更强。[2]

B 的值是进一步改进 α_k 和 β_k 的界的一大障碍。在最近的一项突破中，Heath-Brown [HB17] 证明了

$$\zeta(\sigma+it) \ll_\varepsilon t^{B(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}, \qquad 1/2 \leq \sigma \leq 1, \tag{1.4}$$

当 $B = 8\sqrt{15}/63 = 0.4918\ldots$ 时成立。虽然 B 的值从 4.45 大幅降低，但当 $\sigma \to 1$ 时，将 $\log^{2/3} T$ 这一因子替换为某个固定 $\varepsilon > 0$ 的 T^ε 会带来困难。特别是，无法直接将 (1.4) 与 [Kol11] 的论证结合起来，以得到改进后的 Karatsuba 常数。尽管如此，通过改编 [IO89], 的方法，Heath-Brown 证明了以下估计

$$\Delta_k(x) \ll x^{1-0.849k^{-2/3}},$$

即 $D = 0.849$，这是目前对每个$k \geq 2$的 $\Delta_k(x)$ 所知的最优界。

本文有两项贡献。首先，我们调整 [Kol11]的方法，采用 Heath-Brown 的估计（1.4），从而受益于改进后的 B 常数。由此，我们得到新的 Karatsuba 常数 $D = (2/3)^{2/3}B^{-2/3} \approx 1.224$。其次，我们提出一种估计 $\Delta_k(x)$的新方法，该方法直接使用指数和估计，而不是对 $\zeta(s)$ 的界。结合对这类指数和的改进估计，当 k 足够大时，我们得到 Karatsuba 常数 $D \approx 1.889$。

我们指出，虽然第二个估计更精确，但第一个估计有两项优势。首先，对 B 的显式依赖意味着，该常数的任何改进都会直接转化为 Karatsuba 常数的改进。其次，该结果对所有固定的 $k \geq 30$ 都成立，而不只是在 k足够大时成立。

定理 1.1。设 k 为一个固定的正整数。则对于 $k \geq 30$

$$\Delta_k(x) \ll x^{1-1.224(k-8.37)^{-2/3}}.$$

此外，对于 $k \geq 15$,

$$\|\Delta_k(x)\|_2 \ll x^{1-1.421(k-4.18)^{-2/3}}.$$

更一般地，我们证明

[1]在 [Kol11] 中声称，对于所有 $k \geq 93$，相同的结果都成立，然而由于 [Kol11，定理 5] 最终被用于界定 $\sigma_{k/2}$ 而非 σ_k，因此我们实际上需要 $k \geq 186$。[2]特别地，估计式 $\zeta(\sigma+it) \ll t^{B(1-\sigma)^{3/2}}$ 是无效的，因为 $\sigma \to 1\,(1+it) = \Omega(\log\log t)$。

定理 1.2. 假设 $\zeta(\sigma+it) \ll_\varepsilon t^{B(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}$ 对 $1/2 \le \sigma \le 1$ 和任意 $\varepsilon > 0$ 一致成立。令 $\theta \in [1/2, 1)$ 为任意常数。那么，对于任意固定整数$k \ge 2k_0(\theta)$，我们有

$$\alpha_k \le 1 - \left(\frac{2}{3B(k-2k_1(\theta))}\right)^{2/3}, \qquad \beta_k \le 1 - \left(\frac{5}{6B(k-k_1(\theta))}\right)^{2/3},$$

其中

$$k_0(\theta) := \frac{24\theta - 9}{2(4\theta-1)(1-\theta)}, \qquad k_1(\theta) := k_0(\theta) - \frac{1}{3B(1-\theta)^{3/2}}. \tag{1.5}$$

结果（1.4）主要依赖于以下指数和估计，该估计归因于 [HB17，定理 4]

$$\sum_{N<n\le 2N} n^{-it} \ll_\varepsilon N^{1-c(\log t/\log N)^2+\varepsilon}, \qquad 1 \le N \ll t^{1/2}, \tag{1.6}$$

其中 $c = 49/80$。在引理 4.1 中，我们通过将常数$49/80$ 替换为 $1 - 3\log N/\log t$，改进了这一估计。结合该估计与狄利克雷多项式均值定理，可以得到以下改进结果。

定理 1.3。设 $\delta > 0$。对于所有固定的整数 $k \ge A\delta^{-3}$，其中 A 为绝对常数，有

$$\alpha_k \le 1 - \left(\frac{3}{2^{2/3}} - \delta\right) k^{-2/3}.$$

特别地，

$$\Delta_k(x) \ll x^{1-1.889k^{-2/3}}$$

当 k 足够大时。

1.1. $\Delta_k(x)$ 的 Ω结果与符号变化。为完整起见，我们简要比较定理 1.1 与目前最佳可能结果。人们猜想 [IO89]that

$$\alpha_k = \beta_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \qquad k \ge 2.$$

涉及 β_k 的猜想等价于 Lindel¨of 假设，而涉及 α_k 的猜想则蕴含 Lindel¨of 假设。目前，关于 $\Delta_k(x)$ 的最佳已知 Ω 结果比 O 结果更接近猜想中的真值。无条件地，已知对所有 $k \ge 2$，$\Delta_k(x) = \Omega\left(x^{1/2-1/(2k)}\right)$，即$\alpha_k \ge 1/2 - 1/(2k)$ [Har17; Haf81; Sou03]。近期研究聚焦于低阶因子，尤其是 Soundararajan [Sou03] 已证明

$$\Delta_k(x) = \Omega\left((x\log x)^{\frac{k-1}{2k}}(\log_2 x)^{\frac{k+1}{2k}(k^{2k/k+1}-1)}(\log_3 x)^{-\frac{1}{2}-\frac{k-1}{4k}}\right)$$

对所有 $k \ge 2$ 都成立。这里，$\log^j x$ 表示第 j 个迭代对数。

$\Delta_k(x)$符号变化频率是另一类值得关注的结果。1955年，Tong [Ton55] 证明，对于 $k \ge 2$, $\Delta_k(x)$ 在区间 $[X, X+h_k]$ 内至少改变一次符号，其中 $h_k \gg_k X^{1-1/k}$。对于情形 $k = 2$，Heath-Brown 和 Tsang [HBT94] 证明，除去 $\log X$ 的因子，Tong 定理已是最佳可能的。最近，Baluyot 和 Castillo [BC23] 证明，假设黎曼猜想，除去 $\log X$ 的因子，Tong 定理对于 $k = 3$ 也同样是尖锐的。

2. Background and useful lemmas

改进 [Kol11] 相对于 [IO89] 的主要工具，是关于 Carlson 指数 $m(\sigma)$ 的下界。它定义为所有满足下述条件的数 $m \geq 4$ 的上确界：

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^m \mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon} \tag{2.1}$$

对任意 $\varepsilon > 0$。我们首先回顾 Ivi´c [Ivi03, Thm. 8.4] 中的以下经典结果

$$m(\sigma) \geq \frac{24\sigma - 9}{(4\sigma-1)(1-\sigma)}, \qquad 1/2 \leq \sigma < 1. \tag{2.2}$$

这是一个对 σ 接近 1 的情形而言阶为 $(1-\sigma)^{-1}$ 的估计。[Kol11] 的主要结果依赖于一个更精确的估计，其阶为 $(1-\sigma)^{-3/2}$。特别是，文中证明了[3]

$$m(\sigma) \geq \frac{2}{13.35(1-\sigma)^{3/2}} + 159.9, \qquad 1-(31.2)^{-1} < \sigma < 1.$$

我们在引理 3.2 中改进了这一估计。我们所用的论证依赖于 Carlson 横坐标 σ_k 的估计。对于 $k > 0$，定义 σ_k 为满足下列条件的数 σ 的下确界

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} \mathrm{d}t \ll T. \tag{2.3}$$

如 [Tit86, p. 153]，中所述，σ_k 的一个等价定义是满足下列条件的数 σ 的下确界

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} \mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon} \tag{2.4}$$

对于任意固定的 $\epsilon > 0$。此外，以下全文设

$$\mu_k(\eta) := \limsup_{T\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\eta+it)|^{2k}\mathrm{d}t\right)}{\log T}, \qquad 0 \leq \eta \leq 1. \tag{2.5}$$

利用关于 μ_k 的上界，我们可以得到关于 σ_k 的上界。以下结果最初由 Carlson [Car22; Car26] 得出。

引理 2.1. 对于任意 $0 < \eta < 1$，有

$$\sigma_k \leq \max\left\{1 - \frac{1-\eta}{1+\mu_k(\eta)}, \frac{1}{2}, \eta\right\}.$$

证明。参见例如 Titchmarsh [Tit86，第 7.9] 条定理。 □

我们在定理 1.2 的证明中使用这一结果。最后，为了证明定理 1.2，我们还需要 Titchmarsh 给出的以下关于 β_k 的上界。

引理 2.2. [Tit86，第 12.5] 条定理。对于任意整数 $k \geq 2$，β_k 等于满足以下条件的正数 σ 的下界

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2} dt < \infty.$$

[3] $|\zeta(\sigma+it)|^{2m} \ll_\varepsilon t^{1+\varepsilon}$ m σ m $\int_1^T |\zeta(\sigma+$ 在 Kol 中，函数 ( ) 被定义为所有使得 ( ) d 的数的上确界，也就是说，它是我们文中所用 ( ) 的一半。

3. Proof of Theorem 1.2

定理 1.2 的证明主要依赖于 Kol 中采用的归纳论证[, 该论证给出 σ_k 的一个上界，从而也给出 $m(\sigma)$ 的一个下界。这样的界对于改进 Kol11] 中的 α_k 估计，使其优于 [IO89] 中的估计，至关重要。

引理 3.1. 假设 $\zeta(\sigma+it) \ll_\varepsilon t^{B(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}$ 对于某个 $B>0, \sigma\in[1/2,1]$ 以及任意 $\varepsilon>0$成立。令 $\theta\in[1/2,1)$ 为固定值，并令 $k_0(\theta)$ 如 (1.5) 中所定义。那么，对于任意固定的 $k\geq k_0(\theta)$ 和固定的 $\varepsilon_0>0$，有

$$\sigma_k \leq 1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(k-k_2))^{2/3}}, \tag{3.1}$$

其中

$$k_2(\theta) := k_0(\theta) - \frac{1}{3(B+\varepsilon_0)(1-\theta)^{3/2}}. \tag{3.2}$$

证明. 对于 $r\geq k_0(\theta)$，令 $P(r)$ 表示命题

$$P(r): \qquad \sigma_r \leq 1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(s-k_2(\theta)))^{2/3}} \quad \text{for all} \quad k_0(\theta)\leq s\leq r.$$

因此，只需证明 $P(k)$ 成立。我们先证明 $P(k_0)$ 成立。由 (2.2)，对任意 $\theta\in[1/2,1)$，有

$$\int_1^T |\zeta(\theta+it)|^{\frac{24\theta-9}{(4\theta-1)(1-\theta)}}\mathrm{d}t = \int_1^T |\zeta(\theta+it)|^{2k_0(\theta)}\mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}, \tag{3.3}$$

因此，根据定义 (2.4)，$\sigma_{k_0(\theta)} \leq \theta$。然而，$k_0(\theta)$ 和 $k_2(\theta)$ 的选取满足

$$\theta = 1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(k_0(\theta)-k_2(\theta)))^{2/3}},$$

即，根据定义，$P(k_0)$ 成立。

现在假设对某个 $k_0\leq r<k$，$P(r)$ 成立。特别地，我们有

$$\sigma_r \leq 1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(r-k_2))^{2/3}} = \eta_r,$$

不妨如此。我们将证明这意味着 $P(r+\Delta)$ 成立，其中 Δ 是一个固定的正量。根据 σ_r 的定义，我们有

$$\int_1^T |\zeta(\eta_r+it)|^{2r}\mathrm{d}t \ll T.$$

这意味着，对任意固定的 $\delta>0$ 和固定的 $\varepsilon_1>0$（特别是，它们与 r 无关），

$$\begin{aligned}\int_1^T |\zeta(\eta_r+it)|^{2(r+\delta)}\mathrm{d}t &\ll T^{2\delta B(1-\eta_r)^{3/2}+\delta\varepsilon_1}\int_1^T |\zeta(\eta_r+it)|^{2r}\mathrm{d}t \\ &\ll T^{1+2\delta B(1-\eta_r)^{3/2}+\delta\varepsilon_1}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

因此，根据 $\mu_{r+\delta}(\eta_r)$的定义，我们有

$$\mu_{r+\delta}(\eta_r) \leq 2\delta B(1-\eta_r)^{3/2}+\delta\varepsilon_1 = \frac{2\delta B}{3(B+\varepsilon_0)(r-k_2)}+\delta\varepsilon_1.$$

然而，根据引理 2.1，

$$\sigma_{r+\delta} \leq 1-\frac{1-\eta_r}{1+\mu_{r+\delta}(\eta_r)} \leq 1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(r-k_2))^{2/3}(1+\frac{2\delta B}{3(B+\varepsilon_0)(r-k_2)}+\delta\varepsilon_1)}.$$

右端由.....控制

$$1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(r-k_2+\delta))^{2/3}}$$

当且仅当

$$(1+x)^{2/3}\geq 1+cx, \tag{3.5}$$

其中

$$c=\frac{2B}{3(B+\varepsilon_0)}+\varepsilon_1(r-k_2),\qquad x=\frac{\delta}{r-k_2}.$$

我们取

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_0}{3(B+\varepsilon_0)(k-k_2)},$$

这是一个固定的正量。由此得到（对于 $r\leq k$）

$$c\leq\frac{2}{3}-\frac{\varepsilon_0}{3(B+\varepsilon_0)}$$

由于对任意 $\varepsilon_0>0$， $c<2/3$均成立，因此当 $x>0$ 足够小时，(3.5) 成立。特别地，我们可以选取一个固定的 $\Delta=\Delta(k_0,k_2)$，使得对于所有 $0<\delta\leq\Delta$ 和 $r\geq k_0>k_2$，(3.5) 均成立。结论得证。□

注。上述引理中的条件 $c<2/3$ 使我们无法将 (3.1) 中的常数 3 替换为更小的固定常数。因此，引理 3.1 是该方法的一个极限情形。

引理 3.2。设 $\zeta(\sigma+it)$ 对于 $1/2\leq\sigma\leq 1$ 和某个 $B>0$ 一致地 $\ll_\varepsilon t^{B(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}$。那么，对于任意 $\varepsilon_0>0$ 和 $\theta\in[1/2,1)$，我们有

$$m(\sigma)\geq\frac{2}{3(B+\varepsilon_0)(1-\sigma)^{3/2}}+2k_2(\theta)$$

对所有

$$1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(k_0(\theta)-k_2(\theta)))^{2/3}}\leq\sigma<1,$$

其中， $k_0(\theta)$ 定义于 (1.5)，而 $k_2(\theta)$ 定义于 (3.2)。

证明。由引理 3.1，我们有

$$\int_1^T|\zeta(g(m)+it)|^{2m}\mathrm{d}t\ll T,\qquad g(m):=1-\frac{1}{(3(B+\varepsilon_0)(m-k_2))^{2/3}}$$

由于 g 是双射，令 $\sigma=g(m/2)$，我们有

$$\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2g^{-1}(\sigma)}\mathrm{d}t\ll T,$$

即 $m(\sigma)\geq 2g^{-1}(\sigma)$，如所要求。 □

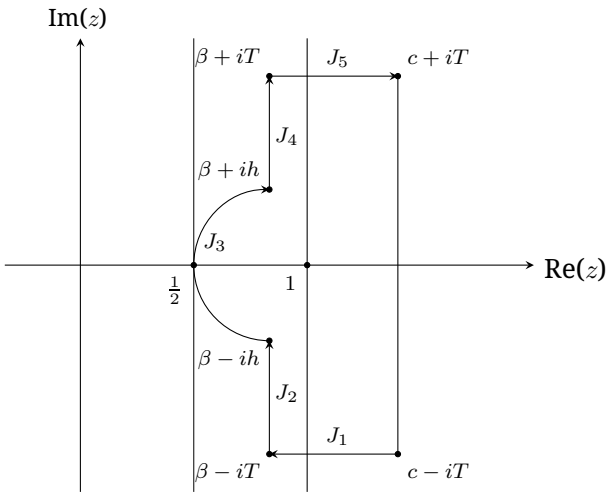

FIGURE 1. 定理 1.2 中采用的积分路径。

3.1. 关于 α_k 的界。现在我们开始证明定理 1.2 的第一部分。以下始终假设 x 是半个奇整数。应用佩龙公式（例如参见 Titchmarsh [Tit86, 引理 3.12]），对于任意 $c>0$、$\sigma+c>1$ 和 x半个奇整数，我们得到：

$$\sum_{n\le x} d_k(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O_\varepsilon\left(\frac{x^c}{T(\sigma+c-1)} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right),$$

其中我们使用了 $d_k(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$。我们取 $c = 1+1/\log x$ 和 $\sigma>0$，使得误差项为

$$\ll_\varepsilon \frac{x^{1+\varepsilon}}{T},$$

其中 $\varepsilon>0$ 可以任意小。对该积分应用留数定理，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s &= xP_{k-1}(\log x)\\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{\beta-iT} + \int_{\beta-iT}^{\beta-ih} + \int_{E_3} + \int_{\beta+ih}^{\beta+iT} + \int_{\beta+iT}^{c+iT}\right)\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\ &= J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+xP_{k-1}(\log x),\end{aligned}$$

其中，$xP_{k-1}(\log x)$是被积函数 $\zeta^k(s)x^s/s$ 在点 $s=1$ 处的留数，E_3 是一个半径为 $1/2$、以点 $z_0=1$ 为圆心的弧段，从点 $\beta-ih$ 到点 $\beta+ih$，其中 $0<h<1/2$，方向为顺时针。图1显示了所用的围道。由此可得

$$\Delta_k(x) = J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+O_\varepsilon\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right). \tag{3.6}$$

我们分别估计积分 J_i的模。利用关系式(1.4)[4]估计 $|\zeta(\sigma+iT)|$（其中 $\sigma\in[\beta,1]$），并利用估计 $|\zeta(\sigma+iT)|\ll\log^{2/3}T$（其中$\sigma\in(1,c]$，可得

$$\begin{aligned}|J_1|=|J_5|&\ll\int_\beta^1\frac{|\zeta(\sigma+iT)|^kx^\sigma}{T}\mathrm{d}\sigma+\int_1^c\frac{|\zeta(\sigma+iT)|^kx^\sigma}{T}\mathrm{d}\sigma\\&\ll_\varepsilon\int_\beta^1x^\sigma T^{-1+kB(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}\mathrm{d}\sigma+\int_1^cx^cT^{-1}\log^{2k/3}T\mathrm{d}\sigma\\&=T^{-1+\varepsilon}\int_\beta^1\exp(f(\sigma))\mathrm{d}\sigma+xT^{-1}\frac{\log^{2k/3}T}{\log x},\end{aligned}$$

其中

$$f(\sigma)=\sigma\log x+kB(1-\sigma)^{3/2}\log T,$$

并且，为了估计第二个积分，我们用到了以下事实： $x^c=x^{1+1/\text{对数}^x}=ex$。由于

$$f''(\sigma)=\frac{3kB\log T}{4\sqrt{1-\sigma}}>0,$$

函数 $f(\sigma)$ 是凸函数，因此对所有 $\beta\le\sigma\le1$， $f(\sigma)\le\max\{f(\beta),f(1)\}$。由此可得

$$\begin{aligned}J_1+J_5&\ll_\varepsilon T^{-1+\varepsilon}\int_\beta^1\max\left\{x,x^\beta T^{kB(1-\beta)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\sigma+\frac{x}{T}\frac{\log^{2k/3}T}{\log x}\\&\ll_\varepsilon T^\varepsilon\left(x^\beta T^{kB(1-\beta)^{3/2}-1}+\frac{x}{T}\right).\end{aligned}\tag{3.7}$$

现在，我们估计积分 J_3。利用 $\zeta(s)$ 关于 $\sigma>-1$ 的解析延拓（见 [Tit86, (2.1.4)]）以及 $|s-1|=1/2$ 和 $|s|\ge1/2$ 在 E_3 上这一事实，可得

$$J_3\ll x^\beta\int_{E_3}\frac{\mathrm{d}s}{|s-1|^k|s|}\ll x^\beta,\tag{3.8}$$

因为该积分收敛。

最后，我们用同样的方法估计积分 J_2 和 J_4。令

$$m_0(\beta):=\frac{2}{3(B+\varepsilon_0)(1-\beta)^{3/2}}+2k_2(\theta),\tag{3.9}$$

因此，由引理 3.2,

$$\int_Z^{2Z}|\zeta(\beta+it)|^{m_0(\beta)}\mathrm{d}t\ll_\varepsilon Z^{1+\varepsilon}.$$

[4]在处理 [Kol11], 时，这一步用到了估计 $|\zeta(\sigma+it)|\ll t^{B(1-\sigma)^{3/2}}$。另见脚注 2。

那么，对于所有满足 $m_0(\beta) \le k$ 的 β，我们有，对于 $1 \ll Z \ll T$, [5]

$$\begin{aligned}\int_{\beta+iZ}^{\beta+2iZ} \zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s &\ll \frac{x^\beta}{Z}\int_Z^{2Z} |\zeta(\beta+it)|^k \mathrm{d}t \\ &\ll_\varepsilon x^\beta Z^{B(k-m_0(\beta))(1-\beta)^{3/2}-1+\varepsilon}\int_Z^{2Z} |\zeta(\beta+it)|^{m_0(\beta)}\mathrm{d}t \\ &\ll_\varepsilon x^\beta Z^{B(k-m_0(\beta))(1-\beta)^{3/2}+\varepsilon}.\end{aligned}$$

采用二进分割并对 $O(\log T)$ 个区间求和，得到

$$J_4 = \int_{\beta+iT/2}^{\beta+iT} + \int_{\beta+iT/4}^{\beta+iT/2} + \cdots + \int_{\beta+ih}^{\beta+2ih} \ll_\varepsilon x^\beta T^{B(k-m_0(\beta))(1-\beta)^{3/2}+\varepsilon}, \tag{3.10}$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 均成立， J_2 的情形也类似。此时，综合所有估计可得

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon T^\varepsilon \left(x^\beta T^{B(k-m_0(\beta))(1-\beta)^{3/2}} + \frac{x}{T}\right). \tag{3.11}$$

为优化上述估计，我们选择 β，使主项达到平衡

$$x^\beta T^{B(k-m_0(\beta))(1-\beta)^{3/2}}, \qquad \frac{x}{T}.$$

当 $x^{f(\beta)} = T$ 时，这两项相等，其中

$$f(\beta) = \frac{1-\beta}{1+B(k-m_0(\beta))(1-\beta)^{3/2}} = \frac{1-\beta}{1+B(k-2k_2)(1-\beta)^{3/2}-\frac{2B}{3(B+\varepsilon_0)}}. \tag{3.12}$$

我们选择

$$\beta = 1 - \left(\frac{2-\frac{4B}{3(B+\varepsilon_0)}}{B(k-2k_2(\theta))}\right)^{2/3}$$

以使 (3.12) 的右端最大化。验证 $x^\beta \ll x^{1-f(\beta)}$，即可得到

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{1-f(\beta)+\varepsilon} \ll_\varepsilon x^{1-c_0'(kB)^{-2/3}+\varepsilon}$$

其中

$$c_0' = \left(\frac{2-\frac{4B}{3(B+\varepsilon_0)}}{1-2k_2/k}\right)^{2/3},$$

其中 $\varepsilon_0 > 0$ 是任意小的常数。然而，由于 k 固定，对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $c_0' = c_0 + \varepsilon$。定理 1.2 的第一部分得证。

为完成定理 1.1 第一部分的证明，我们选择 $\theta = 0.839427\ldots$，使得当 $B = 8\sqrt{15}/63$ 时 $k_1(\theta)$ 的值最大；由此得到 $k_1(\theta) = 4.187\ldots$ 和 $k_0(\theta) = 14.72\ldots$。

[5] 在 [Kol11] 中，使用估计 $\int_{T_n}^{T_{n+1}} |\zeta(\beta+it)|^{k-2m(\beta)}|\zeta(\beta+it)|^{2m(\beta)}\mathrm{d}t$，而不使用指数 $k-m(\beta)$ 和 $m(\sigma)$，因为 [Kol11] 中 $m(\sigma)$ 的定义与我们的不同。另见脚注 3。

3.2. 关于 β_k 的界。现在我们来讨论常数 c_1。根据引理 2.2，只需证明该积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}\mathrm{d}t$$

对所有.....收敛

$$\left(\frac{5}{6B(k-k_1(\theta))}\right)^{2/3} < \sigma < 1. \tag{3.13}$$

由对称性，只需证明积分

$$\int_{1}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}\mathrm{d}t \tag{3.14}$$

收敛，因为该积分在 $[-1,1]$ 和 $\sigma<1$ 上收敛。

对于任意 $1 \ll Z \ll T$，有

$$\begin{aligned}\int_Z^{2Z} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}\mathrm{d}t &\le \frac{1}{Z^2}\int_Z^{2Z} |\zeta(\sigma+it)|^{2k-m_0(\sigma)}|\zeta(\sigma+it)|^{m_0(\sigma)}\mathrm{d}t \\ &\ll_\varepsilon Z^{-2+B(2k-m_0(\sigma))(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}\int_Z^{2Z}|\zeta(\sigma+it)|^{m_0(\sigma)}\mathrm{d}t \\ &\ll_\varepsilon Z^{-1+B(2k-m_0(\sigma))(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $m_0(\sigma)$ 在 (3.9) 中定义，且由于根据引理 3.2，$m_0(\sigma) \le m(\sigma)$，

$$\int_Z^{2Z}|\zeta(\sigma+it)|^{m_0(\sigma)}\mathrm{d}t \ll_\varepsilon Z^{1+\varepsilon},$$

对任意小的 $\varepsilon>0$ 均成立。因此，利用二进分割，我们有

$$\int_1^T \frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}\mathrm{d}t = \int_{T/2}^{T} + \int_{T/4}^{T/2} + \cdots \ll_\varepsilon T^{-1+B(2k-m_0(\sigma))(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}. \tag{3.16}$$

右端中参数 T 的指数为

$$\begin{aligned}&-1+B(1-\sigma)^{3/2}(2k-m_0(\sigma)) \\ &\quad = -1+2B(k-k_1(\theta))(1-\sigma)^{3/2} - \frac{2B}{3(B+\varepsilon_0)}.\end{aligned}$$

若其为负数则

$$1-\left(\frac{5B+3\varepsilon_0}{6B(B+\varepsilon_0)(k-k_1(\theta))}\right)^{2/3} < \sigma < 1$$

由于 ε_0 可任意小，这与 (3.13) 等价。因此，当 ε 足够小时，(3.16) 右端的指数非正。取 $T\to\infty$，由引理 2.2 即可推出定理 1.2 的第二部分。

为完成定理 1.1 的证明，我们像之前一样选取 $\theta = 0.839427\ldots$ 和 $B = 8\sqrt{15}/63$ 。

[6]由于 m（σ）的定义不同，该表达式与 Kolpakova 的处理有所不同。另见脚注 5。

4. Proof of Theorem 1.3

我们先改进 Heath-Brown [HB17], 给出的指数和估计；这些估计又基于 [Woo16; BDG16] 中证明的 Vinogradov 均值积分界。

引理 4.1. 设 $\rho = \log N/\log t$ and $N \le N' \le 2N$。则对于 $\rho \ge 3$,

$$\sum_{N<n\le N'} n^{-it} \ll_\varepsilon N^{1-(1-3\rho^{-1})\rho^{-2}+\varepsilon},$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。

注意，[HB17，定理 4] 中用 $49/80$ 代替了 $1-3/\rho$。对于 $\rho \ge 8$，引理 4.1 的结论更强。事实上，该结果对所有 $\rho > 0$都成立，因为当 $\rho < 3$ 时，它可由平凡上界推出。

证明。对于 $k \ge 2$，令 $\rho_k := (k^2+1)/(k+1)$。结合 [HB17，定理 1], 与 [HB17，（17）], , 应用后可得，对于 $\rho_{k-1} \le \rho \le \rho_k$,

$$\sum_{N<n\le N'} n^{-it} \ll_\varepsilon N^{1+\phi(\rho)+\varepsilon}, \qquad \phi(\rho) = A_k\rho + B_k$$

其中

$$A_k := \frac{2}{(k-1)^2(k+2)}, \qquad B_k := -\frac{3k^2-3k+2}{k(k-1)^2(k+2)}.$$

注意，对于 $k \ge 2$,

$$\phi(\rho_k) = -c_k\rho_k^{-2}, \qquad c_k := \frac{(k^2+1)^2}{k(k+1)^3}.$$

由于当 $k \ge 2$ 时， c_k 关于 k 单调递减，因此我们还有 $\phi(\rho_{k+1}) = -c_{k+1}\rho_{k+1}^{-2} \le -c_k\rho_{k+1}^{-2}$。对于每个固定的 k， $-c_k\rho^{-2}$ 是凹函数，而 $\phi(\rho)$ 是仿射函数，因此对于 $k \ge 2$，有

$$\phi(\rho) \le -c_k\rho^{-2}, \qquad \rho_k \le \rho \le \rho_{k+1}.$$

然而，对于 $\rho_k \le \rho \le \rho_{k+1}$ 和 $k \ge 2$,

$$c_k > 1 - 3\frac{k+2}{(k+1)^2+1} = 1 - \frac{3}{\rho_{k+1}} \ge 1 - \frac{3}{\rho},$$

其中，第一个不等式可通过常规计算验证。因此

$$\sum_{N<n\le N'} n^{-it} \ll_\varepsilon N^{1+\phi(\rho)+\varepsilon} \ll N^{1-(1-3\rho^{-1})\rho^{-2}+\varepsilon}, \qquad \rho \ge \rho_2 = \frac{5}{3},$$

如所需。 □

引理 4.1 得出 Carlson 收敛横坐标的以下改进估计， σ_k。

引理 4.2. 设 $\delta > 0$ 为固定且充分小的量。则存在一个绝对常数 A，使得对所有整数 $k \ge A\delta^{-3}$，我们都有

$$\sigma_k \le 1 - \left(\frac{3}{2^{2/3}} - \delta\right) k^{-2/3}.$$

证明. 只需证明，对于任意 $\delta > 0$，若 $k \geq A\delta^{-3}$，则

$$\int_T^{2T} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} \mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon} \quad \text{for} \quad \sigma \geq 1 - \left(\frac{3}{2^{2/3}} - \delta\right) k^{-2/3},$$

因为将对 $[T/2, T]$、$[T/4, T/2]$ 等取的积分相加，即可得到所需结果。注意，此处使用的参数 δ 与定理 1.2 的证明中不同。利用闵可夫斯基不等式，对于 $T \leq t \leq 2T$，我们有

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T^{1/2}} n^{-\sigma - it} \right|^{2k} \mathrm{d}t \leq \int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T^{1/k}} n^{-\sigma - it} \right|^{2k} \mathrm{d}t + \int_T^{2T} \left| \sum_{T^{1/k} < n \leq T^{1/2}} n^{-\sigma - it} \right|^{2k} \mathrm{d}t.$$

对于 $\sigma > 0$,

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T^{1/k}} n^{-\sigma - it} \right|^{2k} \mathrm{d}t \ll \int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T^{1/k}} n^{-it} \right|^{2k} \mathrm{d}t \leq \int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T} d_k(n) n^{-it} \right|^{2} \mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}, \tag{4.1}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了 $d_k(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ 以及狄利克雷多项式均值定理。[7] 为了估计第二个积分，考虑

$$I(T, N) := \int_T^{2T} \left| \sum_{N \leq n \leq 2N} n^{-\sigma - it} \right|^{2k} \mathrm{d}t, \qquad T^{1/k} < N \leq T^{1/2}.$$

Let

$$\rho := \frac{\log T}{\log N}, \qquad \ell := \lfloor \rho \rfloor$$

因此 $\rho \in [2, k]$，并且

$$\rho - 1 < \ell \leq \rho \leq k. \tag{4.2}$$

我们有

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{N < n \leq 2N} n^{-it} \right|^{2\ell} \mathrm{d}t = \int_T^{2T} \left| \sum_{N^\ell < n \leq (2N)^\ell} a_n n^{-it} \right|^{2} \mathrm{d}t$$

其中

$$a_n := \sum_{\substack{N < n_1, \dots n_\ell \leq 2N \\ n_1 \cdots n_\ell = n}} 1 \leq d_k(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon \tag{4.3}$$

对任意 $\varepsilon > 0$。此外,

$$\sum_{N^\ell < n \leq (2N)^\ell} \mathbf{1}\{a_n > 0\} \leq N^\ell \tag{4.4}$$

通过计算乘积展开中项数的最大值。结合 (4.3) 和 (4.4)，并对狄利克雷多项式应用均值定理,

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{N^\ell < n \leq (2N)^\ell} a_n n^{-it} \right|^{2} \mathrm{d}t \ll T \sum_{N^\ell < n \leq (2N)^\ell} |a_n|^2 \ll_\varepsilon T N^{\ell + \varepsilon} \tag{4.5}$$

[7]由于 $d_k(n) = \mathbf{1}^{*k}$, $d(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ 是一个经典结果，并且两个至多具有次多项式增长的算术函数的卷积仍至多具有次多项式增长

对任意 $\varepsilon > 0$。此外，根据引理 4.1，当 $\rho \geq 3$ 时；而当 $2 \leq \rho < 3$ 时，应用平凡上界，

$$\left| \sum_{N<n\leq 2N} n^{-it} \right|^{2(k-\ell)} \ll_\varepsilon N^{2(k-\ell)(1-(1-3\rho^{-1})/\rho^2)+\varepsilon} \tag{4.6}$$

对 $T \leq t \leq 2T$ 一致成立。注意，在这一步中我们使用了 $\ell \leq k$；该界源于使用狄利克雷多项式均值定理来覆盖范围 $\rho \in [k, \infty)$。因此，结合 (4.5) 和 (4.6)，并利用 $N = T^{1/\rho}$ 以及分部求和，

$$\begin{aligned} I(T,N) &\leq N^{-2k\sigma} \max_{T\leq t\leq 2T} \left| \sum_{N<n\leq 2N} n^{-it} \right|^{2(k-\ell)} \int_T^{2T} \left| \sum_{N<n\leq 2N} n^{-it} \right|^{2\ell} \mathrm{d}t \\ &\ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon} N^{2(k-\ell)(1-(1-3\rho^{-1})\rho^{-2})+\ell-2k\sigma+\varepsilon} \\ &= T^{1+2(k-\ell)(1-(1-3\rho^{-1})\rho^{-2})/\rho+\ell/\rho-2k\sigma/\rho+\varepsilon}. \end{aligned}$$

然而，由于根据 (4.2) 有 $\rho - 1 < \ell \leq \rho$， T 的指数可由以下量控制：

$$h(\rho) = \frac{2(k-\rho+1)(1-\rho^{-2}+3\rho^{-3}) - 2k\sigma}{\rho} + 2.$$

取

$$\sigma = 1 - \alpha k^{-2/3}$$

其中 $\alpha > 0$ 为某个常数，并代入后，通过直接计算可得

$$h(\rho) = 2\alpha \frac{k^{1/3}}{\rho} - 2\frac{k+4}{\rho^3} + 6\frac{k+1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}.$$

函数 $h(\rho)$ 在 $[2,k]$ 上于满足下式的取值 ρ 处取得最大值

$$(\alpha k^{1/3}+1)\rho^3 + 2\rho^2 - 3(k+4)\rho + 12(k+1) = 0.$$

唯一的正解为 ρ^*，满足

$$\rho^* = \sqrt{\frac{3}{\alpha}} k^{1/3} + O(1), \qquad k \to \infty.$$

经过一些化简后，得到

$$h(\rho) \leq h(\rho^*) = \frac{4}{\sqrt{27}} \alpha^{3/2} + O(k^{-1/3}),$$

其中隐含常数仅依赖于 α。因此，对于任意充分小的固定 $\delta > 0$，通过选取

$$\alpha = \frac{3}{2^{4/3}} - \delta$$

我们有（因为当 $\delta > 0$ 充分小时，$(x-\delta)^{3/2} < x^{3/2} - \delta$）

$$h(\rho) \leq \frac{4}{\sqrt{27}} \left(\frac{3}{2^{4/3}} - \delta \right)^{3/2} + O(k^{-1/3}) < 1 - \frac{4}{\sqrt{27}}\delta + O(k^{-1/3})$$

当 $k \geq A\delta^{-3}$ 取充分大的常数 A时，该值不大于 1。因此，对于 $\sigma \geq 1 - \alpha k^{-2/3}$ 和 $k \geq A\delta^{-3}$，我们有

$$I(T,N) \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}.$$

取 $N = T^{1/2}/2$、$T^{1/2}/4$、$T^{1/2}/8$、……，并反复应用闵可夫斯基不等式，

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{T^{1/k} \le n \le T^{1/2}} n^{-\sigma - it} \right|^{2k} \mathrm{d}t \ll I\left(T, \frac{T^{1/2}}{2}\right) + I\left(T, \frac{T^{1/2}}{4}\right) + I\left(T, \frac{T^{1/2}}{8}\right) + \cdots \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}. \tag{4.7}$$

因此，结合 (4.1) 和 (4.7)，

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{1 \le n \le T^{1/2}} n^{-\sigma - it} \right|^{2k} \mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}, \qquad \sigma \ge 1 - \left(\frac{3}{2^{4/3}} - \delta\right) k^{-2/3}. \tag{4.8}$$

通过分部求和，对于相同的 σ 范围，我们也有

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{1 \le n \le T^{1/2}} n^{\sigma - 1 + it} \right|^{2k} \mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1/2-\sigma} T^{1+\varepsilon}. \tag{4.9}$$

利用 $\zeta(s)$ 的近似函数方程，对于 $s = \sigma + it$ 和 $t \in [T, 2T]$，我们有

$$\zeta(s) = \sum_{1 \le n \le T^{1/2}} n^{-s} + \chi(1-s) \sum_{1 \le n \le T^{1/2}} n^{1-s} + o(1). \tag{4.10}$$

当 $t \to \infty$ 时，其中

$$\chi(s) = \pi^{1/2-s} \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((1-s)/2)}$$

因此 $\chi(1-s) \ll T^{\sigma - 1/2}$。因此，结合 (4.8)、(4.9) 和 (4.10)，并利用闵可夫斯基不等式，最终得到

$$\int_T^{2T} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} \mathrm{d}t \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}, \qquad \sigma \ge 1 - \left(\frac{3}{2^{4/3}} - \delta\right) k^{-2/3},$$

由此即可得到所需结果。 □

接下来，我们需要对接近 $\sigma = 1$ 的 $\zeta(s)$ 给出更精确的估计。由于证明与引理 4.2 有些相似之处，我们将尽可能简洁地阐述。

引理 4.3. 若 $\delta > 0$ 固定，则对所有 $k \ge A\delta^{-3}$，其中 A 为绝对常数，有

$$\zeta(1 - \alpha k^{-2/3} + it) \ll_\varepsilon t^{(2\alpha^{3/2}/3^{3/2} + \delta)/k + \varepsilon}$$

对任意 $\varepsilon > 0$。

证明. 全文中令 $\sigma = 1 - \alpha k^{-2/3}$, $\rho = \log t / \log N$ and $N < N' \le 2N$。对 $\rho \ge 3$，我们使用引理 4.1；对 $2 \le \rho < 3$，我们使用平凡上界，从而得到

$$\sum_{N < n \le N'} n^{-\sigma - it} \ll_\varepsilon N^{1 - \sigma - (1 - 3\rho^{-1})\rho^{-2} + \varepsilon} = t^{h(\rho) + \varepsilon}$$

其中

$$h(\rho) := \frac{\alpha k^{-2/3}}{\rho} - \frac{(1 - 3\rho^{-1})}{\rho^3}.$$

函数 $h(\rho)$ 在满足以下条件的 ρ 处取得最大值

$$\alpha k^{-2/3}\rho^3 - 3\rho + 12 = 0,$$

其唯一正解满足

$$\rho^* = \sqrt{\frac{3}{\alpha}}k^{1/3} + O(1), \qquad k \to \infty,$$

其中隐含常数为绝对常数。将其代入 $h(\rho)$，可得

$$h(\rho) \le h(\rho^*) \le \frac{2\alpha^{3/2}}{3^{3/2}}k^{-1} + A'k^{-4/3}$$

对某个绝对常数 $A' > 0$，因此，对于 $k \ge A'^3\delta^{-3}$，有

$$\sum_{N<n\le N'} n^{-\sigma-it} \ll_\varepsilon t^{(2\alpha^{3/2}/3^{3/2}+\delta)/k+\varepsilon}.$$

通过二进分割，

$$\sum_{1\le n\le t^{1/2}} n^{-\sigma-it} = \sum_{\frac{t^{1/2}}{2}<n\le t^{1/2}} + \sum_{\frac{t^{1/2}}{4}<n\le\frac{t^{1/2}}{2}} + \cdots \ll_\varepsilon t^{(2\alpha^{3/2}/3^{3/2}+\delta)/k+\varepsilon}.$$

所需结果可由分部求和以及 $\zeta(s)$ 的近似函数方程推出。□

4.1. α_k 的界。定理 1.3 的证明与定理 1.2 第一部分的证明类似，不同之处在于我们用引理 4.2 代替引理 3.1，并用引理 4.3 代替 (1.4)。以下固定 $\delta > 0$，令 A 为绝对常数（每次出现时不一定相同），并假设 $k \ge A\delta^{-3}$。由引理 4.2，得到

$$m(\sigma) \ge m_1(\sigma) := 2\left(\frac{3}{2^{4/3}} - \delta\right)^{3/2}(1-\sigma)^{-3/2} \tag{4.11}$$

对所有满足以下条件的 σ

$$m_1(\sigma) \ge A\delta^{-3}, \qquad \text{i.e.} \qquad \sigma \ge 1 - A\delta^2. \tag{4.12}$$

我们基本沿用定理 1.3 证明中的相同论证。以下取

$$\beta = 1 - \alpha k^{-2/3}$$

其中 $\alpha > 0$ 为稍后选取的某个常数；由于 $k \ge A\delta^{-3}$，条件 (4.12) 得以满足。

沿用推导 (3.10) 的论证，并作必要修改以利用引理 4.3，同时用 $m_1(\beta)$ 替换 $m_0(\beta)$，得到

$$|J_2| = |J_4| \ll_\varepsilon x^\beta T^{2/3^{3/2}(k-m_1(\beta))(1-\beta)^{3/2}+\delta+\varepsilon},$$

前提是选择 β，使得 $k - m_1(\beta) \ge 0$，即

$$\beta \le 1 - \left(\frac{3}{2^{2/3}} - 2^{2/3}\delta\right)k^{-2/3}. \tag{4.13}$$

此外，我们还有

$$|J_1| = |J_5| \ll_\varepsilon T^\varepsilon\left(x^\beta T^{2k/3^{3/2}(1-\beta)^{3/2}+\delta-1} + \frac{x}{T}\right),$$

并且 $J_3 \ll x^\beta$ 与之前一样。这给出

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^\beta T^{2/3^{3/2}(k-m_1(\beta))(1-\beta)^{3/2}+\delta+\varepsilon} + x^{1+\varepsilon}T^{-1+\varepsilon}. \tag{4.14}$$

我们再次选取 T，使 (4.14) 中的各项达到平衡（忽略 ε）。令 $x^{f(\beta)} = T$ 即可实现，其中

$$f(\beta) = \frac{1-\beta}{1+\frac{2}{3^{3/2}}(k-m_1(\beta))(1-\beta)^{3/2}+\delta} \tag{4.15}$$

取

$$\beta = 1 - \left(\frac{3}{2^{2/3}} - 2^{2/3}\delta\right)k^{-2/3},$$

使得 $m_1(\beta) = k$，我们有

$$f(\beta) = \left(\frac{3/2^{2/3} - 2^{2/3}\delta}{1+\delta}\right)k^{-2/3} > \left(\frac{3}{2^{2/3}} - 3\delta\right)k^{-2/3}.$$

因此，对于任意 ε、$\delta > 0$ 和 $k \geq A\delta^{-3}$，

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{1-f(\beta)+\varepsilon} = x^{1-(3/2^{2/3}-3\delta)k^{-2/3}+\varepsilon}.$$

将 δ 替换为 $\delta/3$ 即得所需结果。

Acknowledgements

我们谨向 K. Ford、D. R. Heath-Brown 和 B. Kerr 致谢，感谢他们对本文初稿提出的真知灼见。我们尤其感谢 B. Kerr 提供了证明定理 1.3 的方法。也感谢 O. Bordelles 指出了若干错误，并感谢 T. S. Trudgian 在本文写作期间给予的支持。

References

[BC23] S. Baluyot 和 C. Castillo。《Piltz 除数问题中误差项的符号变化》（2023年2月）。预印本见 arXiv:2302.08003。[BDG16] J. Bourgain、C. Demeter 和 L. Guth。《三次以上次数的 Vinogradov 均值定理主猜想的证明》。《数学年刊》184.2（2016年9月），第 633–682 页。[BW17] J. Bourgain 和 N. Watt。《重新探讨 ζ 函数均方、圆问题与除数问题》（2017年9月）。预印本见 arXiv:1709.04340。[Car22] F. Carlson。《狄利克雷级数理论的贡献》。Arkiv för matematik, astronomi och fysik 16.18（1922年）。[Car26] F. Carlson。《狄利克雷级数理论的贡献》。Arkiv för matematik, astronomi och fysik 19.25（1926年）。[For02] K. Ford。《维诺格拉多夫积分与黎曼ζ函数的界》。《伦敦数学会学报》85.3（2002年11月），第 565–633 页。[Fuj76] A. Fujii。《关于除数问题》。《算术学报》31.4（1976年），第 355–360 页。[Haf81] J. L. Hafner。《两个经典格点问题的新 Ω 定理》。《数学发明》63.2（1981年6月），第 181–186 页。[Har17] G. H. Hardy。《关于 Dirichlet 除数问题》。《伦敦数学会学报》s2-15.1（1917年），第 1–25 页。

[HB17] D. R. Heath-Brown。《通过 Vinogradov 均值对指数和进行新的 k 阶导数估计》。《斯捷克洛夫数学研究所学报》296.1（2017年1月），第 88–103 页。[HBT94] D. R. Heath-Brown 和 K. Tsang。《 $E(T)$、 $\Delta(x)$ 和$P(x)$ 的符号变化》。《数论杂志》49.1（1994年），第 73–83 页。[Ivi03] A. Ivic。《黎曼ζ函数：理论与应用。1985年原版的再版》。多佛出版社，纽约州米尼奥拉（2003年）。[IO89] A. Ivic 和 M. Ouellet。《狄利克雷除数问题中的一些新估计》。《算术学报》52.3（1989年），第 241–253 页。[Kar72] A. A. Karacuba。《狄利克雷除数问题余项项的一致逼近》。《苏联数学学报》6.3（1972年6月），第 467–475 页。[Kol81] G Kolesnik。《多重指数和的估计》。载于《解析数论最新进展》。达勒姆 1979：Academic，伦敦，1981年，第 231–246 页。[Kol11] O. Kolpakova。《多维狄利克雷除数问题中渐近公式余项的新估计》。《数学札记》89.4（2011年），第 530–546 页。[Pan88] E. Panteleeva。《数域中的狄利克雷除数问题》。《苏联科学院数学札记》44（1988年），第 750–757 页。[Ric67] H. E. Richert。《黎曼ζ函数在直线 $\sigma = 1$ 附近的估计》。《数学年刊》169.1（1967年3月），第 97–101 页。[Sou03] K. Soundararajan。《除数问题与圆问题的 Ω 结果》。《国际数学研究通知》2003.36（2003年1月），第 1987–1998 页。[Tit86] E. C. Titchmarsh。《黎曼ζ函数理论》。牛津：牛津科学出版物，1986年。[Ton55] K Tong。《关于除法问题（I）》。《数学学报》（1955年），第 313–324 页。[Woo16] T. D. Wooley。《Vinogradov 均值定理主猜想的三次情形》。《数学进展》294（2016年5月），第 532–561 页。

School of Science, The University of New South Wales, Canberra, Australia
Email address: c.bellotti@adfa.edu.au

School of Science, The University of New South Wales, Canberra, Australia
Email address: andrew.yang1@adfa.edu.au