arXiv:2303.05060v1 [stat.ME] 9 Mar 2023

1型路径生成指数分布的应力-强度可靠性估计及其在艾滋病潜伏期中的应用

GladwinJames V.[1],Thomas Xavier[2*] 和 Nicy Sebastian[1]

卡利卡特大学圣托马斯学院（自治），统计系，印度喀拉拉邦特里苏尔，邮编 680 001。gladwinvjames@gmail.com，nicycms@gmail.com[2]印度统计研究所理论统计与数学部，印度新德里，邮编 110 016。thomasmxavier@gmail.com

*通讯作者

摘要

本文提出了1型路径生成指数分布（PGE-1）。我们研究了应力分量与强度分量在统计上相互独立且服从参数不同的 PGE-1 分布时，应力-强度参数的估计。采用最大似然法获得应力-强度可靠性的点估计，并通过渐近置信区间和参数自助法获得区间估计。为验证所提出方法的性能，我们开展了大量蒙特卡洛模拟研究。最后，利用艾滋病输血数据展示了所提出结果的应用。

关键词： 应力-强度可靠性，最大似然估计，自助法置信区间，右截断数据，艾滋病输血数据

1 引言

设 X 和 Y 是两个统计独立的连续随机变量，因此人们对 $R = Pr\{X > Y\}$（也称为应力-强度参数）的统计推断进行了大量研究。在工程学中， R

用于衡量系统的可靠性，其中 X 表示随机强度， Y表示施加于系统的随机应力。在医学中， R 可解释为衡量一种治疗相对于对照的有效性，其中 X 和 Y 分别表示治疗组和对照组的响应变量。

Birnbaum（1956）提出了这一核心概念，随后Birnbaum和McCarty（1958）对其进行了发展。Kotz $et\ al.$（2003）全面梳理了截至当时应力-强度模型的发展历程，涵盖了指数、正态、伽马、威布尔、Burr、广义指数、广义威布尔、广义逻辑斯蒂等所有主要分布。Church和Harris（1970）、Kundu（2005）以及Kundu和Raqab（2009）对该领域进行了若干全面研究。Pakdaman $et\ al.$（2017）讨论了应力-强度模型的一些应用。关于该主题的最新成果，参见Xavier和Jose（2021）、Pak $et\ al.$（2021）以及Chacko和Mathew（2021）。

路径模型最初由Mathai（2005）针对矩形矩阵变量情形提出。路径模型使我们能够从一种函数模型切换到另一种函数模型。广义第一类贝塔模型、广义第二类贝塔模型和广义伽马模型都由该模型联系起来。当模型所用分布需要比参数族所提供的分布具有更厚或更薄的尾部时，这一特性十分有用。Mathai和Provost（2006）将路径模型扩展到了复数域。适用于实标量正变量的路径模型特例具有如下结构:

$$f_1(x) = a\delta(\eta+1-q)x^{\delta-1}\left[1-a(1-q)x^{\delta}\right]^{\frac{\eta}{1-q}}, \tag{1}$$

对于 $q<1,\ a>0,\ \delta>0,\ \eta>0,\ \eta+1-q>0,\ 1-a(1-q)x^{\delta}>0$ 以及 $f_1(x)=0$其他情况。

$$f_2(x) = a\delta(\eta+1-q)x^{\delta-1}\left[1+a(q-1)x^{\delta}\right]^{-\frac{\eta}{q-1}}, \tag{2}$$

对于 $q>1,\ a>0,\ \delta>0,\ \eta>0,\ \eta+1-q>0,\ x\geq 0$ 以及 $f_2(x)=0$ 其他情况。当$q\to 1_-$ 在 (1) 中或 $q\to 1_+$ 在 (2) 中时，则

$$f_3(x) = a\delta\eta x^{\delta-1}\mathrm{e}^{-a\eta x^{\delta}}, \tag{3}$$

对于 $a>0,\ \delta>0,\ \eta>0,\ x\geq 0$ 以及 $f_3(x)=0$ 其他情况。

Mathai和Princy（2016）提出了路径生成族，并研究了其各种性质。为完整起见，下面给出 Mathai和Princy（2016）的路径生成族定义:

定义 1.1 设 Y 为一个连续随机变量，其分布函数为

$G(y)$ 以及密度函数 $g(y)$则

$$g_1(y) = (\eta + 1 - q)a\delta g(y)G(y)^{\delta-1}\left[1 - a(1-q)G(y)^{\delta}\right]^{\frac{\eta}{1-q}}, \tag{4}$$

当 $q < 1, a, \delta, \eta > 0, \left(1 - a(1-q)G(y)^{\delta}\right) > 0$ 且 $g_1(y) = 0$ 时；其他情况下。

$$g_2(y) = (\eta + 1 - q)a\delta g(y)G(y)^{\delta-1}\left[1 + a(q-1)G(y)^{\delta}\right]^{-\frac{\eta}{q-1}}, \tag{5}$$

当 $q > 1, a, \delta, \eta > 0, \left(1 + a(q-1)G(y)^{\delta}\right) > 0$ 且且 $g_2(y) = 0$，其他情况下。

$$g_3(y) = \eta a\delta g(y)G(y)^{\delta-1}e^{-a\eta G(y)^{\delta}}, \tag{6}$$

当 $q \to 1, a > 0, \delta > 0, \eta > 0$ 且 $g_3(y) = 0$，其他情况下。

因此，本文考虑 I 型路径生成指数（PGE- 1）分布，即在（4）中，我们有 $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}; x \geq 0, \lambda > 0$。本文引入的 PGE-1 分布是一种右截断分布，并研究其在应力-强度可靠性中的应用。我们关注这一主题，是因为据我们所知，目前尚无关于在 X 且 Y 服从 PGE-1 分布时，对 R 进行推断的讨论。

许多研究领域都会自然地产生右截断数据，例如取自美国疾病控制中心（CDC）数据库的艾滋病输血数据集。Chi $et\ al.$ (2007)、Lagakos $et\ al.$ (1988)以及Kalbfleisch和Lawless（1989年）都研究过艾滋病输血数据。这些数据包含与输血相关艾滋病病例的输血信息，对应于1986年7月1日之前确诊的个体。例如，Zaninetti（2013）提出了一种右截断和左截断伽马分布，并将其应用于恒星研究。其他研究领域也存在右截断数据集。Behdani $et\ al.$(2020)研究了双重截断分布及其在收入不平等研究中的应用。Teamah $et\ al.$ (2020)研究了右截断 Fr`echet- Weibull 分布的性质。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍 I型路径生成指数分布，并讨论其性质。第 3 节中，我们求得 R 的最大似然估计（MLE）以及 R 的区间估计，并讨论渐近置信区间（ACI）和自助法置信区间（BCI）。下一节通过蒙特卡洛模拟开展模拟研究，以评估所得结果的性能。此外，还通过艾滋病输血数据集展示该模型的应用。最后，第 5 节给出总结性评论。

2 I型路径生成指数分布

I型路径生成指数分布（PGE-1）通过取 $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $x \geq 0$, $\lambda > 0$（4）中得到。

定义 2.1 具有参数$(a, \delta, \lambda, \eta, q)$ 的随机变量 X 服从 *PGE-1* 分布，其累积分布函数和概率密度函数分别为

$$F(x) = 1 - [1 - a(1-q)(1-e^{-\lambda x})^{\delta}]^{\frac{\eta}{1-q}+1}, 0 < x < -\frac{1}{\lambda}\ln[1-(a(1-q))^{\frac{-1}{\delta}}], \quad (7)$$

$$f(x) = (\eta + 1 - q)a\delta\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta-1}\left[1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta}\right]^{\frac{\eta}{1-q}} \quad (8)$$

当 $0 \leq x \leq -\frac{1}{\lambda}\ln\left[1-(a(1-q))^{\frac{-1}{\delta}}\right], q < 1, \delta, a, \lambda, \eta > 0, (a(1-q))^{\frac{-1}{\delta}} < 1$且$f(x) = 0$ 在其他情况下。

当 $\delta = 1$且 $a(1-q) = 1, f(x)$ 时，退化为参数为 $(a\eta + 1)\lambda$ 的指数分布。不同密度函数形状的图形见图 1，这表明 δ 是形状参数， η 和 a 是尺度参数。可以观察到，随着 η 和 a的变化，尾部会变得更厚或更薄。

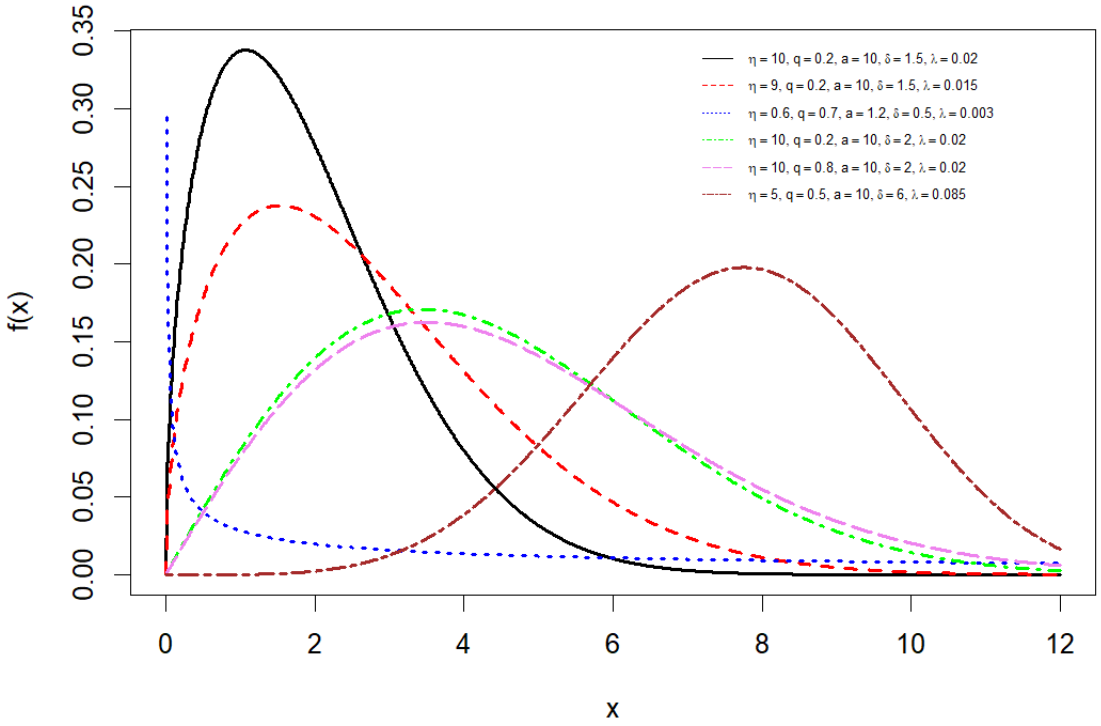
相应的生存函数 $S(x) = Pr\{X > x\}$ 和风险函数 $h(x) = {}^{f(x)}\,{}_{S(x)}$ 分别由式（9）和（10）给出。

$$S(x) = \left[1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta}\right]^{\frac{\eta}{1-q}+1} \quad (9)$$

$$h(x) = \frac{(\eta + 1 - q)a\delta\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta-1}}{1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta}} \quad (10)$$

注意，当 $\delta = 1$, $a = 2$且 $q = \frac{1}{2}$ 时，风险函数简化为 $h(x) = (2\eta+1)\lambda$，这是一个恒定的风险率函数。图 2 展示了风险函数的不同形状。可以观察到，风险函数可以呈现恒定、递增、递减、单调递增、浴盆形和倒浴盆形。

图 1：密度函数的不同形状



2.1 矩母函数

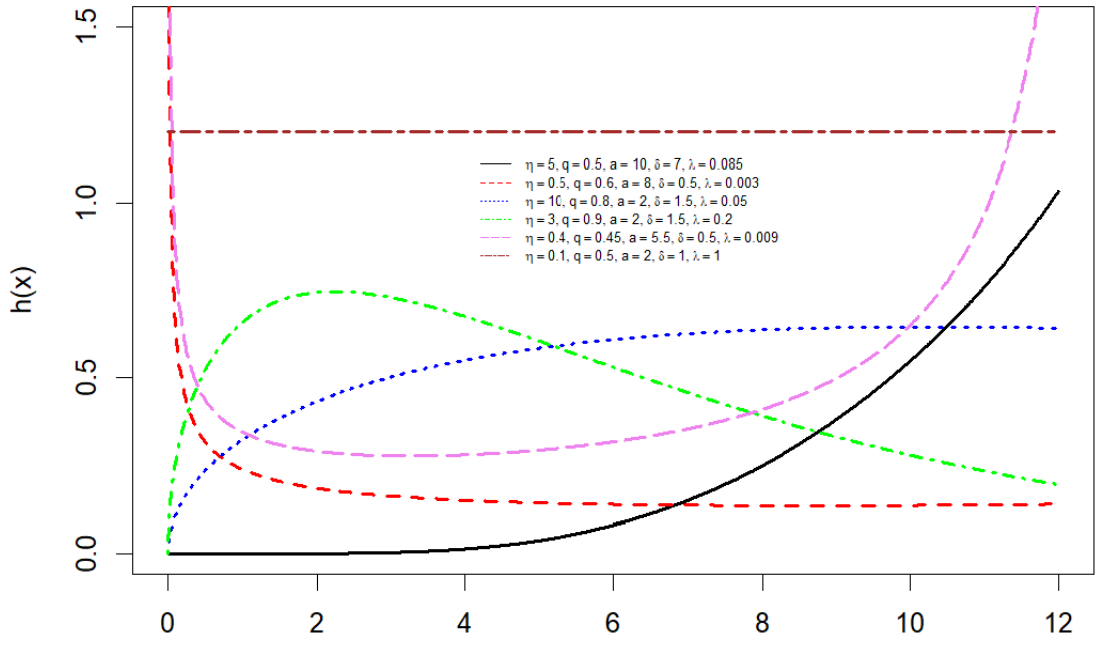
矩母函数（mgf）定义为当 $t > 0$， $M_X(t)$

$$
\begin{aligned}
&= E[e^{tx}] = \int_X e^{tx} f(x) \mathrm{d}x \\
&= (\eta + 1 - q) a\delta\lambda \int_X e^{(t-\lambda)x} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta - 1} \left[1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta}\right]^{\frac{\eta}{1-q}} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

考虑变换， $a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta} = u$， 则有

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= (\eta + 1 - q) \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{u}{a(1-q)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\frac{-t}{\lambda}} (1-u)^{\frac{\eta}{1-q}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{(\eta + 1 - q)}{(a(1-q))^{\frac{-1}{\delta}}} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{\lambda}\right)_k}{k!} (a(1-q))^{\frac{-k}{\delta}} \int_0^1 u^{\frac{k}{\delta}} (1-u)^{\frac{\eta}{1-q}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{(\eta + 1 - q)}{(a(1-q))^{\frac{-1}{\delta}}} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{\lambda}\right)_k}{k!} (a(1-q))^{\frac{-k}{\delta}} B\left(\frac{k}{\delta} + 1, \frac{\eta}{1-q} + 1\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

图 2：风险函数的不同形状



iuj

其中 $(b)_k$称为波赫哈默符号，定义为 $(b)_k = b(b+1)...(b+k-1)$，$(b)_0 = 1$，$b \neq 0$ 且 $B(x,\ y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ 称为贝塔函数。

2.2 随机序

对于两个随机变量 X 和 Y，若且唯若 $f_X(x)\ g_Y(x)$ 是 x 的递减函数，则可称 X 在似然比意义下小于 Y，记为 $X \leq_{lr} Y$，其中 $f_X(x)$ 和 $g_Y(x)$ 分别是 X 和 Y的密度函数。设 X 和Y是相互独立的随机变量，分别服从参数为 $(a, \delta, \lambda, \eta_1, q)$ 和 $(a, \delta, \lambda, \eta_2, q)$ 的 PGE-1分布，且对于 $\eta_1 \leq \eta_2$，则

$$\frac{f_X(x)}{g_Y(x)} = \left(\frac{\eta_1 + 1 - q}{\eta_2 + 1 - q}\right)\left[1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta}\right]^{\frac{\eta_1 - \eta_2}{1-q}}$$

现在对 x 求导，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_X(x)}{g_Y(x)} &= a\delta\lambda\left(\eta_1 - \eta_2\right)\left(\frac{\eta_1 + 1 - q}{\eta_2 + 1 - q}\right)e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta-1} \\ &\times \left[1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\delta}\right]^{\frac{\eta_1 - \eta_2}{1-q}}\end{aligned}$$

显然，当 $\eta_1 \leq \eta_2$， $\frac{f_X}{g_Y}(x)$ 时，该函数递减，因此， $X \leq_{lr} Y$。

2.3 应力-强度可靠性

设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，分别服从参数为 $(a, \delta, \lambda, \eta_1, q)$ 和 $(a, \delta, \lambda, \eta_2, q)$ 的 PGE-1分布。则

$$\begin{aligned} R &= Pr\{X > Y\} = \int_0^{-\frac{1}{\lambda}\ln[1-(a(1-q))^{\frac{-1}{\delta}}]} f_X(x) \int_0^x g_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{\eta_2 + 1 - q}{\eta_1 + \eta_2 + 2(1-q)} \end{aligned} \tag{12}$$

3 R的估计

本节中，我们给出 R的点估计和区间估计。使用最大似然法得到 R 的点估计。对于区间估计，我们考虑渐近置信区间和参数自助法置信区间。

3.1 R的最大似然估计

本节中，我们求得应力-强度可靠性的最大似然估计（MLE）。设 $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ 是来自 PGE-1（$a, \delta, \lambda, \eta_1, q$）分布的容量为 n_1 的随机样本，且 $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ 是来自 PGE-1（$a, \delta, \lambda, \eta_2, q$）分布的容量为 n_2 的独立随机样本。则基于这两个独立随机样本的似然函数为

$$L(x, y) = \prod_{i=1}^{n_1} f_X(x; a, \delta, \lambda, \eta_1, q) \prod_{j=1}^{n_2} g_Y(y; a, \delta, \lambda, \eta_2, q)$$

则观测样本的对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ell &= n_1 \ln(\eta_1 + 1 - q) + n_2 \ln(\eta_2 + 1 - q) + (n_1 + n_2)\ln(\alpha\delta\lambda) \\ &- \lambda\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j\right) + (\delta - 1)\left[\sum_{i=1}^{n_1} \ln\left(1 - e^{-\lambda x_i}\right) + \sum_{j=1}^{n_2} \ln\left(1 - e^{-\lambda y_j}\right)\right] \\ &+ \frac{\eta_1}{1-q}\left[\sum_{i=1}^{n_1} \ln\left(1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda x_i}\right)^{\delta}\right)\right] \\ &+ \frac{\eta_2}{1-q}\left[\sum_{j=1}^{n_1} \ln\left(1 - a(1-q)\left(1 - e^{-\lambda y_j}\right)^{\delta}\right)\right] \end{aligned} \tag{13}$$

ˆ ˆ a、δ、λ、η_1、η_2和 q的最大似然估计值，分别记为ˆa、δ、λ、ˆη_1、ˆη_2和ˆ q，可通过求解以下方程得到

$$\frac{\partial \ell}{\partial a}=0;\ \frac{\partial \ell}{\partial \delta}=0;\ \frac{\partial \ell}{\partial \eta_1}=0;\ \frac{\partial \ell}{\partial \eta_2}=0;\ \frac{\partial \ell}{\partial \lambda}=0;\ \frac{\partial \ell}{\partial q}=0$$

其中一阶偏导数为:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial a} &= \frac{n_1+n_2}{a}-\eta_1\sum_{1=1}^{n_1}\left[\frac{(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}\right] \\
&- \eta_2\sum_{j=1}^{n_2}\left[\frac{(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}}\right] \\
\frac{\partial \ell}{\partial \delta} &= \frac{n_1+n_2}{\delta}+\sum_{i=1}^{n_1}\ln(1-e^{-\lambda x_i})+\sum_{j=1}^{n_2}\ln(1-e^{-\lambda y_j}) \\
&- \eta_1\sum_{i=1}^{n_1}\left[\frac{a(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}\ln(1-e^{-\lambda x_i})}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}\right]-\eta_2\sum_{j=1}^{n_2}\left[\frac{a(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}\ln(1-e^{-\lambda y_j})}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \eta_1} &= \frac{n_1}{\eta_1+1-q}+\frac{1}{1-q}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\ln\left(1-a(1-q)\left(1-e^{-\lambda x_i}\right)^{\delta}\right)\right] \\
\frac{\partial \ell}{\partial \eta_2} &= \frac{n_2}{\eta_2+1-q}+\frac{1}{1-q}\left[\sum_{j=1}^{n_2}\ln\left(1-a(1-q)\left(1-e^{-\lambda y_j}\right)^{\delta}\right)\right] \\
\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} &= \frac{n_1+n_2}{\lambda}-\left(\sum_{i=1}^{n_1}x_i+\sum_{j=1}^{n_2}y_j\right)+(\delta-1)\left[\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1-e^{-\lambda x_i}}+\sum_{j=1}^{n_2}\frac{y_j e^{-\lambda y_j}}{1-e^{-\lambda y_j}}\right] \\
&- \sum_{i=1}^{n_1}\frac{\eta_1\delta a x_i e^{-\lambda x_i}(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta-1}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}-\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\eta_2\delta a y_j e^{-\lambda y_j}(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta-1}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}} \\
\frac{\partial \ell}{\partial q} &= \frac{n_1}{\eta_1+1-q}+\frac{n_2}{\eta_2+1-q}+\frac{\eta_1}{(1-q)^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\ln\left(1-a(1-q)\left(1-e^{-\lambda x_i}\right)^{\delta}\right)\right] \\
&+ \frac{\eta_2}{(1-q)^2}\left[\sum_{j=1}^{n_2}\ln\left(1-a(1-q)\left(1-e^{-\lambda y_j}\right)^{\delta}\right)\right] \\
&+ \frac{\eta_1}{1-q}\sum_{i=1}^{n_1}\left[\frac{a(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}\right]+\frac{\eta_2}{1-q}\sum_{j=1}^{n_2}\left[\frac{a(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}}\right]
\end{aligned}$$

参数的最大似然估计值可通过求解非线性似然方程获得，例如使用牛顿-拉夫森迭代法。由于

参数数量较多，建议在选择初始值时慎重考虑。将 η_1、 η_2 和 q 替换为其最大似然估计值后，可由（12）计算出 R 的相应最大似然估计。因此，应力-强度可靠性的估计值为

$$\hat{R} = \frac{\hat{\eta_2} + 1 - \hat{q}}{\hat{\eta_1} + \hat{\eta_2} + 2(1 - \hat{q})} \tag{14}$$

3.2 R的渐近置信区间

由于难以计算 R的精确分布，我们求得其渐近置信区间。考虑费希尔信息矩阵，

$$I = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial \delta} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial \eta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial q} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial a} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \eta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial q} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_1 \partial a} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_1 \partial q} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_2 \partial a} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_2 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_2^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_2 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta_2 \partial q} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial a} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \delta} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \eta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial q} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial q \partial a} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial q \partial \delta} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial q \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial q \partial \eta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial q \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial q^2} \end{bmatrix}$$

二阶偏导数见附录。由于期望的计算较为复杂，在温和条件下，可用观测信息矩阵作为信息矩阵 I的一致估计量。$(a,\ \delta,\ \lambda,\ \eta_1,\ \eta_2,\ q)$的方差-协方差矩阵的近似估计为 I^{-1}。

令 $G^T = \left(\frac{\partial R}{\partial a}, \frac{\partial R}{\partial \delta}, \frac{\partial R}{\partial \eta_1}, \frac{\partial R}{\partial \eta_2}, \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \frac{\partial R}{\partial q}\right)$，其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \eta_1} &= -\frac{\eta_2 + 1 - q}{(\eta_1 + \eta_2 + 2(1-q))^2} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta_2} &= \frac{\eta_1 + 1 - q}{(\eta_1 + \eta_2 + 2(1-q))^2} \\ \frac{\partial R}{\partial q} &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{(\eta_1 + \eta_2 + 2(1-q))^2} \end{aligned}$$

由于 R 不依赖于 a，δ 和 λ，因此有 $\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial \delta} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0$。

那么，$\hat{R} - R$ 的近似值为 $\frac{\hat{R} - R}{\sqrt{Var(\hat{R})}} \sim N(0,1)$ 渐近成立。该结果给出了 R 的渐近 $100(1-\gamma)\%$ 置信区间：$\hat{R} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\hat{Var}(\hat{R})}$，其中 $Z_{\frac{\gamma}{2}}$ 是标准正态分布的上侧 $\frac{\gamma}{2}$ 百分位数。

3.3 R的自助法置信区间

预计基于渐近结果的置信区间在样本量（s）较小时表现不佳。本小节建议使用两种基于参数自助法的置信区间：(i) 百分位自助法（Boot-p），该方法基于 Efron（1982）的理论；(ii) bootstrap-t 方法（Boot-t），该方法基于 Hall（1988）的理论。下面将展示如何使用这两种方法估计 R 的置信区间的算法。

(i) Boot-p 方法

步骤 1：基于分别来自 PGE-1（a、δ、η_1、λ、q）和 PGE-1（a、δ、η_2、λ、q）的独立样本 $x=\{x_1,\ldots,x_{n_1}\}$ 和 $y=\{y_1,\ldots,y_{n_2}\}$，计算（a、δ、η_1、η_2、λ、q）的最大似然估计（$\hat{a}$、δ、λ、$\hat{\eta}_1$、$\hat{\eta}_2$、$\hat{q}$）。

步骤 2：使用 $\hat{\eta}_1$，$\hat{a}$，$\hat{\delta}$ 生成一个独立的参数自助样本 $\{x_1^*,\ldots,x_{n_1}^*\}$；类似地，使用 $\hat{a}$，$\hat{\delta}$，$\hat{\lambda}$，$\hat{\eta}_2$，$\hat{q}$，生成一个自助样本 $\{y_1^*,\ldots,y_{n_2}^*\}$。使用这些样本计算最大似然估计 $\hat{a}^*$，$\hat{\delta}^*$，$\hat{\lambda}^*$，$\hat{\eta}_1{}^*$，$\hat{\eta}_2{}^*$，$\hat{q}^*$，并根据公式（12）计算 R 的自助估计，记为 R^*。

步骤 3： 重复步骤 2，N 次，以获得 R 的参数自助法估计 $\hat{R}_1^*,\ldots,\hat{R}_N^*$。

步骤 4： 令 R 的累积分布函数为 $H_1(x)=P(R\le x)$。对于给定的 x，定义 $R_{BP}(x)=H_1^{-1}(x)$。R 的近似 $100(1-\gamma)\%$ 置信区间为

$$\left(\hat{R}_{BP}\left(\frac{\gamma}{2}\right),\hat{R}_{BP}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

.

（ii）Boot-t 方法

步骤 1：基于分别来自 PGE-1 $(a,\delta,\eta_1,\lambda,q)$ 和 PGE-1 $(a,\delta,\eta_2,\lambda,q)$ 的独立样本 $x=\{x_1,\ldots,x_{n_1}\}$ 和 $y=\{y_1,\ldots,y_{n_2}\}$。计算 $(a,\delta,\eta_1,\eta_2,\lambda,q)$ 的最大似然估计（$\hat{a},\delta,\lambda,\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2,\hat{q}$）。

步骤 2：使用 $\hat{\eta}_1$，$\hat{a}$，$\hat{\delta}$ 生成独立的参数自助样本 $\{x_1^*,\ldots,x_{n_1}^*\}$，同样地，使用$\hat{a}$，$\hat{\delta}$，$\hat{\lambda}$，$\hat{\eta}_2$，$\hat{q}$生成自助样本$\{y_1^*,\ldots,y_{n_2}^*\}$。使用这些样本计算最大似然估计$\hat{a}^*$，$\hat{\delta}^*$，$\hat{\lambda}^*$，$\hat{\eta}_1{}^*$，$\hat{\eta}_2{}^*$，$\hat{q}^*$，并根据公式（12）计算 R 的自助估计$\hat{}$，即 R^* 以及该统计量，

$$T^*=\frac{\sqrt{n}\left(\widehat{R}^*-\widehat{R}\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\widehat{R}^*\right)}}.$$

这里的方差可按照第3.2节所述方法计算。
步骤 3： 重复步骤 2，N 次，以获得参数自助法估计 ˆ ˆ$R_1^*, \ldots, R_N^*$（ R的估计值）。

步骤 4： 令 $H_2(x) = P(T^* \leq x)$ 为 T^* 的累积分布函数。对于给定的 x，定义 $\widehat{R}_{BT}(x) = \widehat{R} + H_2^{-1}(x)\sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{R})}n$。 R 的近似 100(1 − γ)% 置信区间为

$$\left(\widehat{R}_{Bt}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \widehat{R}_{Bt}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\right).$$

4 模拟研究与数据分析

本节通过模拟研究验证所开发方法的性能。此外，还展示了这些结果在艾滋病潜伏期数据中的应用。

4.1 模拟研究

这里我们展示R的最大似然估计（MLE）的性能，并以偏差和均方误差（MSE）衡量其性能。置信区间的性能则以置信区间长度（CL）衡量。考虑样本量为（n_1， n_2）$= n = \{$（10,10）、（20,20）、（30,30）、（50,50）和（100, 100）$\}$ 的随机样本。我们考虑 R =｛0的三种不同取值：0.1428（$\alpha = 4$， $\delta = 1$， $\lambda = 1.5$， $\eta_1 = 10$，$\eta_2 = 1$， $q = 0.2$）、0.5362（$\alpha = 1$， $\delta = 1$， λ =0.5， $\eta_1 = 2.5$， $\eta_2 = 3$， $q = 0.3$）以及0.9054（$\alpha = 10$， $\delta = 1$， $\lambda = 0.5$， $\eta_1 = 2$， $\eta_2 = 20$， q =0.9）｝。

表1：所开发方法的性能

n	$\hat{R}$	Bias	MSE	CI	Boot-p 置信区间	t 自助法置信区间
10	0.1713	0.0284	0.0068	(0.1255, 0.2124)	(0.0558, 0.3390)	(0.0399, 0.3635)
20	0.1638	0.0210	0.0055	(0.1245, 0.2020)	(0.0486, 0.3140)	(0.0624, 0.3529)
30	0.1418	-0.0010	0.0013	(0.1222, 0.1614)	(0.0820, 0.2192)	(0.0654, 0.2919)
50	0.1408	-0.0020	0.0008	(0.1259, 0.1558)	(0.0904, 0.1996)	(0.0708, 0.2895)
100	0.1416	-0.0012	0.0004	(0.1309, 0.1523)	(0.1031, 0.1831)	(0.1412, 0.1834)
10	0.5659	0.0297	0.0019	(0.5241, 0.6078)	(0.5250, 0.5959)	(0.5243, 0.6088)
20	0.5379	0.0017	0.0008	(0.4979, 0.5780)	(0.3553, 0.7045)	(0.4872, 0.6672)
30	0.5159	-0.0203	0.0005	(0.4720, 0.5598)	(0.4659, 0.5559)	(0.4720, 0.5598)
50	0.5359	-0.0003	0.0002	(0.5100, 0.5617)	(0.4852, 0.5616)	(0.4774, 0.5863)
100	0.5381	0.0019	0.0001	(0.5201,0.5561)	(0.4937, 0.5586)	(0.5010, 0.5574)
10	0.8925	-0.0129	0.0032	(0.8624, 0.9223)	(0.7682, 0.9710)	(0.7960, 0.9980)
20	0.9042	-0.0012	0.0015	(0.8856, 0.9227)	(0.8207, 0.9586)	(0.8674, 0.9782)
30	0.8977	-0.0077	0.0013	(0.8812, 0.9141)	(0.8967, 0.9154)	(0.8814, 0.9138)
50	0.9087	0.0033	0.0005	(0.8972, 0.9202)	(0.8990, 0.9159)	(0.8840, 0.9107)
100	0.9072	0.0018	0.0003	(0.8991, 0.9152)	(0.8944, 0.9161)	(0.8960, 0.9189)

4.2 示例 - 艾滋病输血数据

艾滋病输血数据由疾病控制中心（CDC）收集，该中心负责管理艾滋病患者的国家登记册。这里的事件时间是获得性免疫缺陷综合征（艾滋病）的潜伏期，定义为从感染HIV病毒到确诊艾滋病的时间。由于输注受污染的血液是病毒的传播途径，如果有人接受输血后被确诊为艾滋病，就可以追溯其感染时间。本研究仅在研究结束日期之前发生了感兴趣事件（即确诊艾滋病）时，才将受试者纳入样本。因此，艾滋病潜伏时间属于右截断数据。

该数据包含 295 个病例，均在1986年7月1日之前确诊，数据可见 Kalbfleisch 和 Lawless（1989年），也可在 R 的 $SurvTrunc$ 包中获取。数据还记录了患者的年龄。潜伏时间以月为单位测量，没有观测值为 0，因此在分析中予以排除。我们将数据分为两组：年龄小于或等于 16 岁的青少年，以及年龄大于 16 岁的成年人。因此，我们将 X 视为青少年的潜伏时间，将 Y 视为成年人的潜伏时间。

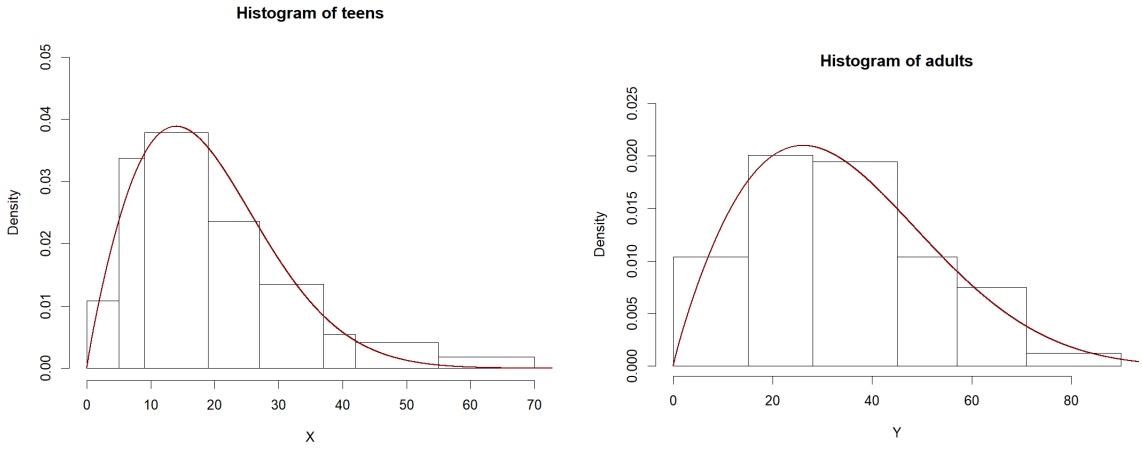
我们检验 PGE-1分布是否适用于 X 和 Y。表 2

表 2：数据集 1 的拟合优度

数据集	a	δ	η	λ	q	柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫统计量	p-值
X	10.5	1.9	10.5	0.0040	0.5	0.1284	0.5758
Y	10.5	1.9	3.0	0.0040	0.5	0.0519	0.4935

给出了 X 和 Y的未知参数的最大似然估计值。文中还给出了 Kolmogorov-Smirnov（K-S）检验统计量及相应的 p值，这表明无法拒绝数据来自 PGE-1分布这一假设。因此，我们得到 R 的估计值为 0.2414，这表明青少年的潜伏时间长于成年人的概率为 0.2414。拟合结果的直方图和 Q-Q图分别见图 3 和图 4。

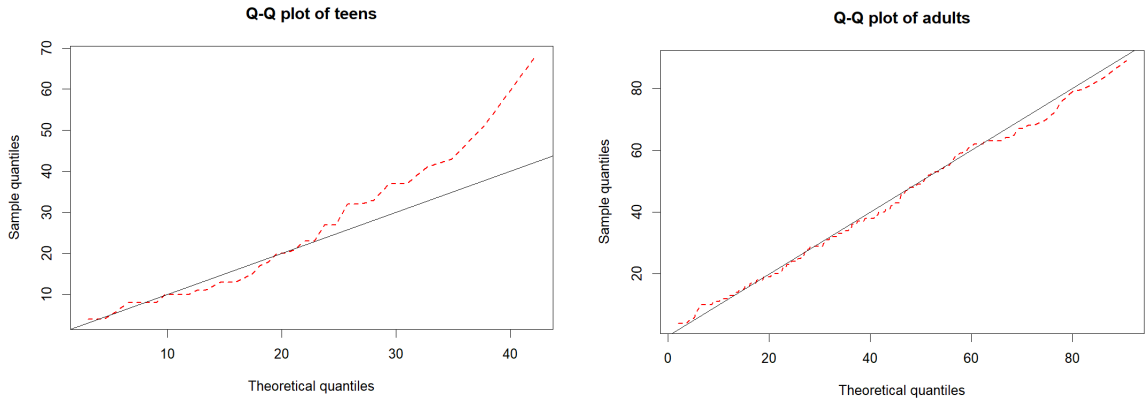
图 3：直方图和拟合的概率密度函数



5 结论

本文研究了基于1型路径生成指数分布的应力-强度可靠性参数的最大似然估计。还利用渐近性质和自助抽样方法获得了区间估计。通过输血数据展示了所提出结果的应用。比较了青少年（年龄小于或等于16岁）与成年人（年龄大于16岁）的潜伏期，得到的概率为0.2414。

图4：拟合结果的QQ图



参考文献

[1]Behdani, Z., Mohtashami Borzadaran, G.R. 和 Sadeghpour Gildeh, B.（2020）双重截断分布的一些性质及其在收入不平等视角下的应用。计算统计学 **35**，359–378，DOI：10.1007/s00180-019-00890-2,

[2] Birnbaum Z. W.（1956），论曼-惠特尼统计量的一种用途。第三届伯克利数学统计与概率研讨会论文集，**1**，13-17。

[3] Birnbaum Z. W. 和 McCarty B. C.（1958），基于 X 和 Y 独立样本的 $Pr\{Y < X\}$ 分布无关上置信界。《数学统计年刊》，**29(2)**，558-562。

[4] Chacko M. 和 Mathew S.，（2021）基于广义帕累托分布的秩集抽样，对 P(Y < X) 进行推断。*Statistica*，**81:4**，447–459。

[5] Chi, Y., Tsai, W-Y. 和 Chiang, C-L.（2007），利用右截断数据检验两个生存函数是否相等。《医学统计学》，**26(4)**：812- 27。DOI：10.1002/sim.2556。

[6] Church, J. D. & Harris, B., (1970) 从应力—强度关系估计可靠性。*Technometrics*，**12**，49–54。

[7]Efron B., (1982)，《刀切法、自助法及其他类似方案》。*SIAM*，费城。

[8] Hall P., (1988) 自助法置信区间的理论比较。统计年鉴16,927–953。

[9] Kalbfleisch J. D. 和 Lawless J. F. (1989), 基于回顾性确定的推断：对相关艾滋病输血数据的分析。美国统计协会期刊, 84: 360–372。[10] Kotz S., Lumelskii Y. 和 Pensky M. (2003), 应力-强度模型及其推广：理论与应用。World Scientific, 新加坡。[11] Kundu D. & Gupta R., (2005), 广义指数分布的 $P(Y < X)$估计。Metrika, 61, 291–308。[12] Kundu D. & Raqab M. Z., (2009) 三参数威布尔分布的 R $= P(Y < X)$估计。Statistics and Probability Letters, 79, 839–1846。[13] Lagakos S.W., Barraj L.M. 和 de Gruttola V. (1988) 截断生存数据的非参数分析及其在艾滋病研究中的应用。Biometrika, 75: 515–523。[14] Mathai A. M., (2005) 通向矩阵变量伽马和正态密度的路径。Linear Algebra and its Applications, 396, 317–328。[15] Mathai A. M. 和 Princy T., (2016) 可靠性分析中的比例风险与路径模型。印度概率与统计学会, 18, 39–51。[16] Mathai A. M. & Provost S. B. (2006), 矩形矩阵上的一些复矩阵变量统计分布。Linear Algebra and its Applications, 410, 198–216。[17] Pak A., Raqab M.Z., Reza M. M., Shahab S. B. & Mosavi A. (2021), 广义指数分布中 P[Y $<$ X] 的估计。Alexandria Engineering Journal, 61, 3–15。[18] Pakdaman, Z., Ahmadi, J. 和 Doostparast, M. (2017), 应力-强度系统的基于特征量的方法，Statistical Papers, 60, 1631–1647。[19] Teamah, Abd El-monem A. M., Elbanna, A. A. 和 Gemeay, A. M. (2020), 右截断弗雷歇-威布尔分布：统计性质及应用，Delta Journal of Science, 41, 20-29。[20]Xavier, T. 和 Jose, J. K. (2021) 使用幂变换半逻辑斯谛分布的一种推广研究应力-强度可靠性，Communications in Statistics - Theory and Methods, 50:18, 4335-4351, DOI: 10.1080/03610926.2020.1716250。[21] Zaninetti, L. (2013) 一种应用于恒星的右截断和左截断伽马分布。Advanced Studies in Theoretical Physics, 23, 1139。

附录

矩阵 I 的对角元素为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ell^2}{\partial a^2} &= -\frac{n_1+n_2}{a^2} + \eta_1(1-q)\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(1-e^{-\lambda x_i})^{2\delta}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} \\
&+ \eta_2(1-q)\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(1-e^{-\lambda y_j})^{2\delta}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \delta^2} &= -\frac{(n_1+n_2)^2}{\delta^2} - \eta_1\sum_{i=1}^{n_1}\frac{a(1-e^{-\lambda x_j})^{\delta}(\ln(1-e^{-\lambda x_j}))^2}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_j})^{\delta})^2} \\
&- \eta_2\sum_{j=1}^{n_2}\frac{a(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}(\ln(1-e^{-\lambda y_j}))^2}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \eta_1^2} &= -\frac{n_1}{(\eta_1+1-q)^2}; \quad \frac{\partial \ell^2}{\partial \eta_2^2} = -\frac{n_2}{(\eta_2+1-q)^2} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \lambda^2} &= (\delta-1)\left[\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i^2e^{-2\lambda x_i} + x_i^2e^{-2\lambda x_i}(1-e^{-2\lambda x_i})}{(1-e^{-\lambda x_i})^2}\right. \\
&+ \left.\sum_{j=1}^{n_2}\frac{y_j^2e^{-2\lambda y_j} + y_j^2e^{-2\lambda y_j}(1-e^{-2\lambda y_j})}{(1-e^{-\lambda y_j})^2}\right] - \frac{n_1+n_2}{\lambda^2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n_1}\left[\frac{\eta_1a^2x_i^2\delta e^{-2\lambda x_i}(1-q) + (1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})a\delta x_i^2e^{-2\lambda x_i}(1-e^{-\lambda x_i})}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2}\right] \\
&+ \sum_{j=1}^{n_2}\left[\frac{\eta_2a^2y_j^2\delta e^{-2\lambda y_j}(1-q) + (1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})a\delta y_j^2e^{-2\lambda y_j}(1-e^{-\lambda y_j})}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2}\right] \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial q^2} &= \frac{n_1}{(\eta_1+1-q)^2} + \frac{n_2}{(\eta_2+1-q)^2} + \frac{2}{(1-q)^3}\sum_{i=1}^{n_1}\eta_1\ln(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}) \\
&+ \frac{2}{(1-q)^3}\sum_{j=1}^{n_2}\eta_2\ln\left(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}\right) \\
&+ \frac{1}{(1-q)^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\eta_1a(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}} + \sum_{j=1}^{n_2}\frac{\eta_2a(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}}\right] \\
&- \frac{1}{1-q}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\eta_1a^2(1-e^{-\lambda x_i})^{2\delta}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} + \sum_{j=1}^{n_2}\frac{\eta_2a^2(1-e^{-\lambda y_j})^{2\delta}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2}\right]
\end{aligned}
$$

矩阵 I 的非对角元素为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ell^2}{\partial a \partial \delta} &= \eta_1 \sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{2\delta} \ln(1-e^{-\lambda x_i})}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} + \frac{(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta} \ln(1-e^{-\lambda x_i})}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}} \right] \\
&+ \eta_2 \sum_{j=1}^{n_2} \left[\frac{a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{2\delta} \ln(1-e^{-\lambda y_j})}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2} + \frac{(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta} \ln(1-e^{-\lambda y_j})}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}} \right] \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial a \partial \eta_1} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{-(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}; \quad \frac{\partial \ell^2}{\partial a \partial \eta_2} = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{-(1-e^{-\lambda y_i})^{\delta}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_i})^{\delta}} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial a \partial \lambda} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\eta_1 \delta x_i e^{-\lambda x_i}(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta-1}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\eta_2 \delta y_j e^{-\lambda y_j}(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta-1}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial a \partial q} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\eta_1 a(1-e^{-\lambda x_i})^{2\delta}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\eta_2 a(1-e^{-\lambda y_j})^{2\delta}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \delta \partial \eta_1} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{-a(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta} \ln(1-e^{-\lambda x_i})}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}; \quad \frac{\partial \ell^2}{\partial \delta \partial \eta_2} = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{-a(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta} \ln(1-e^{-\lambda y_j})}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \delta \partial \lambda} &= \sum_{j=1}^{n_2} \left[\frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1-e^{-\lambda x_i}} + \frac{\eta_1 a \ln(1-e^{-\lambda x_i}) + (1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}) a x_i e^{-\lambda x_i}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{n_2} \left[\frac{y_j e^{-\lambda y_j}}{1-e^{-\lambda y_j}} + \frac{\eta_2 a \ln(1-e^{-\lambda y_j}) + (1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta}) a y_j e^{-\lambda y_j}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2} \right] \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \delta \partial q} &= -\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\eta_1 a^2 (1-e^{-\lambda x_i})^{2\delta} \ln(1-e^{-\lambda x_i})}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} - \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\eta_2 a^2 (1-e^{-\lambda y_j})^{2\delta} \ln(1-e^{-\lambda x_i})}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} &= 0; \quad \frac{\partial \ell^2}{\partial \eta_1 \partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n_1} \frac{a \delta x_i e^{-\lambda x_i}(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta-1}}{1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \eta_1 \partial q} &= \frac{n_1}{(\eta_1+1-q)^2} - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\ln(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})}{(1-q)^2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{a(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta}}{(1-q)(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})} \\
\frac{\partial \ell^2}{\partial \lambda \partial q} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\eta_1 a^2 \delta x_i e^{-\lambda x_i}(1-e^{-\lambda x_i})^{2\delta-1}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda x_i})^{\delta})^2} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\eta_2 a^2 \delta y_j e^{-\lambda y_j}(1-e^{-\lambda y_j})^{2\delta-1}}{(1-a(1-q)(1-e^{-\lambda y_j})^{\delta})^2}
\end{aligned}
$$