arXiv:2303.05067v1 [cs.DS] 9 Mar 2023

基于信任函数的鲁棒优化

Marc Goerigk[1], Romain Guillaume[2], Adam Kasperski*[3]，以及 Pawe l Zieli´nski[3]

[1]网络与数据科学管理，锡根大学，锡根，德国，
marc.goerigk@uni-siegen.de[2]图卢兹大学-IRIT，图卢兹，法国，
romain.guillaume@irit.fr[3] 弗罗茨瓦夫科技大学，弗罗茨瓦夫，波兰，{
adam.kasperski,pawel.zielinski}@pwr.edu.pl

摘要

本文研究了目标函数系数不确定的优化问题。不确定性通过给定一个离散情景集来描述，该情景集包含目标函数系数的可能实现。本文应用传统框架和可能性框架下的信任函数概念，定义情景集上的一组可容许概率分布。随后，利用广义赫维茨准则计算解。本文探讨了所得问题的复杂性，并提出了求解该问题的一些精确方法和近似方法。

关键词：鲁棒优化、Hurwicz 准则、信任函数、可能性理论

1 引言

本文旨在研究目标函数系数存在不确定性时，以下一般优化问题的一种形式：

$$\begin{array}{ll}\min & f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \\ & \boldsymbol{x}\in\mathbb{X},\end{array} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^l$ 是目标函数系数向量，$\mathbb{X}\subseteq\mathbb{R}^n$ 是可行解集合。我们假设 $\mathbb{X}$ 非空且紧致，f 仅取非负值，$f\colon\ \mathbb{X}\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}_+$，并且对于每个固定的系数向量 $\boldsymbol{c}$，$\mathbb{X}$ 中都能取得最小值。若 $\mathbb{X}$ 是由一组线性约束描述的多面体，且 f 是线性的，则得到线性规划问题这一类。更一般地，若 $\mathbb{X}$ 是凸集且 f 是凸函数，则得到凸优化问题这一类（例如，参见 [3]）。若 $\mathbb{X}\subseteq\{0,1\}^n$，则（1）是一个组合问题。根据 $\mathbb{X}$ 的结构以及成本函数 f的定义，问题（1）可以在多项式时间内求解，也可能成为NP困难问题。

在许多实际应用中，目标函数系数向量 $\boldsymbol{c}$ 是不确定的。也就是说，$\tilde{\boldsymbol{c}}=(\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_l)$是 $\mathbb{R}^l$ 中的一个随机向量，其概率分布已知、部分已知或完全未知。因此，给定解 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}$ 的成本 $f(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$是 $\mathbb{R}_+$中的一个随机变量。令 $\mathcal{U}$ 为一个包含可能

*通讯作者

$\tilde{\boldsymbol{c}}$的实现值的集合，称为情景。本文假设 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_K\} \subseteq \mathbb{R}^l$包含有限个明确列出的 $K \geq 1$情景。 $\mathcal{U}$ 中的情景可能对应于世界的不同状态，也可能是对随机向量 $\tilde{\boldsymbol{c}}$进行抽样的结果。我们用 $\mathcal{P}(\mathcal{U})$表示 $\mathcal{U}$中所有离散概率分布构成的集合，即$\mathcal{P}(\mathcal{U}) = \{\boldsymbol{p} \in [0,1]^K$: $\sum_{k\in[K]} p_k = 1\}$。如果能够获得关于 $\mathcal{P}(\mathcal{U})$的额外信息，则可以利用这些信息给出一个可容许概率分布集合 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$，它是 $\mathcal{P}(\mathcal{U})$的一个限制。例如，可以对概率 $[19]$,添加一些界限 $\underline{p}_i \leq p_i \leq \overline{p}_i, i \in [K]$ （我们用简写 $[K]$ 表示集合 $\{1, \ldots, K\}$），或者对 $\tilde{\boldsymbol{c}}$的均值或协方差矩阵添加一些界限，从而得到对 $\mathcal{P}$ 的各种描述（例如，参见 $[5, 23]$）。固定 $\alpha \in [0,1]$ 并定义

$$\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \alpha\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] + (1-\alpha)\underline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})],$$

其中

$$\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \sup_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \sup_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}} \sum_{k\in[K]} p_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k),$$
$$\underline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \inf_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \inf_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}} \sum_{k\in[K]} p_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k),$$

并且 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}[\cdot]$ 是相对于概率分布 $\boldsymbol{p}$的期望值。量 H_α称为广义赫维茨准则，而 $\mathrm{E}[\cdot]$、$\mathrm{E}[\cdot]$ 分别称为 $f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})$ 的上期望值和下期望值，表示 $\mathcal{P}$ 中概率分布对应的最大和最小期望解成本（例如，参见 $[7]$）。参数 $\alpha \in [0,1]$ 称为悲观—乐观程度，用于刻画决策者的风险厌恶。

本文考虑以下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}) \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}. \end{aligned} \tag{2}$$

因此，对于给定的悲观—乐观程度 $\alpha \in [0,1]$，我们寻求一个使广义赫维茨准则最小化的可行解。

我们来考察 (2) 的一些特殊情形。若 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$，则 $\mathrm{E}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \max_{k\in[K]} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k)$。事实上，在这种情况下，最坏的概率分布会将概率 1 赋给使 $\boldsymbol{x}$ 的成本最大的情景 $\boldsymbol{c}_k$。类似地，$\mathrm{E}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \min_{k\in[K]} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k)$。此时，问题 (2) 可简化为在情景集 $\mathcal{U}$ 下最小化传统的赫维茨准则:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \max_{k\in[K]} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) + (1-\alpha) \min_{k\in[K]} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}. \end{aligned} \tag{3}$$

If $\alpha = 1$ 代入（3）后，我们得到鲁棒极小极大问题，例如 [18中所讨论的问题。].

如果 $\mathcal{P}$ 仅包含一个概率分布 $\boldsymbol{p}$，那么（2）等价于在 $\boldsymbol{p}$下使期望解成本最小化，即

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \sum_{k\in[K]} p_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}. \end{aligned} \tag{4}$$

在传统的鲁棒优化方法中（例如参见 $[2, 18]$），情景集 $\mathcal{U}$ 中没有提供额外信息。这等价于说，任何概率分布

在 $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ 中，对于 $\tilde{c}$ 而言都是可容许的。这样便可以求解类型（3）的问题。然而，在许多实际应用中，$\mathcal{U}$ 中可能会提供一些额外知识。特别是，某些证据可能表明，来自 $\mathcal{U}$ 某一子集的情景比来自另一子集的情景更有可能发生。利用邓普斯特-谢弗证据理论 [6, 22]，可以自然地将这些知识纳入考虑。该理论的核心概念是分配给情景子集的非负质量。给定情景子集 $A \subseteq \mathcal{U}$，分配给 A 的质量可以解释为事件 A的主观概率，该事件支持真实情景属于 A这一主张。这些质量在 $2^{\mathcal{U}}$中诱导出一个信任函数，它构成了 $\mathcal{U}$中概率分布的下界。利用这一事实，可以定义集合 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$，该集合包含 $\tilde{c}$ 的可容许概率分布，随后应用解概念（2）。通过可能性理论（例如参见 [11]），可以扩展信任函数的概念。也就是说，可以将质量分配给情景的模糊子集。这种模糊子集的隶属函数是 $\mathcal{U}$中的可能性分布。于是，事件 $A \subseteq \mathcal{U}$ 的信任度就是 A的期望必然性。通过将模糊集分解为 λ-截集 [12], ，可以将可能性不确定性模型化简为基于传统证据理论的模型。

本文是会议论文 [13, 14]的扩展版本。我们将结果推广到更广泛的一类优化问题。我们强化了 [13]中给出的负面复杂性结果。我们为(2)提出了另一种近似算法，作为 [13]中构造的算法的替代方案。最后，我们展示了如何在可能性不确定性模型下求解该问题；这一问题在 [13]中仍未解决。

本文结构如下。第2节回顾证据理论的基本概念，即质量和信任函数的概念。第3节将这些概念用于定义 $\mathcal{U}$中可容许概率分布的集合 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$。随后，我们考虑带有 $\mathcal{P}$的优化问题(2)。第4节探讨问题(2)的复杂性。我们证明，对于每个 $\alpha \in [0, 1)$，该问题都是NP困难的；即使在非常严格的情形下，$\mathbb{X}$ 是 $[0, 1]^n$ 中的一个多面体，且函数 f 是线性的，这一结论仍然成立。第5节提出一个用于求解(2)的混合整数规划问题。我们还指出了该问题的一些可在多项式时间内求解的特殊情形。第6节为(2)构造近似算法。最后，第7节将不确定性模型推广到可能性（模糊）情形。

2 信任函数与非精确概率

本节回顾信任函数的概念及其与非精确概率的关系（更多详情见 [6, 22, 7]）。设 $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ 是一个有限的非空状态集合。质量函数是一个从 2^{Ω} 到 $[0, 1]$ 的映射 m，满足

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$$

且 $m(\emptyset) = 0$。给定 A，$m(A)$ 是支持实际状态属于 A 这一主张的可用证据。设 $A \subseteq \Omega$，使得 $m(A) > 0$ 称为一个焦元。质量函数 m诱导出以下信任函数：

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B). \tag{5}$$

如果所有焦元集都是单元素集，那么 Bel 就是 Ω 上的概率分布，因此它提供了 Ω 上完整的概率信息。另一方面，如果只有一个焦元集，例如 E，那么 Bel 就是逻辑测度，用于描述 Ω 上的不精确信息。我们只确定事件 E 会发生，除此之外一无所知。在极端情况下，当 E =Ω 时，Ω 上存在完全不确定性

若对于每个事件A ⊆Ω，概率分布 P 与信任函数 Bel 相容，当且仅当 P(A) ≥Bel(A)（例如，参见 [7]）。因此，Bel(A) 是概率 P(A) 的下界。若 Bel 是由质量函数 m 诱导的，则 $\mathcal{P}$(m) 表示所有与 Bel 相容的概率分布的集合

$$\mathcal{P}(m) = \{\mathrm{P} \in \mathcal{P}(\Omega) : \mathrm{P}(A) \geq \mathrm{Bel}(A), A \subseteq [K]\}, \tag{6}$$

其中，$\mathcal{P}$(Ω) 是 Ω 中所有概率分布的集合。由于 Ω 是有限集，集合 $\mathcal{P}(m)$ 可以由以下线性约束系统描述:

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{k\in A} p_k \geq \mathrm{Bel}(A) & A \subset [K] \\ p_1 + \cdots + p_K = 1 & \\ p_k \geq 0 & k \in [K], \end{array} \tag{7}$$

其中，p_k 是状态 ω_k 发生的概率。在第 7 节中，我们将研究信任函数 (5) 的一种推广。特别是，我们将证明 (7) 至少有一个解，因此$\mathcal{P}(m)$ 非空。

3 基于信任函数的鲁棒优化（ROBF）

本节将使用第 2 节所述的信任函数概念，对 (1) 中目标函数的不确定性进行建模。回顾一下，目标函数系数向量 $\tilde{\boldsymbol{c}}$可以取 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_K\} \subseteq \mathbb{R}^l$, $K \geq 1$中的有限多个值之一。为了应用第 2 节中的概念，我们将情景与状态 $\omega_1, \ldots, \omega_K$ 对应起来，即 Ω $= \mathcal{U}$。设 m: $2^{\mathcal{U}} \to [0,1]$ 是 $\mathcal{U}$中的一个质量函数。为简化记号，我们将每个情景子集 $A \subseteq \mathcal{U}$ 与 A中元素的索引集对应。因此，m 可以等价地定义为索引幂集 $2^{[K]}$ 上的质量函数，即m : $2^{[K]} \to [0,1]$。设

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq [K] : m(F) > 0\} = \{F_1, \ldots, F_\ell\}$$

是 $[K]$和 z($\mathcal{F}$) 的所有焦元集组成的集合，$=\max_{F\in\mathcal{F}} |F|$表示最大焦元集的大小。质量函数 m 在 $\mathcal{U}$中诱导出信任函数 Bel，进而为我们提供了 $\mathcal{U}$中可容许概率分布的集合 $\mathcal{P}(m)$。集合 $\mathcal{P}(m)$ 由式 (7) 描述，其中p_k 现在表示情景 $\boldsymbol{c}_k$ 发生的概率。以下方程成立（例如，参见 [7]）：

$$\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}(m)} \mathbb{E}_{\mathrm{P}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \sum_{F\in\mathcal{F}} m(F) \max_{k\in F} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k), \tag{8}$$

$$\underline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \inf_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}(m)} \mathbb{E}_{\mathrm{P}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \sum_{F\in\mathcal{F}} m(F) \min_{k\in F} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k). \tag{9}$$

为完整起见，附录 A 给出了 (8) 和 (9) 的证明。利用 (8) 和 (9)，我们可以将问题 (2) 表示为以下基于信任函数的鲁棒优化问题：

$$\text{(ROBF)} \quad \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \ \mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) \left(\alpha \max_{k \in F} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) + (1-\alpha) \min_{k \in F} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) \right) \tag{10}$$

我们先关注求解（10）时可能出现的第一个复杂性问题。一般而言，指定质量函数 m 可能需要提供多达 2^K 个数值；对于较大的 K，这可能难以处理。实际中，我们可以假设焦元集 $|\mathcal{F}|$ 的数量受 K的多项式所界定。或者，也可以提供一条规则，将质量分配给 K的子集，从而将（10）重新表述为一个关于 n 和K 规模为多项式的问题（即问题规模为多项式）。

现在我们展示（10）的几个特殊情形，这些情形已在文献中讨论过。若 $m([K]) = 1$，则得到采用 Hurwicz 准则（3）的问题；若进一步满足 $\alpha = 1$，该问题便化为鲁棒极小极大问题。另一方面，若$z(\mathcal{F}) = 1$ （即所有焦元集都是单元素集），则（10）化为针对概率分布 $p_k = m(\{k\})$、 $k \in [K]$，最小化期望解成本的问题，也就是问题（4）。

下面介绍式 (10) 的另一个特例。在情景集为$\mathcal{U}$ 的鲁棒优化中，常用有序加权平均准则（简称 OWA），该准则由 [24], 提出（例如参见 [4, 15, 20]）。设 $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_K)$ 是一个非负权重向量，且权重之和为 1。给定一个解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$，令 σ为 $[K]$的一个排列，使得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_{\sigma(1)}) \geq \cdots \geq f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_{\sigma(K)})$，则

$$\mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k \in [K]} w_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_{\sigma(k)}).$$

容易看出，当 $\boldsymbol{w} = (1, 0, \ldots, 0)$时，$\mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \max_{k \in [K]} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k)$；当 $\boldsymbol{w} = (0, 0, \ldots, 1)$时，$\mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \min_{k \in [K]} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k)$。

对每个满足 $|A| = 2$ 且 $m(A) = 0$ 的 $A \subseteq [K]$，定义 $m(A) = \frac{2}{K(K-1)}$，否则。由此，所有焦元集的基数均为 2，且赋予相同的质量值。利用式 (8)，可得

$$\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \frac{2}{K(K-1)} \sum_{\{i,j\} \subseteq [K]: i \neq j} \max\{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_j)\}.$$

将情景排序，使得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_1) \geq \cdots \geq f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_K)$。于是

$$\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \frac{2}{K(K-1)} \left((K-1) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_1) + (K-2) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_2) + \cdots + (K-K) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_K) \right)$$

因此，

$$\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{w} = \left(\underbrace{\frac{2}{(K-1)K(K-1)}, \ldots, \frac{2}{(K-1)K(K-1)}}_{K-1}, \underbrace{\frac{2}{(K-2)K(K-1)}, \ldots, \frac{2}{(K-2)K(K-1)}}_{K-2}, \cdots, 0 \right)$。类似地，利用式 (9) 可得

$$\underline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = \mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}'}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{w}' = \left(\underbrace{\frac{2 \cdot 1}{(K-1)K(K-1)}, \ldots, \frac{2 \cdot 1}{(K-1)K(K-1)}}_{K}, \underbrace{\frac{2 \cdot 2}{(K-1)K(K-1)}, \ldots, \frac{2 \cdot 2}{(K-1)K(K-1)}}_{K-1}, \cdots, \frac{2}{(K-1)K(K-1)} \right)$。因此，$w'_k = w_{K-k+1}$, $k \in [K]$。这个例子不难推广，下面的命题描述了这种情形：

命题 1. 假设对于每个 $A \subseteq [K]$，当 $|A| = l \leq K$ 时，$m(A) = 1/\binom{K}{l}$，而当$m(A) = 0$时则不然。那么 $\mathrm{E}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})]$ 是权重为 $w_k = \binom{K-k}{l-1}/\binom{K}{l}$（对应于 $k = 1, \ldots, K-l+1$）以及 $w_k = 0$（对应于 $k = K-l+2, \ldots, K$）的有序加权平均准则。同样，$\underline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})]$ 是权重为 $w'_k = w_{K-k+1}$, $k \in [K]$的有序加权平均准则。

证明。下列等式

$$\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = 1/\binom{K}{l} \sum_{A \subseteq [K]:|A|=l} \max_{k \in A} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k)$$

成立。将情景排序，使得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_1) \geq \cdots \geq f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_K)$。恰有 $\binom{K-k}{l-1}$ 个子集 $A \subseteq [K]$ 满足 $A = \{k\} \cup A'$, $|A|' = l-1$ 和 $A' \subseteq \{k+1, \ldots, K\}$。因此，$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k)$ 是 $k \in A$ 上的最大化者。于是，

$$\overline{\mathrm{E}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})] = 1/\binom{K}{l} \left(\binom{K-1}{l-1} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_1) + \binom{K-2}{l-1} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_2) + \cdots + \binom{l-1}{l-1} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_{K-l+1}) \right)$$

命题得证。对于 $\mathrm{E}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})]$ 的情形，证明完全对称。 □

4 ROBF问题的计算复杂性

根据鲁棒组合优化中的已知结果，可立即得出，当 $\mathbb{X} \subseteq \{0,1\}^n$ 时，(10) 是 NP困难的。事实上，极小极大问题是 (10) 的一个特例；对于基本选择问题和网络问题，当 $K = 2$ 时它已是 NP困难的，而当 K 无界时则是强 NP困难的（综述见 [16] ）。以下关于 $\alpha \in [0,1)$ 的结果表明，如果底层问题 (1) 是线性规划问题（连续情形），那么 (10) 也可能是 NP 困难的。我们将在第 5 节中证明，$\alpha = 1$ 的情形更容易求解。

定理 1. 对每个 $\alpha \in [0,1)$，当 $\mathbb{X}$ 是$[0,1]^n$ 中的一个多面体且函数 f 是线性函数时，问题 (10) 都是 NP困难。

证明。考虑以下 MINSAT 问题。给定一组 s 布尔变量 $q_1, \ldots q_s$、一组 t 子句 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_t$（这些子句由布尔变量构成），以及一个正整数 $r < t$。我们要判断是否存在一种变量的真值赋值，使得至少有 r 个子句不满足。众所周知，即使每个子句至多包含两个文字 [17], 该 MINSAT 问题仍是 NP 完全。

现在我们提出一个从 MINSAT 到问题 (10) 的归约。给定一个MINSAT实例，我们构造问题 (10) 的相应实例。不妨设 t 为偶数且 $r = t/2$（因为我们可以向该实例添加适当数量的虚拟子句）。对于每个 $i \in [s+1]$，定义变量 x_i 和 $\overline{x}_i$，因此变量的数量为 $n = 2s+2$。利用约束 $x_i \geq 0$、$\overline{x}_i \geq 0$ 和 $x_i + \overline{x}_i = 1$、$i \in [s+1]$定义多面体 $\mathbb{X}$。对于每个子句 $\mathcal{C}_i$，我们按如下方式构造情景 $\boldsymbol{c}_i$。如果 $q_j \in \mathcal{C}_i$，则 x_j 的成本为 1；如果 $\overline{q}_j \in \mathcal{C}_i$（$\overline{q}_j$是 q_j的否定），则在 $\boldsymbol{c}_i$下 $\overline{x}_j$ 的成本为 1；其余变量在 $\boldsymbol{c}_i$下的成本均设为 0。接下来，我们添加 r 个情景 $\boldsymbol{c}'_1$、.....、$\boldsymbol{c}'_r$，在这些情景下，x_{s+1}和$\overline{x}_{s+1}$ 的成本为 2，其余变量的成本为 0。因此，构造出的情景总数为 $K = t + r = 3r$。我们选择线性成本函数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$。最后，质量函数 m 将质量 $1/\binom{t+r}{2r+1} = 1/\binom{3r}{2r+1}$ 赋给每个基数为

$2r+1$ 的情景子集，并将质量 0 赋给所有其余子集。注意（参见命题 1），

$$\mathrm{H}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \alpha \mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}'}(\boldsymbol{x}). \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{w} = \left(\underbrace{\frac{\binom{3r-1}{2r}}{\binom{3r}{2r+1}}, \ldots, \frac{\binom{3r-r}{2r}}{\binom{3r}{2r+1}}}_{r \text{ positive weights}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2r \text{ weights}} \right), \quad \boldsymbol{w}' = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2r \text{ weights}}, \underbrace{\frac{\binom{3r-r}{2r}}{\binom{3r}{2r+1}}, \ldots, \frac{\binom{3r-1}{2r}}{\binom{3r}{2r+1}}}_{r \text{ positive weights}} \right)$$

因此，在 $\boldsymbol{w}$ 中只有前 r 个权重为正，而在 $\boldsymbol{w}'$中只有最后 r 个权重为正。

为了说明这一归约，考虑一个包含变量 q_1、 q_2、 q_3、 q_4，子句$(q_1 \vee \overline{q}_2)$、$(\overline{q}_2 \vee q_3)$、$(q_1 \vee q_3)$、$(\overline{q}_3 \vee q_4)$、$(q_1 \vee \overline{q}_4)$、$(\overline{q}_2 \vee \overline{q}_4)$、$(\overline{q}_1, \vee q_2)$、$(q_1 \vee q_2)$以及 $r = 4$的示例实例。该实例的情景如表1所示。

表1： MINSAT的示例实例的情景。

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{c}_1$	$\boldsymbol{c}_2$	$\boldsymbol{c}_3$	$\boldsymbol{c}_4$	$\boldsymbol{c}_5$	$\boldsymbol{c}_6$	$\boldsymbol{c}_7$	$\boldsymbol{c}_8$	$\boldsymbol{c}'_1$	$\boldsymbol{c}'_2$	$\boldsymbol{c}'_3$	$\boldsymbol{c}'_4$
0	x_1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	$\overline{x}_1$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	x_2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	$\overline{x}_2$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	x_3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\overline{x}_3$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\overline{x}_4$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
	x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2
	$\overline{x}_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2

我们对每个 $A \subseteq [K]$ 固定 $m(A) = 1/\binom{12}{9} = 1/220$ ，使得 $|A| = 9$ ，否则为0。多面体 $\mathbb{X}$由 $x_i + \overline{x}_i = 1$、 x_i、 $\overline{x}_i \geq 0$、 $i = 1$、.....、5定义。(11)中的权重随后为$\boldsymbol{w}$ =($\frac{165}{220}, \frac{45}{220}, \frac{9}{220}, \frac{1}{220}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$和 $\boldsymbol{w}'$ =(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 220, 9 220, 45 220, 165 220)。

请注意，在该证明中，我们构造了一个包含指数数量焦元的（10）问题实例。然而，根据命题 1，可以用与 MINSAT 实例规模呈多项式关系的长度来描述该实例。因此，该归约是多项式时间的。

现在我们证明， MINSAT 的答案为是，当且仅当存在某个可行解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$，使得 $H_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \leq 2\alpha$ 。由于任意解 $\boldsymbol{x}$ 在情景 $\boldsymbol{c}'_1$、.....、$\boldsymbol{c}'_r$ 下的成本等于 2，而在情景 $\boldsymbol{c}_1$、.....、$\boldsymbol{c}_t$ 下不大于 2，因此对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$，都有有序加权平均$_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = 2$。因此，只需证明 MINSAT 的答案为是，当且仅当存在某个可行解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$，使得有序加权平均$_{\boldsymbol{w}'}(\boldsymbol{x}) = 0$

假设 MINSAT 的答案为是，并令 $q_1, \ldots, q_s$为一个真值赋值，该赋值满足的子句不超过 r 个。我们构造一个可行解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$，使得当 $q_j = 1$时， $x_j = 1, \overline{x}_j = 0$；当 $q_j = 0$时， $x_j = 0, \overline{x}_j = 1$。此外，我们还固定 $x_{s+1} = 1$和 $\overline{x}_{s+1} = 0$。

根据构造，至少有 r 个情景使得 $\boldsymbol{x}$ 的成本为 0，因此成本为正的情景不超过 $2r$ 个。因此，$\boldsymbol{w}'$的有序加权平均$(\boldsymbol{x}) = 0$。

假设对于某个可行解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$，有 $\mathrm{Owa}_{\boldsymbol{w}'}(\boldsymbol{x}) = 0$ 。由于各情景下的成本均非负，因此至少存在 r 个情景，记为 $\boldsymbol{c}_1$，……，$\boldsymbol{c}_r$，在这些情景下，$\boldsymbol{x}$ 的成本为 0。当且仅当 $x_j = 0$ 时，我们有 $\boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} = 0$；若 $q_j \in \mathcal{C}_i (\overline{q}_j \in \mathcal{C}_i)$，则 $\overline{x}_j = 1$ $(\overline{x}_j = 0, x_j = 1)$。对于某些 $j \in [s]$，x_j 和 $\overline{x}_j$ 都可能不出现在对应于 $\boldsymbol{c}_1$，……，$\boldsymbol{c}_r$ 的子句 $\mathcal{C}_1$，……，$\mathcal{C}_r$ 中（因此 x_j 可以是分数值）。在这种情况下，我们为 q_j 赋予任意值，只要不改变 $\mathcal{C}_1$，……，$\mathcal{C}_r$ 的取值即可（这些子句仍不满足）。由此定义了 q_1，……，q_s 的一个真值赋值，在该赋值下，至少有 r 个子句不满足。 □

推论1. 如果 $\alpha = 0$，那么除非 P=NP，否则问题 (10) 不可近似，其中 $\mathbb{X}$ 是$[0,1]^n$ 中的一个多面体，且函数 f 是线性的。

证明. 在针对 $\alpha = 0$ 的定理 1 的证明中，当且仅当存在一个解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$，使得 $\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}) \leq 0$ 时，MINSAT 的答案为是。因此，任何近似算法都可用于求解 NP困难的 MINSAT 问题。 □

5 求解ROBF问题

本节提出求解 (10) 的一些方法。我们还指出了该问题的一些可在多项式时间内求解的特殊情形。问题 (10) 可表示为以下混合整数规划:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) y(F) & \\
& y(F) \geq \alpha f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) + (1-\alpha) u(F) & F \in \mathcal{F}, k \in F \\
& u(F) \geq f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) - M(1 - \delta_k(F)) & F \in \mathcal{F}, k \in F \\
& \displaystyle\sum_{k \in F} \delta_k(F) = 1 & F \in \mathcal{F} \\
& \delta_k(F) \in \{0,1\} & F \in \mathcal{F}, k \in F \\
& y(F), u(F) \geq 0 & F \in \mathcal{F} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, &
\end{array}
\tag{12}
$$

其中 M 是一个较大的常数。求解 (12) 的计算复杂性取决于焦元集的数量以及成本函数 f 的定义。具体而言，当 $|\mathcal{F}|$ 不太大且函数 f 是线性的时，可使用一些混合整数规划求解器求解该问题。当 $\alpha = 1$时，问题会简化。利用 (8)，我们立即得到以下结果:

命题2。若 $\alpha = 1$，则问题（10）等价于以下优化问题:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) y(F) & \\
& y(F) \geq f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) & F \in \mathcal{F}, k \in F \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{X} &
\end{array}
\tag{13}
$$

如果函数 f 在 $\boldsymbol{x}$ 上是凸函数，且集合 $\mathbb{X}$ 是凸集，那么 (13) 是一个凸优化问题，在大多数情况下都可以高效求解（例如，参见 [3]）。特别地，如果函数 f 是线性的，那么 (13) 就是一个线性规划问题。

命题 3. 如果 $\alpha \in [0.5, 1]$ 和 $z(\mathcal{F}) = 2$, （$z(\mathcal{F}) = \max_{F\in\mathcal{F}} |F|$），那么问题 (10) 等价于以下优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k\in[K]} m_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) + \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{F}} m_{ij} y_{ij} \\ & y_{ij} \geq \alpha f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_j) \quad \{i,j\} \in \mathcal{F} \\ & y_{ij} \geq \alpha f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_j) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i) \quad \{i,j\} \in \mathcal{F} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中，对于 $\{i,j\} \in \mathcal{F}$, $m_k = m(\{k\})$、$k \in [K]$ 和 $m_{ij} = m(\{i,j\})$。

证明。由 (8) 和 (9) 可知，(10) 的目标函数可以表示为

$$\sum_{k\in[K]} m_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) + \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{F}} m_{ij} (\alpha \max\{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_j)\} + (1-\alpha) \min\{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_j)\}) =$$

$$\sum_{k\in[K]} m_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) + \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{F}} m_{ij} \max\{\alpha f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_j), \alpha f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_j) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i)\},$$

其中，该等式成立是基于假设 $\alpha \geq 0.5$。引入附加变量y_{ij}, $\{i,j\} \in \mathcal{F}$ 以表示内层最大值，可得 (14)。 □

注意，若函数 f 关于 $\boldsymbol{x}$是凸函数，则 (14) 是一个凸优化问题。特别地，若函数 f 是线性的，则该问题成为线性规划问题。

定理 2. 若 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集，且 f 是凸函数，则可以通过求解一族凸问题 $z(\mathcal{F})^\ell$ 来求解 (10)，其中 $\ell = |\mathcal{F}|$。

证明。注意，对于每个 $F \in \mathcal{F}$，(12) 中恰有一个二元变量 $\delta_k(F)$, $k \in F$ 等于 1。将该变量的索引记为 k_F。如果我们能够猜出 k_F, $F \in \mathcal{F}$ 的最优值，那么模型 (12) 可简化为以下凸问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{F\in\mathcal{F}} m(F) y(F) \\ & y(F) \geq \alpha f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_{k_F}) \quad F \in \mathcal{F} \\ & y(F) \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad F \in \mathcal{F} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, \end{aligned} \tag{15}$$

最多有 $z(\mathcal{F})^\ell$ 种可能的选择 k_F、$F \in \mathcal{F}$，我们可以逐一尝试，找出使 (15) 最小的选择。因此，(12) 可以分解为求解 $z(\mathcal{F})^\ell$ 个 (15) 类型的问题。

□

当 $\mathcal{F}$ 中焦元集的数量不大时，可以应用定理 2。特别地，如果问题 (1) 是一个线性规划问题，且 $z(\mathcal{F})$ 有常数上界，那么问题 (10) 可以在多项式时间内求解。

6 ROBF问题的近似算法

本节将为 (10) 提出两种近似算法。在第一种算法中，我们不失一般性地假设每个焦元 $F \in \mathcal{F}$ 对应的 $|F| \geq 2$。事实上，如果正质量被赋予单个情景 $\boldsymbol{c}_k$，那么我们将该情景的一个副本 $\boldsymbol{c}'_k$ 添加到 $\mathcal{U}$ 中，并固定 $m(\{k, k'\}) := m(\{k\})$ 和 $m(\{k\}) := 0$。这一变换不会改变 $\overline{E}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})]$ 和 $\underline{E}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})]$ 的值（见方程 (8) 和 (9)）。定义

$$v_k = \sum_{F \in \mathcal{F}: k \in F} m(F),\ k \in [K].$$

如果 $\{F \in \mathcal{F}:\ k \in F\} = \emptyset$，则我们设定 $v_k = 0$。考虑以下优化问题：

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{k \in [K]} v_k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \end{array} \tag{16}$$

注意，若 $\mathbb{X}$ 是凸集且 f 是凸函数，则（16）是一个凸优化问题。特别地，若 $\mathbb{X}$ 是由线性约束组描述的多面体，且 f 是线性的，则（16）是一个线性规划问题。

定理3. 设 $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ 是（16）的一个最优解，并设 $\boldsymbol{x}^*$ 是（10）的一个最优解。则

$$\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq z(\mathcal{F}) \mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*) \qquad \text{for } \alpha \in [0.5, 1] \tag{17}$$

$$\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} z(\mathcal{F}) \mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*) \qquad \text{for } \alpha \in (0, 0.5] \tag{18}$$

证明. 我们首先证明，对每个 $\alpha \in [0, 1]$，以下不等式成立：

$$\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*) \geq \frac{\alpha}{z(\mathcal{F})} \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) \sum_{k \in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k). \tag{19}$$

利用方程（8）和（9），可得

$$\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*) \geq \alpha \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) \max_{k \in F} f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_k) \geq \alpha \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) \frac{1}{|F|} \sum_{k \in F} f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_k) \overset{(a)}{\geq}$$

$$\alpha \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) \frac{1}{z(\mathcal{F})} \sum_{k \in F} f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_k) = \frac{\alpha}{z(\mathcal{F})} \sum_{k \in [K]} \sum_{F \in \mathcal{F}: k \in F} m(F) f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_k) =$$

$$\frac{\alpha}{z(\mathcal{F})} \sum_{k \in [K]} v_k f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_k) \overset{(b)}{\geq} \frac{\alpha}{z(\mathcal{F})} \sum_{k \in [K]} v_k f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k) = \frac{\alpha}{z(\mathcal{F})} \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) \sum_{k \in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k).$$

不等式（a）由以下事实得出：对于每个 $F \in \mathcal{F}$，$z(\mathcal{F}) \geq |F|$。在不等式（b）中，我们利用了 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 在（16）中的最优性。如果 $\alpha \in [0.5, 1]$ 且 $|F| \geq 2$，那么

$$\alpha \sum_{k \in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k) \geq \alpha \max_{k \in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k) + (1-\alpha) \min_{k \in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)$$

并且（19）意味着 $\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*) \geq \frac{1}{z(\mathcal{F})}\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})$，由此得到（17）。另一方面，如果 $\alpha \in (0, 0.5]$ 且 $|F| \geq 2$，那么

$$(1-\alpha)\sum_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k) \geq \alpha \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k) + (1-\alpha)\min_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)$$

且（19）推出 $\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*) \geq \frac{\alpha}{(1-\alpha)\, z(\mathcal{F})}\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})$，由此得到（18）。 □

定理4. 若问题（13）可在 $\gamma \geq 1$ 范围内近似，则（10）可在 $\gamma\left(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\sum_{F\in\mathcal{F}}\min_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}{\sum_{F\in\mathcal{F}}\max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}\right)$ 范围内近似，对每个 $\alpha \in (0, 1]$，均成立，其中 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是问题（13）的一个 γ-近似解。

证明. 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题（10）的一个最优解，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 是问题（13）的一个 γ-近似解。由此可得 $\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*)$ 的一个下界，即

$$\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*) \geq \alpha \sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_k) \geq \frac{\alpha}{\gamma}\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k). \tag{20}$$

考虑 $\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})$ 相对误差的一个上界：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}) - \mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*)}{\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*)} \overset{(20)}{\leq} \frac{\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}) - \frac{\alpha}{\gamma}\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}{\frac{\alpha}{\gamma}\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)} \\
&= \frac{\alpha\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k) + (1-\alpha)\sum_{F\in\mathcal{F}} \min_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k) - \frac{\alpha}{\gamma}\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}{\frac{\alpha}{\gamma}\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)} \\
&\leq \gamma\left(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\sum_{F\in\mathcal{F}} \min_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}{\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}\right) - 1.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\mathrm{H}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq \gamma\left(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\sum_{F\in\mathcal{F}} \min_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}{\sum_{F\in\mathcal{F}} \max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{c}_k)}\right)\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{x}^*),$$

其中 $\frac{\sum_{F\in\mathcal{F}}\min_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{c}_k)}{\sum_{F\in\mathcal{F}}\max_{k\in F} f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{c}_k)} \in [0, 1]$。 □

注意，(13) 是 [9]，中讨论的混合不确定性鲁棒优化问题的一个特例，其中不确定集已给定，我们希望求解

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \sum_{F\in\mathcal{F}} m(F) \max_{k\in F} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k),$$

在 [9] 中已证明，对于线性成本函数 f，求解成本向量为 $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_{F\in\mathcal{F}} m(F)\frac{1}{|F|}\sum_{k\in F}\boldsymbol{c}_k$ 时的名义问题 $\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} f(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{c}})$，可得到对式（13）的 $z(\mathcal{F})$-近似。结合定理4，如果底层确定性问题（1）可在多项式时间内求解，我们便能为多种 ROBF问题推导出近似算法，尤其适用于一大类网络问题（全面综述见 [1]）。还请注意，在大多数情况下，如果式（13）是凸问题（尤其是线性规划问题），则 $\gamma = 1$。

7 向可能性优化的扩展

本节将说明如何运用可能性理论（例如参见 [11]）来扩展第3节所述的不确定性模型。我们将沿用 [8]的推理。在第3节采用的不确定性表示中，每个焦元 $F \in \mathcal{F}$ 都可以用特征函数 π_F描述：$[K] \to \{0,1\}$，使得当 $u \in F$时，$\pi_F(u) = 1$；当 $u \notin F$时，$\pi_F(u) = 0$。我们可以将 π_F 解释为证据 F的可能性分布，即索引属于 F 的情景是可能的，而索引不属于 F 的情景是不可能的。可能性分布 π_F 在 $2^{[K]}$上诱导出以下可能性测度和必然性测度：

$$\Pi_F(A) = \max_{u \in A} \pi_F(u) \tag{21}$$

$$\mathrm{N}_F(A) = 1 - \Pi_F(A^c) = \min_{u \notin A}(1 - \pi_F(u)), \tag{22}$$

其中集合 $A^c = [K] \backslash A$ 是 A 的补集。信任函数 (5) 也可表示如下：

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) \mathrm{N}_F(A),$$

这很容易由以下事实得出：当 $F \subseteq A$ 时，$\mathrm{N}_F(A) = 1$；否则，$\mathrm{N}_F(A) = 0$。

模型的一种推广（见 [8]）是允许用 $[K]$ 中的模糊集 F 来表示证据 $\widetilde{\ }$，其隶属函数为 $\mu_{\tilde{F}}$：$[K] \to [0,1]$。我们只假设 $\sim F$ 是正规模糊集，即对于某个 $u \in [K]$，$\mu_{\tilde{F}}(u) = 1$。现在，任何可能性分布 $\pi_{\tilde{\mathcal{F}},\sim}$ $\sim$ $\sim$ $\sim \pi_{\tilde{F}} = \mu_{\tilde{F}}$ 都可用于刻画证据 F，而 $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_\ell\}$ 是 $[K]$ 中一族模糊集，其隶属函数为 $\mu_{\tilde{F}_i}$（可能性分布 $\pi_{\tilde{F}_i}$），$i \in [\ell]$。对于每个模糊焦元 F_i，指定一个质量 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }(F_i) \in (0,1]$，且满足 $\sum_{i \in [\ell]} m(F_i) = 1$。$\widetilde{\ }$带有质量函数 m 的族 $\mathcal{F}$ 可视为一个随机模糊集。

我们可以对这种不确定性表示作如下解释。模糊$\widetilde{\ }$焦元 F_i 是某种证据，决策者据此了解 $\mathcal{U}$ 中的情景（它表$\widetilde{\ }$示了对情景集所掌握的知识）。与前文一样，质量 $m(F_i)$支持这项证据，而质量函数 m 可解释为 $\mathcal{F}$ 中的主观概率分布。关于该模型的详细解释，请参阅 [8]。现在，我们可以按如下方式扩展信任函数的定义：

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}} m(\widetilde{F}) \mathrm{N}_{\widetilde{F}}(A) = \sum_{\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}} m(\widetilde{F}) \min_{u \notin A}(1 - \pi_{\tilde{F}_i}(u)). \tag{23}$$

因此，A 的信任度可视为 A [8]的期望必然性。

与前文一样，$\mathcal{P}(m) \subseteq [0,1]^K$ 是 $[K]$ 中与 m相容的所有概率分布构成的集合，即对于每个 $A \subseteq [K]$，$\mathrm{P}(A) \geq \mathrm{Bel}(A)$。集合 $\mathcal{P}(m)$由线性约束系统（7）刻画，其中信任函数定义如（23）所示。由于对每个$A \subseteq [K]$，$\mathrm{Bel}(A)$都是常数，因此我们得出结论：$\mathcal{P}(m)$是 $[0,1]^K$中的一个多面体。下一条命题表明，$\mathcal{P}(m)$中至少存在一个概率分布。

命题4。集合 $\mathcal{P}(m)$ 非空。

证明。见附录B。 □

下面我们将说明，可能性不确定性模型可以简化为第3节所述的模型。因此，第5节和第6节中给出的所有结果也˜适用于该模型。考虑 $[K]$中的一个模糊集 F。设 $0<\alpha_1<\cdots<\alpha_f=1$ 为一个递增数列，使得集合（α_i-截集或 α_i-水平集）

$$\tilde{F}^{[\alpha_i]}=\{k\in[K]:\pi_{\tilde{F}}(k)\geq\alpha_i\}$$

形成一族嵌套集

$$\widetilde{F}^{[\alpha_1]}\supset\widetilde{F}^{[\alpha_2]}\supset\cdots\supset\widetilde{F}^{[\alpha_f]}.$$

定义 $m_{\tilde{F}}(\widetilde{F}^{[\alpha_1]})=\alpha_1$, $m_{\tilde{F}}(\widetilde{F}^{[\alpha_i]})=\alpha_i-\alpha_{i-1}$，其中 $i=2,\ldots,f$，并对 $[K]$ 的所有其余子集定义 $m_{\tilde{F}}(B)=0$。注意到

$$\sum_{A\subseteq[K]}m_{\tilde{F}}(A)=\sum_{i=1}^{f}m_{\tilde{F}}(F^{[\alpha_i]})=1. \tag{24}$$

命题5. 对任意子集 $A\subseteq[K]$，以下等式成立：

$$\mathrm{N}_{\tilde{F}}(A)=\sum_{B\subseteq A}m_{\tilde{F}}(B). \tag{25}$$

证明. 若对每个 $i\in[f]$ 都有 $\tilde{F}^{[\alpha_i]}\not\subseteq A$，则 $\mathrm{N}_{\tilde{F}}(A)=\min^{u\notin A}(1-\pi_{\tilde{F}}(u))=0$，且 (25) 成立。若对每个 $i\in[f]$ 都有 $\tilde{F}^{[\alpha_i]}\subseteq A$，则 $\mathrm{N}_{\tilde{F}}(A)=\min^{u\notin A}(1-\pi_{\tilde{F}}(u))=1$，且 (25) 也成立。令 $j=2,\ldots,f$ 为满足 $\tilde{F}^{[\alpha_j]}\subseteq\cdots\subseteq\tilde{F}^{[\alpha_f]}\subseteq A$ 的最小数。于是，

$$\mathrm{N}_{\tilde{F}}(A)=\min_{u\notin A}(1-\pi_{\tilde{F}}(u))=1-\alpha_{j-1}.$$

另一方面，

$$\sum_{B\subseteq A}m_{\tilde{F}}(B)=\sum_{i=j}^{f}m_{\tilde{F}}(\widetilde{F}^{[\alpha_i]})=(1-\alpha_{f-1})+(\alpha_{f-1}-\alpha_{f-2})+\cdots+(\alpha_j-\alpha_{j-1})=1-\alpha_{j-1},$$

这意味着式（25）。 □

利用命题5，我们可以将式（23）表示为以下形式：

$$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{\widetilde{F}\in\widetilde{\mathcal{F}}}m(\widetilde{F})\mathrm{N}_{\widetilde{F}}(A)=\sum_{\widetilde{F}\in\widetilde{\mathcal{F}}}m(\widetilde{F})\sum_{B\subseteq A}m_{\tilde{F}}(B)=\sum_{B\subseteq A}\sum_{\widetilde{F}\in\widetilde{\mathcal{F}}}m(\widetilde{F})m_{\tilde{F}}(B). \tag{26}$$

定义

$$m'(A)=\sum_{\widetilde{F}\in\widetilde{\mathcal{F}}}m(\widetilde{F})m_{\tilde{F}}(A),\ A\subseteq[K].$$

利用（24）以及 m 是 $\mathcal{F}$ 中的质量函数这一事实，我们得出，对于任意 $A\subseteq[K]$，$m'(A)\geq0$，且 $\sum_{A\subseteq[K]}m'(A)=1$。因此，$m'$ 是定义在 $2^{[K]}$ 中的质量函数，而信任函数（23）可以等价地定义为

$$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{B\subseteq A}m'(A).$$

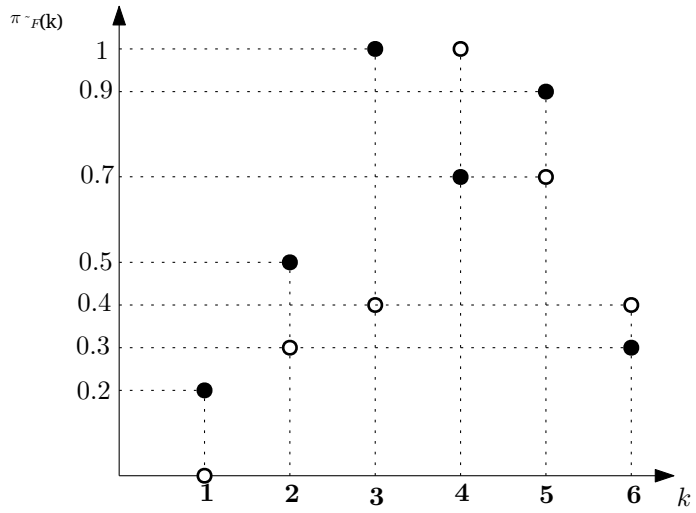

图1：对于$K = 6$ 个情景，具有$\pi_{\tilde{F}_1}$： $1 \mapsto 0.2$、 $2 \mapsto 0.5$、 $3 \mapsto 1$、 $4 \mapsto 0.7$、 $5 \mapsto 0.9$、 $6 \mapsto 0.3$（实心圆）和$\pi_{\tilde{F}_2}$： $1 \mapsto 0$、 $2 \mapsto 0.3$、 $3 \mapsto 0.4$、 $4 \mapsto 1$、 $5 \mapsto 0.7$、 $6 \mapsto 0.4$ （空心圆）的两个模糊集。

这一事实使我们能够将第5节和第6节中的所有结果应用于可能性不确定性模型。还请注意，新质量函数 m' 的焦元 $\mathcal{F}'$ 的大小至多为 $K\ell$，因此它受 K 和 ℓ 多项式有界。

考虑一个样本集 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2\}$，其中 $m(F_1) = 0.4$、 $m(F_2) = 0.6$ 适用于 $K = 6$ 个情景，如图1所示。对于模糊集，我们构造序列，从而得到$\mathcal{F}^{[0.7]} = \{3, 4, 5\}$ $\mathcal{F}^{[0.9]} = \{3, 5\}$ $\mathcal{F}^{[1]} = \{3\}$ $0 < 0.2 < 0.3 < 0.5 < 0.7 < 0.9 < 1$ $\mathcal{F}^{[0.2]} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\mathcal{F}^{[0.3]} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\mathcal{F}^{[0.5]} = \{2, 3, 4, 5\}$ F_1 F_2 。对于该模糊集，相应的序列为 $0 < 0.3 < 0.4 < 0.7 < 1$，以及 $\mathcal{F}^{[0.3]} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$、 $\mathcal{F}^{[0.4]} = \{3, 4, 5, 6\}$、 $\mathcal{F}^{[0.7]} = \{4, 5\}$和$\mathcal{F}^{[1]} = \{4\}$。 $\tilde{\mathcal{F}}$ 的质量函数 m' 如表2所示。

表2： $\mathcal{F} = \{F_1, F_2\}$的质量函数 $m'(A)$。

A	$m_{\tilde{F}_1}(A)$	$m_{\tilde{F}_2}(A)$	$m'(A)$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	0.2	0	0.08
$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	0.1	0.3	0.22
$\{2, 3, 4, 5\}$	0.2	0	0.08
$\{3, 4, 5\}$	0.2	0	0.08
$\{3, 5\}$	0.2	0	0.08
$\{3\}$	0.1	0	0.04
$\{3, 4, 5, 6\}$	0	0.1	0.06
$\{4, 5\}$	0	0.3	0.18
$\{4\}$	0	0.3	0.18

8 结论

本文讨论了目标函数存在不确定性时进行优化的一种新方法。我们假设这种不确定性由信任函数描述，该函数基于

赋予情景子集的质量。这些质量表示相应事件（情景子集）的主观概率，决策者可以提供这些质量，以将有关问题参数的额外知识纳入考量。信任函数会导出一组概率分布，使得每个事件的概率都不低于其信任度。我们采用广义赫维茨准则来计算解。该准则允许我们在所有与信任函数相容的概率分布下，权衡解的最坏情形性能与最好情形性能。最坏情形性能与分布鲁棒优化相一致，而分布鲁棒优化近年来已受到广泛关注。对于质量函数的某些特定取值，我们的方法可转化为优化 OWA 准则，而该准则本身已得到充分研究。

本文指出，不确定线性规划问题的一个特殊情形是 NP 困难问题，且难以近似。另一方面，我们还描述了该问题的一些情形，这些情形可以在多项式时间内求解或近似。最后，我们将研究框架扩展到具有可能性解释的模糊集。在这种情况下，情景以介于零和一之间的某些度隶属于焦元集。我们证明，模糊情形可以在多项式时间内归约为此前的传统情形，而且传统情形的所有结果仍然适用。

致谢

Marc Goerigk 部分获得德国研究联合会（DFG）项目资助，项目编号 GO 2069/2-1。Adam Kasperski 和 Pawe l Zieli ´nski 获得波兰国家科学中心项目资助，项目编号 2022/45/B/HS4/00355。

参考文献

[1] R. K. Ahuja、T. L. Magnanti 和 J. B. Orlin。《网络流：理论、算法与应用》。普伦蒂斯·霍尔，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1993。[2] A. Ben-Tal、L. El Ghaoui 和 A. Nemirovski。《鲁棒优化》。普林斯顿应用数学系列。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。[3] S. Boyd 和 L. Vandenberghe。《凸优化》。剑桥大学出版社，2004。[4] A. B. Chassein 和 M. Goerigk。有序加权平均目标函数的替代表述。《信息处理快报》，115：604–608，2015。[5] E. Delage 和 Y. Ye。矩不确定性下的分布鲁棒优化及其在数据驱动问题中的应用。Operations Research，58：595–612，2010。[6] A. Dempster。由多值映射诱导的上概率和下概率。《数学统计年鉴》，38：325–339，1967。[7] T. Denoeux。基于信任函数的决策：综述。International Journal of Approximate Reasoning，109：87–110，2019。[8] T. Denoeux。由随机模糊集诱导的信任函数：表示不确定和模糊证据的通用框架。《模糊集与系统》，424：63–91，2021。

[9] T. Dokka、M. Goerigk 和 R. Roy。鲁棒组合优化的混合不确定集。Optimization Letters，14(6)：1323–1337，2020。[10] T. Driessen。《合作博弈、解与应用》。Kluwer Academic Publishers，1988。[11] D. Dubois 和 H. Prade。《可能性理论：一种不确定性计算机处理方法》。Plenum Press，纽约，1988。[12] D. Dubois 和 H. Prade。信任函数的协调近似。International Journal of Approximate Reasoning，4(5-6)：419–449，1990。[13] R. Guillaume、A. Kasperski 和 P. Zieli´nski。利用随机模糊集进行带情景的鲁棒优化。载于《2021 IEEE国际模糊系统会议》（FUZZ- IEEE），第1–6页，2021。[14] R. Guillaume、A. Kasperski 和 P. Zieli´nski。利用信任函数进行带情景的鲁棒优化。载于 N. Trautmann 和 M. Gn¨agi 编，《2021年运筹学会议论文集》，第114–119页，Cham，2022。Springer International Publishing。[15] A. Kasperski 和 P. Zieli´nski。具有不确定成本的组合优化问题与 OWA 准则。Theoretical Computer Science，565：102–112，2015。[16] A. Kasperski 和 P. Zieli´nski。《离散和区间不确定性下的鲁棒离散优化：综述》。载于《决策辅助、优化与分析中的鲁棒性分析》，第113–143页。Springer-Verlag，2016。[17] R. Kohli、R. Krishnamurti 和 P. Mirchandani。最小可满足性问题。SIAM离散数学杂志，7：275–283，1994。[18] P. Kouvelis 和 G. Yu。《鲁棒离散优化及其应用》。Kluwer Academic Publishers，1997。[19] W. Ogryczak。非精确概率下的风险鲁棒决策。载于 Y. Ermoliev、M. Makowski 和 K. Marti 编，《异构系统安全管理》，第51–66页。Springer-Verlag，2012。[20] W. Ogryczak 和 P. Olender。关于OWA优化的混合整数线性规划模型。Journal of Telecommunications and Information Technology，2：5–12，2012。[21] H. E. Scarf。n人博弈的核心。Econometrica，35：50–69，1967。[22] G. Shafer。《证据数学理论》。Princt. Univ. Press，1976。[23] W. Wiesemann、D. Kuhn 和 M. Sim。分布鲁棒凸优化。Operations Research，62：1358–1376，2014。[24] R. R. Yager。多准则决策中的有序加权平均聚合算子。IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics，18：183–190，1988。

方程 (8) 和 (9) 的证明

证明。 $\mathcal{P}(m)$ 中的任意元素 P 均可按如下方式得到（见 [6, 7]）。设 $a(k,F) \geq 0, k \in [K]$, $F \in \mathcal{F}$ 为满足以下方程组的非负数:

$$\sum_{k \in F} a(k,F) = m(F),\ F \in \mathcal{F}. \tag{27}$$

因此， $a(k,F)$ 可以解释为焦元 $F \in \mathcal{F}$ 分配给情景 $k \in [K]$ 的质量 $m(F)$ 的一部分。于是

$$p_k = \sum_{\{F \in \mathcal{F}:\ k \in F\}} a(k,F),\ k \in [K]. \tag{28}$$

利用方程 (27) 和 (28)，我们可以将 (8) 的左侧表示为以下线性规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in [K]} \sum_{\{F \in \mathcal{F}: k \in F\}} a(k,F) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) \\ & \sum_{k \in F} a(k,F) = m(F) && F \in \mathcal{F} \\ & a(k,F) \geq 0 && F \in \mathcal{F}, k \in [K] \end{aligned}$$

交换目标函数中的求和次序后，我们得到等价的表述 n:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{F \in \mathcal{F}} \sum_{k \in F} a(k,F) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k) \\ & \sum_{k \in F} a(k,F) = m(F) && F \in \mathcal{F} \\ & a(k,F) \geq 0 && F \in \mathcal{F}, k \in [K] \end{aligned} \tag{29}$$

容易验证，在 (29) 的最优解中，可以令 $a(k^*,F) = m(F)$，其中 $k^* = \arg\max_{k \in F} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k)$，并令 $a(k, F) = 0$，其中 $k \in F \setminus \{k^*\}$，对每个 $F \in \mathcal{F}$ 均成立。因此，(29) 等价于 (8) 的右侧。(9) 的证明类似。 □

B 命题4的证明

证明。首先证明必然性测度是超模的，即

$$\mathrm{N}(A \cup B) + \mathrm{N}(A \cap B) \geq \mathrm{N}(A) + \mathrm{N}(B)$$

对于任意 $A, B \subseteq [K]$。事实上，$\mathrm{N}(A \cup B) \geq \max\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\}$，因为 $1 - \max^{u \in (A \cup B)^c} \pi(u) \geq 1 - \max_{u \in A^c} \pi(u)$ 且 $1 - \max^{u \in (A \cup B)^c} \pi(u) \geq 1 - \max_{u \in B^c} \pi(u)$。因此，$\mathrm{N}(A \cup B) + \mathrm{N}(A \cap B) \geq \max\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\} + \min\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\} = \mathrm{N}(A) + \mathrm{N}(B)$。等式 $\mathrm{N}(A \cap B) = \min\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\}$ 由必然性测度满足的极小性公理 [11] 推出。超模性也可以等价地表述为（参见例如 [10]）

$$\mathrm{N}(A \cup \{i\}) - \mathrm{N}(A) \geq \mathrm{N}(B \cup \{i\}) - \mathrm{N}(B) \tag{30}$$

对于每个 $B \subseteq A$ 和 $i \notin A$。现在很容易看出，信任函数 Bel 也是超模的，即对于每个 $B \subseteq A$ 和 $i \notin A$，$\mathrm{Bel}(A \cup \{i\}) - \mathrm{Bel}(A) \geq \mathrm{Bel}(B \cup \{i\}) - \mathrm{Bel}(B)$。

该不等式直接由（30）以及信任函数是必然性测度的锥形（非负）线性组合这一事实得到。对于 $\mathcal{P}(m)$，约束（7）描述了一个参与者集合为 $[K]$ 、特征函数为 Bel 的凸博弈的核心。这类博弈的核心（因而 $\mathcal{P}(m)$）非空（例如参见 $[21]$）。

□