基于异形凸轮-弹簧机构的一般非线性机械模型

Qiangqiang Li，Qingjie Cao

非线性动力学研究中心，航天学院，哈尔滨工业大学，中国哈尔滨 *150001*

摘要

非线性系统广泛存在于自然界中，然而，如何人工构建具有精确预期非线性的系统仍然是一个难题，这在很大程度上限制了相关的实验研究和工程应用。本文提出了一种基于异形凸轮-弹簧机构（SCSM）的一般非线性机械模型（GNMM）。GNMM由质量块、滚轮、轨迹和一种新型广义弹簧模型（GSM）组成。首先，推导运动方程，并将其与SCSM的运动方程进行比较。然后，推导任意给定连续力对应的滚子轨迹函数。最后，以构建具有软化非线性的杜芬系统为设计示例。本文结果表明，GNMM具有比SCSM更广义的恢复力，并证明对于给定的具有连续恢复力的非线性系统，至少存在六种相互独立的机械构型。

关键词：边界非线性；凸轮-弹簧机构；通用弹簧模型；非线性恢复力；杜芬系统

1. 引言

非线性系统广泛存在于自然界中，但如何通过人工方式构建具有精确预期非线性的系统，仍是一个难题，这限制了非线性系统的实验研究和工程应用。近年来，由于非线性特性直接决定了应用于振动隔离、振动能量采集和机器人工程等领域的机械系统的性能，设计具有预期非线性的机械系统受到了广泛关注[1-4]。

迄今为止，设计具有预期非线性的机械系统主要有两种方法。第一种方法是将线性弹簧与一根缠绕在非圆滑轮上的绳索连接，该滑轮作线性旋转，从而产生非线性转矩[1]。通过设计滑轮轮廓，可以获得预期的非线性转矩。这项工作可追溯至法国科学家 Michel Jean，他最早采用这种方法，于1965[5]构建出杜芬系统的精确机械结构。第二种方法是将线性弹簧与一个可沿异形凸轮滑动的滚轮连接。当凸轮沿垂直于弹簧变形方向的方向运动时，便可产生非线性恢复力；通过设计相应形状的凸轮，可以对其进行精确设计[2-4]。总的来说，这两种方法的核心构造思路都是为线性弹簧引入非线性边界条件，以产生预期的非线性。相比之下，第一种方法设计的机构只能产生单向转矩，因为绳索只能被拉动；因此，采用第二种方法构建预期的非线性机械系统已成为主流。

本文的研究动机与贡献包括：（i）通过创造性地将广义弹簧模型（GSM）（具有正刚度或负刚度）引入异形凸轮-弹簧机构（SCSM），提出一种更一般的非线性机械模型（GNMM）；（ii）证明具有连续恢复力的非线性系统至少存在六种机械构型。

本文其余部分安排如下：第 2 节构建 GSM，并在此基础上构建 GNMM。第 3 节提出并求解逆问题，即针对任意给定的连续力计算相应滚子轨迹函数。第 4 节以构建具有软化非线性的杜芬系统作为设计示例。最后，第 5 节总结本研究的结论。

2. 广义非线性机械模型

1.1. GSM

图 1 展示了 GSM 模型，该模型由线性弹簧（正刚度元件）与双翅目昆虫飞行机制[6]（负刚度元件）并联连接而成。GSM 由一根刚度为 K_1，的竖直弹簧、一对长度为 L 的刚性杆，以及一对刚度为 K_2、原长为 L_0 的斜置弹簧组成。整个系统初始处于平衡位置，此时竖直弹簧未受力，且两根杆相对于水平方向均无倾角，如图 2(a) 所示。沿 Y 方向对滚轮 M 施加外力后，如图 2(b) 所示，滚轮会偏离平衡位置，产生位移 Y. 当 Y=L 时，滚轮将被两根杆锁住，如图 2(c) 所示，因此 GSM 的有效工作范围限制在 $|Y|$<L 以内。

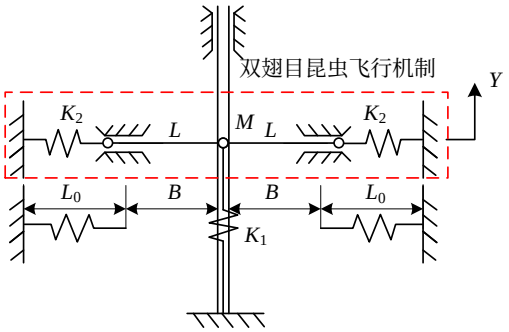

图1. GSM示意图。

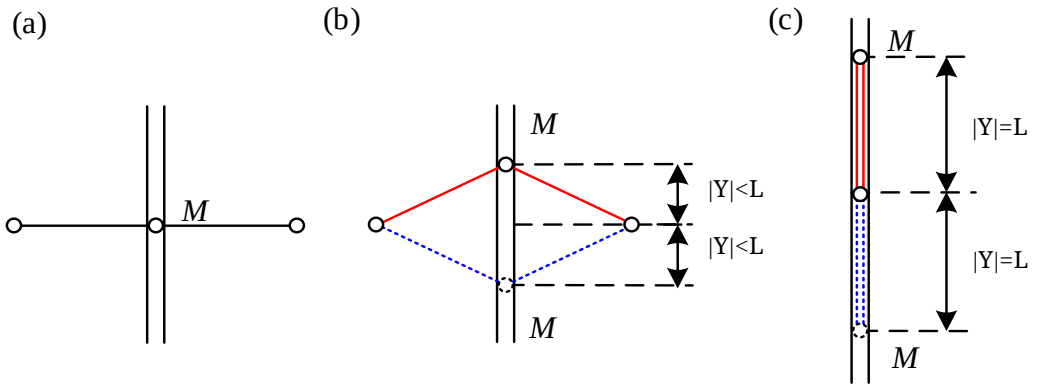

图 2. GSM 的三种不同静态状态：(a) 处于平衡位置；(b) 偏离平衡位置，位移为 Y；(c) 处于“锁定”位置。

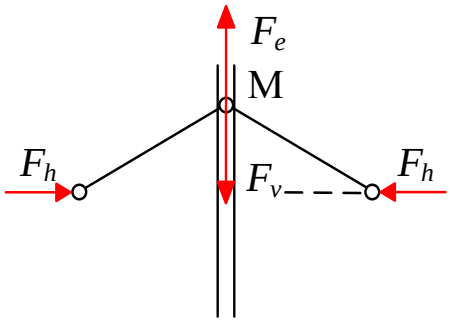

图 3. GSM 受力分析图

根据图（3）所示的受力分析，可推导出施加力与位移之间的关系：

$$F_e = K_1 Y - 2K_2\left(1 - \frac{B}{\sqrt{L^2 - Y^2}}\right)Y, |Y| < L \tag{1}$$

其中，B为水平弹簧处于平衡位置时两内端之间距离的一半。将式（1）的第一个表达式对位移Y求导，可得 GSM 的刚度：

$$K_{GSM} = K_1 - 2K_2 + \frac{2K_h BL^2}{\left(L^2 - Y^2\right)^{3/2}}, |Y| < L. \tag{2}$$

当B =0时，式（3）可改写为：

$$K_{GSM} = K_1 - 2K_2. \tag{3}$$

由式（3）可知，GSM 的刚度由两个参数决定：竖直弹簧刚度K_v 和斜弹簧刚度K_h。通过调节这两个参数，可以获得负、零或正线性刚度，这意味着 GSM 可作为通用线性弹簧工作。与传统弹簧相比，不同之处在于，当 GSM 作为负刚度弹簧工作时，其变形方向与传统弹簧相同，但弹簧力的作用方向相反。

1.2. GNMM

基于通用弹簧 GSM，建立了 GNMM，如图 4(b) 所示。它由质量块、轨迹（与质量块固连）和 GSM 组成。与图 4(a) 所示的 SCSM 相比，其基本几何构型（在线性弹簧上设置非线性边界）并未改变，改进之处在于：1）将摄像头抽象为一条轨迹，该轨迹不仅可以受压，也可以受拉；2）用具有正刚度或负刚度的 GSM 替代传统线性弹簧。

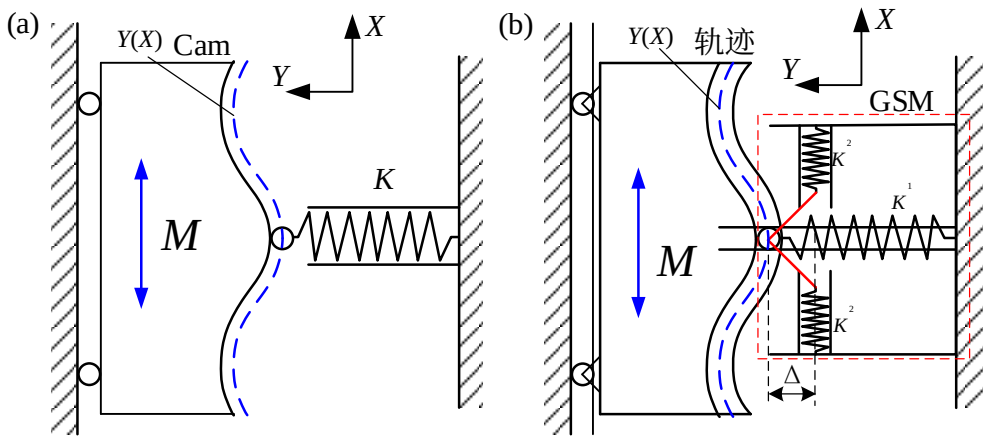

图4. [3] 所示的（a）SCSM和（b）GNMM的物理模型

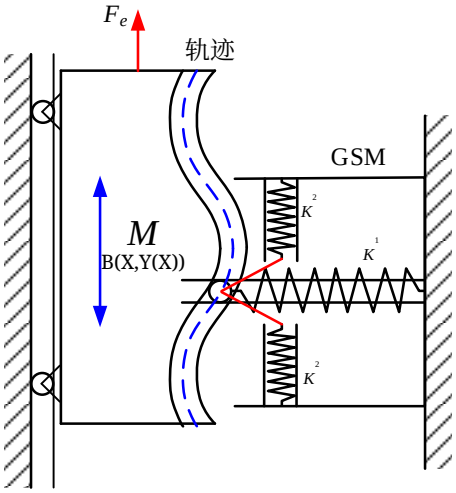

图5. GNMM在外力作用下偏离初始位置。

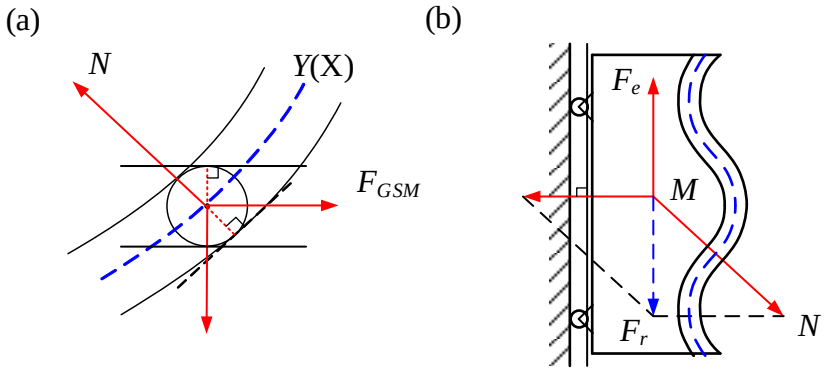

图6. （a）滚轮和（b）质量块的受力分析图。

为清楚描述 GNMM 的静态特性，沿F_e 方向对X中的集中质量施加外力。未施加外力时，

GSM预拉伸（也允许处于预压缩状态）长度为Δ时的初始位置。在施加力的作用下，质量块

在此过程中，尽管GSM充当线性弹簧，但由于非线性轨道的作用，会沿Y方向产生相对于位移X 的非线性弹簧力F_{GSM}，如图6(a)所示。非线性轨道不仅在使GSM非线性化方面发挥着重要作用，还通过支撑力N的反作用力N'将非线性弹簧力转换到运动方向上，如图6(b)所示，从而产生与施加力大小相等、方向相反的非线性恢复力F_r。

根据GNMM的静力分析，在施加力的作用下，GSM相对于位移X的非线性弹簧力可表示为

$$F_{GSM}(X)=-K_{GSM}Y(X) \tag{4}$$

将F_{GSM}转换为运动方向上的力，可推导出 GNMM 的恢复力，并写为

$$F(X)=-K_{GSM}Y(X)\frac{dY(X)}{dX} \tag{5}$$

假设不考虑系统的阻尼和摩擦，则可推导出无外部激励时 GNMM 的运动方程，写为

$$M\ddot{X}+K_{GSM}Y(X)\frac{dY(X)}{dX}=0 \tag{6}$$

其定义域写为

$$X\in\{X\mid -L<Y(X)<L\} \tag{7}$$

由式（6）可知，GNMM 的恢复力是关于$Y(X)$的一阶微分表达式，在定义域内必须满足一阶导数存在。与[6], 所给

度参数可以取任意实数（不局限于正数），且$Y(X)$关于$Y(X)=0$ 的定义范围对称（不限于 $[-\Delta_{max},\ 0]$ 其中 Δ_{max} 是传统线性弹簧的最大压缩量）。

3. 滚轮轨迹函数

与上文讨论的 GNMM 构建过程不同，实际设计过程是一个逆问题，即求解关于$Y(X)$的

$$\begin{cases} -K_{GSM}Y(X)\dfrac{dY(X)}{dX}=F(X), \\ Y(0)=\Delta, \\ -L<Y(X)<L. \end{cases} \tag{8}$$

对于给定的连续恢复力 $F(X)$，其通解可表示为。

$$Y_{1,2}(X)=\pm\sqrt{\Delta^2-\frac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid\Delta^2-L^2<\frac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<\Delta^2\right\}. \tag{9}$$

当 $\Delta\neq 0$ 时，根据 K_{GSM} 的符号，$Y_{1,2}(X)$ 可分为四种不同形式：

$$\begin{cases} Y_{11}(X)=\sqrt{\Delta^2-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid\Delta^2-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<\Delta^2,K_{RSS}>0\right\}. \\ Y_{12}(X)=\sqrt{\Delta^2-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid\Delta^2-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<\Delta^2,K_{RSS}<0\right\} \\ Y_{21}(X)=-\sqrt{\Delta^2-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid\Delta^2-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<\Delta^2,K_{RSS}>0\right\} \\ Y_{22}(X)=-\sqrt{\Delta^2-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid\Delta^2-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<\Delta^2,K_{RSS}<0\right\} \end{cases}. \tag{10}$$

当 $\Delta=0$ 时，根据 K_{GSM} 的符号，$Y_{1,2}(X)$ 可分为四种新的不同形式：

$$\begin{cases} Y_{13}(X)=\sqrt{-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<0,K_{RSS}>0\right\}. \\ Y_{14}(X)=\sqrt{-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<0,K_{RSS}<0\right\} \\ Y_{23}(X)=-\sqrt{-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<0,K_{RSS}>0\right\} \\ Y_{24}(X)=-\sqrt{-\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX},X\in\left\{X\mid-L^2<\dfrac{2}{K_{GSM}}\int_0^X F(X)dX<0,K_{RSS}<0\right\} \end{cases}. \tag{11}$$

由公式（10）给出的解，根据连续函数的介值定理，可以很容易证明，对于任意连续的$F(X)$都始终存在。对于公式（11）给出的解，在()的条件下，Y_{13} 和Y_{14}（Y_{23} 和Y_{24}）不存在；而在其他条件下，Y_{13}, Y_{14}, Y_{23} 和Y_{24} 同时存在。因此，公式（8）至少有六个、至多有八个解，这意味着，对于给定的具有连续恢复力的非线性系统，基于GNMM，至少可以在物理世界中找到六种机械构型。

4. 设计示例: ¨−5×10^3 ^3 = 0MX X

具有软化非线性的杜芬系统的一般表达式可写为

$$M\ddot{X}+AX^3=0 \tag{12}$$

其中 A i 为负常数。将系统（12）的恢复力与式（9）结合可得 s

$$Y_{1,2}(X)=\pm\sqrt{\Delta^2+\frac{A}{2K_{GSM}}X^4}, X\in\left\{X\,|-\Delta^2<\frac{A}{2K_{GSM}}X^4<L^2-\Delta^2\right\}. \tag{13}$$

可分为六个有效解:

$$\begin{cases} Y_{11}(X)=\sqrt{\Delta^2+\frac{A}{2K_{GSM}}X^4}, X\in\left\{X\,|-\left(-\frac{2K_{GSM}\Delta^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}<X<\left(-\frac{2K_{GSM}\Delta^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}, K_{GSM}>0\right\} \\ Y_{12}(X)=\sqrt{\Delta^2+\frac{A}{2K_{GSM}}X^4}, X\in\left\{X\,|-\left(\frac{2K_{GSM}\left(L^2-\Delta^2\right)}{A}\right)^{\frac{1}{4}}<X<\left(\frac{2K_{GSM}\left(L^2-\Delta^2\right)}{A}\right)^{\frac{1}{4}}, K_{GSM}<0\right\} \\ Y_{13}(X)=\sqrt{\frac{A}{2K_{GSM}}}X^2, X\in\left\{X\,|-\left(-\frac{2K_{GSM}L^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}<X<\left(-\frac{2K_{GSM}L^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}, K_{GSM}<0\right\} \\ Y_{21}(X)=-\sqrt{\Delta^2+\frac{A}{2K_{GSM}}X^4}, X\in\left\{X\,|-\left(\frac{2K_{GSM}\Delta^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}<X<\left(\frac{2K_{GSM}\Delta^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}, K_{GSM}>0\right\} \\ Y_{22}(X)=-\sqrt{\Delta^2+\frac{A}{2K_{GSM}}X^4}, X\in\left\{X\,|-\left(\frac{2K_{GSM}\left(L^2-\Delta^2\right)}{A}\right)^{\frac{1}{4}}<X<\left(\frac{2K_{GSM}\left(L^2-\Delta^2\right)}{A}\right)^{\frac{1}{4}}, K_{GSM}<0\right\} \\ Y_{23}(X)=-\sqrt{\frac{A}{2K_{GSM}}}X^2, X\in\left\{X\,|-\left(-\frac{2K_{GSM}L^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}<X<\left(-\frac{2K_{GSM}L^2}{A}\right)^{\frac{1}{4}}, K_{GSM}<0\right\} \end{cases} \tag{14}$$

(15)

假设非线性系数 A 设为 -5000 Nm^{-4}，物理参数K_{GSM}, Δ 分别取 100 Nm^{-1}/-100Nm^{-1} 和 0.1 m/-0.1 m。根据式（14）给出的滚子轨迹函数，图7（a-f）分别绘出了 GNMM 对应的机械构型。可以看出，模型（a）是 GNMM 的一个特例，其K_{GSM}>0, Δ>0，对应于 SCSM 的机械构型。得益于 GSM 的刚度通用性，可以基于 GNMM 构建模型（b）（K_{GSM}<0, Δ>0）和模型（c）（K_{GSM}<0, Δ=0）。此外，由于 GNMM 的势能是Y（X）的偶函数（相同的势能函数意味着相同的恢复力），模型（e-f）

也可以分别得到与模型（e-f）关于X轴对称的滚子轨迹。这六种模型就像物理世界中的六胞胎，是杜芬系统数学模型的镜像：。

$$\ddot{X}-5\times10^{3}\ X^{3}=0$$

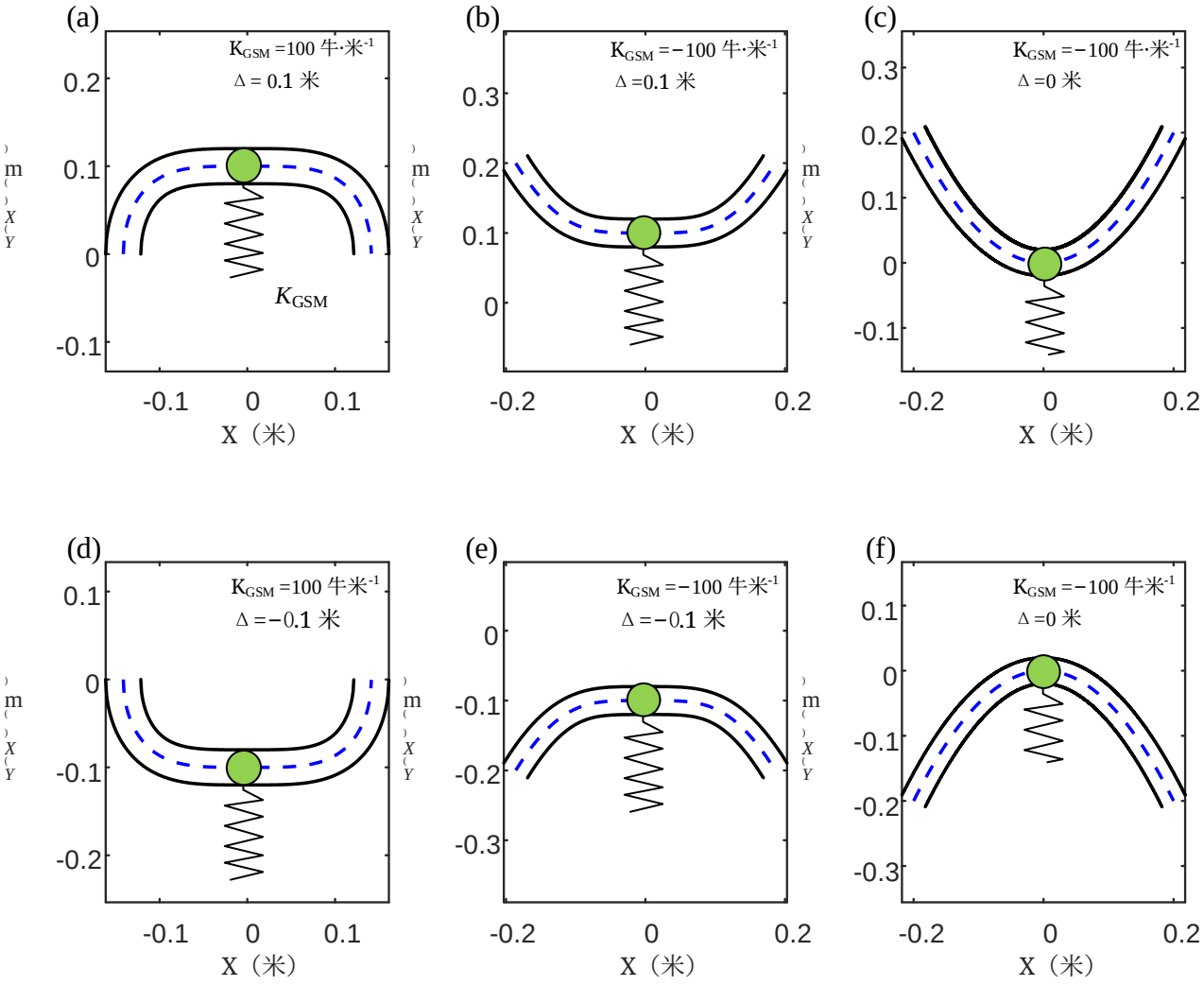

图7. 杜芬系统的六种不同机械构型：。

$$\ddot{X}-5\times10^{3}\ X^{3}=0$$

5. 结论

本研究通过将 GSM 引入 SCSM，提出了一般非线性机械模型（GNMM）。推导了其运动方程，并与 SCSM 的运动方程进行了比较。推导出了任意给定连续力对应的滚子轨迹函数。以具有软化非线性的杜芬系统为例进行了设计。主要结论如下：

（i）与 SCSM 相比，GNMM 是一种更通用的模型，其恢复力由下式给出

$$F(X)=-K_{GSM}Y(X)\frac{dY(X)}{dX},X\in\{X\mid -L<Y(X)<L\}.$$

（ii）对于具有连续恢复力的给定非线性系统，基于 GNMM 至少可以得到六种机械构型。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在任何已知的可能影响本文所报告研究的竞争性财务利益或个人关系。

作者声明

Qiangqiang Li：方法论、撰写初稿、调查**Qingjie Cao**：撰写、审阅与编辑、项目管理、资源

致谢

作者谨向 Michel Jean 教授致谢，感谢他无私提供其于1965年撰写的博士论文英文翻译稿。

参考文献

[1] N. Schmit, M. Okada，设计并实现一种非圆形缆绳卷筒，以合成非线性旋转弹簧，Advanced Robotics 26 (2012) 235-252. 10.1163/156855311x614545[2] D. Zou, G. Liu, Z. Rao, T. Tan, W. Zhang, W.-H. Liao，一种可定制非线性力的装置，用于振动能量采集、振动隔离和非线性能量阱，Mechanical Systems and Signal Processing 147 (2021). 10.1016/j.ymssp.2020.107101[3] D. Zou, G. Liu, Z. Rao, Y. Zi, W.-H. Liao，设计一种具有分段非线性的宽频压电能量采集器，Smart Materials and Structures 30 (2021). 10.1088/1361-665X/ac112c[4] S. Zuo, D. Wang, Y. Zhang, Q. Luo，抛物线摄像头-滚轮准零刚度振动隔离器的设计与测试，International Journal of Mechanical Sciences 220 (2022). 10.1016/j.ijmecsci.2022.107146[5] M. Jean，关于力学微分方程周期解的研究（博士论文），载于艾克斯-马赛大学，1965年。[6] Q. Cao, Y. Xiong, M. Wiercigroch，双翅目昆虫飞行机制的新模型，International Journal of Dynamics & Control 1 (2013) 1-11。