arXiv:2303.05120v1 [stat.ME] 9 Mar 2023

# 伽马回归的不等式约束估计量：解决多重共线性的贝叶斯方法

SolmazSeifollahi[1], Hossein Bevrani[1] 和 Kaniav Kamary[2]1 大不里士大学数学科学学院
统计系，伊朗大不里士2 F´ed´eration Math´ematique, CentraleSup´elec, Universit´e Paris-Saclay, 伊韦特河畔吉夫，法国 s.seifollahi@tabrizu.ac.ir;
bevrani@tabrizu.ac.ir;kaniav.kamary@centralesupelec.fr

摘要： 本文探讨伽马回归模型中模型参数受到线性约束时的多重共线性问题。线性约束可基于先验信息获得，以确保科学理论的有效性，或确保基于物理现象的结构一致性。为了对模型进行相关的统计推断，应将任何可用知识以及关于模型参数的先验信息纳入考量。因此，本文提出一种算法，用于获取受某些线性不等式约束的伽马回归模型参数的贝叶斯估计量。随后，我们通过蒙特卡罗模拟和对真实数据集的应用表明，在适用性和准确性方面，所提出的估计量优于最大似然估计量和岭估计量等普通估计量。

关键词和短语：贝叶斯推断、伽马回归模型、线性不等式约束、先验建模。

*MSC2020* 学科分类：62F15；62J12。

## 1 引言

伽马回归模型是评估医学、卫生保健经济学和汽车保险索赔数据的一种著名方法。当我们处理服从伽马分布、呈正偏态的连续数据时，它为响应变量的建模和预测提供了一种有效而灵活的方法。一般而言，对于广义线性回归模型，通常会假设协变量完全独立，以简化估计过程。然而，这一假设在实践中并非总是成立，并会导致多重共线性问题。多重共线性的后果之一是，伽马回归模型系数的最大似然估计变得不可靠，方差较大，进而导致统计显著性降低（Dunder 等人 2016，Malehi 等人 2016）。为解决多重共线性问题，人们提出了各种补救方法。例如，Segerstedt（1992）在广义线性模型中采用了岭估计量。此外，在

某些情况下，我们必须根据对模型参数已有的先验知识，对回归参数施加一些线性不等式约束。例如，在高光谱成像中，出于物理方面的考虑，系数参数应为非负（Manolakis 和 Shaw 2002）。其他例子还见于天文学和动物学领域（Wang 和 Ghosh 2012）、大地测量学领域（Zhu 等人 2005），以及经济学和生物学领域（Silva-pulle 和 Sen 2005）。人们已广泛研究线性回归模型中的线性不等式约束，以求得最小二乘估计量及其性质，例如偏差、均方误差，以及其在不等式约束下的效率（参见 Judge 和 Takayama（1966年）、Liew（1976年）、Lovell 和 Prescott（1970年）、Escobar 和 Skarpness（1987年，1986年），以及 Ohtani（1987年））。近年来，在大数据领域，研究已证明，在不使用任何正则化的情况下，将非负约束纳入线性回归模型（Meinshausen 2013，Slawski 和 Hein 2013）以及广义线性模型（Koike 和 Tanoue 2019），可以实现稀疏性。显然，忽略这类信息会影响模型估计过程，并降低预测的准确性。贝叶斯方法会考虑关于模型参数的所有可用先验信息，并将其与样本中所含信息提供的证据结合起来，以指导统计推断过程。因此，贝叶斯模型总能便捷地将基于线性不等式约束的此类先验信息纳入模型估计过程。Geweke（1986年，1996年）、Neal（2003年）、Neelon 和 Dunson（2004年），以及近期的 Veiga 和 Marrel（2020年），都是研究受线性不等式约束的线性回归模型贝叶斯推断的例子。总体而言，关于参数受线性不等式约束时贝叶斯推断的文献，大多聚焦于线性回归模型。然而，在许多适用广义线性模型的研究中，这类约束也很常见。对于广义线性模型，Ghosal 和 Ghosh（2021年）提出了一种算法，可在若干并非总能满足的条件下，基于线性不等式约束进行贝叶斯估计。例如，采用对数连接函数的伽马回归模型并不满足 Ghosal 和 Ghosh（2021年）的条件。本文针对模型参数受到线性不等式约束且存在多重共线性的情况，提出一种对伽马回归模型进行统计推断的贝叶斯解决方案。

本文结构如下：第 2 节介绍伽马回归模型，并定义回归参数的最大似然估计量。第 3 节介绍满足线性不等式约束的模型的贝叶斯估计方法。随后，我们在第 4 节通过两项模拟研究，将所提出的贝叶斯估计量与现有方法进行比较。第 5 节进行真实数据集分析，最后在第 6 节总结全文。

## 2 伽马回归模型与最大似然估计

伽马回归模型用于对具有类似伽马分布的正偏分布的响应变量进行建模。设 $y_1, y2, \cdots, y_n$ 为响应变量 $y$的随机样本。伽马概率分布函数的常见形式定义如下

:

$$f(y_i|\tau,\delta_i)=\frac{1}{\Gamma(\tau)\delta_i^{\tau}}y_i^{\tau-1}\exp\{-\frac{y_i}{\delta_i}\};\qquad y_i\geq 0 \text{ for } i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

with

$$\mathbb{E}(Y_i)=\tau\delta_i \tag{2}$$

$$\mathbb{V}(Y_i)=\tau\delta_i^2;\qquad i:1,2,\cdots,n \tag{3}$$

其中， $\tau>0$ 为形状参数， $\delta_i>0$ 为尺度参数， Γ(.)为伽马函数。本文考虑 Amin 等人（2017）引入的伽马分布的以下参数化形式，其中 $\tau=\frac{1}{\zeta}$ 和 $\delta_i=\mu_i\zeta$ :

$$f(y_i|\zeta,\mu_i)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\zeta})(\zeta\mu_i)^{1/\zeta}}y_i^{1/\zeta-1}\exp\{-\frac{y_i}{\mu_i\zeta}\};\qquad y\geq 0, \tag{4}$$

其中 $\tau=\frac{1}{\zeta}$和 $\delta_i=\mu_i\zeta$。 $\zeta=1/\tau$称为精度参数，且 $\mu_i=\zeta\delta_i$； i : 1, 2,⋯, n 是 $y_i$ 的均值。假设 $\zeta$为先验已知，则我们使用对数函数 $\log(\mu_i)=X_i^T\boldsymbol{\beta}$，以此将响应变量与协变量 $X_i=(x_{i1}, x_{i2},\cdots, x^{ip})^T$； i = 1, 2,⋯, n 联系起来。矩阵 $X=[X_1, X2,\cdots, X_p]^T$是一个 n × p 阶设计矩阵，其中 n 为样本量，p 为模型中协变量的数量，而 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1, \beta_2,\cdots,\beta_p)^T$是模型系数向量。

基于公式 (4) 的似然函数为

$$\ell(\boldsymbol{\beta}|Y,X,\zeta)=\left[\frac{e^{[-(1/\zeta)\log(\zeta)]}}{\Gamma(1/\zeta)}\right]^n\prod_{i=1}^{n}y_i^{1/\zeta-1}\exp\left\{-\frac{1}{\zeta}\sum_{i=1}^{n}\left[y_ie^{-X_i^T\boldsymbol{\beta}}+X_i^T\boldsymbol{\beta}\right]\right\} \tag{5}$$

估计模型参数的一种常见经典方法是最大似然估计，即对参数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 求最大化以下对数似然函数:

$$\log(\ell(\boldsymbol{\beta}|Y,X,\zeta))=-\frac{1}{\zeta}\sum_{i=1}^{n}\left[y_ie^{-X_i^T\boldsymbol{\beta}}+X_i^T\boldsymbol{\beta}\right]+\frac{1-\zeta}{\zeta}\sum_{i=1}^{n}\log(y_i)-\frac{n}{\zeta}\log(\zeta)-n\log\left(\Gamma(\frac{1}{\zeta})\right). \tag{6}$$

对数似然函数关于 $\boldsymbol{\beta}$的导数如下:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}\log(\ell(\boldsymbol{\beta}|Y,X,\zeta))=-\frac{1}{\zeta}\sum_{i=1}^{n}\left[y_ie^{-X_i^T\boldsymbol{\beta}}-1\right]X_i \tag{7}$$

导数函数（7）是关于 $\boldsymbol{\beta}$ 的非线性函数，因此，根据 Hardin 和 Hilbe（2018年）提出的最大似然估计过程，可通过应用 Fisher 评分法估计 $\boldsymbol{\beta}$，其迭代步骤如下

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(t+1)}=\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(t)}+\left[\left[I^{-1}(\boldsymbol{\beta})\right]\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}\log(\ell(\boldsymbol{\beta}|Y,X,\zeta))\right]_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(t)}} \tag{8}$$

其中，$I(\boldsymbol{\beta})$是 Fisher信息矩阵。迭代过程将持续进行，直至所得数值收敛。随后，采用以下迭代重加权最小二乘算法计算最大似然估计：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} = \left(X^T \left[\text{diag}(\hat{\mu}_i{}^2)\right] X\right)^{-1} X^T \left[\text{diag}(\hat{\mu}_i{}^2)\right] \boldsymbol{M}, \tag{9}$$

其中，$MMM$ 是一个长度为$n$的向量，其第$i$个元素由调整后的响应变量$X_i^T\hat{}\boldsymbol{\beta} + \hat{}y_i - \mu_i\hat{}\mu_i{}^2$定义。由于设计矩阵的病态性和多重共线性问题，最大似然估计量的准确性可能会受到负面影响（Segerstedt 1992，Mackinnon 和 Puterman 1989）。为了解决多重共线性问题，Amin 等人（2017）采用了如下定义的伽马岭估计量：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GRE} = \left(X^T \left[\text{diag}(\hat{\mu}_i{}^2)\right] X + \text{diag}(k)\right)^{-1} X^T \left[\text{diag}(\hat{\mu}_i{}^2)\right] X\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}, \tag{10}$$

其中，惩罚参数$k$未知，必须进行估计。

## 3 贝叶斯推断

假设伽马回归参数 $\boldsymbol{\beta}$ 满足以下界限：

$$\boldsymbol{R\beta} \leq \boldsymbol{r}, \tag{11}$$

其中，$RRR$ 和$rrr$ 分别是一个预先指定的$m \times p$矩阵和一个长度为$m$的向量。我们假设约束条件的数量$m$ 可以大于 $p$ ，且式（11）中约束条件所生成的子空间非空。

我们将 将截断多元正态分布指定为参数的先验分布 $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathscr{TN}_p(\boldsymbol{\mu_\beta}, \boldsymbol{\Sigma_\beta}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}), \tag{12}$$

其概率密度函数如下：

$$\pi(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})\right\}}{\int_{\boldsymbol{R\beta}\leq\boldsymbol{r}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})\right\} d\boldsymbol{\beta}} \mathbb{I}(\boldsymbol{R\beta} \leq \boldsymbol{r}). \tag{13}$$

其中，$\mathbb{I}$ 表示指示函数，超参数$\boldsymbol{\mu_\beta}$，$\boldsymbol{\Sigma_\beta}$ 假定为已知。$\boldsymbol{\beta}$ 的后验分布为：

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|Y,X,\gamma) \propto \exp\left\{-\frac{1}{\zeta}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i e^{-X_i^T\boldsymbol{\beta}} + X_i^T\boldsymbol{\beta}\right] - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})\right\}\mathbb{I}(\boldsymbol{R\beta}\leq\boldsymbol{r}) \tag{14}$$

虽然后验分布没有闭式解，我们使用 Metropolis-Hastings 算法推导伽马回归系数的贝叶斯估计（BEGRC）。接下来，我们考虑以下随机游走截断正态分布

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathscr{TN}_p(\boldsymbol{\beta}^{(t-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{pro}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}). \tag{15}$$

作为算法的提议分布，且 $\boldsymbol{\Sigma}_{pro}$ 为常数。

已有许多算法被提出，用于从满足线性不等式约束的截断多元正态分布中生成样本，例如 Geweke（1986年、1996年）、Ghosh（1992）、Rodriguez-Yam（2004年）、Pakman 和 Paninski（2014年）、Lan 等人（2014年）、Cong 等人（2017年）提出的算法。其中大多数算法在 $m < p$ 时都切实可行。我们采用 Li 和 Ghosh（2014年）提出的抽样方法，该方法通过一系列 Gibbs 循环生成样本，每个循环都相当于从单变量截断正态分布中抽样。根据约束条件的类型，可以通过高效的专用拒绝抽样来完成这一过程。

# 4 模拟研究

本节通过设计若干模拟研究，展示所提出估计量的性能。

**随机数据生成：**我们考虑一个包含四个协变量的伽马回归模型，使得

$$\eta_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + X_{i3}\beta_3 + X_{i4}\beta_4, \tag{16}$$
$$\mu_i = \exp\{\eta_i\}; \qquad i : 1, 2, \cdots, n \tag{17}$$

为构建实验，我们首先从以下分布生成预测变量

$$x_{ij} = (1-\rho^2)^{1/2} w_{ij} + \rho w_{ik}; \qquad i, j : 1, 2, \cdots, n \quad \text{and} \quad k = p+1,$$

其中，$w^{ij}$ 服从标准正态分布。参数 $\rho$ 控制协变量之间相互相关的强度。我们考虑 $\rho$ 的不同取值，例如 0.8,0.90,0.95 和 0.99；在本实验中，回归系数的精确取值选为 $\boldsymbol{\beta} = (1,1,1,1)^T$。为考察样本量对 BE-GRC 性能的影响，我们对样本量分别为 25,50,100 和 200 的样本进行数据分析。最后，响应变量$y_i$由 $\mathscr{G}(1/\zeta, \mu_i\zeta)$ 生成，其中 $\zeta$先设为 0.25，再设为 0.5。

**先验建模：**对于先验设定，我们考虑 $\beta_j \geq 0.8$，其中 $j = 1,\ldots,4$，且

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = (X^T X)^{-1}. \tag{18}$$

对于马尔可夫链蒙特卡罗算法中的提议分布，协方差矩阵被设定为Fisher信息矩阵的逆矩阵。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{pro} = \frac{1}{\zeta}\left(X^T\left[\text{diag}(\hat{\mu}_i{}^2)\right]X\right)^{-1}. \tag{19}$$

对于每个数据集，我们使用表达式（10）计算 BEGRC、最大似然估计（MLE）和岭估计量，其中惩罚参数（由 Amin 等人（2017）定义）取一次如下：

$$k_1 = \frac{\lambda_{min}\zeta}{\alpha_{min}^2}$$

然后作为

$$k_2 = max\left(\frac{\lambda_{max}}{(n-p)\zeta + \lambda_i\alpha_i^2}\right). \tag{20}$$

请注意，如果 $\Lambda$ 是列向量为$X^T\left[\text{diag}(\hat{}\mu_i{}^2)\right]X$特征向量的矩阵，那么在上述公式中，$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T$是矩阵$X^T\left[\text{diag}(\hat{}\mu_i{}^2)\right]X$的特征值，并且

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)^T = \Lambda\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}, \quad \alpha_{\min}^2 = \min_{1\le j\le p}(\alpha_j^2), \quad \lambda_{\min} = \min_{1\le j\le p}(\lambda_j) \text{ and } \lambda_{\max} = \max_{1\le j\le p}(\lambda_j).$$

我们还考虑忽略约束条件 (11) 的情况，以评估忽略此信息对后验估计的影响，并通过考虑以下先验分布，对模型参数进行贝叶斯推断

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}), \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}$ 由 (18) 定义。为避免重复，BEUGRC 表示对无约束伽马回归系数的贝叶斯估计。

随后，为了确定参数的贝叶斯估计，我们采用均方误差损失函数。因此，我们分析 100 个重复数据集，并对每个样本，在舍弃总迭代次数中的预热期部分后，通过计算马尔可夫链蒙特卡罗抽样值的后验期望值来估计 $\beta_j$s。然后，我们使用以下公式计算估计值的均方误差

$$MSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_k - \boldsymbol{\beta}^{true})^T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_k - \boldsymbol{\beta}^{true}), \tag{22}$$

$\hat{}$其中，$\boldsymbol{\beta}_k$ 是第$k$次重复中对 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计。

**马尔可夫链蒙特卡罗实现与结果：**我们使用 R软件包**tmvmixnorm** （Ma 等人（2018年））实现 Metropolis-Hastings 算法，以开展模拟研究，并生成长度为 15000 的模型参数样本序列。随后，我们舍弃最初模拟得到的 2000 个样本作为预热期，以消除初始值的影响。

表1中的结果表明，就均方误差（MSE）而言，所提出的贝叶斯估计程序优于其他估计量。此外，岭估计量的MSE显著低于最大似然估计的MSE，而贝叶斯估计量的MSE显著低于所有经典估计量的MSE。然而，当自变量之间的相关程度增强时，所有MSE都会增大。具体而言，当精度参数的值从0.25增加到0.5时，除BEGRC外，所有估计量的MSE几乎都翻了一倍。

随后，表3和表4分别展示了当 $\zeta = 0.25$ 和 $\zeta = 0.5$时模型各参数的标准差（SD）和偏差。这些表明，所提出的贝叶斯估计量对各模型参数的标准差和偏差显著低于其他估计量，因此其后验估计比其他估计量更准确。

表1：最大似然估计量、参数列于式（20）中的两个岭估计量，以及在不等式约束和无约束伽马回归模型两种情况下的后验期望值的均方误差。

| | | | 经典 | | | 贝叶斯 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 岭 | | | |
| $\zeta$ | $n$ | $\rho$ | MLE | GRE1 | GRE2 | BEUGRC | BEGRC |
| 0.25 | 25 | 0.80 | 0.16820 | 0.12359 | 0.07577 | 0.06813 | 0.01919 |
| | | 0.90 | 0.53948 | 0.19295 | 0.09668 | 0.17301 | 0.02162 |
| | | 0.95 | 0.75186 | 0.40213 | 0.05781 | 0.26822 | 0.02211 |
| | | 0.99 | 4.45733 | 3.02135 | 0.26769 | 1.58090 | 0.01267 |
| | 50 | 0.80 | 0.14440 | 0.12630 | 0.08465 | 0.04627 | 0.01958 |
| | | 0.90 | 0.24093 | 0.12221 | 0.10913 | 0.06925 | 0.02116 |
| | | 0.95 | 0.67067 | 0.39471 | 0.25032 | 0.19443 | 0.02925 |
| | | 0.99 | 3.55006 | 2.55390 | 0.40920 | 0.95016 | 0.01879 |
| | 100 | 0.80 | 0.10022 | 0.06076 | 0.08074 | 0.02894 | 0.01693 |
| | | 0.90 | 0.23761 | 0.10670 | 0.17265 | 0.06555 | 0.02303 |
| | | 0.95 | 0.50125 | 0.24363 | 0.30864 | 0.13676 | 0.02824 |
| | | 0.99 | 1.95792 | 1.14425 | 0.88240 | 0.53845 | 0.02954 |
| | 200 | 0.80 | 0.08021 | 0.08215 | 0.07094 | 0.02174 | 0.01479 |
| | | 0.90 | 0.28022 | 0.20593 | 0.25902 | 0.06800 | 0.02534 |
| | | 0.95 | 0.43884 | 0.19984 | 0.34974 | 0.10877 | 0.03149 |
| | | 0.99 | 1.49094 | 0.83258 | 1.00776 | 0.40744 | 0.03524 |
| 0.50 | 25 | 0.80 | 0.28567 | 0.14498 | 0.09961 | 0.12016 | 0.02067 |
| | | 0.90 | 0.84251 | 0.34092 | 0.14627 | 0.26354 | 0.02200 |
| | | 0.95 | 1.70736 | 0.69756 | 0.23514 | 0.56849 | 0.02745 |
| | | 0.99 | 9.45752 | 6.07635 | 0.41636 | 3.40392 | 0.01194 |
| | 50 | 0.80 | 0.22538 | 0.15220 | 0.14384 | 0.07459 | 0.02039 |
| | | 0.90 | 0.55065 | 0.20671 | 0.22762 | 0.16047 | 0.02814 |
| | | 0.95 | 1.16342 | 0.48282 | 0.37845 | 0.35161 | 0.02776 |
| | | 0.99 | 5.46471 | 3.78032 | 1.52912 | 1.64316 | 0.01411 |
| | 100 | 0.80 | 0.19512 | 0.13507 | 0.19248 | 0.05555 | 0.02314 |
| | | 0.90 | 0.37146 | 0.19841 | 0.37096 | 0.09896 | 0.02445 |
| | | 0.95 | 0.97204 | 0.44306 | 0.58318 | 0.26822 | 0.03047 |
| | | 0.99 | 4.49895 | 2.65349 | 2.73289 | 1.18699 | 0.02273 |
| | 200 | 0.80 | 0.13973 | 0.10850 | 0.12686 | 0.03741 | 0.02155 |
| | | 0.90 | 0.25639 | 0.09369 | 0.23116 | 0.06984 | 0.02417 |
| | | 0.95 | 0.63614 | 0.27421 | 0.54699 | 0.17213 | 0.03168 |
| | | 0.99 | 3.81665 | 2.01710 | 2.68077 | 0.95022 | 0.04049 |

# 5 真实数据集应用

本节重点讨论的数据集是一个所谓的“体脂”数据集，最初由 Garcia 等人（2005年）研究，随后 Reangsephet 等人（2020年）使用伽马回归模型对其进行建模，近期 Asar 和 Korkmaz（2022年）也对其进行了研究。该数据集的完整内容可通过 R 编程语言访问，它是由 Hothorn（2016）提供的 TH 数据。该数据集包含 71 名健康女性参与者的观测数据，以及以下九个变量：年龄（岁）（age）（$X_1$）、腰围（waistcirc）（$X_2$）、臀围（hipcirc）（$X_3$）、肘宽（elbowbreadth）（$X_4$）、膝宽（kneebreadth）（$X_5$），以及三项人体测量指标的对数之和，分为四组（anthro3a（$X_6$）、anthro3b（$X_7$）、anthro3c（$X_8$）和 anthro4（$X_9$））。

我们首先使用 R 中 gofTest 包所包含的 ad.test 函数进行 Anderson–Darling（AD）检验。我们利用该检验考察伽马回归对响应变量（体脂含量）的拟合效果是否良好。AD 检验统计量为 0.36082，表明伽马分布适合作为响应变量的分布。为通过协变量之间的相关程度考察多重共线性问题，图 1 展示了相关矩阵的可视化结果，相应的系数则列于矩阵的下三角部分。从图中可以看出，部分协变量之间存在较强的正相关关系。此外，矩阵 $X^T\mathscr{C}X$ 的条件数为 4026.235，也证实了这一结论。这里需要指出，矩阵的条件数等于最大特征值与最小特征值之比的平方根。

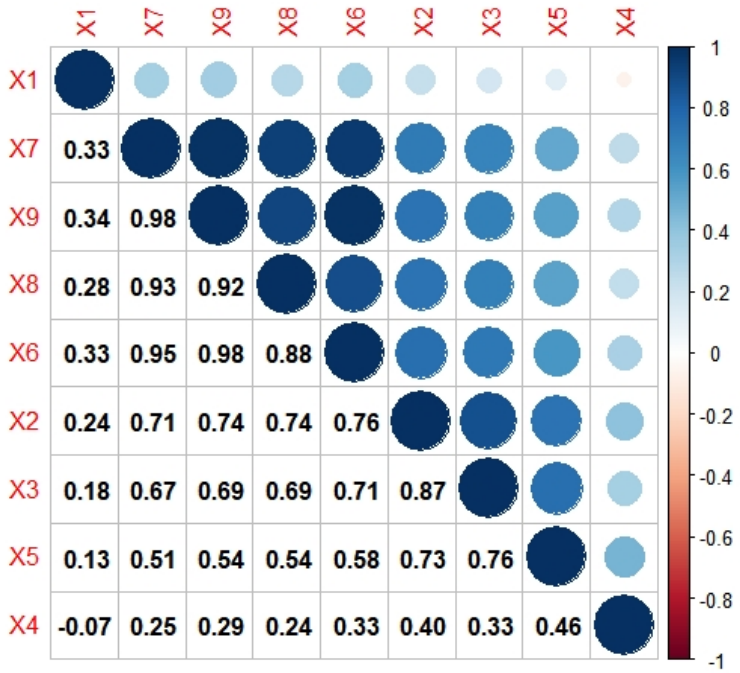


图 1：相关矩阵的可视化。

关于约束矩阵的形式，我们重点关注 Reangsephet

等人（2020年）以及 Asar 和 Korkmaz（2022年）的研究与结果，并对模型参数施加以下约束条件

$$\beta_6 \leq 0, \beta_7 \geq 0, \beta_8 \geq, \beta_9 \geq 0. \tag{23}$$

我们考虑二次损失函数，并计算受约束伽马回归模型参数的后验期望值，以及不考虑任何约束条件时伽马回归模型参数的后验期望值。马尔可夫链蒙特卡洛迭代总次数为 15000 次，其中前 2000 次迭代作为预热期。表2显示，尽管估计值相近，但贝叶斯方法所得结果的标准误仍显著低于经典方法。

表2：**体脂数据集：**（右侧）受约束和不受约束伽马回归模型的后验估计。（左侧）MLE 表示最大似然估计量，GRE 则通过岭回归模型得到。每组估计值对应的标准误显示在括号中。

| | 经典 | | 贝叶斯 | |
|---|---|---|---|---|
| | MLE | GRE | BEUGRC | BEGRC |
| 截距 | -0.2195 (0.8154) | -0.1012 (0.4289) | -0.2219 (0.1686) | -0.2492（0.1592） |
| Age | 0.0016 (0.0033) | 0.0016 (0.0032) | 0.0016 (0.0007) | 0.0016 (0.0007) |
| 腰围 | 0.0042 (0.0060) | 0.0045 (0.0055) | 0.0041 (0.0015) | 0.0042 (0.0014) |
| 臀围 | 0.0108 (0.0071) | 0.0105 (0.0068) | 0.0106 (0.0018) | 0.0107 (0.0017) |
| 肘宽 | 0.0141 (0.1037) | 0.0063 (0.0828) | 0.0146 (0.0237) | 0.0172 (0.0227) |
| 膝宽 | 0.0426 (0.0620) | 0.0412 (0.0598) | 0.0445 (0.0148) | 0.0441 (0.0171) |
| Anthro3a | -0.1227（0.5417） | -0.0580（0.3217） | -0.1275（0.1166） | -0.1636 (0.0850) |
| Anthro3b | 0.1404 (0.5474) | 0.1309 (0.3353 | 0.1450 (0.1250) | 0.1459 (0.0822) |
| Anthro3c | 0.1292 (0.2094) | 0.1304 (0.1879) | 0.1278 (0.0463) | 0.1240 (0.0431) |
| Anthro4 | 0.1637 (0.6547) | 0.1140 (0.3288) | 0.1663 (0.1436) | 0.1938 (0.0946) |

# 6 结论

我们关注伽马回归模型的参数估计难题：当设计矩阵存在多重共线性问题，且模型参数受到某些线性不等式约束时，这些约束可以来自先验知识，对于保持模型结构的一致性至关重要，因此必须将其纳入考虑。为此，本文提出一种贝叶斯程序，用于估计具有对数连接函数的伽马回归模型中的受约束参数。我们注意到，Ghosal 和 Ghosh（2021年）为广义线性模型提供了一个贝叶斯框架，但其方法并不适用于具有对数连接函数的伽马回归模型。我们开展模拟研究，以检验该估计过程的准确性。结果表明，与知名估计量（最大似然估计和岭回归模型）相比，所提出的方法能够提供更准确的参数估计。随后，我们将该方法应用于体脂数据集进行分析，结果

表明，第 3 节介绍的贝叶斯方法所得到的参数估计，其标准误显著小于其他经典方法。

## 参考文献

Amin, M., Qasim, M., Amanullah, M. 和 Afzal, S., (2005). 伽马回归模型中若干岭估计量的性能，《Statistical Papers》。doi:10.1007/s00362-017-0971-z。Asar, Y. 和 Korkmaz, M. (2022). 伽马回归模型中的近似无偏刘型估计量。《计算与应用数学杂志》，403，113819。Cong, Y., Bo Chen, B. 和 Zhou, M., (2017). 超平面截断多元正态分布的快速模拟。《贝叶斯分析》，12(4)，1017-1037。Dunder, E., Gumustekin, S. 和 Cengiz, M. A. (2016).通过人工蜂群算法对伽马回归模型进行变量选择。《应用统计学杂志》45(1):8–16。Escobar, L. A. 和 Skarpness, B., (1987). 区间约束下最小二乘估计量的均方误差与效率。《统计学通讯》，16，397-406。Escobar, L. A. 和 Skarpness, B., (1986). 区间约束下最小二乘估计量的偏差。《经济学快报》，20，331-335。Garcia, A.L., Wagner, K., Hothorn, T., Koebnick, C., Zunft, H. J. F., Trippo, U., (2005). 通过测量皮褶厚度、围度和骨宽度改进体脂预测，《Obesity Research》，13 (3), 626–634。Geweke, J. (1986). 不等式约束正态线性回归模型中的精确推断。《应用计量经济学杂志》，1，127-141。Geweke, J. F., (1996). 对受线性不等式约束的线性模型进行贝叶斯推断。纽约：施普林格。Ghosal, R. 和 Ghosh, S. K., (2021).具有线性不等式约束的广义线性模型的贝叶斯推断。《计算统计与数据分析》，166，p.107335。Ghosh, M., (1992).约束贝叶斯估计及其应用。《美国统计学会会刊》，87，533-540。Hardin, J. W. 和 Hilbe, J. M., (2018).广义线性模型及其扩展，第四版，Stata Press，得克萨斯州。Hothorn, T., (2016). *TH.data*：*TH* 的数据存档。*R* 包版本 *1.0-7*，2016，https://CRAN.R- project.org/package=TH.data。Judge, G. G. 和 Takayama, T., (1966). 回归分析中的不等式约束。《美国统计学会会刊》，61，166-181。

Koike, Y. 和 Tanoue, Y., (2019). 符号约束广义线性模型的*Oracle*不等式。《计量经济学与统计学》，11，145-157。Li, Y. 和 Ghosh, S. K., (2014). 对受线性不等式约束的截断多元正态分布和学生t分布进行高效抽样的方法。《统计理论与实践杂志》，9，712-732。Liew, C. K., (1976). 不等式约束最小二乘估计。《美国统计学会会刊》，71,746-751。Lan, S., Zhou, B. 和 Shahbaba, B., (2014).用于受约束目标分布的球面哈密顿蒙特卡洛。《机器学习研究杂志》，32，629-637。Lovell, M. C. 和 Prescott, E., (1970). 带不等式约束的多元回归：预检验偏差、假设检验与效率。《美国统计学会会刊》，65，913-925。Ma, T. F. R., Ghosh, S. K. 和 Li, Y., (2018). 从截断多元正态分布和*t*分布中抽样，版本1.0.2。Mackinnon, M. J., Puterman, M. L.,(1989). 广义线性模型中的共线性，Commun. Stat. Theory Methods 18 (9): 3463-3472。Malehi, A. S., Pourmotahari, F. 和 Angali, K. A. (2015). 用于分析偏态医疗费用数据的统计模型：一项模拟研究。《健康经济学评论》5 (1):11。Manolakis, D. 和 Shaw, G., (2002). 高光谱成像应用的检测算法。《IEEE信号处理杂志》，19，29-43。Meinshausen, N., (2013). 符号约束最小二乘估计，Electronic Journal of Statis- tics，7，1607-1631。Neal, R. M., (2003).切片抽样，《统计学年鉴》，705-741。Neelon, B.and Dunson, D.B., (2004). 贝叶斯保序回归与趋势分析。《生物统计学》，60，398-406。Ohtani, K., (1987). 区间约束下最小二乘估计量的均方误差。《经济学快报》，25，351-354。Pakman, A. 和 Paninski, L., (2014). 用于截断多元高斯分布的精确哈密顿蒙特卡洛。《计算与图形统计学杂志》，23(2): 518-542。Reangsephet, O., Lisawadi, S., Ahmed, S. E. ,(2020). 伽马回归模型中的自适应估计策略，《统计理论与实践杂志》，14 (1)，文章编号8。

Rodriguez-Yam, G., Davis, R. A. 和 Scharf, L. L.,（2004年）。截断多元正态分布的高效吉布斯抽样及其在约束线性回归中的应用。载于科罗拉多州立大学技术报告。未发表手稿。B. Segerstedt, （1992年）。广义线性模型中的普通岭回归, 《Commun. Stat. Theory Methods》21（8）：2227-2246。Silvapulle, M. J. 和 Sen, P. K., （2005年）。约束统计推断：不等式、序关系与形状约束，新泽西州霍博肯：约翰·威立父子出版公司。Slawski, M. 和 Hein, M., （2013年）。高维线性模型的非负最小二乘：无需正则化的一致性与稀疏恢复。《电子统计学期刊》，7，3004-3056。Veiga, S. D. 和 Marrel, A., （2020年）。具有线性不等式约束的高斯过程回归。《可靠性工程与系统安全》，195，106732。Wang, J. 和 Ghosh, S. K., （2012年）。基于伯恩斯坦多项式的形状约束非参数回归。《计算统计与数据分析》，55，2729-2741。Zhu, J., Santerre, R. 和 Chang, X. W., （2005年）。用于线性不等式约束平差的贝叶斯方法及其在*GPS*定位中的应用。《大地测量学杂志》，78，528-534。

# 7 附录

表3：当 $\zeta = 0.25$ 时各估计量的标准差和偏差。

| $\rho$ | | MLE | GRE1 | GRE2 | BEUGRC | BEGRC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 25$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.4240(0.0260) | 0.3380(-0.0579) | 0.2697(-0.0621) | 0.2814(0.0204) | 0.1499(0.0270) |
| | $\beta_2$ | 0.4232(-0.0590) | 0.3606(-0.1306) | 0.2577(-0.0822) | 0.2642(-0.0418) | 0.1231(-0.0135) |
| | $\beta_3$ | 0.3478(-0.0393) | 0.2969(-0.0992) | 0.2404(-0.1014) | 0.2178 (-0.0315) | 0.1207(-0.0140) |
| | $\beta_4$ | 0.4400(0.0190) | 0.3572(-0.0933) | 0.2805(-0.0964) | 0.2749(0.0049) | 0.1548(0.0166) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.7612(0.0062) | 0.4887(-0.0303) | 0.3326(-0.0834) | 0.4185(-0.0059) | 0.1544(0.0052) |
| | $\beta_2$ | 0.8206(-0.0988) | 0.4409(-0.0334) | 0.2581(-0.0610) | 0.4536(-0.0434) | 0.1614(0.0002) |
| | $\beta_3$ | 0.6463(-0.0361) | 0.4089(-0.0472) | 0.3094(-0.0636) | 0.3719(-0.0318) | 0.1319(-0.0114) |
| | $\beta_4$ | 0.7028(0.0641) | 0.4144(-0.0565) | 0.3148(-0.0603) | 0.4196(0.0281) | 0.1409(0.0075) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 0.8532(0.1286) | 0.6594(0.0558) | 0.2580(-0.0607) | 0.4851(0.0961) | 0.1472(0.0246) |
| | $\beta_2$ | 0.8485(-0.0091) | 0.6131(0.0279) | 0.2207(-0.0348) | 0.5246(0.0181) | 0.1497(0.0045) |
| | $\beta_3$ | 0.7112(-0.1107) | 0.4669(-0.1386) | 0.2127(-0.0546) | 0.4412(-0.0866) | 0.1231(-0.0168) |
| | $\beta_4$ | 1.0260(-0.0491) | 0.7538(-0.0680) | 0.2416(-0.0814) | 0.5972(-0.0674) | 0.1704(0.0113) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 1.8935(0.0493) | 1.5741(0.0540) | 0.5514(0.0090) | 1.1061(0.0536) | 0.1113(0.0053) |
| | $\beta_2$ | 2.2292(-0.1157) | 1.7512(-0.0645) | 0.5351(-0.0899) | 1.2973(0.0090) | 0.1221(0.0024) |
| | $\beta_3$ | 2.3378(-0.2697) | 1.9263(-0.2942) | 0.3398(-0.1038) | 1.4165(-0.1890) | 0.1117(-0.0039) |
| | $\beta_4$ | 1.9541(0.2846) | 1.6728(0.2432) | 0.5964(-0.0296) | 1.1952(0.0835) | 0.1064(0.0052) |
| $n = 50$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.3439(-0.0561) | 0.3144(-0.0865) | 0.2931(-0.0507) | 0.2032(-0.0361) | 0.1236(-0.0187) |
| | $\beta_2$ | 0.3251(0.0123) | 0.3302(-0.0765) | 0.2501(-0.0041) | 0.1781(0.0020) | 0.1342(0.0011) |
| | $\beta_3$ | 0.4400(-0.0326) | 0.3624(-0.1257) | 0.2798(-0.0684) | 0.2389(-0.0223) | 0.1560(-0.0065) |
| | $\beta_4$ | 0.4019(-0.0049) | 0.3635(-0.0973) | 0.3256(-0.0442) | 0.2345(0.0045) | 0.1452(0.0054) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.4918(0.0167) | 0.3747(-0.0260) | 0.3185(-0.0423) | 0.2625(-0.0105) | 0.1511(-0.0015) |
| | $\beta_2$ | 0.4850(-0.0029) | 0.3107(-0.0097) | 0.3273(0.0115) | 0.2637(0.0065) | 0.1454(0.0020) |
| | $\beta_3$ | 0.5228(-0.0105) | 0.3958(-0.0403) | 0.3711(-0.0283) | 0.2739(-0.0071) | 0.1509(0.0005) |
| | $\beta_4$ | 0.4679(-0.0607) | 0.3074(-0.0565) | 0.2995(-0.0464) | 0.2558(-0.0263) | 0.1367(-0.0097) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 0.7790(0.0678) | 0.5763(0.0224) | 0.4002(-0.0133) | 0.4101(0.0296) | 0.1727(0.0105) |
| | $\beta_2$ | 0.7976(-0.1855) | 0.5844(-0.1932) | 0.4720(-0.0970) | 0.4344(-0.1112) | 0.1374(-0.0300) |
| | $\beta_3$ | 0.8678(-0.0954) | 0.7014(-0.0418) | 0.5902(-0.0377) | 0.4605(-0.0458) | 0.1735(-0.0102) |
| | $\beta_4$ | 0.7980(0.1677) | 0.6123(0.1190) | 0.5151(0.0598) | 0.4369(0.1006) | 0.1913(0.0405) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 1.9689(-0.4562) | 1.7291(-0.4212) | 0.6707(-0.1546) | 1.0127-0.2691() | 0.1183(-0.0307) |
| | $\beta_2$ | 1.8492(0.3026) | 1.5382(0.2455) | 0.6321(0.0930) | 0.9749(0.1307) | 0.1493(0.0168) |
| | $\beta_3$ | 1.7502(0.0721) | 1.4732(0.0906) | 0.5178(-0.0379) | 0.9175(0.0300) | 0.1286(-0.0021) |
| | $\beta_4$ | 1.9173(0.0183) | 1.5949(-0.0109) | 0.7075(0.0301) | 0.9616(0.0707) | 0.1473( 0.0133) |

**表3**（续）

| $\rho$ | | MLE | GRE1 | GRE2 | BEUGRC | BEGRC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 100$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.3081(-0.0455) | 0.2433(-0.0837) | 0.2778(-0.0526) | 0.1741(-0.0213) | 0.1255(-0.0134) |
| | $\beta_2$ | 0.3523(0.0090) | 0.2467(-0.0315) | 0.3173(0.0013) | 0.1851(0.0070) | 0.1472(0.0123) |
| | $\beta_3$ | 0.3100(-0.0489) | 0.2362(-0.0919) | 0.2664(-0.0399) | 0.1656(-0.0309) | 0.1209(-0.0215) |
| | $\beta_4$ | 0.2898(0.0345) | 0.2293(-0.0214) | 0.2695(0.0181) | 0.1523(0.0157) | 0.1245(0.0081) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.4516(-0.0289) | 0.3037(-0.0762) | 0.3917(-0.0183) | 0.2467(-0.0148) | 0.1399(-0.0111) |
| | $\beta_2$ | 0.4544(-0.0872) | 0.3028(-0.1148) | 0.3721(-0.1012) | 0.2371(-0.0489) | 0.1419(-0.0241) |
| | $\beta_3$ | 0.4934(0.0227) | 0.3233(-0.0071) | 0.4375(0.0106) | 0.2510(0.0102) | 0.1487(0.0059) |
| | $\beta_4$ | 0.5444(0.0260) | 0.3473(-0.0533) | 0.4504(0.0240) | 0.2863(0.0101) | 0.1745(0.0067) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 0.7341(-0.1217) | 0.5351(-0.0961) | 0.5978(-0.0974) | 0.3855(-0.0534) | 0.1764(-0.0087) |
| | $\beta_2$ | 0.6575(-0.0332) | 0.4609(-0.0980) | 0.5523(-0.0423) | 0.3399(-0.0278) | 0.1470(-0.0227) |
| | $\beta_3$ | 0.7246(0.1242) | 0.4939(0.0843) | 0.5500(0.0962) | 0.3873(0.0520) | 0.1728(0.0203) |
| | $\beta_4$ | 0.7050(-0.0152) | 0.4641(-0.0092) | 0.5112(-0.0075) | 0.3634(0.0010) | 0.1746(0.0051) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 1.5133(-0.2864) | 1.1771(-0.1824) | 1.0937(-0.1604) | 0.7895(-0.1470) | 0.1527(-0.0257) |
| | $\beta_2$ | 1.2649(0.0437) | 0.9227(-0.0224) | 0.8389(-0.0058) | 0.6859(0.0372) | 0.1789(0.0107) |
| | $\beta_3$ | 1.3716(0.2987) | 1.0101(0.2570) | 0.9462(0.1609) | 0.7008(0.1549) | 0.1834(0.0258) |
| | $\beta_4$ | 1.3980(-0.0990) | 1.1211(-0.0923) | 0.8463(-0.0403) | 0.7338(-0.0684) | 0.1695(-0.0146) |
| $n = 200$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.2720(-0.0399) | 0.2740(-0.0719) | 0.2520(-0.0214) | 0.1448(-0.0223) | 0.1150(-0.0164) |
| | $\beta_2$ | 0.2882(-0.0251) | 0.2737(-0.1035) | 0.2735(-0.0280) | 0.1475(-0.0163) | 0.1231(-0.0138) |
| | $\beta_3$ | 0.2879(0.0546) | 0.2904(-0.0393) | 0.2711(0.0414) | 0.1507(0.0277) | 0.1315(0.0258) |
| | $\beta_4$ | 0.2800(-0.0218) | 0.9021(-0.0979) | 0.2661(-0.0319) | 0.1442(-0.0087) | 0.1135(-0.0079) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.6472(-0.0497) | 0.5682(-0.1092) | 0.6385(-0.0528) | 0.3034(-0.0217) | 0.1627(0.0042) |
| | $\beta_2$ | 0.6279(0.0992) | 0.5648(0.0263) | 0.5969(0.0889) | 0.3119(0.0382) | 0.1842(0.0139) |
| | $\beta_3$ | 0.3903(-0.0062) | 0.2767(-0.0503) | 0.3601(-0.0096) | 0.2079(0.0008) | 0.1515(0.0002) |
| | $\beta_4$ | 0.3811(-0.0946) | 0.2912(-0.1160) | 0.3678(-0.0822) | 0.1948(-0.0476) | 0.1327(-0.0348) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 0.5890(-0.0801) | 0.4192(-0.0574) | 0.5890(-0.0801) | 0.3005(-0.0495) | 0.1626(-0.0263) |
| | $\beta_2$ | 0.6746(-0.0177) | 0.4681(-0.0194) | 0.6746(-0.0177) | 0.3483(0.0037) | 0.1934(0.0096) |
| | $\beta_3$ | 0.6933(0.0345) | 0.4590(-0.0013) | 0.6933(0.0345) | 0.3367(0.0124) | 0.1737(0.0013) |
| | $\beta_4$ | 0.6943(0.0166) | 0.4451(-0.0057) | 0.6943(0.0166) | 0.3344(0.0026) | 0.1802(-0.0015) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 0.9455(0.0124) | 0.7058(-0.0704) | 0.7678(0.0050) | 0.5104(-0.0095) | 0.1601(-0.0192) |
| | $\beta_2$ | 1.3014(-0.0513) | 1.0379(-0.0250) | 1.1599(0.0089) | 0.6890(-0.0093) | 0.2012(0.0013) |
| | $\beta_3$ | 1.2750(0.0958) | 0.9545(0.0255) | 0.9897(0.0065) | 0.6656(0.0482) | 0.1914(0.0067) |
| | $\beta_4$ | 1.3373(-0.1021) | 0.9329(-0.0280) | 1.0738(-0.0636) | 0.6802(-0.0529) | 0.1980(-0.0013) |

表4：当 $\zeta = 0.5$ 时估计量的标准差和偏差。

| $\rho$ | | MLE | GRE1 | GRE2 | BEUGRC | BEGRC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 25$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.6162(-0.0768) | 0.3921(-0.1010) | 0.3152(-0.0904) | 0.4050(-0.0569) | 0.1633(0.0195) |
| | $\beta_2$ | 0.4956(-0.0378) | 0.3272(-0.1582) | 0.2813(-0.0752) | 0.3005(-0.0191) | 0.1268(-0.0044) |
| | $\beta_3$ | 0.4663(-0.0103) | 0.3879(-0.0895) | 0.3311(-0.0802) | 0.3084(-0.0185) | 0.1301(0.0094) |
| | $\beta_4$ | 0.5502(0.0333) | 0.3491(-0.0938) | 0.3026(-0.0477) | 0.3634(0.0085) | 0.1512(0.0216) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.8566(0.0249) | 0.5633(-0.0634) | 0.3472(0.0155) | 0.4856(-0.0198) | 0.1423(0.0079) |
| | $\beta_2$ | 0.8888(-0.1142) | 0.5138(-0.0489) | 0.3929(-0.1050) | 0.5133(-0.0472) | 0.1409(-0.0050) |
| | $\beta_3$ | 0.8760(-0.0090) | 0.5194(-0.1094) | 0.3030(-0.0577) | 0.5064(-0.0309) | 0.1434(0.0013) |
| | $\beta_4$ | 1.0478(-0.0360) | 0.7013(-0.1256) | 0.4454(-0.1052) | 0.5523(-0.0208) | 0.1671(0.0145) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 1.3398(0.0386) | 0.7904(0.0309) | 0.4130(-0.0112) | 0.7722(0.0499) | 0.1795(0.0106) |
| | $\beta_2$ | 1.3618(0.0782) | 0.8997(0.0203) | 0.5043(0.0060) | 0.7785(0.0106) | 0.1807(0.0217) |
| | $\beta_3$ | 1.2626(0.0387) | 0.8375(-0.0088) | 0.4566(-0.0211) | 0.7162(-0.0133) | 0.1600(0.0097) |
| | $\beta_4$ | 1.2586(-0.2466) | 0.8039(-0.1861) | 0.5417(-0.1496) | 0.7497(-0.1291) | 0.1404(-0.0062) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 3.0568(0.0041) | 2.3807(0.0221) | 0.3452(-0.0239) | 1.7549(-0.0065) | 0.1009(0.0082) |
| | $\beta_2$ | 3.4152(0.4109) | 2.7856(0.2949) | 0.7529(0.1748) | 2.1606(0.2459) | 0.1317(0.0232) |
| | $\beta_3$ | 2.7757(-0.0818) | 2.0698(-0.0099) | 0.6773(-0.0902) | 1.6430(-0.1044) | 0.1039(0.0092) |
| | $\beta_4$ | 3.0260(-0.4057) | 2.5674(-0.3979) | 0.6920(-0.1373) | 1.7862(-0.2064) | 0.0961(-0.0022) |
| $n = 50$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.4675(-0.0274) | 0.3925(-0.1040) | 0.3541(-0.0102) | 0.2738(-0.0305) | 0.1383(-0.0071) |
| | $\beta_2$ | 0.4940(-0.0299) | 0.3640(-0.1099) | 0.4058(-0.0510) | 0.2833(-0.0182) | 0.1412(0.0067) |
| | $\beta_3$ | 0.4805(0.0411) | 0.3860(-0.0850) | 0.3874(-0.0324) | 0.2778(0.0173) | 0.1555(0.0132) |
| | $\beta_4$ | 0.4548(-0.0831) | 0.3591(-0.1411) | 0.3654(-0.0603) | 0.2580(-0.0289) | 0.1373(-0.0039) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.7081(-0.0065) | 0.4121(-0.0218) | 0.4764(0.0177) | 0.3844(-0.0049) | 0.1588(0.0020) |
| | $\beta_2$ | 0.8043(-0.0377) | 0.4906(0.0048) | 0.5011(-0.0427) | 0.4359(-0.0221) | 0.1874(0.0027) |
| | $\beta_3$ | 0.7232(-0.0010) | 0.4494(-0.0544) | 0.4682(-0.0564) | 0.3847(-0.0116) | 0.1628(0.0007) |
| | $\beta_4$ | 0.7426(-0.0220) | 0.4660(-0.0445) | 0.4652(-0.0247) | 0.4021(-0.0135) | 0.1636(0.0090) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 1.0917(0.0182) | 0.7555(-0.0666) | 0.6747(-0.0097) | 0.5951(-0.0011) | 0.1690(0.0062) |
| | $\beta_2$ | 1.0518(0.0350) | 0.6358(-0.0113) | 0.6346(-0.0187) | 0.5963(0.0214) | 0.1644(0.0017) |
| | $\beta_3$ | 1.0152(-0.0357) | 0.6891(-0.0027) | 0.5650(-0.0060) | 0.5715(-0.0201) | 0.1587(-0.0094) |
| | $\beta_4$ | 1.1642(-0.1167) | 0.6972(-0.1012) | 0.5878(-0.0767) | 0.6147(-0.0737) | 0.1768(-0.0009) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 2.5045(0.3945) | 2.1119(0.4388) | 1.1324(0.1975) | 1.3598(0.2593) | 0.1299(0.0142) |
| | $\beta_2$ | 2.3037(-0.3614) | 1.8684(-0.3925) | 1.4361(-0.2283) | 1.2458(-0.1821) | 0.1006(-0.0214) |
| | $\beta_3$ | 2.2386(0.0835) | 1.7983(0.0998) | 1.1118(-0.0661) | 1.2033(0.0099) | 0.1189(-0.0101) |
| | $\beta_4$ | 2.2639(-0.2577) | 1.9098(-0.2842) | 1.2244(-0.0445) | 1.2873(-0.1764) | 0.1214(-0.0189) |

**表4**（续）

| $\rho$ | | MLE | GRE1 | GRE2 | BEUGRC | BEGRC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 100$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.4534(0.0109) | 0.3562(-0.1053) | 0.3710(0.0039) | 0.2406(0.0055) | 0.1581(0.0092) |
| | $\beta_2$ | 0.4192(-0.0570) | 0.3416(-0.1311) | 0.3622(-0.0618) | 0.2244(-0.0308) | 0.1442(-0.0167) |
| | $\beta_3$ | 0.4452(-0.0078) | 0.3342(-0.0982) | 0.3877(0.0004) | 0.2333(0.0029) | 0.1516(0.0086) |
| | $\beta_4$ | 0.4533(0.0004) | 0.3732(-0.1129) | 0.3739(-0.0135) | 0.2464(-0.0085) | 0.1558(0.0068) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.5808(-0.0080) | 0.4395(-0.0735) | 0.4706(-0.0055) | 0.2969(-0.0165) | 0.1416(-0.0080) |
| | $\beta_2$ | 0.6489(-0.0760) | 0.4691(-0.0978) | 0.5611(-0.0322) | 0.3271(-0.0238) | 0.1538(-0.0077) |
| | $\beta_3$ | 0.6078(-0.0277) | 0.4152( -0.0792) | 0.4941(-0.0555) | 0.3219(-0.0039) | 0.1576(0.0075) |
| | $\beta_4$ | 0.6038(0.0432) | 0.4410(-0.0061) | 0.5014(0.0161) | 0.3165(0.0032) | 0.1734(0.0034) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 0.9179(0.0643) | 0.5773(-0.0174) | 0.7603(0.0324) | 0.4743(0.0373) | 0.1677(-0.0010) |
| | $\beta_2$ | 0.8740(-0.1553) | 0.8740(-0.1553) | 0.5885(-0.1116) | 0.4955(-0.1144) | 0.1590(-0.0397) |
| | $\beta_3$ | 0.9325(-0.0437) | 0.9325(-0.0437) | 0.6729(-0.0813) | 0.4795(-0.0146) | 0.1675(-0.0058) |
| | $\beta_4$ | 1.1919(0.0178) | 1.1919(0.0178) | 0.7988(0.0058) | 0.6068(0.0147) | 0.1994(0.0166) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 2.0674(0.1807) | 1.4760(0.1131) | 1.5522(0.0958) | 1.1042(0.0840) | 0.1610(0.0132) |
| | $\beta_2$ | 2.0577(-0.2009) | 1.6722(-0.2440) | 1.5500(-0.1564) | 1.0924(-0.1177) | 0.1409(-0.0183) |
| | $\beta_3$ | 2.2970(0.1105) | 1.7073(0.1576) | 1.8949(0.0860) | 1.1571(0.0198) | 0.1613(-0.0054) |
| | $\beta_4$ | 2.0638(-0.2178) | 1.6461(-0.1529) | 1.6068(-0.1283) | 1.0099(-0.0560) | 0.1379(-0.0220) |
| $n = 200$ | | | | | | |
| 0.80 | $\beta_1$ | 0.3666(0.0166) | 0.3172(-0.1067) | 0.3389(0.0129) | 0.1920(0.0032) | 0.1502(0.0011) |
| | $\beta_2$ | 0.3877(-0.0606) | 0.3026(-0.1383) | 0.3763(-0.0614) | 0.1988(-0.0354) | 0.1398(-0.0191) |
| | $\beta_3$ | 0.3590(0.0403) | 0.3072(-0.0719) | 0.3348(0.0355) | 0.1859(0.0243) | 0.1524(0.0172) |
| | $\beta_4$ | 0.3785(-0.0455) | 0.3050(-0.1502) | 0.3701(-0.0419) | 0.1943(-0.0229) | 0.1446(-0.0123) |
| 0.90 | $\beta_1$ | 0.5063(0.0726) | 0.2732(-0.0288) | 0.4733(0.0766) | 0.2589(0.0460) | 0.1688(0.0315) |
| | $\beta_2$ | 0.4692(-0.0431) | 0.2786(-0.0634) | 0.4353(-0.0292) | 0.2474(-0.0286) | 0.1464(-0.0239) |
| | $\beta_3$ | 0.5709(-0.0592) | 0.3710(-0.0410) | 0.5505(-0.0622) | 0.2931(-0.0276) | 0.1605(-0.0042) |
| | $\beta_4$ | 0.4704(-0.0385) | 0.2859(-0.0189) | 0.4513(-0.0555) | 0.2517(-0.0295) | 0.1410(-0.0227) |
| 0.95 | $\beta_1$ | 0.7544(0.0984) | 0.5177(0.0139) | 0.7129(0.0878) | 0.3965(0.0578) | 0.1804(0.0142) |
| | $\beta_2$ | 0.8485(-0.1131) | 0.5725(-0.1116) | 0.7771(-0.0792) | 0.4358(-0.0689) | 0.1698(-0.0238) |
| | $\beta_3$ | 0.8052(-0.0107) | 0.5113(-0.0249) | 0.7645(-0.0201) | 0.4196(-0.0047) | 0.1887(-0.0026) |
| | $\beta_4$ | 0.7797(-0.0471) | 0.4871(-0.0097) | 0.7035(-0.0627) | 0.4042(-0.0265) | 0.1737(-0.0074) |
| 0.99 | $\beta_1$ | 2.0441(0.3429) | 1.5988(0.2453) | 1.7392(0.2861) | 1.0201(0.1530) | 0.2206(0.0236) |
| | $\beta_2$ | 1.8849(-0.2827) | 1.3445(-0.1107) | 1.6236(-0.1702) | 0.9659(-0.1469) | 0.1978(-0.0214) |
| | $\beta_3$ | 2.0654(0.0266) | 1.5035(-0.0951) | 1.6870(-0.0959) | 0.9984(0.0438) | 0.1990(0.0073) |
| | $\beta_4$ | 1.7893(-0.1472) | 1.1965(-0.1066) | 1.4823(-0.0777) | 0.9025(-0.0846) | 0.1859(-0.0230) |