arXiv:2303.05129v1 [math.CO] 9 Mar 2023

分拆的整 Lie 环中的最终周期链

Riccardo Aragona、Roberto Civino 和 Norberto Gavioli

摘要。给定一个整数 n，我们引入最大部分有界的分拆的整 Lie 环，其元素与部分取自 {1，2，.. .，$n-1$} 的整数分拆一一对应。从一个阿贝尔子环出发，我们递归地定义一条理想化子链，并证明链中连续项的秩序列是最终周期的。此外，我们还表明，其增长取决于分拆计数序列的部分和的部分和。本工作推广了我们近期关于同一主题的先前研究；该研究专门讨论模情形，其中分拆中的部分允许在正特征系数环中有有界重复次数。

1. 引言

最近，我们给定一个整数 $n \geq 3$，在部分取自 $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ 且每个部分至多重复 $m-1$ 次的分拆集合上定义了一种李环结构，其中 $m > 2$ 为给定值。在所得结构中（此处记为 $\mathfrak{L}_m(n)$），我们从阿贝尔子环 T 出发，递归地定义了一条理想化子链 $(\mathfrak{N}_i)_{i \geq -1}$。我们证明，$\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ 作为自由 $\mathbb{Z}_m$-模的秩为 q_{i+1}，其中 q_i 是对至少含两个部分的 i 的分拆进行计数所得序列的部分和，每个部分至多重复 $m-1$ 次 [ACG23]。这样做是为了解决 Aragona 等人在 2021 [ACGS 21] 中提出但尚未解决的问题：计算从初等阿贝尔正则子群 T <Sym(m^n) 出发的 Sylow m-子群中的正规化子链的增长，其中 m 是奇素数。事实上，$\mathfrak{L}_m(n)$ 是由秩为一的李环的迭代缔合积构造而成 [ACG23]；当 m 为素数时，这恰好对应于 Sym(m^n) 的 Sylow m-子群下中心列所关联的分次李代数的构造 [SN05]。在这一构造中，理想化子链底部的阿贝尔子环 $\mathfrak{N}_{-1} = \mathfrak{T}$ 对应于正规化子链底部的初等阿贝尔正则子群 T。需要强调的是，上述组合等式仅对链的前 $n-2$ 项成立；截至本文撰写之时，理解该链的一般行为仍是一个难以解决的问题。

本文讨论零特征情形下的一个类似问题，即在由部分取自 {1，2，.....，$n-1$} 的分拆构成、带有整数系数的李环$\mathfrak{L}(n)$中。两种情形在组合上的主要区别在于，现在每个部分都允许出现无界重复次数。我们证明，这会显著影响理想化子链的增长。具体而言，我们在此证明，理想化子链中连续商秩的序列取决于整数分拆序列的二阶部分和，并且（最终）是周期的。

我们在本节最后介绍带有整数系数的分拆李环的构造，并展示一些初步性质。

1.1. 记号与预备知识。

下文给出的分拆整环构造，基于如下构造：针对最大部分有界的分拆的李环，定义在 $\mathbb{Z}_m$ 最大部分有界的分拆 [ACG23],，此处针对 $m = 0$进行了定制。建议读者参阅原论文以了解更多细节，并参阅相关论文，了解对称群背景下的原始问题 [ACGS19、ACGS21]。

2010 数学学科分类号。17B70；17B60；20D20；05A17。关键词和短语。整数分拆；正规化子链；李环。所有作者均为 INdAM-GNSAGA（意大利）的成员。R. Civino 获得拉奎拉大学 ExEMERGE卓越中心的资助，其他作者也与该中心合作。数据可用性：本研究期间生成或分析的所有数据均已包含在本文中。1

设 $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个有限支撑的非负整数序列，即满足

$$\mathrm{wt}(\Lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} i\lambda_i < \infty.$$

序列 Λ 定义了 $N = \mathrm{wt}(\Lambda)$ 的一个 分拆。每个非零的 i 都是该分拆的一个 部分，整数 λ_i 是部分 i 在 Λ 中的重数。Λ 的最大部分是数 $\max(\{i \mid \lambda_i \neq 0\})$。最大部分小于或等于 j 的分拆集合记为 $\mathrm{P}(j)$。

幂单项式 x^{Λ}，其中 Λ 是一个分拆，定义为 $x^{\Lambda} = \prod_i x_i^{\lambda_i}$。给定正整数 n，并记 ∂_k 为关于 x_k 的标准偏导数所给出的导子，其中 $1 \leq k \leq n$，我们将由基张成的自由 $\mathbb{Z}$-模记作 $\mathfrak{L}(n)$

$$\mathcal{B} := \left\{ x^{\Lambda}\partial_k \mid 1 \leq k \leq n \text{ and } \Lambda \in \mathcal{P}(k-1) \right\},$$

并令 $\mathrm{B}_u := \left\{ x^{\Lambda}\partial_k \in \mathrm{B} \mid k = u \right\}$。模 $\mathfrak{L}(n)$ 带有李环结构，其中李括号在基 B 上定义为

$$\begin{aligned} \left[x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Theta}\partial_j\right] := & \quad \partial_j(x^{\Lambda})x^{\Theta}\partial_k - x^{\Lambda}\partial_k(x^{\Theta})\partial_j \\ = & \begin{cases} \partial_j(x^{\Lambda})x^{\Theta}\partial_k & \text{if } j < k, \\ -x^{\Lambda}\partial_k(x^{\Theta})\partial_j & \text{if } j > k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

This 该运算随后通过双线性扩展为 $\mathfrak{L}(n)$ 上的李乘积，而所得

结构 $\mathfrak{L}(n)$ 称为以 $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ 中的元素为部件的分拆的整 Lie 环。

I在本文余下部分，我们将讨论 $\mathfrak{L}(n)$ 的齐次子环，其定义

as f如下。

定义 1.1. 若李子环 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{L}(n)$ 的李子环，且它是由 B 的某个子集 H 张成的自由 $\mathbb{Z}$-模，则称其为齐次的。

关于齐次子环的下述结果，可以像模环 $\mathfrak{L}_m(n)$ [ACG23，定理 25] 中那样证明。本文此处及后文中，若 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个子集，则其理想化子 定义为

$$N_{\mathcal{B}}(\mathcal{H}) := \{ b \in \mathcal{B} \mid [b, h] \in \mathbb{Z}\,\mathcal{H} \text{ for all } h \in \mathcal{H} \}.$$

定理 1.2。 设 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个齐次子环，其基为 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$。$\mathfrak{H}$在 $\mathfrak{L}(n)$ 中的理想化子，是由 $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$ 张成的 $\mathfrak{L}(n)$ 中的齐次子环，且为一个自由的 $\mathbb{Z}$-模。

从阿贝尔齐次李子环 $\mathfrak{L}_m(n)$ 开始的 $\mathfrak{T} = \langle \partial_1, \ldots\ldots, \partial_n \rangle$ [ACG23] 中的理想化子链。此处我们讨论从 $\mathfrak{T}$ 开始、在 $\mathfrak{L}(n)$ 中定义的理想化子链，其定义如下：

$$\mathfrak{N}_i = \begin{cases} \mathfrak{T} & i = -1, \\ N_{\mathfrak{L}(n)}(\mathfrak{T}) & i = 0, \\ N_{\mathfrak{L}(n)}(\mathfrak{N}_{i-1}) & i \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

1.2. 论文结构。本文余下部分安排如下：第 2 节探讨 $\mathfrak{L}(n)$ 的组合学方面：我们引入子集链 $(\mathrm{N}_i)_{i \geq -1}$，并证明 $\mathrm{N}_i \setminus \mathrm{N}_{i-1}$ 的基数在周期性意义下取决于整数分拆序列的二阶部分和（参见推论 2.12 和推论 2.13）。在第 3 节中，我们证明（参见定理 3.4），由集合 N_i 张成的自由 $\mathbb{Z}$-模与式 (1) 的理想化子一致，由此得到本文的主要成果——推论 3.6；该推论将自由 $\mathbb{Z}$-模 $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ 的秩与整数分拆序列的二阶部分和在周期性意义下联系起来。

2. 分拆的整 Lie 环的组合学

为正特征情形所发展的技术并不适用于分拆的整 Lie 环情形，后者需要新的组合工具。正如我们将在本文余下部分所展示的， $\mathfrak{L}(n)$ 的组合性质取决于下文引入的函数的行为。

定义 2.1. 设 $i \geq -1$ 为一个整数，并设 $1 \leq r_i \leq n-1$ 满足 $i \equiv r_i$ 模 $(n-1)$。记

$$i = (h_i - 1)(n-1) + r_i,$$

其中

$$h_i := \left\lfloor \frac{i-1}{n-1} \right\rfloor + 1.$$

权重-次数函数 定义为 $\mathrm{wd}\colon \mathbb{Z}\mathcal{B} \to \mathbb{Z}$，其定义如下

$$\mathrm{wd}(c \cdot x^{\Lambda}\partial_k) := \mathrm{wt}(\Lambda) - \deg(x^{\Lambda}) + n - k,$$

以及 i 阶层函数 $\mathrm{lev}_i\colon \mathbb{Z}\mathcal{B} \to \mathbb{Z}$ 如下定义

$$\mathrm{lev}_i(c \cdot x^{\Lambda}\partial_k) := h_i \,\mathrm{wd}(\Lambda) + \deg(x^{\Lambda}) - 1.$$

现在我们证明权重-次数函数有界。

引理 2.2. 设 $x^{\Lambda}\partial_k \in \mathcal{B}$。则 $\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) \geq n-k$ 且 $\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) = n-k$ 当且仅当 $x^{\Lambda}\partial_k = x_1^{\lambda_1}\partial_k$。此外，假设对于某个 i，有 $\mathrm{lev}_i(x^{\Lambda}\partial_k) \leq i$。则 $\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) \leq n-1$ 且 $\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) = n-1$ 当且仅当 $x^{\Lambda}\partial_k = \partial_1$。

证明。 注意，除非 $\mathrm{wt}(\Lambda) = \deg(x^{\Lambda})$，否则 $\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) = \big(\mathrm{wt}(\Lambda) - \deg(x^{\Lambda})\big) + n - k > n - k$，而这等价于 $x^{\Lambda}\partial_k = x_1^{\lambda_1}\partial_k$。

现在令 i 满足 $\mathrm{lev}_i(x^{\Lambda}\partial_k) \leq i$，并假设 $\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) \geq n-1$。那么

$$\begin{aligned} i &\geq \mathrm{lev}_i(x^{\Lambda}\partial_k) \\ &= h_i \,\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) + \deg(x^{\Lambda}) - 1 \\ &\geq h_i(n-1) + \deg(x^{\Lambda}) - 1 \\ &= (n-1) + (h_i - 1)(n-1) + r_i + \deg(x^{\Lambda}) - r_i - 1 \\ &= i + (n-1) - r_i + \deg(x^{\Lambda}) - 1. \end{aligned}$$

这意味着 $(n-1) - r_i + \deg(x^{\Lambda}) - 1 \leq 0$。由于 $r_i \leq n-1$，只有以下两种情况才有可能：$r_i = n-1$ 且 $\deg(x^{\Lambda}) \leq 1$，或 $r_i = n-2$ 且 $\deg(x^{\Lambda}) = 0$。

在第一种情况下，要么有 $k=1$，从而得到所需的 $x^{\Lambda}\partial_k = \partial_1$；要么有 $x^{\Lambda} = x_j^{\lambda_j}$，其中 $1 \leq j < k$ 且 $\lambda_j \leq 1$。这意味着 $n-1 \leq \mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) = (j-1)\lambda_j + n - k \leq j + n - k - 1$，因而 $k \leq j$，这与 $j < k$ 矛盾。

在第二种情况下，有 $x^{\Lambda}\partial_k = \partial_k$ 且 $n-1 \leq \mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) = n-k$。这又导致 $k=1$ 和 $x^{\Lambda}\partial_k = \partial_1$。□

命题 2.3。 如果 $x^{\Lambda}\partial_k$、$x^{\Theta}\partial_u \in \mathcal{B}$ 不交换，那么

$$\mathrm{lev}_i([x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Theta}\partial_u]) = \mathrm{lev}_i(x^{\Lambda}\partial_k) + \mathrm{lev}_i(x^{\Theta}\partial_u) - h_i(n-1) \tag{2}$$

and

$$\mathrm{wd}([x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Theta}\partial_u]) = \mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) + \mathrm{wd}(x^{\Theta}\partial_u) - (n-1). \tag{3}$$

此外，如果对于某些 i、$j \geq -1$，有 $\mathrm{lev}_i(x^{\Lambda}\partial_k) \leq i$ 和 $\mathrm{lev}_j(x^{\Theta}\partial_u) \leq j$，那么

$$\mathrm{wd}([x^{\Lambda}\partial_k, x^{\Theta}\partial_u]) \leq \min(\mathrm{wd}(x^{\Lambda}\partial_k), \mathrm{wd}(x^{\Theta}\partial_u)), \tag{4}$$

当且仅当 $x^{\Lambda}\partial_k$ 或 $x^{\Theta}\partial_u$ 中有一个是 ∂_1 时，等式成立。

证明。设 $x^\Gamma\partial_u = [x^\Lambda\partial_k, x^\Theta\partial_u]$。我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{wd}(x^\Gamma\partial_u) &= \operatorname{wt}(\Lambda)+\operatorname{wt}(\Theta)-k-\deg(x^\Lambda)-\deg(x^\Theta)+1+n-u\\ &= \operatorname{wd}(x^\Lambda\partial_k)+\operatorname{wd}(x^\Theta\partial_u)-(n-1).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{lev}_i(x^\Gamma\partial_u) =& h_i\operatorname{wd}(x^\Gamma\partial_u)+\deg(x^\Gamma)-1\\ =& h_i\big(\operatorname{wd}(x^\Lambda\partial_k)+\operatorname{wd}(x^\Theta\partial_u)-(n-1)\big)+\deg(x^\Lambda)+\deg(x^\Theta)-2\\ =& \operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_u)+\operatorname{lev}_i(x^\Theta\partial_k)-(n-1)h_i.\end{aligned}$$

该断言最后一部分是引理 2.2 的直接推论。 □

注 1。 直接检查可知

$$\operatorname{lev}_j(x^\Lambda\partial_k) = \operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)+(h_j-h_i)\operatorname{wd}(x^\Lambda\partial_k).$$

引理 2.4。 若 $\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)\le i$，则存在 $j\le i$ 使得 $\operatorname{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)=j$。

证明。 我们对 i 使用归纳法。若 $i=-1$，则 $h_{-1}=0$，因此

$$\operatorname{lev}_{-1}(x^\Lambda\partial_k)=\deg(x^\Lambda)-1\le -1$$

因此 $\deg(x^\Lambda)=0$ 且 $\operatorname{lev}_{-1}(x^\Lambda\partial_k)=-1$。

现在设 $i\ge 0$。我们可以假设 $\ell:=\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)<i$。注意，

$$\operatorname{lev}_\ell(x^\Lambda\partial_k)=\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)+(h_\ell-h_i)\operatorname{wd}(x^\Lambda\partial_k)\le\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)=\ell.$$

若 $\operatorname{lev}_\ell(x^\Lambda\partial_k)=\ell$，则我们已证明该断言；否则 $\operatorname{lev}_\ell(x^\Lambda\partial_k)<\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)=\ell<i$，且满足归纳假设。因此，对于某个 $j\le\ell<i$，$\operatorname{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)=j$。□

引理 *2.5.* 若 $\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)\le i$，则 $\operatorname{lev}_{i+(n-1)}(x^\Lambda\partial_k)\le i+(n-1)$。特别地，对于所有 $i\le h(n-1)$，$\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)>i$ 当且仅当对于所有满足 $(h-1)(n-1)+1\le i\le h(n-1)$ 的 i，$\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)>i$。

证明。 由引理 2.2 可知 $\operatorname{wd}(x^\Lambda\partial_k)\le n-1$。因此 $h_{i+(n-1)}=h_i+1$ 并且

$$\operatorname{lev}_{i+(n-1)}(x^\Lambda\partial_k)=\operatorname{wd}(x^\Lambda\partial_k)+\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)\le(n-1)+i.$$

□

2.1. **引入这条链**。 现在我们准备引入 $\mathcal{B}$ 的一条子集链。稍后我们将证明，它们作为自由模张成式（1）中的理想化子。

定义 2.6. 对于 $i\ge -1$ 令

$$\mathcal{N}_i := \left\{x^\Lambda\partial_k \mid \operatorname{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)\le j \text{ for some } j\le i\right\}.$$

此外，对于 $i\ge 0$ 令

$$\mathcal{L}_i := \mathcal{N}_i\setminus\mathcal{N}_{i-1}.$$

注 2. 注意，$\mathcal{N}_{-1}=\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$ 是 $\mathfrak{T}$ 所张成的自由 $\mathbb{Z}$-模，$\mathcal{N}_{-1}$，并且子集 $\{\mathcal{N}_i\}_{i\ge -1}$ 构成了 $\mathcal{B}$ 的一条升链。还要注意，利用引理 2.4 可直接得到

$$\mathcal{N}_i = \left\{x^\Lambda\partial_k \mid \operatorname{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)= j \text{ for some } j\le i\right\}.$$

此外，$x^\Lambda\partial_k\in \mathrm{L}_i$ 当且仅当 i 是使得 $\operatorname{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)=i$ 的最小值，即

$$\mathcal{L}_i = \left\{x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{B}\;\middle|\; i=\min_j\left\{j=\operatorname{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)\right\}\right\}.$$

命题 2.7。 设 $i\ge 0$。如果 $x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{L}_i$，则 $r_i>\operatorname{wd}(x^\Lambda\partial_k)$。特别地，如果 $k<n-r_i+1$，则 $\mathcal{L}_i\cap\mathcal{B}_k=\emptyset$。

证明。 反设 $x^\Lambda\partial_k \in \mathrm{L}_i$ 且 $r_i \le \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)$。我们有， i 是满足 $i = \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)$ 的最小者。因此， $j := i - \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) > i-(n-1)$ 满足

$$(h_i-2)(n-1) < j = (h_i-1)(n-1) + r_i - \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) \le (h_i-1)(n-1).$$

因此， $h_j = (h_i-1)$ ，根据注记 1，

$$j = i - \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) = \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k) - \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) = \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k),$$

其中 $j < i$，矛盾。

若 $k < n - r_i + 1$，则 $r_i \le n-k \le \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)$。由上文可得 $\mathrm{L}_i \cap \mathrm{B}_k = \emptyset$。 □

下面的推论显然成立。

推论 2.8. 若 $r_t = 1$ 则 $\mathcal{L}_t = \{x_1^{t+1}\partial_n\}$。

2.2. **周期性**。 现在我们可以为序列 $\{\mathrm{L}_i\}_{i\ge 0}$ 定义周期性的概念。以下定义至关重要。

定义 2.9。 周期函数 $\nu\colon \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ 定义为

$$\nu(x^\Lambda\partial_k) := x_1^{n-1-\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)}x^\Lambda\partial_k.$$

注3。 注意，如果 $x^\Lambda\partial_k \in \mathrm{L}_i$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{lev}_{i+n-1}(\nu(x^\Lambda\partial_k)) &= \mathrm{lev}_i(\nu(x^\Lambda\partial_k)) + \mathrm{wd}(\nu(x^\Lambda\partial_k))\\ &= \mathrm{lev}_i(\nu(x^\Lambda\partial_k)) + \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)\\ &= \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k) + \big(n-1-\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)\big) + \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)\\ &= \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k) + n - 1 = i+n-1,\end{aligned}$$

因此 $\nu(x^\Lambda\partial_k) \in \mathrm{L}_{i+n-1}$，因为 $t = i+n-1$ 是使 $\mathrm{lev}_t(\nu(x^\Lambda\partial_k)) = t$ 的平凡最小值。此外，由于周期映射是单射，我们有 $|\mathrm{L}_i| \le |\mathrm{L}_{i+n-1}|$。

注 4。 令 $i \ge 1$ 和 $k > u \ge 1$。假设 $x^\Lambda\partial_k \in \mathrm{L}_i$ 且 $x^\Theta\partial_u \in \mathrm{L}_{h_i(n-1)}$。式 (2) 表明 $\lambda_u x^\Gamma\partial_k := [x^\Lambda\partial_k, x^\Theta\partial_u] \in \mathbb{Z}\mathrm{L}_i$，因为 $\mathrm{lev}_i(x^\Gamma\partial_k) = \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)$；而式 (4) 表明 $\mathrm{wd}(x^\Gamma\partial_k) < \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)$。另请注意，元素 $b_u = x_1^{h_i}x_{u-1}\partial_u \in \mathrm{L}_{h_i(n-1)}$。因此，给定 $x^\Lambda\partial_k \in \mathrm{L}_i$，存在一个序列 $u_1, u_2, \ldots, u_s$，使得

$$[x^\Lambda\partial_k, b_{u_1}, b_{u_2}, \ldots, b_{u_s}] = \lambda x_1^{i-h_i(n-k)+1}\partial_k \in \mathbb{Z}\,\mathcal{L}_i$$

对于一个适当的非零 $\lambda \in \mathbb{Z}$。等式（4）表明，$\mathrm{wd}([x^\Lambda\partial_k, b_u]) = \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) - 1$。因此，由引理 2.2，可得 $s \le k-2$。此外，若 $\lambda_u \ne 0$，则

$$[x^\Lambda\partial_k, \underbrace{b_u,\ldots,b_u}_{\lambda_u\text{ times}}, \underbrace{b_{u-1},\ldots,b_{u-1}}_{\lambda_u\text{ times}}, \ldots, \underbrace{b_2,\ldots,b_2}_{\lambda_u\text{ times}}] = \lambda x_u^{-\lambda_u}x_1^{\lambda_u(1+(h_i-1)(u-1))}x^\Lambda\partial_k$$

对于某个非零 $\lambda \in \mathbb{Z}$，使得 $\sum \lambda_u(u-1) = s \le k-2$，该条件显然等价于 $\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) \le n-2$，如引理 2.2中所见。

结合前述评注、等式（4）和引理 2.2 可得以下结果。

命题 2.10。 若 $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_k \ne \emptyset$，则 $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_k$ 中至多存在一个形如 $x_1^t\partial_k$ 的元素；若存在，则它是 $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_k$ 中权重次数最小的唯一元素。指数 $t = i - h_i(n-k)+1$ 由条件 $x_1^t\partial_k \in \mathcal{L}_i$ 确定。

现在我们可以证明本文的一项主要成果：我们对 L_i 中元素给出了精确的刻画。

定理 2.11. 设 $i \ge 0$。基元素 $x^\Lambda\partial_k$ 属于 $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_k$，当且仅当满足以下条件：

(a) $n-k \le \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) < r_i$，
(b) $i = \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)$.

证明。 首先假设 (a) 和 (b) 均成立。我们有 $\mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k) = i$，因此对于某个 $j \le i$，$x^\Lambda\partial_k \in \mathrm{L}_j \cap \mathrm{B}_k$。反证法，假设 $j = \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)$ 且 $i \neq j$。我们有$i > j = (h_j - 1)(n-1) + r_j = \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k) = h_j\,\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) + \deg(x^\Lambda) - 1$。注意，两个条件 $h_i > h_j$ 或 $r_i > r_j$ 中至少有一个必须成立，因此我们有

$$\begin{aligned}
r_i &= i - (h_i - 1)(n-1)\\
&= \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k) - (h_i-1)(n-1)\\
&= h_i\,\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) + \deg(x^\Lambda) - 1 - (h_i-1)(n-1)\\
&= (h_i - h_j)(\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) - n + 1) + \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k) - (h_j-1)(n-1)\\
&= (h_i - h_j)(\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) - n + 1) + j - (h_j-1)(n-1)\\
&= (h_i - h_j)(\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) - n + 1) + r_j\\
&\le \begin{cases} \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) + (r_j - n + 1) \le \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) < r_i & \text{if } h_i > h_j\\ r_j < r_i & \text{if } h_i = h_j, \end{cases}
\end{aligned}$$

这两种情形都导致矛盾。因此 $j = i$。

反过来，假设 $x^\Lambda\partial_k \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_k$，因此 $i = \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)$。由命题2.7 和引理 2.2可得 $n - k \le \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) < r_i$。

□

2.3. 与分拆序列的联系。下面用整数分拆来描述链 $\{\mathrm{N}_i\}_i$ 的行为。令 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 为一个序列，其第 a_n 项等于 n 的分拆数。再令 $b_n = \sum_{i=0}^n a_i$ 为 $\{a_i\}$ 的部分和，并令 $c_n = \sum_{i=0}^n b_n$ 为 $\{b_i\}$ 的部分和，或者说是 $\{a_i\}$ 的二阶部分和。这些序列的前几项列于表 1，其中也包含相应的整数数列在线大全编号 [OEI]。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	OEIS
a_i	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	A000041
b_i	1	1	3	6	11	18	29	44	66	96	138	194	271	372	507	A026905
c_i	1	1	4	10	21	39	68	112	178	274	412	606	877	1249	1756	A085360

表 1. 序列 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$ 和 $\{c_i\}$ 的前几项

现在我们可以证明，当超过一个阈值后，序列 n（该阈值与 $\{|\mathcal{L}_i|\}$ 呈二次关系）是周期的，并说明它如何依赖于 $\{c_i\}$。此处的值 r_i 如定义 2.1 中所述。

推论 2.12. 若 $i > (n-4)(n-1)$ 且 $1 \le k \le n$，则

$$|\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_k| = b_{r_i+k-n-1}$$

and

$$|\mathcal{L}_i| = c_{r_i-1}.$$

证明。 设 $x^\Lambda\partial_k \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_k$。根据定理 2.11 $x^\Lambda\partial_k$ 满足

(a) $n - k \le \mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k) < r_i$,
(b) $i = \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)$.

令 $\theta_u = \lambda_{u+1}$，条件 (a) 可改写为 $0 \le \sum_{u\ge1} u\theta_u < r_i + k - n$，其中 θ_u 是非负整数。恰好有 $b_{r_i+k-n-1}$ 个序列 $\Theta = \{\theta_u\}_{u=1}^\infty$（包括平凡序列）满足此条件，并确定了 λ_u 对于 $u \ge 2$ 的值。根据条件 (b)，λ_1 的值是唯一确定的。事实上，$\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k)$ 不依赖于 λ_1，并且根据 (b)

我们有 $i = h_i \operatorname{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) + \lambda_1 + \sum_{u\geq 2}\lambda_u - 1$。此外，根据假设，我们有 $h_i \geq n-3$。因此

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= i - h_i \operatorname{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) - \sum_{u\geq 2}\lambda_u + 1 \\
&= (h_i - 1)(n-1) + r_i - h_i \operatorname{wd}(x^{\Lambda}\partial_k) - \sum_{u\geq 2}\lambda_u + 1 \\
&= h_i\left(n - 1 - \operatorname{wd}(x^{\Lambda}\partial_k)\right) - n + 1 + r_i - \sum_{u\geq 2}\lambda_u + 1 \\
&\geq h_i\left(n - 1 - r_i + 1\right) - n + 1 + r_i - r_i - k + n + 2 \\
&= h_i\left(n - r_i\right) + 3 - k \geq h_i + 3 - k \geq n - k \geq 0
\end{aligned}$$

是唯一确定且非负的。

最后，通过计算 $\sum_{k=2}^{n}|\mathbf{L}_i \cap \mathbf{B}_k|$，得到等式 $|\mathbf{L}_i| = c_{r_i - 1}$。 □

一个直接推论是以下结果，它证明序列 $\{|\mathbf{L}_i|\}_{i\geq 0}$ 是最终周期的。

推论 2.13. 若 $i > (n-4)(n-1)$，则周期函数 ν 是从 $\mathcal{L}_i$ 到 $\mathcal{L}_{i+n-1}$ 的双射。

我们以一个具体例子结束本章节，在其中着重展示序列 $\{\mathbf{L}_i\}$ 的周期结构。

例 2.14. 令 $n = 5$ 和 $i \geq 5$。我们列出非空集合 $\mathbf{L}_i \cap \mathbf{B}_k$。

$r_i = 1$**:**

$$\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_5 = \left\{x_1^{i+1}\partial_5\right\};$$

$r_i = 2$**:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_5 &= \left\{x_1^{i+1}\partial_5,\, x_1^{i-h_i}x_2\partial_5\right\} \\
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_4 &= \left\{x_1^{i+1-h_i}\partial_4\right\};
\end{aligned}$$

$r_i = 3$**:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_5 &= \left\{x_1^{i+1}\partial_5,\, x_1^{i-h_i}x_2\partial_5,\, x_1^{i+1-2h_i}x_2^2\partial_5,\, x_1^{i-2h_i}x_3\partial_5\right\} \\
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_4 &= \left\{x_1^{i+1-h_i}\partial_4,\, x_1^{i-2h_i}x_2\partial_4\right\} \\
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_3 &= \left\{x_1^{i+1-2h_i}\partial_3\right\};
\end{aligned}$$

$r_i = 4$**:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_5 = \Big\{&x_1^{i+1}\partial_5,\, x_1^{i-h_i}x_2\partial_5,\, x_1^{i+1-2h_i}x_2^2\partial_5,\, x_1^{i-2h_i}x_3\partial_5, \\
&x_1^{i-2-3h_i}x_2^3\partial_5,\, x_1^{i-1-3h_i}x_2x_3\partial_5,\, x_1^{i-3h_i}x_4\partial_5\Big\} \\
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_4 &= \left\{x_1^{i+1-h_1}\partial_4,\, x_1^{i-2h_i}x_2\partial_4,\, x_1^{i+1-3h_i}x_2^2\partial_4,\, x_1^{i-3h_i}x_3\partial_4\right\} \\
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_3 &= \left\{x_1^{i+1-2h_i}\partial_3,\, x_1^{i+1-3h_i}x_2\partial_3\right\} \\
\mathcal{L}_i \cap \mathcal{B}_2 &= \left\{x_1^{i+1-3h_i}\partial_2\right\}.
\end{aligned}$$

3. 整数环上的理想化子链

最后，我们证明理想化子链由定义 $\mathcal{N}_i$ 中的子集生成 2.6。我们首先描述链 $\{\mathcal{N}_i\}_{i\geq -1}$的交换子结构。

引理 3.1. 若 $i<j$，则 $[\mathcal{N}_i,\ \mathcal{N}_j]\subseteq \mathbb{Z}\mathcal{N}_{j-1}\cup\{0\}$。

证明。设 $x^\Lambda\partial_k\in\mathcal{N}_i$ 且 $x^\Theta\partial_u\in\mathcal{N}j$ 满足 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u]\neq 0$。首先假设$x^\Theta\partial_u\neq\partial_1$。由命题 2.3 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{lev}_j([x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u]) &= \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)+\mathrm{lev}_j(x^\Theta\partial_u)-h_j(n-1)\\ &= \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)+\mathrm{lev}_j(x^\Theta\partial_u)-h_j(n-1)+\mathrm{wd}(x^\Theta\partial_u)(h_j-h_i)\\ &< i+j-h_j(n-1)+(n-1)(h_j-h_i)\\ &= i+j-h_j(n-1)=i-(n-1)+r_j\leq i\leq j-1.\end{aligned}$$

由此可知 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u]\in\mathbf{N}j$，因此存在 $h\leq j$，使得 $\mathbf{lev}_h([x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u])=h$，并且根据上述论证，$h<j$。这就得到 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u]\in\mathbf{N}j-1$。
如果 $x^\Theta\partial_u=\partial_1$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{lev}_i([x^\Lambda\partial_k,\partial_1]) &= h_i(\mathrm{wd}(\partial_1(x^\Lambda)\partial_k))+\deg(\partial_1(x^\Lambda))-1\\ &= h_i(\mathrm{wd}(x^\Lambda\partial_k))+\deg(x^\Lambda)-2=\mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)-1\leq i-1\leq j-1.\end{aligned}$$

根据上述相同的论证，我们有 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u]\in\mathbf{N}j-1$。 □

以下推论可直接得到。

推论 3.2。$\mathcal{N}_j\subseteq N_{\mathcal{B}}(\mathbb{Z}\mathcal{N}j-1)$。

现在我们证明反向包含关系。

命题 3.3。$\mathcal{N}_j=N_{\mathcal{B}}(\mathbb{Z}\mathcal{N}j-1)$。

证明。根据前一个推论，只需证明 $\mathbf{N}_j\supseteq N_{\mathcal{B}}(\mathbf{N}j-1)$。为导出矛盾，我们假设 $x^\Lambda\partial_k\in N_{\mathcal{B}}(\mathbf{N}j-1)$ 满足对所有 $i\leq j$ 都有 $\mathbf{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)>i$。置

$$x^\Theta\partial_u=:x_1^{(h_j-1)(u-\ell)}x_\ell\partial_u,$$

其中 $1\leq\ell<u$，且 $s:=(h_j-1)(n-1)\leq j-1$。我们有 $h_s=h_j-1$，以及

$$\mathrm{lev}_s(x^\Theta\partial_u)=(h_j-1)(\ell-1+n-u)+(h_j-1)(u-\ell)=(h_j-1)(n-1)=s.$$

因此，$x^\Theta\partial_u$ 和 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u]$ 都属于 $\mathbf{N}j-1$。假设对于某个$1<u<n$ 有 $\lambda_u\neq 0$，或者 $l=k$，从而 $[x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u]\neq 0$。对于某个 $i\leq j-1$，有 $\mathbf{lev}_i([x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u])=i$。我们先假设 $i>s$ 且 $h_j=h_{j-1}$，这反过来意味着 $h_i=h_{j-1}=h_j$。我们有

$$\begin{aligned}i &= \mathrm{lev}_i([x^\Lambda\partial_k,x^\Theta\partial_u])\\ &= \mathrm{lev}_i(x^\Lambda\partial_k)+\mathrm{lev}_i(x^\Theta\partial_u)-h_i(n-1)\\ &= \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)+h_i(\ell-1+n-u)+(h_j-1)(u-\ell)-h_i(n-1)\\ &= \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)+h_j(\ell-1+n-u)+(h_j-1)(u-\ell)-h_j(n-1)\\ &= \mathrm{lev}_j(x^\Lambda\partial_k)+(\ell-u)>j+(\ell-u).\end{aligned}$$

由此可得 $j-1\geq i>j+(\ell-u)$。由于根据关于 $x^\Theta\partial_u$ 的假设，我们也可以选择 ℓ 或 u，使得 $u-\ell=1$，因此得到矛盾。

现在假设 $i \le s$ 且 $h_j = h_{j-1}$，于是 $h_i + 1 \le h_{j-1} = h_j$。我们有

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{lev}_i([x^\Lambda \partial_k, x^\Theta \partial_u]) \\ &= \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k) + \operatorname{lev}_i(x^\Theta \partial_u) - h_i(n-1) \\ &= \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k) + \operatorname{lev}_s(x^\Theta \partial_u) + (h_i - h_s)\operatorname{wd}(x^\Theta \partial_u) - h_i(n-1) \\ &= \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k) + \operatorname{lev}_s(x^\Theta \partial_u) + (h_i - h_s)(\ell - 1 + n - u) - h_i(n-1) \\ &= \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k) + h_s(n-1) + (h_i - h_s)(\ell - 1 + n - u) - h_i(n-1) \\ &= \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k) + (h_i - h_s)(\ell - u) \ge \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k), \end{aligned}$$

一个矛盾。

现在假设 $j - 1 = s$ 从而 $h_{j-1} = h_s = h_j - 1$。反复应用引理 2.5，我们可以假设 $\operatorname{lev}_t([x^\Lambda \partial_k, x^\Theta \partial_u]) \le t$ 对于某个 t 满足 $s - (n-1) < t \le s = j - 1$。因此

$$\begin{aligned} t &\ge \operatorname{lev}_t([x^\Lambda \partial_k, x^\Theta \partial_u]) \\ &= \operatorname{lev}_s([x^\Lambda \partial_k, x^\Theta \partial_u]) \\ &= \operatorname{lev}_s(x^\Lambda \partial_k) + \operatorname{lev}_s(x^\Theta \partial_u) - h_s(n-1) \\ &= \operatorname{lev}_{j-1}(x^\Lambda \partial_k) + s - s = \operatorname{lev}_{j-1}(x^\Lambda \partial_k) \end{aligned}$$

从而得到矛盾 $\operatorname{lev}_{j-1}(x^\Lambda \partial_k) \le t \le s = j - 1$。

现在只剩下情形 $x^\Lambda \partial_k = x_1^{\lambda_1} \partial_n$。为了使 $[x^\Lambda \partial_k, x^\Theta \partial_u] \ne 0$，$x^\Theta \partial_u$ 必须设为 ∂_1。特别地，$[x^\Lambda \partial_k, x^\Theta \partial_u] = \lambda_1 x_1^{\lambda_1 - 1} \partial_n \in \mathbb{Z}\mathbf{N}_{j-1}$，且 $\operatorname{lev}_i(x_1^{\lambda_1 - 1}\partial_n) = \lambda_1 - 2$与 i 无关。因此，对于某个 $i \le j - 1$，我们有

$$\operatorname{lev}_{j-1}(x_1^{\lambda_1 - 1}\partial_n) = \operatorname{lev}_i(x_1^{\lambda_1 - 1}\partial_n) = \lambda_1 - 2 \le i \le j - 1.$$

因此 $j \ge \lambda_1 - 1 = \operatorname{lev}_j(x^\Lambda \partial_k) > j$，矛盾。 □

现在我们可以证明关于理想化子链的结论。

Th定理 3.4。设 $\mathfrak{M}_i$ 为由 $\mathcal{N}_i$（$i \ge -1$）张成的自由 $\mathbb{Z}$-模。则 $\mathfrak{M}_i$ 是齐次的 *neo*子环，且

$$\mathfrak{M}_i = N_{\mathfrak{L}(n)}(\mathfrak{M}_{i-1}) = \mathfrak{N}_i.$$

证明。该陈述直接由定理 1.2 和命题3.3 得出，注意到 $\mathfrak{T} = \mathbb{Z}\partial_1 + \cdots + \mathbb{Z}\partial_n = \mathfrak{N}_{-1}$是一个阿贝尔齐次子环。□

注 5。引理 2.2 的一个直接推论是 $\mathfrak{L}(n) \ne \bigcup_{i \ge -1} \mathfrak{N}_i$ 对于 $n \ge 3$。例如，元素 $x_2^3 \partial_3$的权重次数为 n，因此不能属于任何一个 $\mathfrak{N}_i$。我们指出，与李环 $\mathfrak{L}_m(n)$ （$m > 0$的情形不同，这表明 $\mathfrak{L}(n)$不是幂零的，同时也不是有限生成的。

现在，我们可以通过刻画式（1）的理想化子来结束本文。

定理 3.5。若 $i \ge 0$，则 $x^\Lambda \partial_k \in \mathfrak{N}_i \setminus \mathfrak{N}_{i-1}$ 当且仅当 $i \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k)$是满足条件的最小非负整数。

证明。注意到，根据注记 2，我们有 $x^\Lambda \partial_k \in \mathcal{N}_i \setminus \mathcal{N}_{i-1}$ 当且仅当 i 是满足条件的最小非负整数，且 $i = \operatorname{lev}_i(x^\Lambda \partial_k)$。□

推论2.12 的一个直接推论是下面这个总结性结果。

推论 3.6。对于 $i > (n-4)(n-1)$，$\mathbb{Z}$-模 $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ 是秩为 $c_{r_i - 1}$的自由模。

参考文献

[ACG23] R. Aragona、R. Civino 和 N. Gavioli，模理想化子链与重复部分划分的不可细化性，arXiv 预印本 arXiv:2301.06347，已提交（2023）。[ACGS19] R. Aragona、R. Civino、N. Gavioli 和 C. M. Scoppola，具有大交的正则子群，《纯粹与应用数学年鉴》（第 4 辑）**198**（2019），第 6 期，2043–2057。[ACGS21] ———，刚性交换子与正规化子链，《数学月刊》**196**（2021），第 3 期，431–455。[OEI] 在线整数数列百科全书，电子发布于 https://oeis.org，访问日期：2023-02-21。[SN05] V. I. Sushchansky 和 N. V. Netreba，李代数的绕积与有限对称群 *Sylow* p-子群相关的李代数，《代数与离散数学》（2005），第 1 期，122–132。MR 2148825

DISIM，拉奎拉大学，via Vetoio，I-67100 Coppito (AQ)，意大利 电子邮箱，R. Aragona：riccardo.aragona@univaq.it 电子邮箱，R. Civino：roberto.civino@univaq.it 电子邮箱，N. Gavioli：norberto.gavioli@univaq.it