arXiv:2303.05145v1 [math.LO] 9 Mar 2023

亚伯拉罕-谢拉 Δ^2_2-实数的良序

Mohammad Golshani

Abstract. 我们阐述亚伯拉罕-谢拉关于连续统假设与存在实数的 Δ^2_2-良序相容性的证明。

§ 1. 引言 introduction

在 [1], 中，Abraham 和 Shelah 证明了以下定理。

定理 1.1. 假设广义连续统假设成立。那么，存在一个宇宙的泛型扩张，使得广义连续统假设仍成立，且实数存在一个 Δ^2_2 良序。

在这篇短文中，我们通过补充缺失部分的若干细节，对他们的证明作一番阐述。

本文结构如下。第 2 节介绍适当强迫概念、树和 Magidor-Malitz 逻辑的一些预备知识。第 3 节说明如何在 ω_1 的一个平稳子集上将一棵 Aronszajn 树特殊化。第 4 节证明一个在证明中起关键作用的编码定理，最后在第 5 节完成定理 1.1 的证明。

§ 2. 一些预备知识

本节将给出本文后续部分所需的一些定义和结果。

假设 2.1. 本文始终假设：

(1) 广义连续统假设成立，

(2) $S_* \subseteq \omega_1$ 是平稳的，

2020年 数学主题分类。主要分类：03E35、03E45。关键词和短语：树、适当强迫、可定义的良序。作者的研究得到 IPM 的一项资助（编号：1401030417）。

§ 2(A). 适当性与不添加实数。我们假定读者熟悉适当强迫和可数支撑迭代。对于强迫概念 $\mathbb{P}$ 及其条件 p、$q \in \mathbb{P}$，若 $q \geq p$，我们称 q 强于 p。我们首先定义两个概念，它们能保证由满足这些概念的力迫概念构成的可数支撑迭代不会添加实数。第一个概念是 $<\omega_1$-适当性。

定义 2.2。（1）若对任意足够大的正则基数 χ，每当 $N = \langle N_i : i \leq \alpha \rangle$ 是 $(\mathscr{H}(\chi) \in)$ 的可数初等子模型的递增连续链，且 $\alpha, \mathbb{P} \in N_0$ 和 $N \restriction (i+1) \in N_{i+1}$，如果 $p \in \mathbb{P} \cap N_0$，则存在 q, $p \leq q \in \mathbb{P}$，使得对每个 $i \leq \alpha$，q 都是 $(N_i, \mathbb{P})$- 泛型的，那么称 $\mathbb{P}$ 是 α- 适当的。（2）若对任意 $\alpha < \omega_1$，$\mathbb{P}$ 都是 α-适当的，则称 $\mathbb{P}$ 是 $<\omega_1$-适当的。

第二个概念是 $\mathbb{D}$-完备性，我们将在下文给出其定义。先固定一些记号。

记号 2.3。设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，$p \in \mathbb{P}$，且 N 是一个满足 $\mathbb{P} \in N$ 的模型。则

$\mathsf{Gen}(N, \mathbb{P}) = \{\mathsf{G} \subseteq \mathbb{P} \cap N$: G 是 $\mathbb{P} \cap N$ 上的一个泛型滤子 $N\}$.$\mathsf{Gen}^+(N, \mathbb{P}) = \{\mathsf{G} \in \mathsf{Gen}(N, \mathbb{P})$: G 在 $\mathbb{P}\}$ 中有一个上界。$\mathsf{Gen}(N, \mathbb{P}, p) = \{\mathsf{G} \in \mathsf{Gen}(N, \mathbb{P})$: $p \in \mathsf{G}\}$。

定义 2.4。（1）（[7, 第 V 章，定义 5.2]）强迫概念 $\mathbb{P}$ 的一个完备系统是一个函数 $\mathbb{D}$，满足以下陈述：

(a) 对于充分大的 θ，$\mathbb{D}$ 的定义域由形如 (N, p) 的有序对构成，其中 $N \prec (H(\theta) \in)$ 是可数的，$\mathbb{P} \in N$ 且 $p \in \mathbb{P} \cap N$；
(b) 对于每个 $(N, p) \in \mathsf{dom}(\mathbb{D})$ $\mathbb{D}(N, p)$ 都是 $\mathsf{Gen}(N, \mathbb{P}, p)$ 的子集所构成的集合。

(2) ([7, 第五章，定义 5.2]) 假设 κ 是一个基数。如果 $\mathbb{D}$是 $\mathbb{P}$的 κ-完备系统，并且对于每个属于 $\mathbb{D}$的$(N, p) \in \mathsf{dom}$，$\mathbb{D}(N, p)$中少于 $1 + \kappa$ 个元素的交集都非空，则称 $\mathbb{D}$是 $\mathbb{P}$的 κ-完备系统。

(3) ([7, 第五章，定义 5.4]) 如果存在一个二阶公式 Ψ，使得 $\mathbb{D}(N, p) = \{\mathcal{G}_X : X \subseteq N\}$，那么称 $\mathbb{P}$ 的完备系统 $\mathbb{D}$ 是简单的，其中

$$\mathcal{G}_X = \{\mathbf{G} \in \mathrm{Gen}(N, \mathbb{P}, p) : (N, \in, \mathbb{P} \cap N) \models \Psi(\mathbf{G}, X)\}.$$

(4) ([7, 第 V 章，定义 5.3]) 假设 $\mathbb{D}$是 $\mathbb{P}$的简单完备系统。那么，如果对于每个 $(N, p) \in \mathsf{dom}(\mathbb{D})$，$\mathsf{Gen}^+(N, \mathbb{P}, p)$ 都包含 $\mathbb{D}(N, p)$ 的一个元素，就称 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{D}$-完备的。

下一个定理给出了一个充分条件，保证可数支撑的力迫概念迭代不会添加新实数。

定理 2.5.（[7, 第 VIII 章，定理 4.5]）由力迫概念构成的可数支撑迭代，若这些概念是 $<\omega_1$-适当的，并且相对于一个简单的 2-完备性系统是 $\mathbb{D}$-完备的，则不会引入新的实数。

现在我们引入另一个概念，用来证明由力迫概念构成的可数支撑迭代满足 $\aleph_2$-链条件。

定义 2.6.（[7, 第 VIII 章，定义 2.1]）若以下条件对任意足够大的正则基数 λ都成立，则称力迫概念 $\mathbb{P}$满足 κ-p.i.c（κ-适当性同构条件）：设 $i<j<\kappa, N_i, N_j \prec (\mathscr{H}(\lambda) \in, \lhd_\lambda)$（其中 $\lhd_\lambda$是 $\mathscr{H}(\lambda)$ 的良序）是可数的，并且 $\kappa, \mathbb{P} \in N_i \cap N_j, i \in N_i, j \in N_j, N_i \cap \kappa \subseteq j, N_i \cap i = N_j \cap j, p \in N_i \cap \mathbb{P}$ 以及 $h:\ N_i \cong N_j$ 满足 $h \restriction N_i \cap N_j$ 是恒等映射且 $h(i) = j.$。那么存在 $q \in \mathbb{P}$，使得：

- $q \geq p, h(p)$，并且对于 $\mathbb{P}$ 的每个极大反链 $\mathscr{I} \in N_i$，$\mathscr{I} \cap N_i$ 在 q 之上稠密；对于 $\mathscr{I} \in N_j$ 也类似，
- 对于每个 $r \in N_i \cap \mathbb{P}$ 和 $q' \geq q$，都存在 $q'' \geq q'$，使得

$$r \leq q'' \iff h(r) \leq q''.$$

定理 2.7。（[7, 第 VIII 章，引理 2.4]）假设连续统假设成立。若 $\mathbb{P}$ 是长度至多为 ω_2 的可数支撑迭代，且其迭代因子满足 $\aleph_2$-p.i.c.，则 $\mathbb{P}$ 满足 $\aleph_2$-c.c.

§ 2(B). S-st-特殊树。

为了说明 Souslin 假设并不意味着所有 Aronszajn 树都是特殊树，Shelah [6] 引入了几种 Aronszajn 树的特殊化类型。这些特殊化弱于通常的特殊化，但仍足以推出这些树不是 Souslin 树。这里我们只讨论这种特殊化的一个简单版本，更多详情请参见 [6] 和 [7]。

我们称高度为 ω_1、所有层均可数且每个节点都有可数多个后继的树为 $\aleph_1$- 树。

记号 2.8. 若 T 是一棵 $\aleph_1$-树，$s \in T$ 且 $\alpha < \omega_1$，那么

- $T_s = \{t \in T : s \leq_T t\}$。
- $T_\alpha = \{s \in T:\ ht_T(s) = \alpha\}$ 是 T 的第 α 层。
- 若 $\beta \leq ht_T(s)$，那么 $s \restriction \beta$ 是 T_β 中满足 $s \restriction \beta \leq_T s.$ 的唯一元素。一般而言，给定一个由 T 中元素构成的序列 $\vec{s} = \langle s_i :\ i < n \rangle$，以及某个 $\beta \leq \min\{ht_T(s_i) :\ i < n\}$，我们定义

$$\vec{s} \restriction \beta = \langle s_i \restriction \beta : i < n \rangle.$$

- 若 $S \subseteq \omega_1$，则

$$T \restriction S = \{t \in T : ht_T(t) \in S\}.$$

定义 2.9. 假设 $S \subseteq \omega_1$ 是平稳的，且 T 是一个 $\aleph_1$-树。当存在一个 S-特化函数 c，满足 T，也就是说， T是 S-st-特殊的

(1) $c: T \restriction S \to \omega_1$, (2) 若 $t \in T_\delta$ 满足 $\delta \in S$，则 $c(t) < \delta$，(3) 若 $s \neq t$ 属于 $T \restriction S$ 且 $c(s) = c(t)$，则 s 和 t 是 $<_T$-不可比较的。

利用 Fodor 引理，下面的引理显而易见。

引理 2.10. 设 S 是 ω_1 的一个平稳子集，且 T 是 S-st-特殊的。那么 T 没有余终分支，特别是 T 是一个 Aron-Szajn 树。此外 T 不是 Souslin

证明。设 $c: T \restriction S \to \omega_1$ 见证了 T 是 S-st-特殊的。首先证明 T 没有余终分支。反设 b 是 T的一条余终分支，并且对每个 $\alpha < \omega_1$，令 $b(\alpha)$ 为 $b \cap T_\alpha$中的唯一节点。定义 $f: S \to \omega_1$，使得 $f(\alpha) = c(b_\alpha)$。那么 f 是递进的，因此根据 Fodor 引理，它在 S 的一个平稳子集 S' 上为常值。但若 $\alpha < \beta$ 属于 S'，则有 $f(\alpha) = c(b_\alpha) \neq c(b_\beta) = f(\beta)$，矛盾。

为证明 T 不是 Souslin，我们采用类似的方法。对每个$\alpha \in S$，取一个节点 $b(\alpha) \in T_\alpha$。根据上述论证，存在 S 的一个平稳子集 S'，使得对所有属于 S' 的 $\alpha < \beta$， $c(b_\alpha) = c(b_\beta)$。由此可得， $\{b(\alpha): \alpha \in S'\}$ 是 T的一个大小为 $\aleph_1$ 的反链。□

现在我们来定义树的积和不交并。

定义 2.11。设 $n < \omega$ 和 T_0、 $\cdots$、 T_{n-1} 是 $\aleph_1$-树。
(1) $\bigotimes_{i<n} T_i = \{\bar{t} \in \prod_{i<n} T_i: \exists \alpha < \omega_1 \forall i < n$、 $ht_{T_i}(t_i) = \alpha\}$,
(2) 假设 T_i 两两不交。那么 $\bigoplus_{i<n} T_i = \bigcup_{i<n} T_i$。
一般而言，我们可以先令各个 T_i 两两不交，再取它们的并，从而定义 $\bigoplus_{i<n} T_i$ 。

定义 2.12。设 T 是一棵 $\aleph_1$ 树。 T 的导出树是形如 $T_{\vec{s}} = \bigotimes_{i<n} T_{s_i}$ 的树，其中 $\vec{s} = \langle s_i: i < n\rangle$，且对于某个 $\alpha < \omega$ 以及每个 $i < n$， $s_i \in T_\alpha$.

容易看出， T 的导出树 $T_{\vec{s}}$ 是 Aronszajn 树，当且仅当对于某个 $i < n$, T_{s_i} 是 Aronszajn 树。下一个引理给出了关于苏斯林树的一个保留性结果。

引理 2.13.（[1, 定理 3.1], [4,引理 1.2]）设 U 为一棵 Souslin 树。那么，强迫偏序集是适当的且强迫 U 为 Souslin 树这一性质，在任意可数支撑强迫迭代下都得以保留。

下面的引理刻画了 Souslin 树何时会消灭一棵 Aronszajn 树。

引理 2.14.（[2]）设 U 是一棵正规苏斯林树， T 是一棵正规阿伦佐恩树。那么 $\Vdash_U$“ T 有余终分支”当且仅当存在一个闭合无界集 $C \subseteq \omega_1$ ，以及一个严格递增且保持高度的函数 $f\colon U \restriction C \to T \restriction C$.

§ 2(C). Magidor-Malitz 逻辑。在 [3], 中，Magidor 和 Malitz 引入了一种新的逻辑，记作 $L(Q^{MM})$，并研究了它的一些性质。它通过向一阶逻辑添加量词 $Qxy\phi(x,y)$ 而得到；若且唯若存在该结构论域的一个不可数子集，使得对于该集合中任意两个不同的 x 和 y ，$\phi(x,y)$ 成立，该量词在一个结构中为真。本文将需要以下结果。

引理 2.15. ([1]) 对于 Magidor-Malitz 逻辑$L(Q^{MM})$中的任意公式 Ψ ，命题:

$$\text{“there is a model } \mathbf{K} \text{ of } \Psi\text{”}$$

等价于一个 Σ_2^2 命题。

§ 3. Specializing Aronszajn trees

本节将证明以下主要定理，它在本文中起着关键作用。

定理 3.1. 假设 $S_* \subseteq \omega_1$ 是平稳的，且 T 是一个 Aronszajn 树。存在一个强迫概念 $\mathbb{P}_T$ ，使得:

(1) $\mathbb{P}_T$ 是 $< \omega_1$-适当的，并且对于一个 $\aleph_1$-完备性系统 $\mathbb{D}$是 $\mathbb{D}$-完备的。(2) $\mathbb{P}_T$ 满足 $\aleph_2$-p.i.c.，(3) 使用 $\mathbb{P}_T$ 进行强迫不会添加新实数，(4) T在 $V^{\mathbb{P}_T}$中变为 S_*-st-特殊。

本节其余部分将用于证明上述定理。我们所用的强迫概念最初由 Shelah 在 [6]中定义（另见[7, 第 IX 章]）。我们采用 Schlindwein 在 [5]中的方法。

对于 $n < \omega$，令$T^n = \bigotimes_{i<n} T$。我们首先定义一个辅助强迫概念 $\mathbb{P}_T^0$。

定义 3.2。 $\mathbb{P}_T^0$ 中的一个条件是一个有序对 $p = (f_p,\ S_p)$ ，其中:

(1) $S_p \subseteq S_*$ 和 $cl(S_p) \cap S_* \subseteq S_p$，其中 $cl(S_p)$表示 S_p 在 ω_1中的闭包；(2) 若 $t \in \mathrm{dom}(f_p)$，则 $f_p(t) <_T ht_T(t)$,

(3) if $s,t \in \mathrm{dom}(f_p)$ and $f_p(s) = f_p(t)$, then s and t are $<_T$-incomparable.

$\mathbb{P}^0_T$ 按自然方式赋予序： $p \leq q$ 当且仅当 $f_q \supseteq f_p$ 且 S_q 是S_p的端延伸。

定义 3.3. 给定一棵 Aronszajn 树 T, $\vec{s} \in (T^n)_\beta$, f： $T \restriction S \to \omega_1$且 $F \subseteq \omega_1$有限，令 $\heartsuit(\alpha, \vec{s}, f, F)$ 表示：

$$\text{if } \xi \in S \cap (\alpha, \beta], \text{ then } f(s_i \restriction \xi) \notin F \text{ for all } i < n.$$

定义 3.4. 设 T 是一棵 Aronszajn 树。若存在某个闭合无界集 $C \subseteq \omega_1$ 和某个 $\vec{s} \in T^n$，使得 Γ 是一个承诺，则称 Γ 为一个承诺，

(1) $\Gamma \subseteq T^n \restriction C$，(2) 对所有 $\vec{t} \in \Gamma, \vec{t} \geq_{T^n} \vec{s}$，(3) 若 $\vec{t} \in \Gamma$ 且 $\alpha \in ht_{T^n}(\vec{t}) \cap C$，则 $\vec{t} \restriction \alpha \in \Gamma$，(4) 设 $\alpha < \beta$ 属于 C 且 $\vec{t} \in \Gamma(\alpha) = \Gamma \cap (T^n)_\alpha$。则存在一个无限的 $W \subseteq \Gamma(\beta)$，使得：(a) 对所有 $\vec{u} \in W, \vec{u} \geq_{T^n} \vec{t}$，(b) 对于 W 中的所有 $\vec{u}^1 \neq \vec{u}^2$，$\vec{u}^1 \cap \vec{u}^2 = \emptyset$，其含义是$\{u^1_0, \cdots, u^1_{n-1}\} \cap \{u^2_0, \cdots, u^2_{n-1}\} = \emptyset$.

我们记 $C(\Gamma) = C, n(\Gamma) = n$ 以及 $\min(\Gamma) = \vec{s}$。

定义 3.5。假设 $S_* \subseteq \omega_1$ 是平稳且余平稳的，并且 T 是一棵 Aronszajn 树。再设 $(f, S) \in \mathbb{P}^0_T$，并令 Γ 为 T 的一个承诺。我们称 (f, S) 满足 Γ，当且仅当：

(1) $S \setminus ht(\min(\Gamma)) \subseteq C(\Gamma)$；(2) 假设 $\beta \in C(\Gamma)$，$\alpha \in C(\Gamma) \cap S \cap \beta$, $\vec{t} \in \Gamma(\alpha)$，且 $F \subseteq \omega_1$ 是有限的。那么存在一个无限的 $W \subseteq \Gamma(\beta)$，使得 (a) 对所有 $\vec{u} \in W, \vec{u} \geq_{T^n} \vec{t}$，(b) 对所有属于 W 的 $\vec{u}^1 \neq \vec{u}^2$，$\vec{u}^1 \cap \vec{u}^2 = \emptyset$，(c) 对所有 $\vec{u} \in W$，$\heartsuit(\alpha, \vec{u}, f, F)$ 均成立。

我们终于可以定义强迫概念 $\mathbb{P}_T$. 了

定义 3.6。$\mathbb{P}_T$ 中的一个条件是一个三元组 $p = (f_p, S_p, \Psi_p)$，其中 (1) $(f_p, S_p) \in \mathbb{P}^0_T$，(2) Ψ_p 是一个由承诺组成的可数集，且 (f_p, S_p) 满足这些承诺。

给定两个条件 p 和 q，令 $p \leq q$ 当且仅当

(1) $(f_p, S_p) \leq_{\mathbb{P}^0_T} (f_q, S_q)$，(2) $\Psi_q \supseteq \Psi_p$,

(3) 对所有 $\Gamma \in \Psi_p, S_q \setminus S_p \subseteq C(\Gamma)$。

由此，[5], 强迫概念 $\mathbb{P}_T$ 满足定理 3.1 的条件 (1)-(4)。下一个引理的证明与 [1, 定理 4.6]的证明类似。

引理 3.7. 假设 $S^* \subseteq \omega_1$ 是平稳余平稳集，U 是苏斯林树，且 T 是 Aronszajn 树。若 $\Vdash_U$“T 是 Aronszajn”，则$\Vdash_{\mathbb{P}_T}$“U 是苏斯林”。

第 4 节. An encoding theorem

本节将证明一个编码定理（见定理 4.5），该定理将在下一节用于证明定理 1.1。下一个定义是 $[1, \text{定义 } 7.1]$ 的一个类似定义；这里我们不研究特殊树，而是研究 S-st-特殊树。

定义 4.1. 假设 $S \subseteq \omega_1$ 是平稳的，I 是一个 ω_1-型线性序 [1]，并且 (su, sp) 是 $[I]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ 的一个划分，其中 su 对子集封闭。我们称一个 I-序列 $\langle T_i : i \in I\rangle$ 的 $\aleph_1$-Aronszajn 树具有模式 S-(su, sp)，如果：

(1) 对于 $d \in$ su，$\bigoplus_{i\in d} T_i$ 的每棵导出树都是 Souslin；(2) 对于 $d \in$ sp，$\bigotimes_{i\in d} T_i$ 是 S-st-特殊的。

下一个引理表明，$\diamondsuit_{\omega_1}$ 保证了对所有平稳集 $S \subseteq \omega_1$ 以及适当的划分 (su, sp)（其中 $[\omega_1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.）都存在 S- (su, sp) 模式。

引理 4.2。（$[1, \text{定理 } 2.2]$）假设 $\diamondsuit_{\omega_1}$ 成立。设 sp 是 ω_1 的非空有限子集的一个集合，且对超集封闭；设 su 是 ω_1 中不属于 sp 的那些非空有限子集。那么存在一个序列 $\langle T^\xi : \xi < \omega_1\rangle$，由 $\aleph_1$-树组成，且构成一个 S-(su, sp)-模式；事实上，对每个有限集 $d = \{\xi_0, \cdots, \xi_{n-1}\}$，

(1) 如果 $d \in$ su，那么 $\bigoplus_{i<n} T^{\xi_i}$ 及其所有导出树都是苏斯林树；

(2) 如果 $d \in$ sp，那么 $\bigotimes_{i<n} T^{\xi_i}$ 是特殊的。

定义 4.3。（$[1, \text{定义 } 7.2]$）

(1) 若苏斯林树的集合 $\mathcal{U}$ 满足其中所有树的导出树都是苏斯林树，且对于任意苏斯林树 T，都存在某个 $U \in \mathcal{U}$，使得 U 的一个导出树可俱乐部可嵌入到 T中，则称该集合为原始的。(2) 假设 $S \subseteq \omega_1$ 是平稳的，且 I 是一个 ω_1-型线性序。若模式为 S-(su, sp)，则序列 I $\langle T_i : i \in I\rangle$ 称为原始的，当且仅当集合 $\mathcal{U} = \{\bigoplus_{i\in d} T_i : d \in$ su$\}$ 是原始的。

定理 4.4。假设 $S^* \subseteq \omega_1$ 是平稳的，并且令 $\mathcal{U}$ 为一族 Souslin 树，使得对所有 $U \in \mathcal{U}$，U 的所有导出树都是 Souslin 树。那么存在一个强迫概念 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{S^*, \mathcal{U}}$，使得：

[1]这里，ω_1-型线性序指一个不可数的序，其所有初始段都是可数的，并且 I 有最小元，且每个元素都有后继。

(1) $\mathbb{P}$ 不添加新的可数序列，且满足 $\aleph_2$-c.c.；(2) 在 $V^{\mathbb{P}}$ 中， $\mathcal{U}$ 是一族原始 Souslin 树。

证明。定理的证明与 [1, 定理 7.3(2)], 中的证明相同，只是我们使用定理 3.1 中的力迫概念 $\mathbb{P}_T$，而不是其中使用的力迫概念 $\mathscr{S}(T)$。为完整起见，我们给出证明。

设 $\Phi : \omega_2 \to \mathscr{H}(\omega_2)$ 满足：对每个 $x \in \mathscr{H}(\omega_2)$， $\Phi^{-1}(x) \subseteq \omega_2$ 在 ω_2 中共尾；其存在性由广义连续统假设保证。令

$$\mathbb{P} = \langle \langle \mathbb{P}_\alpha : \alpha \leq \omega_2 \rangle, \langle \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle \rangle$$

令其为一个力迫概念的可数支撑迭代，使得在迭代的阶段 α ，除非满足以下条件，否则我们使用平凡力迫概念：

(1) $\Phi(\alpha)$ 是一个 Aronszan 树的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称；(2) 对任意苏斯林树 $U \in \mathcal{U}$ 及其任意导出树 $U^\dagger$，在 $V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 中， $\Vdash_{U^\dagger}$“ $\Phi(\alpha)$ 是 Aronszajn 树 ”。[2]

[2]在这种情况下，我们令 $\mathbb{Q}_\alpha$ 为一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，使得 $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$“ $\mathbb{Q}_\alpha = \mathbb{P}_{\Phi(\alpha)}$”。

由定理 3.1 以及第 2(A) 小节的结果可知， $\mathbb{P}$ 满足定理的条件 (1)。对于条件 (2)，首先注意到，由引理 3.7 和 2.13 可知， $\mathcal{U}$ 中的所有树及其导出树在泛扩张 $V^{\mathbb{P}}$中仍为 Souslin 树。接下来，假设 $T \in V^{\mathbb{P}}$ 是一棵 Souslin 树，并令 $\dot{T}$为它的一个 $\mathbb{P}$-名称。取满足以下条件的 $\alpha < \omega_2$： T是一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，且 $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$“$T = \Phi(\alpha)$”。在迭代的阶段 α，我们应当使用平凡的力迫；否则便会有 $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$“ $\mathbb{Q}_\alpha = \mathbb{P}_{\dot{T}}$”，从而 T在 $V^{\mathbb{P}_{\alpha+1}}$ 中成为S-st 特殊的，因而在 $V^{\mathbb{P}}$中也如此，这与引理 2.10 矛盾。因此，存在某个 $U \in \mathcal{U}$ 以及 U的一棵导出树 $U^\dagger$，使得

$$V^{\mathbb{P}_\alpha} \models \ulcorner \Vdash_{U^\dagger} \text{“ } \dot{T} \text{ is not Aronszajn”} \urcorner.$$

我们可以假设 $U^\dagger$ 的维数最小，因此它是正规苏斯林树。根据引理 2.14， $U^\dagger$ 可俱乐部嵌入到 T[3] 中。□

以下定理的证明与 [1], 中的证明基本相同，只是在这里我们用定理 4.4 代替其中的定理 7.3。

定理 4.5。（编码定理）假设 S^* 是 ω_1 的一个平稳子集，且其中只包含极限序数。存在一个 Magidor-Malitz 逻辑中的句子 Ψ ，其中包含一个用于表示 ω_1 型线性序的一元谓词 I ，以及一元谓词 P（x）和 S（x）等。使得以下结论成立。给定任意 $X \subseteq \omega_1$:

(1) 存在一个扩充了（ω_1， $<$， X）的模型 $M \models \Psi$，使得 $P^M = X$ 且 $S^M = S^*$,

[2]请回想，根据引理 3.7 和 2.13， $U^\dagger$ 在 $V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 中仍然是苏斯林树。[3]这在 $V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 中成立，因此在 $V^{\mathbb{P}}$ 中也成立。

(2) 存在宇宙的一个 $\aleph_2$-c.c. 泛扩张，它不添加新的可数集，并且在其中以下结论成立：如果 N 是 Ψ 的一个模型，那么 I^N 的序型为 ω_1、 $P^N = X$ 和 $S^N = S^*$; (3) 存在宇宙的一个 $\aleph_2$-c.c. 泛扩张，它不添加新的可数集，在其中， M 在同构意义下是 Ψ 的唯一模型

证明。我们先描述句子 Ψ （及其语言）。句子 Ψ描述如下内容:

- $(I, \prec)$ 是一个类似于 ω_1 的序,
- $\langle T^\xi : \xi \in I\rangle$ 是一个由类似于 ω_1 的 Aronszajn 树构成的 I-序列,
- $S \subseteq I$ 由 $(I, \prec)$ 的极限点组成,
- (su, sp) 是一个简单模式，如 [1, Subsection 7.1], 中所述
- 对于每个 $d \in \mathrm{su}\bigoplus_{\xi\in d} T^\xi$，它都是一棵类 ω_1 Souslin 树,
- 对于每个 $d \in \mathrm{sp}\bigotimes_{\xi\in d} T^\xi$，它都是一棵类 ω_1 的 S-特殊 Aronszajn 树，由 $f(d)$~ 见证
- P, P 是 I,~ 的子集
- S 等于 $P \cap \lim(I)$，其中 $\lim(I)$ 是 I 的极限点集合,
- $\forall \xi \in I\big(P(\xi) \iff \tilde{P}(\xi + 1)\big)$,
- $\forall \xi \in I\big(\langle 3,\ 5,\ 6,\ \xi\rangle \in \mathrm{su} \iff \tilde{P}(\xi)\big)$。

现在，给定任意 $X \subseteq \omega_1$ let

$$\tilde{X} = S^* \cup \{\xi + 1 : \xi \in X\}$$

~并设 (su, sp) 是一个简单的 S^*-模式，满足 $X = \{\xi < \omega_1 : \langle 3, 5, 6, \xi\rangle \in \mathrm{su}\}$。由引理 4.2，存在一个序列 $\langle T^\xi : \xi < \omega_1\rangle$ ，由具有模式 S^*-(su, sp) 的 $\aleph_1$-Aronszajn 树构成。于是对所有 $\xi < \omega_1$,

$$\xi \in X \Leftrightarrow \xi + 1 \in \tilde{X} \Leftrightarrow \langle 3, 5, 6, \xi + 1\rangle \in \mathbf{su} \Leftrightarrow \tilde{P}(\xi + 1) \Leftrightarrow P(\xi).$$

类似地，对每个极限序数 $\xi < \omega_1$,

$$\xi \in S^* \Leftrightarrow \xi \in \tilde{X} \Leftrightarrow \langle 3, 5, 6, \xi\rangle \in \mathbf{su} \Leftrightarrow \tilde{P}(\xi) \Leftrightarrow \xi \in S.$$

这就处理了 (1)。

为证明 (2)，令 $\mathcal{U} = \{\bigoplus_{\xi\in d} T^\xi : d \in \mathrm{su}\}$，并令 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{S^*,\ \mathcal{U}}$为定理 4.4 中的强迫概念。该强迫具有 $\aleph_2$-c.c.。令 N 为 Ψ的一个模型。则 I^N 是一个 ω_1-型序，而序列 $\langle (T^\xi)^N : \xi \in I\rangle$ 具有简单模式 S^*-(su, sp)。根据简单模式的唯一性， [4]I^N与 ω_1同构；作此识别后，$(\mathrm{su}^N, \mathrm{sp}^N)$ =(su, sp)。由此可得 $P^N = X$和 $S^N = S^*$.

[4]参见 [1, 定理 7.4]。我们可以注意到，该定理针对特殊树陈述，但其证明同样适用于 S^*-st-特殊树。

命题 (3) 可按 [1, 第 8.1], 小节中的方法证明，因此我们略去其证明。□

§ 5. Proof of main theorem

本节证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明：在 V 中，设 $S^* \subseteq \omega_1$ 是平稳的，且 $\diamondsuit(S^*)$ 成立。设 Ψ 是由定理 4.5 给出的 Magidor-Malitz 逻辑中的句子，其一元谓词为 $P(x)$ 和 $S(x)$。由于 CH 在 V 中成立，我们可以找到一个子集 $P \subseteq \omega_1$，它以自然的方式编码了 $\mathbb{R}$ 的一个良序 $\langle r_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$，其序型为 ω_1. 。现在令 ϕ 为以下句子：

“存在一个 Ψ 的模型 K，其中 r_α 在 $P^{\mathbf{K}}$ 中先于 r_β 出现”。由引理 2.15，ϕ 是一个 Σ^2_2-句子。由定理 4.5，GCH 与 ϕ 相容。事实上，我们可以找到一个 Ψ 的模型 M，其中有 $P^{\mathbf{M}} = P$，并且存在一个泛扩张，在该扩张中 M 是 Ψ. 的唯一模型。在这个泛扩张中，由上述公式 ϕ 定义的关系 $r_\alpha < r_\beta$ 是 Σ^2_2，因而 Δ^2_2（因为任何 Σ^2_2 线性序都是 Δ^2_2）。这就证明了定理 1.1。

References

[1] Abraham, Uri；Shelah, Saharon；实数集的 Δ^2_2 良序与 L(Q^{MM}) 的非紧致性。《纯粹与应用逻辑年刊》59（1993），第 1 期，1–32 页。[2] Lindstr¨om, Ingrid；苏斯林树与 Aronszajn 树的度。《数学逻辑与数学基础杂志》33（1987），第 2 期，159–170 页。[3] Magidor, Menachem；Malitz, Jerome；(Q) 的紧扩张。Ia.《数学逻辑年刊》 11 （1977），第 2 期，217–261 页。[4] Miyamoto, Tadatoshi；可数支撑迭代下的 ω_1-苏斯林树。《数学基础》142（1993），第 3 期，257–261 页。[5] Schlindwein, Chaz；Suslin 假设、非特殊 Aronszajn 树与广义连续统假设的一致性。《符号逻辑杂志》 59 （1994），第 1 期，1–29 页。[6] Shelah, S. 力迫的自由极限及更多关于 Aronszajn 树的结果。《以色列数学杂志》38（1981），第 4 期，315–334 页。[7] Shelah, Saharon, 《适当与不适当力迫》。第二版。《数学逻辑展望》。Springer-Verlag，柏林，1998。xlviii+1020页。ISBN：3-540-51700-6

Mohammad Golshani, School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box: 19395–5746, Tehran, Iran.电子邮箱：golshani.m@gmail.com 网址：http://math.ipm.ac.ir/~golshani/