arXiv:2303.05157v1 [math.GR] 9 Mar 2023

部分群、预群与融合系统的可实现性

Nicolas Lemoine 和 Rémi Molinier

2023年3月10日

摘要

本文比较了两种不同的部分定义群结构概念，即 Chermak 和 Stallings 分别提出的部分群与预群。特别地，我们证明预群范畴可以视为部分群范畴的满子范畴。我们还阐述了预群及其泛群中有限阶元素与子群的一些共轭性质。随后，我们利用这些性质探讨有限预群中融合系统的可实现性问题。

目录

1 部分群与局部性 4

1.1 Chermak 的部分群与局部性.41.2 部分群的单纯观点.6

2 Stallings 的预群及其泛群 7

2.1 预群概述.72.2 泛群中的有限阶元素、有限子群与共轭 102.3 预群是部分群.12

3 群图 14

3.1 群图及其基本群.143.2 群图与预群的泛群.15

4 融合系统与可实现性 1 6

4.1 定义和例子.164.2 有限预群中融合系统的可实现性.20

5 考试 实现融合系统的预群示例 2 2

5.1 Leary-Stancu 群的一个预群.225.1.1 构造预群.225.1.2 P 在 G 中的包含映射.235.1.3 证明 P 是一个预群.255.1.4 P 能否成为局部性？.25

5.2 Robinson 群的一个预群.27

5.2.1 构造预群.275.2.2 P 在 G 中的包含映射.28

5.2.3 证明 P 是一个预群.295.2.4 P 可以是局部性吗? .31

引言

预群是群的推广，其乘积仅在部分情况下有定义。具体而言，预群是一个集合 P，配备一个二元乘积 $m\colon D \to P$，其中 D是 $P \times P$的子集，并满足一些类似群的公理（详见定义 2.1）。Stallings 于20世纪70年代引入了预群 [17]，将其作为研究群的 amalgamated product 的工具。这些预群的一个关键性质是，它们总能嵌入到一个群中。更准确地说，给定一个预群 P，存在一个包含 P的群 $U(P)$，称为 P的泛群，使得 P以一种强意义生成 $U(P)$；这意味着当 P有限时，$U(P)$具有可解的字问题。在一篇发表于 1987 [14],的文章中，Rimlingler 证明，若 P满足一个有限性条件，则其泛群 $U(P)$实际上是某个群图的基本群，该群图的边群和顶点群都是 P的子群。他还证明，对于一个直径有限的群图，如果所有边映射都是单射但非满射，那么它的基本群就是某个预群的泛群。因此，预群可以视为用于编码群图的组合对象。

从其他视角出发，在一篇发表于 2013 [4], 的文章中，Andrew Chermak 引入了群的一种新推广，其乘积仅部分定义：部分群。他关注有限群的 p-局部结构（即群如何通过共轭作用于其 p-子群），以及更一般的融合系统的此类结构。有限 p-群 S 上的融合系统是一个范畴，其对象为 S 的子群，态射集由S 中元素诱导的共轭映射以及其他类似的单射群同态组成（更多细节见定义 4.1）。融合系统的典型例子，是有限群通过共轭作用于其一个 Sylow p-子群所诱导的融合系统。如果一个融合系统满足若干额外公理，使其“表现”得像这些典型例子之一，我们就称它为饱和融合系统。实际上，一般的融合系统构成了一个非常庞大的数学对象类，其中严格包含由有限群诱导的融合系统。甚至存在一些称为奇异的饱和融合系统，它们无法由一个包含 S 作为 Sylow p-子群的有限群 G 得到。这引出了饱和融合系统的可实现性问题：给定一个定义在有限 p-群 S上的饱和融合系统，它能否由一个包含 S 作为 Sylow p-子群的有限群得到? 如果在更广的框架下重新表述，这个问题同样值得关注（并会导向不同的答案）：考虑一般融合系统，去掉 Sylow p-子群这一假设，或拓宽可实现性的背景（例如考虑无限群、部分群等）。

一个部分群由 Chermak 引入，是一个集合$\mathcal{M}$，并配备定义在$\mathcal{M}$ 中字的某个子集上的多元乘积，且满足若干公理（详见定义1.1 ）。Chermak 的主要成就之一，是证明了与给定饱和融合系统相关联的所谓链接系统的存在性和唯一性。在此过程中，他证明了局部性——一种能够对有限群的 p-局部结构建模的特定类型的部分群——与传递子系统之间存在一一对应关系（见[4]附录 A）。链接系统和传递子系统是从给定的饱和融合系统导出的范畴，分别由 Broto、Levi 和 Oliver 于 [3] 以及 Oliver 和 Ventura 于 [12] 引入。他们利用这些对象研究饱和融合系统、有限群的 p-完备分类空间及其间的联系，并由此发展出饱和融合系统的分类空间理论。局部性为这些对象提供了一种更具群论风格的

视角，例如可以运用群论中的工具。 y.

尽管部分群是组合对象，正如 Broto 和 Gonzales 所强调的，它们也可以视为单纯集[2]。例如，局部性的几何实现与相关传递子系统的神经的几何实现具有相同的同伦型。因此，这为研究这些在融合系统同伦论中至关重要的空间开辟了另一种途径。

本文建立预群与部分群之间的联系，并在这一广义背景下探讨融合系统的可实现性问题。在第1节中，我们给出 Chermak 的部分群的基本定义和性质，包括单纯观点。第2 节专门讨论预群。在给出预群的定义、例子，以及关于共轭性质和预群中有限阶元素的一些引理之后，我们证明预群可以通过一种自然的方式视为部分群。更确切地说，存在一个从预群范畴$\mathbf{PrG}$ 到部分群范畴$\mathbf{ParG}$ 的全忠实函子（命题2.23）。由此可得，预群 $U(P$的泛群 P同构于相应单纯集合 BP 的几何实现$\mathcal{B}(P$的基本群；该几何实现称为 P的分类空间，其中 P 被视为部分群。

定理 0.1 (推论 2.25 见下文)。 设 P是一个预群。那么， $\pi_1(BP) \cong U(P)$。

在第 3 节中，我们介绍群图及其基本群，这是回答预群背景下可实现性问题的关键一步。事实上，一方面，我们有上文提到的 Rimlinger 的结果（见定理 3.8 和 3.11）。另一方面，Leary & Stancu 在 [8] 中证明，每个融合系统都可由某个群图的基本群实现。在第 4 节中，在陈述定义并说明如何从部分群构造融合系统之后，我们证明，由预群或其泛群在 Sylow p-子群上诱导的融合系统本质上相同。

定理 0.2 (定理 4.14见下文)。 设 P 是一个预群，且 S 是有限 p-群。那么， S 嵌入为 p 的 *Sylow* 子群，当且仅当它嵌入为 P 的 *Sylow* 子群 p，而且在这种情况下有 $\mathcal{F}_S\big(U(P)\big) = \mathcal{F}_S(P)$。

定理0.1 和0.2 合起来可得以下推论。

推论 0.3。设$\mathcal{L}$ 是与$\mathcal{F}$ （一个定义在 p 群 S上的融合系统）相关联的中心化链接局部性。若$\mathcal{L}$ 是一个预群，则 S 是 $\pi_1(B\mathcal{L})$ 的 *Sylow* p-子群，并且$\mathcal{F}_S(\pi_1(B\mathcal{L})) = \mathcal{F}_S(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$。

这一最后的推论（可推广到与融合系统相关联的任意局部性）有助于我们进一步了解与融合系统相关联的局部性的分类空间的基本群。最后，我们将所有内容汇总起来，并给出预群背景下可实现性问题的答案，结果如下。

定理 0.4(下文推论 4.15)。设$\mathcal{F}$ 是定义在有限 p-群 S上的融合系统。存在一个有限预群 P，其中包含 S 作为 *Sylow* p-子群，使得$\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(P)$。

本文最后在第 5 节给出两种实现融合系统的预群的明确构造。这些例子源自已知的实现融合系统的无限群构造（分别见 Leary 和 Stancu [8] 以及 Robinson [15] ）。对于每种情形，我们也会探讨所构造的预群能否赋予局部性的结构；这似乎很少能够做到。

1 部分群与局部性

1.1 Chermak 的部分群与局部性

部分群和局部性的概念由 Andrew Chermak 提出。我们在此介绍其定义和一些有用的性质，更多细节可见 [4, 第 2] 节，或预印本中的 [5, 第1]节。

对于集合 X，我们将以 X 为底集的自由幺半群记作 $\mathbb{W}(X)$；对于两个字 u、$v \in \mathbb{W}(X)$，我们将 u 与 v 的拼接记作 $u \circ v$。我们还将 X 与 $\mathbb{W}(X)$ 中长度为 1 的字所构成的子集等同。最后，给定两个集合 X 和 Y 以及一个映射 $\varphi\colon X \to Y$，我们将由 φ 诱导的映射记作 $\overline{\varphi}\colon \mathbb{W}(X) \to \mathbb{W}(Y)$，其定义为：对于任意 $u = (x_1, x_2, \cdots\ x_n) \in \mathbb{W}(X)$，有 $\overline{\varphi}(u) = (\varphi(x_1)\ \varphi(x_2), \cdots\ \varphi(x_n)$。

定义 1.1。 设 M 为一个集合，并设 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{W}(\mathrm{M})$ 是一个子集，满足：

(D1) $\mathrm{M} \subseteq \mathbb{D}$；并且

(D2) $u \circ\ v \in \mathbb{D} \Rightarrow u,\ v \in \mathbb{D}$ (特别地，空字 $\emptyset$ 属于 $\mathbb{D}$。)

映射 $\Pi : \mathbb{D} \to \mathrm{M}$ 是一个乘积，如果

(P1) Π在 M 上的限制是恒等映射；并且

(P2) 如果 $u \circ\ v \circ w \in \mathbb{D}$，则 $u \circ \Pi(v) \circ w \in \mathbb{D}$，并且

$$\Pi(u \circ v \circ w) = \Pi\big(u \circ \Pi(v) \circ w\big).$$

Π 的单位元定义为 $\Pi(\emptyset)$，记作 $1_{\mathcal{M}}$；若无歧义，也记作 1。

M 上的取逆映射是 M 上的对合双射 $x \mapsto x^{-1}$，以及由此诱导的、定义在 $\mathbb{W}(\mathrm{M})$ 上的映射 $u \mapsto u^{-1}$，其定义如下：

$$u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (x_n^{-1}, x_{n-1}^{-1}, \cdots, x_1^{-1}).$$

部分群是一个元组 $\big(\mathrm{M}\ \mathbb{D}, \Pi, (\text{–})^{-1}\big)$，其中 Π 是 $\mathbb{D}$ 上的乘积，$(\text{–})^{-1}$ 是 M 上的取逆映射，并满足

(P3) 若 $u \in \mathbb{D}$，则 $u^{-1} \circ\ u \in \mathbb{D}$ 且 $\Pi(u^{-1} \circ\ u) = 1$。

当其余数据已明确时，我们将部分群记作 M 或 $(\mathrm{M}\ \mathbb{D})$。集合 $\mathbb{D} =: \mathbb{D}(\mathrm{M})$ 称为该部分群的定义域 。

由上述公理可以轻易推出若干有用性质。

引理 1.2。 设$(\mathcal{M}\ \mathbb{D})$ 是一个部分群。

(1) 若 $u \circ\ v \in \mathbb{D}$，则 $\big(\Pi(u)\ \Pi(v)\big) \in \mathbb{D}$ 且

$$\Pi(u \circ v)\ =\ \Pi(u)\Pi(v)$$

其中 $\Pi(u)\Pi(v)$ 是 $\Pi\big(\Pi(u)\ \Pi(v)\big)$ 的简写。

(2) 如果 $u \circ\ v \in \mathbb{D}$，那么 $u^{-1} \circ u \circ v \in \mathbb{D}$, $u \circ\ v \circ\ v^{-1} \in \mathbb{D}$，并且我们有

$$\Pi(u^{-1} \circ u \circ v)\ =\ \Pi(v) \qquad \text{and} \qquad \Pi(u \circ v \circ v^{-1})\ =\ \Pi(u)\ .$$

证明。 这些分别是 中的引理 2.2 (a) 和 (d)。 □

例 1.3. 任何群 G 都可构成一个部分群，令 $\mathbb{D} = \mathbb{W}(G)$，并取由 G中的群运算所诱导的乘积和取逆映射。反之，若 M 是一个定义域为$\mathbb{D} = \mathbb{W}(\mathrm{M})$ 的部分群，则 M 在二元运算 $(x, y) \in \mathrm{M}^2 \mapsto \Pi(x, y) \in \mathrm{M}$ 下构成一个群。

例 1.4. 设 $\mathbb{F}(a) = \{1, a, a^{-1}\}$。我们将 $\mathbb{D}_a$ 的非退化字定义为 $\mathbb{W}(\mathbb{F}(a))$ 中所有由 a 和 a^{-1} 交替构成的可能字。等价地， $\mathbb{D}_a$ 的非退化字就是“无限词” $(a, a^{-1}, a, a^{-1}, a, a^{-1}, \cdots)$ 的所有不同有限子词。取逆映射 $(-)^{-1}$ 的含义明确；对于任意字 $u \in \mathbb{D}_a$,

$$\Pi(u) = \begin{cases} 1 & \\ \text{如果 } a \text{ 的数量等于 } a^{-1} \text{的数量} & \\ a & \text{如果 的数量超过 } a^{-1} \text{的数量} \\ (\text{必然多 1 个}) a^{-1} & \\ a^{-1} & \\ a & 1\text{．如果 的数量超过 的数量（必然多 个）} \end{cases}$$

由此可以验证， $\left(\mathbb{F}(a)\ \mathbb{D}_a,\ \Pi_a,\ (-)^{-1}\right)$ 定义了一个部分群。

Thi上一个例子实际上是集合 $\{a\}$ 上的自由部分群，详见 [5, 引理 1.12].

伴随部分群这一概念而来的，还有部分子群和部分群态射的概念。

定义 1.5。设 $\left(\mathrm{M}\ \mathbb{D},\ \Pi,\ (-)^{-1}\right)$ 是一个部分群。M 的一个部分子群 是满足 $\left(\mathrm{N}\ \ \mathbb{D} \cap \mathbb{W}(\mathrm{N})\ \Pi_{|\mathbb{D}\cap\mathbb{W}(\mathcal{N})},\right.$ $\left.(-)^{-1}\right)$ 为部分群的子集 $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$。如果 $\mathbb{D} \cap \mathbb{W}(\mathrm{N}) = \mathbb{W}(\mathrm{N})$，我们称 N 为 M 的一个子群；如果它的阶是某个素数 p 的幂，则称它为 M 的一个 p-子群 。

定义 1.6. 设 $\left(\mathrm{M}_1, \mathbb{D}_1, \Pi_1, (-)^{-1}\right)$ 和 $\left(\mathrm{M}_2, \mathbb{D}_2, \Pi_2, (-)^{-1}\right)$ 是两个部分群。部分群的态射，或称部分群同态，是一个映射 $\varphi\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$，满足

(H1) $\overline{\varphi}(\mathbb{D}_1) \subseteq \mathbb{D}_2$;

(H2) 对任意 $u \in \mathbb{D}_1$, $\Pi_2(\overline{\varphi}(u)) = \varphi(\Pi_1(u))$。

此外，若映射 φ 是双射，且 φ^{-1} 也是部分群的态射，则称 $\varphi\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 为部分群的同构 。最后，M_1 的自同构 是一个同构 $\varphi\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_1$。

采用上述态射概念以及映射上的通常复合，部分群构成一个范畴 $\mathbf{ParG}$，其中群范畴是一个满子范畴。

Chermak 引入了部分群，以研究当 p 为素数时有限群的 p-局部结构。为此，他定义了局部性的概念，使得能够编码和处理这些p-局部结构。为了定义局部性，我们首先需要讨论部分群中的共轭，并定义客观偏群。

记号 1.7. 设 M 为一个部分群且 $g \in \mathrm{M}$，我们用 $\mathbb{D}(g)$ 表示所有满足 $(g^{-1}, x, g) \in \mathbb{D}$ 的 $x \in$M 的集合，并用 $c_g\colon\ x \mapsto x^g$ 表示将 $x \in \mathbb{D}(g)$ 映射到 $\Pi(g^{-1}, x, g)$ 的映射。此外，若 X 是 M 的一个子群且满足 $X \subseteq \mathbb{D}(g)$，则我们用 X^g 表示所有满足 $x \in X$ 的 x^g 的集合。请注意，通常 X^g 并非 M 的子群。

引理 1.8. 设$\mathcal{M}$ 是一个部分群，且 $g \in \mathcal{M}$。那么 c_g 定义了一个双射 $\mathbb{D}(g) \to \mathbb{D}(g^{-1})$，其逆元为 $c_{g^{-1}}$。

证明。 这是 [4] 中的引理 2.5 (c)。 □

定义 1.9. 设 M 是一个部分群，且 Δ 是 M 的子群的一个集合。定义 $\mathbb{D}_\Delta$ 为满足以下条件的所有 $w = (g_1, g_2, \cdots\ g_n) \in \mathbb{W}$(M) 的集合：

$$\exists (X_0, X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{W}(\Delta),\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad X_{i-1} \subseteq \mathbb{D}(g_i) \quad \text{and} \quad (X_{i-1})^{g_i} = X_i\ . \qquad (\maltese)$$

于是，若满足以下两个条件，我们称 (M Δ) 为一个客观偏群。

(Oa) $\mathbb{D}$(M) $= \mathbb{D}_\Delta$。

(Ob) 若 X 和 Y 属于 Δ，且 $g \in$ M 满足 $X \subseteq \mathbb{D}(g)$，并且 X^g 是 Y 的子群，那么包含 X^g 的 Y 的每个子群都属于 Δ。

因此，客观偏群是部分群的一种特殊情形，其定义域由固定子群集之间可复合的共轭映射给出。例如，给定任意群 G 以及 G 的子群的任意集族 Δ，则 (G, $\mathbb{D}_\Delta$) 是一个客观偏群。

定义 1.10。 设 p 为素数，L 为有限偏群。设 S 是 L 的一个 p-子群，并设 Δ 是 S 的子群集族，满足 $S \in \Delta$。我们称 (L Δ, S) 为一个局部性，如果：

(La) (L Δ) 是客观的；并且

(Lb) S 是 L 的有限 p-子群偏序集（按包含映射排序）中的极大元。

1.2 从单纯观点看部分群

设 $(\mathrm{M}\ \mathbb{D}, \Pi, (-)^{-1})$ 是一个部分群。Broto 和 Gonzales [2] 指出，Π 以与群中的乘积 G 诱导$\mathbb{W}(G)$上的单纯集合结构相同的方式，在 $\mathbb{D}$ 上诱导出单纯集合结构。

定义 1.11。 设 $(\mathrm{M}\ \mathbb{D}, \Pi, (-)^{-1})$ 是一个部分群。我们将 B(M) 记作这样一个单纯集合：对于 $n \in \mathbb{N}$, 其 n-单纯形是 B$_n$(M) $= \mathbb{D}_n$ 的元素，即 $\mathbb{D}$ 中长度为 n 的字的集合。对于 $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{0, 1, \cdots\ n-1\}$ 和 $(m_1, m_2, \cdots\ m_n) \in$ B$_n$(M)，面算子定义如下：

$$d_i(m_1, m_2, \cdots, m_n) = \begin{cases} (m_2, m_3, \cdots, m_n) & \text{if } i = 0, \\ (m_1, \cdots, \Pi(m_i, m_{i+1}), \cdots, m_n) & \text{if } 1 \le i \le n-1, \\ (m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}) & \text{if } i = n; \end{cases}$$

并且，对于 $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \cdots\ n\}$ 和 $(m_1, m_2, \cdots\ m_n) \in$ B$_n$(M)，退化算子定义如下：

$$s_i(m_1, m_2, \cdots, m_n) = (m_1, \cdots, m_i, 1, m_{i+1}, \cdots, m_n)$$

其中 1 是 M 的单位元。

最后，这个单纯集合的几何实现记作 $B\mathrm{M} := |\mathrm{B(M)}|$，称为 M 的分类空间 。

如上所述，当我们处理一个实际的群 G （即 $\mathbb{D}(G) = \mathbb{W}(G)$）时，B($G$) 是经典的 bar 构造，而 BG 是群 G 的分类空间。

还要注意，两个部分群之间的映射 f: M$_1$ $\to$ M$_2$ 是部分群同态，当且仅当由 f 在字上诱导的映射 $\overline{f}$: B(M$_1$) $\to$ B(M$_2$) 是单纯映射。Broto 和

Gonzalez 实际上证明了，这构成了一个完全忠实的嵌入$\mathcal{B}$: **ParG** $\to$ **sSet** 从**ParG**到**sSet** 单纯集的范畴（更多细节请参见[2, 第 2] 节）。

部分群与其对应单纯集合的几何实现之间存在深刻联系。例如，正如 Broto 和 Gonzalez [2, 7]所指出的，部分群的扩张与相应单纯集的纤维丛之间存在对应关系。这里我们关注几何实现的基本群 $\pi_1(B$M)。

命题 1.12. 设$\mathcal{M}$ 是一个部分群。存在一个部分群的自然态射 $\theta\colon \mathcal{M} \to \pi_1(B\mathcal{M})$；对于任意群 G 以及任意部分群态射 $\alpha\colon \mathcal{M} \to G$，存在唯一的群同态 $\overline{\alpha}\colon \pi_1(B\mathcal{M}) \to G$，使得 $\alpha = \overline{\alpha} \circ \theta$。

证明。 这直接由 [1, 命题 III.2.7] 得出。若记 $K :=$B(M) $= \mathbb{D}$(M)，以遵循 [1, 命题 III.2.7]，的记号，则 K_0 只是由空字给出的一个点（在证明余下部分中记作 x_0），而且 $K_1 =$M。于是，$\theta\colon K_1 \to \pi_1(|K|, x_0)$ 的映射 [1, 命题 III.2.7]，就是一个映射 θ: M $\to \pi_1(|K|, x_0)$，使得对所有 $(g, h) \in \mathbb{D}_2$(M) $= K_2$，都有$\theta(\Pi(gh)) = \theta(g)\theta(h)$。这等价于说，$\theta$ 是从 M 到群 $\pi_1(B$M) 的部分群同态。最后，泛性质只是对 [1, 命题 III.2.7] 第二部分的另一种表述。

□

特别地，B: **ParG** $\to$ **Top**$_*$ 是一个从 **ParG** 到带基点拓扑空间范畴 **Top**$_*$ 的函子（因为若 M 是一个部分群，B(M) 只有一个 0-单形，因此 BM 的基点有典范的选取）；若以 **Grps** 表示群范畴，那么由 B 后接基本群函子 π_1: **Top**$_*$ $\to$ **Grps** 复合而成的函子 **ParG** $\to$ **Grps**，是遗忘函子 U: **Grps** $\to$ **ParG** 的左伴随。

2 Stallings 的预群及其泛群

2.1 预群概述

预群这一概念由 Stallings 在 [17] 中提出。这种对群结构的推广旨在为某些群族（例如群的 amalgamated 积）提供“良好”的生成集。本文的大部分内容取自 [17, 第 3.A 节] 和 [14, 第 I 部分第 I 节]。

定义 2.1. 预群是一个元组 $(P,\ D,\ m,\ 1_P,\ (-)^{-1})$，其中 P是一个集合，D是 $P \times P$的一个子集，称为定义域；m: $D \to P$和 $(-)^{-1}$: $P \to P$是映射，而 1_P是 P的一个元素，称为单位元，使得对所有 $w,\ x,\ y,\ z \in P$，都有：

(Pr1) $(1_P,\ x) \in D$，$(x,\ 1_P) \in D$且 $m(1_P,\ x) = m(x,\ 1_P) = x$。

(Pr2) $(x,\ x^{-1}) \in D$，$(x^{-1},\ x) \in D$且 $m(x,\ x^{-1}) = m(x^{-1},\ x) = 1_P$。

(Pr3) 若 $(w,\ x)$，$(x,\ y) \in D$，则

$$\big(m(w,x), y\big) \in D \iff \big(w, m(x,y)\big) \in D$$

而在这种情况下，$m\big(m(w,x)\ y\big) = m\big(w, m(x,y)\big)$。

(Pr4) 若 (w,x),(x,y),$(y,z) \in D$，则 $\big(w, m(x,y)\big) \in D$或 $\big(m(x,y)\ z\big) \in D$。

为便于阅读，当 $(x,y) \in D$ 时，我们将用 xy 代替 $m(x,y)$。当 $w,x,y \in P$ 满足 $(w,x),(x,y) \in D$ 且 $(wx,y) \in D$（或者等价地，根据 (Pr3)，$(w,xy) \in D$）时，我们称 (w,x,y) 是相合的。

根据上述定义，预群 $\left(P,\ D,\ m,\ 1_P,\ (-)^{-1}\right)$ 是群，当且仅当 $D = P \times P$。此外，我们很容易从公理推出以下性质。

引理 2.2. 设 $\left(P, D, m, 1_P, (-)^{-1}\right)$ 是一个预群。我们有以下结论：

(1) 若 $x \in P$，则 $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$。*(2)* 若 $(x,y) \in D$，则 $(x^{-1},xy) \in D$ 且 $x^{-1}(xy) = y$。类似地，$(xy, y^{-1}) \in D$ 且 $(xy)y^{-1} = x$。*(3)* 设 $x,y \in P$。则 $(x,y) \in D$ 当且仅当 $(y^{-1},x^{-1}) \in D$，且此时有 $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$。*(4)* 设 $a \in P$，使得 $(x,a),(a^{-1},y) \in D$。则 $(x,y) \in D$ 当且仅当 $(xa,a^{-1}y) \in D$。此时，我们有 $(xa)(a^{-1}y) = xy$。

证明。这些性质在[10] 中针对(3)得到了证明，而其他性质则在 [17] 中得到了证明。不过，为确保一致性（见下一条注释），我们还是更愿意在此给出证明。

先来看 (1)。根据公理（Pr2），(x,x^{-1}) 和 $\left(x^{-1},\ (x^{-1})^{-1}\right)$ 属于 D，且 $xx^{-1} = 1_P = x^{-1}(x^{-1})^{-1}$。根据公理（Pr1），$\left(xx^{-1},\ (x^{-1})^{-1}\right)$ 和 $\left(x, x^{-1}(x^{-1})^{-1}\right)$ 属于 D，它们的乘积分别等于 $(x^{-1})^{-1}$ 和 x。最后，根据公理（Pr3），这两个乘积相等。

对于 (2)，根据公理（Pr2），我们有 $(x^{-1},x) \in D$ 和 $x^{-1}x = 1_P$。因此，根据公理（Pr1），$(x^{-1}x,y) \in D$ 和 $(x^{-1}x)y = y$，所以根据公理（Pr3），$(x^{-1},xy) \in D$ 且 $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = y$。(2) 的另一种情况可由相同的论证得出。

现在对于（3），根据（1），只需证明若 $(x,y) \in D$，则 $(y^{-1},x^{-1}) \in D$。由（2）可知 $\left((xy)^{-1},\ (xy)y^{-1}\right) \in D$；根据公理（Pr2），还有 $\left((xy)y^{-1},\ x^{-1}\right) = (x,x^{-1}) \in D$。此外，$\left((xy)^{-1},\ \left((xy)y^{-1}\right)x^{-1}\right) = \left((xy)^{-1},\ 1_P\right) \in D$。因此，利用公理（Pr3），我们可以推出 $\left((xy)^{-1}\left((xy)y^{-1}\right),\ x^{-1}\right) = \left(y^{-1},\ x^{-1}\right) \in D$，以及 $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$。

最后，对于 (4)，根据 (2)，我们知道 $(xa,\ a^{-1}) \in D$。由于我们还有 $(a^{-1},\ y) \in D$，因此结果不过是公理 (Pr3)。 □

注 2.3. 在 [17], 中，Stallings 将引理 (3) 的性质作为额外公理引入预群的定义。该性质后来被证明是冗余的，因此在 [14]中不再将其列为公理。相反，在后者中，Rimlinger 假设 $x \mapsto x^{-1}$ 按定义是一个对合，但正如[17]中所证明的，这是其他公理的推论。

与部分群一样，我们也有子预群和预群态射的概念。

定义 2.4. 设 $\left(P,\ D,\ m,\ 1_P,\ (-)^{-1}\right)$ 为一个预群。子集 $Q \subset P$ 在 P 中诱导出一个子预群，当且仅当元组 $\left(Q,\ D \cap (Q \times Q)\ m|_{D\cap(Q\times Q)},\ 1_P,\ (-)^{-1}\right)$ 是一个预群。若 $Q \times Q \subseteq D$，则称其为 P 的子群。

定义 2.5。设 $\left(P_1, D_1, m_1, 1_1, (-)^{-1}\right)$ 和 $\left(P_2, D_2, m_2, 1_2, (-)^{-1}\right)$ 是两个预群。预群态射，或称预群同态，是一个映射 $\varphi\colon P_1 \to P_2$，满足对每个 $(x,y) \in D_1$，$(\varphi(x)\ \varphi(y)) \in D_2$ 且 $m_2(\varphi(x)\ \varphi(y)) = \varphi(m_1(x,y))$。

因此，预群与预群态射共同构成一个范畴，我们将其记为**PrG**。预群的一个重要性质是，我们可以为任意一个预群关联一个称为其泛群的群。

定义 2.6。设 $(P, D, m, 1_P, (-)^{-1})$ 是一个预群。P 的泛群 记作 $U(P)$，它是具有如下表示的群：

$$U(P) = \langle\ P \mid m(x,y)y^{-1}x^{-1} \text{ for all } (x,y) \in D\ \rangle$$

其中，$m(x,y)y^{-1}x^{-1}$ 是由 P 生成的自由群中的 $m(x,y)$、y^{-1} 和 x^{-1} 的乘积（不在 P 中）。

记号 2.7。在本文余下部分中，预群 $(P, D, m, 1_P, (-)^{-1})$ 通常简记为 (P, D)，或者在无须提及 D 时进一步简记为 P。

在继续讨论泛群的性质之前，我们先介绍一族预群的例子，它们自然地出现在群的合并积中。

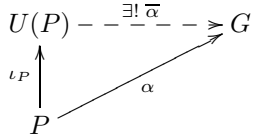
例 2.8（[17, 例 3.A.5.1]）。设 A、B 和 C 是三个群，并设 $\varphi_A\colon C \to A$ 和 $\varphi_B\colon C \to B$ 是单射群同态。令 $A \cup_C B := A \sqcup B/\sim$，其中 $\sim$ 对所有 $x \in C$ 均由 $\varphi_A(x) \sim \varphi_B(x)$ 定义。我们可以将 $A \cup_C B$ 与 $(A \setminus \varphi_A(C)) \sqcup C \sqcup (B \setminus \varphi_B(C))$ 等同，将 A 与 $(A \setminus \varphi_A(C)) \sqcup C$ 等同，并将 B 与 $(B \setminus \varphi_B(C)) \sqcup C$ 等同，因此 $A \cup_C B$ 同时包含 A 和 B，并包含经这些等同识别的 $A \cap B = C$。于是 $A \cup_C B$ 具有自然的预群结构，其定义域为

$$D := \{\ (x,y) \in (A \cup_C B) \times (A \cup_C B) \mid x, y \in A \text{ or } x, y \in B\ \}$$

以及显然的运算。这样，它可以看作 amalgamated product 的一个子集 $A *_C B$（定义见 3.5 中的例 (1)），事实上很容易看出 $U(A \cup_C B) = A *_C B$。

以下泛性质是 $U(P)$ 定义的直接推论。

命题 2.9。设 P 是一个预群。自然映射 $\iota_P\colon P \to U(P)$ 是预群态射；对于任意群 G 以及预群同态 $\alpha\colon P \to G$，存在唯一的群同态 $\overline{\alpha}\colon U(P) \to G$，使得 $\alpha = \overline{\alpha} \circ \iota_P$。



在定理 3.A.4.5 中，Stallings 证明了预群的泛群具有可解的字问题。该定理一个值得注意的推论是，P被单射地嵌入到 $U(P)$ 中。

定理 2.10 ([17, 推论 3.A.4.6])。态射 $\iota_P\colon P \to U(P)$ 是一个单射预群同态。

记号 2.11。设 P是一个预群。一般来说，我们将 P与其在 ι_P 下的像 $P \to U(P)$ 等同；对于 $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{W}(P)$，我们用 $x_1x_2\cdots x_n$ 表示它们在 $U(P)$ 中的乘积。

我们还需要 Stallings 定理的一个较弱版本，下面给出该版本，就在定义P-约化字之后。

定义 2.12。 若字 $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{W}(P)$ 满足对所有 $i \in \{1, 2, \cdots n-1\}$，$(x_i, x_{i+1}) \notin D$，则称其为 P-约化 字。空字是 P-约化的。

定理 *2.13* ([17, 定理 *3.A.4.5*])。设 P为一个预群，并设 $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{W}(P)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots y_m) \in \mathbb{W}(P)$ 为两个 P-约化字。若 $x_1x_2\cdots x_n = y_1y_2\cdots y_m$，则 $n = m$。

特别地，对于 $n = 2$，此结果给出了定义域 D 的刻画，该刻画以泛群中的乘积为依据。

推论 2.14。 设 (P, D) 为一个预群，且 $x, y \in P$。那么 $(x, y) \in D$ 当且仅当 $xy \in P$，其中乘积 xy 是在 $U(P)$中进行的。

我们还可得到以下推论。

推论 2.15。 设 P为一个预群，且 $U(P)$ 为其泛群。给定 $U(P)$ 的任意子群 H，H 是 P 的子群，当且仅当它包含于 P中。

2.2 有限阶元素、有限子群与泛群中的共轭

本节中，(P, D) 是一个固定的预群，$U(P)$ 是其泛群。我们将考察泛群中的有限阶元素。

定义 2.16. 若 循环元素 属于 P，且元素 $x \in P$ 满足 $\langle x\rangle$ 是 P的子群（而不只是 $U(P)$ 的子群），则称其为循环元素。根据推论 2.15，这等价于要求 $\langle x\rangle$ 包含于 P。

引理 2.17. 设 x 是 P 的一个元素。以下条件等价：

(1) x是循环的，(2) $(x, x) \in D$，(3) $x^2 \in P$。

证明。 Rimlinger 已在 [14, 推论 1.10], 中证明了这一结果，但证明很简短，而且是一个运用公理 (Pr4) 证明涉及预群的命题时的简单（热身）例子，因此我们在此给出证明。

（2）与（3）等价，这直接由推论 2.14 得出；而（1）蕴含（3）则显而易见。现在假设（2）成立，并对 $n \in \mathbb{N}$ 作归纳法，证明 $x^n \in P$。$n = 0$ 和 $n = 1$ 的情形显然成立。令 $n \geq 1$，并假设对所有 $i \in \{1, \cdots n\}$，都有 $x^i \in P$。特别地，由归纳假设和推论 2.14，有 $(x^{n-1}, x) \in D$、$(x, x^{n-1}) \in D$；由（2），有 $(x, x) \in D$。将公理 (Pr4) 应用于元组 (x, x^{n-1}, x, x)，得到 $(x, x^n) \in D$ 或 $(x^n, x) \in D$，这两种情形经最后一次应用推论 2.14，均可得出 $x^{n+1} \in P$。归纳证明至此完成。 □

引理 2.18。 令 $x \in U(P)$ 为一个有限阶元素。

(i) 若 $x \in P$，则 x 是 P 的循环元素。(ii) 若 $x \notin P$，则 x 在 $U(P)$中共轭于 P 的一个循环元素。

证明。根据假设，存在 $r \in \mathbb{N}^*$ 使得 $x^r = 1$ 属于 $U(P)$。若 $x \in P$，则由定理 2.13，字 $(x, x, \cdots x) \in P^r$ 不可能是 P-约化的。因此 $(x, x) \in D$，并且根据引理 2.17，x 是 P的一个循环元素。这证明了 (i)。

由于 (i)，且有限阶元素的共轭仍为有限阶元素，因此只需证明 x 与 P 中的一个元素共轭，即可证明(ii)。

令 $w=(p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_n)\in\mathbb{W}(P)$ 为一个极小的 P-约化字，使得 $y=p_1p_2\cdots p_n$ 在 $U(P)$ 中与 x 共轭，并假设 $n\geq 2$。那么 y 也是一个有限阶元素，因此存在 $r\in\mathbb{N}^*$ 使得 $y^r=1$。这意味着，将 w^r 与自身拼接 r 次所得的字不是 P-约化的。由于 w 是 P-约化的，这意味着 $(p_n,\ p_1)\in D$。因此，$p_1^{-1}yp_1=p_2p_3\cdots p_np_1$ 与 x 共轭，且是字 $(p_2,\ p_3,\ \cdots\ p_np_1)$ 的乘积，其长度为 $n-1$。这与 w 的极小性矛盾。因此 $n=1$，即 $y\in P$。

□

In p特别是，这个引理使我们能够毫无歧义地讨论 P 的有限阶元素 ty.

引理 2.19. 设 $x,g\in P$。若 x 是 P中的一个有限阶元素，则以下条件等价。

(1) $g^{-1}x\in P$,
(2) $xg\in P$。

证明。根据引理 2.18，x 是循环的。假设 $g^{-1}x\in P$但 $xg\notin P$。由引理 2.2 的第 (1) 条和第 (3) 条可得 $x^{-1}g\in P$，并且由引理 2.2 可得 (g^{-1},x)、(x,x)、$(x,x^{-1}g)\in D$。因此，根据公理 (Pr4)，由于 $xg\notin P$，$g^{-1}x^2\in P$。现在我们用归纳法证明，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $g^{-1}x^k\in P$。我们已经证明了 $k\leq 2$ 时结论成立，因此设 $k\in\mathbb{N},k\geq 2$，并假设 $g^{-1}x^k\in P$。于是，由引理 2.2 还可得 $x^{-k}g\in P$，从而 (g^{-1},x)、(x,x^k)、$(x^k,x^{-k}g)\in D$。应用公理 (Pr4)，得到 $g^{-1}x^{k+1}\in P$，归纳证明至此完成。然而，假定 x 的阶有限，因此对于某个 $k\in\mathbb{N}$，有 $x^{-1}=x^k$。因此，$g^{-1}x^{-1}\in P$，由引理 2.2 的第 (3) 条可得 $xg\in P$，这与最初的假设矛盾。

对于另一个方向，注意到 x^{-1} 也是 P 中的一个有限阶元素，并且 $xg\in P$ 当且仅当 $g^{-1}x^{-1}\in P$。因此，应用前一个蕴含关系，可得 $x^{-1}g\in P$，这等价于$g^{-1}x\in P$。

□

现在我们来确立一些关于 $U(P)$中共轭的事实，先从一个技术引理开始。

引理 2.20。设 $k\in\mathbb{N}^*$，设 x 是 P中的一个有限阶元素，并设 $(g_0,g_1,\cdots\ g_{k-1})\in\mathbb{W}(P)$是一个 P-约化字，满足 $g_{k-1}^{-1}g_{k-2}^{-1}\cdots g_0^{-1}xg_0g_1\cdots g_{k-1}\in P$。那么对于每个 $i\in\{1,2,\cdots\ k\}$，$g_{i-2}^{-1}\cdots g_0^{-1}xg_0g_1\cdots g_{i-2}\in P$，且 $\left(g_{i-1}^{-1},g_{i-2}^{-1}\cdots g_0^{-1}xg_0g_1\cdots g_{i-2},g_{i-1}\right)$ 互为共轭。

证明。我们对 k 使用归纳法。对于 $k=1$，设 $g\in P$和 x 是 P的一个循环元素，使得$gxg^{-1}\in P$。特别地，根据定理 2.13，我们知道字 (g^{-1},x,g) 不是 P-约化的。因此 $g^{-1}x\in P$或 $xg\in P$；由引理 2.19 可知，这意味着 $g^{-1}x\in P$且 $xg\in P$。由于 $(g^{-1}x)$属于 P，(g^{-1},x,g) 可结合。

现在令 $k\in\mathbb{N}^*$，并假设结论对秩 k 成立。设 $(g_0,g_1,\cdots\ g_k)\in\mathbb{W}(P)$ 是一个 P-约化字，令 x 为 P 的一个循环元素，并假设 $g_k^{-1}g_{k-1}^{-1}\cdots g_0^{-1}xg_0g_1\cdots g_k\in P$。特别地，根据定理 2.13，字 $(g_k^{-1},g_{k-1}^{-1},\cdots\ g_0^{-1},x,g_0,g_1,\cdots\ g_k)$ 不是 P-约化的。由于 $(g_0,g_1,\cdots\ g_k)$ 是 P-约化的，$(g_k^{-1},g_{k-1}^{-1},\cdots g_0^{-1})$ 也如此，因此我们有 $g_0^{-1}x\in P$ 或 $xg_0\in P$。根据引理 2.19，它们都属于 P。此外，字 $(g_k^{-1},g_{k-1}^{-1},\cdots g_1^{-1},g_0^{-1}x,g_0,g_1,\cdots\ g_k)$ 仍不是 P-约化的。因此 $g_1^{-1}(g_0^{-1}x)\in P$ 或 $(g_0^{-1}x)g_0\in P$。假设后者成立，则可直接利用归纳假设得出结论，因为有限阶元素的共轭仍是有限阶元素。否则，若 $g_1^{-1}(g_0^{-1}x)\in P$，则 $(g_1^{-1},g_0^{-1}x)$、$(g_0^{-1}x,x^{-1})$、$(x^{-1},xg_0)\in D$，由 (Pr4) 可知，这意味着 $g_0^{-1}xg_0=(g_0^{-1}xx^{-1})xg_0\in P$ 或 $g_1^{-1}g_0^{-1}=g_1^{-1}(g_0^{-1}xx^{-1})\in P$ （这显然荒谬）。因此我们也得到 $g_0^{-1}xg_0\in P$，并可应用归纳假设，将 $g_0^{-1}xg_0\in P$ 作为有限阶元素，将 $(g_1,g_2,\cdots\ g_k)$ 作为 P-约化字。

□

命题 2.21。 设 $x, y \in P$ 为两个有限阶元素。若 x 和 y 在 $U(P)$ 中共轭，则存在两个有限序列 $x =: x_0, x_1, \cdots x_{k-1}, x_k := y$ 以及 $g_0, g_1, \cdots g_{k-1}$，其元素均属于 P，使得对所有 $i \in \{1, \cdots k-1\}$，(g_i^{-1}, x_i, g_i) 彼此相伴，且 $g_i^{-1} x_i g_i = x_{i+1}$。

证明。 令 $g \in U(P)$ 满足 $g^{-1} x g = y$，并令 $(g_0, g_1, \ldots\ldots g_{k-1}) \in \mathbb{W}(P)$ 为表示 g的一个 P-约化字。若我们递归地定义 $x_i \in P$ 如下$x_{i+1} := g_i^{-1} x_i g_i$，则结论直接由引理 2.20 得出。

□

命题 2.22。 令 Q 和 R 为 P 的两个有限子群。若 Q 和 R 在 $U(P)$ 中共轭，则存在 P 的一个有限子群序列 $Q_0 = Q, Q_1, \ldots\ldots Q_k = R$，以及 P 的一个元素序列 $g_0, g_1, \ldots\ldots g_{k-1}$，使得对于每个 $i \in \{1, \ldots\ldots k-1\}$ 和每个 $x \in Q_i$，(g_i^{-1}, x, g_i) 都关联，并且$g_i^{-1} Q_i g_i = Q_{i+1}$。

证明。令 $g \in U(P)$ 满足 $g^{-1} Q g = R$，并令 $(g_0, g_1, \cdots g_{k-1}) \in \mathbb{W}(P)$ 为一个表示 g 的 P-约化字。归纳地定义 $U(P)$ 的子群 Q_i： $Q_0 := Q$ 且 $Q_{i+1} := g_i^{-1} Q_i g_i$，使得 $Q_k = R$。固定 $i \in \{0, \cdots k-1\}$ 和 $x_i \in Q_i$。根据 Q_i 的定义，存在 $x_0 \in Q$ 使得 $x_i = g_{i-1}^{-1} \cdots g_0^{-1} x_0 g_0 \cdots g_{i-1}$，其中乘积在 $U(P)$ 中进行。此外，根据假设，$g_{k-1}^{-1} \cdots g_0^{-1} x_0 g_0 \cdots g_{k-1} \in R \subseteq P$。应用引理 2.20，我们特别得到 $x_i \in P$，且 (g_i^{-1}, x_i, g_i) 相关联。由于这对一般的 $x_i \in Q_i$ 都成立，我们推得 $Q_i \subseteq P$，因此根据推论 2.15， Q_i 是 P 的子群，证明完毕。

□

2.3 预群是部分群

设 (P, D) 是一个预群，令 $U(P)$ 为其泛群。考虑 $\mathbb{W}(P)$ 的以下子集 ：

$$\mathbb{D}_P = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{W}(P) \mid \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ with } i < j, \ x_i x_{i+1} \cdots x_j \in P \}$$

反复应用推论2.14 和公理 (Pr3)，存在一个定义良好的映射 Π_P 从$\mathbb{D}_P$到 P将 $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}_P$映至

$$\Pi_P(w) = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

这在 P 上定义了一个部分群结构，如下述命题所述。

命题 2.23。 设 P 是一个预群。那么 $\left(P, \mathbb{D}_P, \Pi_P, (-)^{-1}\right)$ 是一个部分群。此构造诱导出一个全忠实函子 $\mathbf{PrG} \to \mathbf{ParG}$。

证明。 首先，我们来验证部分群的公理。根据构造，定义域 $\mathbb{D}_P$ 满足(D1) 和(D2)。根据定义，显然 Π_P 在 P上限制为恒等映射。条件(P2) 是以下事实的推论： Π_P 由上述公式良好定义。最后， $x \mapsto x^{-1}$ 是一个对合双射，这一事实源自引理(1) 中的第2.2项，而(P3) 则源自预群的公理(Pr2) 。

现在，若 P和 Q 是两个预群，且 $\varphi\colon P \to Q$ 是预群同态，则需验证φ 实际上是关联部分群之间的部分群同态。若 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}_P$，我们对 $j - i$ 使用归纳法，证明 $\varphi(x_i) \cdots \varphi(x_j) \in Q$ 且 $\Pi_Q\big(\varphi(x_i) \ldots, \varphi(x_j)\big) = \varphi\big(\Pi_P(x_i, \ldots, x_j)\big)$，对所有满足 $i < j$ 的 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 均成立。对于 $j - i = 1$，这正是 φ 是预群同态这一事实。对于 $j - i > 1$，根据归纳假设，我们有

$$\varphi(x_i) \cdots \varphi(x_j) = \Pi_Q\big(\varphi(x_i), \ldots, \varphi(x_{j-1})\big) \cdot \varphi(x_j) = \varphi\big(\Pi_P(x_i, \ldots, x_{j-1})\big) \cdot \varphi(x_j) .$$

由于 $\Pi_P(x_i,\dots,x_{j-1})\cdot x_j = x_i\cdots x_j \in P$，对 φ应用预群同态的定义，由此可推出 $\varphi(x_i)\cdots\varphi(x_j) \in Q$ 且

$$\begin{aligned}\Pi_Q\big(\varphi(x_i),\dots,\varphi(x_j)\big) \;=\; \varphi(x_i)\cdots\varphi(x_j) \;&=\; \varphi\big(\Pi_P(x_i,\dots,x_{j-1})\big)\cdot\varphi(x_j)\\ &=\; \varphi\big(\Pi_P(x_i,\dots,x_{j-1})\cdot x_j\big)\\ &=\; \varphi\big(\Pi_P(x_i,\dots,x_j)\big).\end{aligned}$$

因此我们得到一个函子 $\mathbf{PrG}\to\mathbf{ParG}$，接下来只需验证它是满且忠实的。忠实性显然成立，因为预群同态的底层集合映射与其对应的部分群同态的底层集合映射相同。最后，预群同态的公理只是部分群同态公理的限制（仅对定义域中的元素对应用这些公理），因此预群之间的任意部分群同态显然都是预群同态。由此可得满性。

□

例 2.24。设 A，B，C如例 2.8所述，并设 $P = A\cup_C B$为该例中构造的预群。将 P的底层集合视为 $A *_C B$的子集，则有 $\mathbb{D}_P = \mathbb{W}(A)\cup\mathbb{W}(B)$。

回到部分群的单纯观点，这揭示了预群的泛群与相应部分群的分类空间的基本群之间的关系。

推论 2.25。设 P是一个预群，并令$\mathcal{P}$ 表示其在嵌入 $\mathbf{PrG}\to\mathbf{ParG}$下的像。那么，$\pi_1(B\mathcal{P})\cong U(P)$。

证明。通过命题 2.23的嵌入，$U(P)$（命题 2.9）所满足的泛性质恰好变为 $\pi_1(B\mathcal{P})$（命题1.12）所满足的泛性质。□

注 2.26。乍看之下，人们可能会想知道，从一个预群构造部分群的过程能否逆向进行：如果将给定部分群的定义域限制为长度为二的字，我们实际上能否得到一个预群？再看看预群的公理，你或许会确信答案通常是“否”：公理 (Pr3) 和 (Pr4) 允许我们推断某些字属于定义域，而无需预先知道包含这些字的更长字也属于定义域；这种性质似乎并未出现在部分群的定义中。

现在，我们给出两个局部性的例子（参见定义 1.10）。第一个例子实际上是一个预群，但第二个不是，因此它给出了一个不是预群的部分群的例子。

例 2.27。设 $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$，并令 $S\le G$ 为对角系数均为 1 的上三角矩阵子群。则 S 是 G 的一个 2-子群，同构于 8 阶二面体群。因此，它包含三个 4 阶子群：其中两个（记为 V 和 V'）同构于 $C_2\times C_2$，最后一个是循环的，记为 C。令 $\Delta = \{C, V, V' S\}$ 且 $\mathbf{L} = \{g\in G \mid \exists Q\in\Delta,\ Q^g\in\Delta\}$。可以验证，取 $\mathbb{D}_\Delta$ 为定义域（参见定义 1.9）时，$(\mathbf{L}\ \Delta, S)$ 是一个局部性。此外，子群 V 和 V' 在 G 中不共轭，因此在 L 中也不共轭；显然，它们也都不与 C 共轭。此外，$N_G(V)\cap N_G(V') = S = N_G(C)$。因此可得 $\mathbb{D}_\Delta = \mathbb{W}(N_G(V))\cup\mathbb{W}(N_G(V'))$，故由例 2.24，L 按照例 2.8 中的方式构造，即 $\mathbf{L} = N_G(V)\cup_S N_G(V')$。

例 2.28。令 T 为 [6] 中构造的链接系统之一，使得 T 的几何实现的基本群是平凡的。通过对应关系，与之关联的局部性 L

由 Chermak 在 [4, 附录 A]中强调的）也满足 $\pi_1(B\mathcal{L})$ 是平凡的，这归功于 [7, 定理 A。5]。因此，若 $\mathcal{L}$ 是预群，那么根据推论 2.25， $U(\mathcal{L}) \cong \pi_1(B\mathcal{L})$ 也将是平凡的，从而 $\mathcal{L}$也将是平凡的。然而，$\mathcal{L}$ 显然并非平凡的，因此 $\mathcal{L}$ 不是预群。

3 群图

3.1 群图及其基本群

定义 3.1。 一个图 $Y = (V, E)$由以下数据构成：

(i) 一个顶点集 V，

(ii) 一个边集 E，

(iii) 两个映射 $\iota\colon E \to V$和 $\tau\colon E \to V$，分别将每条边 e 映射到其起始顶点 和终止顶点，

(iv) 边集上的一个无不动点对合，记为 $e \mapsto \overline{e}$，使得对于所有 $e \in E$, $\iota(e) = \tau(\overline{e})$。

若对于每个 $x, y \in V$，都存在边 $e_0, e_1, \cdots e_n$，使得 $\iota(e_0) = x$,$\tau(e_n) = y$，并且对于所有 $i \in \{0, 1, \cdots n-1\}$， $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$，则称图为连通 的。

定义 3.2。 一个群图 (G, Y)由一个连通图 $Y = (V, E)$、每个顶点 $v \in V$对应的一个群 G_v、每条边 $e \in E$对应的一个群 G_e，以及一个记为 $g \mapsto g^e$ 的单态 $G_e \to G_{\tau(e)}$构成，并满足 $G_{\overline{e}} = G_e$。 G_v 和 G_e 分别称为顶点群 和边群，而映射 $g \mapsto g^e$ 和 $g \mapsto g^{\overline{e}}$ 称为边映射。因此，每条几何边（即每个有序对 $(e, \overline{e})$）对应一个边群和两个边映射。

对于每个群图，我们都可以关联一个特定的群，称为它的基本群 .

定义 3.3. 设 (G, Y) 是一个群图，且有 $Y = (V, E)$，并设 $T = (V, E')$ 是 Y 中的一棵极大树。(G, Y) 的基本群 是由顶点群 G_v（对每个 $v \in V$）和边 $e \in E$生成的群，并满足以下关系：

- $e^{-1} = \overline{e}$ 对每个 $e \in E$,
- $ea^e e^{-1} = a^{\overline{e}}$ 对每个 $e \in E$ 及每个 $a \in G_e$,
- $e = 1$ 对每个 $e \in E'$。

我们称 (G, Y) 的“”基本群，而不称相对于树 T 的 (G, Y) 的基本群，因为事实上它与 T 的选择无关。这个结果直接由 [16, I，命题 20] 得出。

命题 3.4。 如上所定义，群图(G, Y)的基本群不依赖于在 Y 中对极大树的选择。

组合群论中的若干经典构造可表示为特定群图的基本群。下面介绍其中两个。

例 3.5. (1) 设 A 和 B 是两个群，并考虑带有两个单射同态 $\varphi\colon C \to A$ 和 $\psi\colon C \to B$ 的第三个群 C。这构成一个群图，其底层图有两个顶点，且两者之间有一条几何边；顶点群分别为 A 和 B，边群为 C，边映射为 φ 和 ψ（见图 3.1）。那么，这个群图的基本群就是 A 和 B 沿 C 的 amalgamated product（或者说，将 A 和 B 沿 C amalgamating 而成的自由积），记作 $A *_C B$。它等于 $(A * B)/N$，其中 N 是由所有形如 $\varphi(c)\psi(c)^{-1}$、其中 $c \in C$ 的关系生成的 $A * B$ 的正规子群。

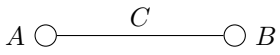


图 3.1：基本群为 $A *_C B$ 的群图。

(2) 设 G 是一个群，H 是 G 的子群，并设 $\alpha\colon H \to G$ 是一个群单态。我们构造一个群图：取一个顶点，其顶点群为 G，以及一条几何边，其边群为 H（见图 3.2）。我们取 α 和包含映射 $H \hookrightarrow G$ 作为边映射。这个群图的基本群是由 α 对 G 作 HNN 扩张，记作 $G*_\alpha$。它是群 $(G * \mathbb{Z})/N$，其中 N 是由所有形如 $tht^{-1}\alpha(h)^{-1}$（$h \in H$）的关系生成的正规子群；t 是 $\mathbb{Z}$ 的一个固定生成元，称为该 HNN 扩张的稳定字母。



图 3.2：基本群为 $G*_\alpha$ 的群图。

众所周知（参见 [16, I，定理 8]），amalgamated product $A *_C B$ 的任意有限子群都共轭于 A 或 B 的某个子群。事实上，这是群图的基本群的一般性质。

命题 3.6 ([8, 推论 28])。群图的基本群的每个有限子群都共轭于某个顶点群的子群。

注 3.7。作为上述命题参考文献的文章 [8], 采用了群图基本群的拓扑定义，这一定义显然与我们的定义不同。不过，正如 [9] 中所示，这两种定义都导出同构的群。简而言之：拓扑方法将给定群图（G，Y）的基本群定义为对空间图的同伦余极限取 π_1；该空间图由将分类空间函子 $B(-)$ 应用于（G，Y）而得到。命题 3.2 在 [9] 中告诉我们，这个同伦余极限与定义 3.3 中定义的基本群的分类空间同胚。对两边取 π_1 即可得到所需的同构。

3.2 群的图与预群的泛群

在 [14], Rimlinger 对预群与群图之间的关系进行了广泛研究。事实上，他证明了预群的泛群与群图的基本群是密切相关的构造：预群 P 的泛群，在满足关于 P 的一个条件时（即

具有有限高度——这包括有限预群以及更多情形），是由 P 构造的某个特定群图的基本群。反之，在满足关于群图 G 的某些条件时，群图 G 的基本群是由 G 构造的某个特定预群的泛群。就我们的目的而言，我们只需要这些结果适用于有限预群和有限群构成的有限群图，因此我们在这一特定情形下陈述它们。

定理 3.8 （参见 [14, 定理 A]）。 设 P 是一个有限预群。记 $U(P)$ 为其泛群。那么存在一个有限群的有限群图 $\mathcal{G}$ ，其边群是 P 的子群，且其基本群同构于 $U(P)$ 。

由定理 3.8 和命题3.6，我们推出以下结果。

推论 3.9。 设 P 是一个有限预群， $U(P)$ 是其泛群。那么，$U(P)$ 的每个有限子群都与 P 的一个子群共轭。

对于定理 3.8的逆命题，除了有限性之外，我们还需要对群图附加一个条件。

定义 3.10。 设 (G, Y) 是一个群图。若 (G, Y) 的所有边映射都不是满射，则称其为真。

定理 3.11 （参见 [14, 定理 B]）。 设 (G, Y) 是一个真有限群的有限群图。那么存在一个有限预群 Q ，其泛群同构于 (G, Y) 的基本群。

注记 3.12。定理 B 在 [14] 中的陈述相当晦涩，细心的读者有理由追问：当 (G, Y) 是有限预群的有限群图时，我们如何看出该预群是有限的。下面简要解读 Rimlinger 的证明，以消除读者的疑虑。这里我们只参考[14]，并沿用其中的记号（但我们将群图记作 (G, Y)，而不是 $(\boldsymbol{H}, Y)$）。定理 B 中构造的预群 Q 在定义 7.13 中定义为：在某个映射（也记作 Y）下，有限条路径的集合（与顶点集和极大子树之外的边集的不交并双射）在 $F(G, Y)$ 中的原像。为了解释这一点，只需知道 $F(G, Y)$ 是预群 P 的泛群（定理 7.7）；而预群 P 是对第 7 章开篇定义的预群 P' 取某个等价关系所得的商。在 (G, Y) 是有限群的有限群图的情形下，预群 P' 的定义显然表明它是有限的（因此 P 也是有限的）。此外， Y 是定义在 P' 上的映射，与商映射 $P' \to P$ 相容，并通过 $(x_1, \cdots\ x_n) \mapsto (Y(x_1), \cdots\ Y(x_n))$ 延拓到 P' 中的字。根据引理 7.9，考察 $F(G, Y)$ 中 P-约化代表元 P-字上的取值，即可知映射 Y 定义良好。现在，给定一条固定路径 $(y_1, \cdots\ y_n)$，对每个 $i \in \{1, \cdots\ n\}$，满足 $Y(x_i) = y_i$ 的 $x_i \in P$ 只有有限多个，因为 P 是有限的。因此，满足 $Y(x_1, \cdots\ x_n) = (y_1, \cdots\ y_n)$ 的 (P-约化) P-字 $(x_1, \cdots\ x_n)$ 也只有有限多个。由于 Q 定义为有限条路径的集合在 Y 下的原像，我们可以得出结论： Q 是有限的。

4 融合系统与可实现性

4.1 定义和例子

设 p 是一个固定的素数。有限 p-群 S 上的融合系统，是一种抽象描述群 G 通过共轭作用于 S 的子群、且该群包含 S 的方式。给定一个群 G 和一个元素 $g \in G$,

我们将同态 $x \in G \mapsto g^{-1}xg \in G$ 记为 c_g （这与记号 1.7一致）。对于两个映射 $f\colon X \to Y$和 $f'\colon Y \to Z$的复合，我们约定将其记为 $f' \circ f$，于是 $c_{g_1} \circ c_{g_2}$等于 $c_{g_2 g_1}$。对于 G的两个子群 H、K，$\mathrm{Hom}_G(H,K)$表示所有群同态 c_g的集合，其中 $g \in G$ 满足 $c_g(H) \leq K$。最后，$\mathrm{Syl}_p(G)$表示所有 Sylow p-子群的集合。

定义 4.1。设 S 是一个有限的 p-群。定义在 S 上的**融合系统** 是一个小范畴 F，其对象集 Obj(F) 为 S 的所有子群组成的集合，且其态射集 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ 对于 $P, Q \leq S$满足以下两个性质：

(F1) $\mathrm{Hom}_S(P, Q) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P, Q) \subseteq \mathrm{Inj}(P, Q)$;

(F2) 每个 $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ 都是先取一个 F-同构，再接一个包含映射的复合 .

融合系统中的复合律由同态的复合给出。我们通常写作 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P,Q)$，以强调 F 中的态射都是群同态这一事实。

注记 4.2。(1) 对于固定的 p-群 S，存在一个最小的融合系统。其态射集为 $\mathrm{Hom}_S(P,Q)$，其中 $P, Q \leq S$。它称为 S 的**内融合系统**，记作 $\mathrm{F}_S(S)$。在 S上也存在一个最大的融合系统，其态射集对于 $P, Q \leq S$等于 $\mathrm{Inj}(P,Q)$。

(2) 两个（或更多）定义在同一个 p-群 S 上的融合系统的交集，是通过对每个融合系统的态射集取交集得到的。这仍然构成一个融合系统。因此，讨论由 S的子群之间某个给定的单射群同态族生成 的 S 上融合系统是有意义的。

融合系统的典型例子是有限群 G 在其某个 Sylow$p$-子群上的融合系统，不过我们也可以更一般地定义任意群在其某个 p-子群上的融合系统。

例 4.3。设 S 是一个有限 p-群，且 G 是一个包含 S的群。G在 S 上的**融合系统** 是范畴 $\mathrm{F}_S(G)$，其中 Obj($\mathrm{F}_S(G)$) 是 S 的所有子群构成的集合，并且对于所有 $P, Q \leq S$，$\mathrm{Mor}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) = \mathrm{Hom}_G(P,Q)$。容易验证，范畴 $\mathrm{F}_S(G)$ 定义了S上的融合系统。

事实上，我们还可以进一步推广，考虑部分群在其某个 p-子群上的融合系统。我们在定义中使用记号1.7 。

定义 4.4. 设 M 是一个部分群，且 S 是 M 的一个 p-子群。我们将 M 在 S上的融合系统记为 F_S(M)，并定义为由共轭映射$c_g\colon Q \to Q^g$生成的、在 S 上的融合系统，其中 $g \in$ M 满足 $Q \subseteq \mathbb{D}(g)$，$Q^g$ 是 S 的子群，且 $c_g\colon Q \to Q^g$ 是群同态。要使 F_S(M) 定义良好，只需验证 c_g 是单射，而这已由引理 1.8 得知。

作为一个特例，我们得到局部性的融合系统，该系统由 Chermak 在 [4]中引入。注意，若 M = L 是与 S相关联的局部性，且只要 $c_g\colon Q \to S$ 有定义，那么 Q^g 就是 S 的子群，且 c_g 是群同态（参见 [5]中的命题 2.6）。因此，F_S(L) 中的态射只是 S的子群之间共轭映射 c_g （对 $g \in$L）的限制的复合。一般而言，部分群似乎并非如此。

局部性的融合系统，以及有限群在其某个 Sylow p 子群上的融合系统，都属于重要的饱和融合系统这一类。这一概念在此不作讨论

（例如参见 [1]），但其基本思想是 $\mathcal{F}$ 的“行为”如同 $\mathcal{F}_S(G)$，其中 S 是有限群 p的 Sylow 子群 G。在文献中，当某个饱和融合系统同形于形如 $\mathcal{F}_S(G)$ 的融合系统，其中 G 是有限群，且 $S \in \mathrm{Syl}_p(G$，则称该融合系统为 可实现(否则称为 奇异)。下文将扩展这一概念，讨论一般融合系统在部分群某个子类中的“可实现性”。首先，我们需要为部分群定义 Sylow p子群的概念。

定义 4.5. 设 M 是一个部分群，且 S 是 M 的一个 p-子群。若对于 M 的每个 p-子群 P，都存在 M 中元素的一个序列 $(g_1,\cdots\ g_r)$，以及 M 的 p-子群的一个序列 $(P_0,\cdots\ P_r)$，使得 S 是 M 的一个$Sylowp$-子群，则称 S 为 M 的一个$Sylowp$-子群：

- $P_0 = P$;
- 对每个 $i \in \{1,\cdots\ r\}$，$P_i \subseteq \mathbb{D}(g_i)$，$c_{g_i}$：$P_i \to P_i^{g_i}$ 是一个群同态，且 $P_i^{g_i} = P_{i+1}$;
- $P_r \leq S$。

注 4.6. (1) 若M存在 Sylow p-子群，则它是一个 p-子群，且阶最大。不过，也可能出现这种情况：是M中的一个 p-子群，且阶最大，但并非 Sylow p-子群。例如，考虑例 2.8中的预群 $P = A \cup_C B$，其中 $A = C_2$，$B = C_4$ 且$C = 1$，那么 B 是 P的一个 2-子群，且阶最大；但 2-子群 A 不共轭于 B 的任何子群，因为 P 中定义在 A 上的共轭映射只有由 A中的元素所诱导的共轭映射。

(2) 如果 M 是一个群，那么这个定义等价于要求 M 的任意 p-子群都在 M 中与 S 的某个子群共轭。特别地，当 M 是有限群时，根据 Sylow 定理，我们便得到 Sylow p-子群的经典定义。

(3) 如果 M = L 是一个局部性，Andrew Chermak（见 [5, 定义 2.16]）也给出了 Sylow$p$-子群 S 的定义，该定义要求存在一组 Δ 子群，属于 S，使得 (L Δ, S) 仍是一个局部性。我们的定义从一开始就更宽泛，因为当 (L Δ, S) 是一个局部性时，L 的每个 p-子群都根据 [5, 命题 2.11.(c)] 与 S 的某个子群共轭。

定义 4.7。 令 C 为部分群类的一个子类。给定有限 p-群 S 上的融合系统 F，若存在一个属于 C 的对象 X，其中 S 是 Sylow$p$-子群，且 F 与 $\mathrm{F}_S(X)$ 同构，则称 F 可在 C 中实现。若存在一个属于 C 且包含 S 的对象 X，使得 F 与 $\mathrm{F}_S(X)$ 同构，则称 F 在 C 中弱可实现。

当然，这一定义只有对某些特定的类 C 才有意义。举例来说，我们用这些术语重述文献中的几项结果。

例子 4.8. (a) 令 C 为有限群类。若考察饱和融合系统在 C 中可实现这一性质，我们便恢复了该术语的经典用法。不能在 C 中实现的饱和融合系统称为奇异 融合系统。此外，在 [13],Sejong Park 证明了任意融合系统在 C 中都是弱可实现的。

(b) 设 $\mathcal{C}$ 为局部性的类别。在 [4, 主定理], 中，Andrew Chermak 证明了任意饱和融合系统都可在 $\mathcal{C}$ 中实现。在这种情况下，局部性的 Sylow p-子群甚至是 Chermak 意义下的 Sylow$p$-子群（见上文备注 4.6 中的 (3)）。

(*c*) 设 $\mathcal{C}$ 为（不一定有限的）群的类别。Leary & Stancu 在 [8], 中证明了任意融合系统都可在 $\mathcal{C}$ 中实现。与此同时，Robinson（在[15]中）独立地采用另一种构造，也证明了一大类融合系统（包括饱和融合系统）可在 $\mathcal{C}$ 中实现。

(*d*) 令 $\mathsf{C} = \mathbf{PrG}$ 为有限预群类。在下一节中，我们将证明任意融合系统都可在 C 中实现。

鉴于后续用途，我们在此详细给出上文示例 (*c*) 中提到的 Leary 和 Stancu 结果的一个略作调整的版本。

定理 *4.9*（参见 [8, 定理 2]）。设 F 是定义在有限 p-群 S 上的融合系统。假设 F 由 $\Phi = \{\Phi_1, \cdots \Phi_r\}$ 生成，其中每个 Φ_i 都是 S 的子群之间的单射群同态 $P_i \to Q_i$。令 U 为任意一个阶与 p 互素的有限群。令 G 为迭代 *HNN* 扩张$\big(\cdots \big((S \times U) *_{\Phi_1}\big) *_{\Phi_2} \cdots \big) *_{\Phi_r}$。那么 S 嵌入为 G 的 *Sylow* p-子群，并且 $F_S(G) = F$。

群 G 是上文定理 4.9 中群图（见图 图 4.1）的基本群，其中对每个 $i \in \{1, \cdots r\}$，两个边映射 $P_i \to S \times U$ 分别为 Φ_i 和包含映射 $P_i \hookrightarrow S$，且二者复合了包含映射 $S \hookrightarrow S \times U$。

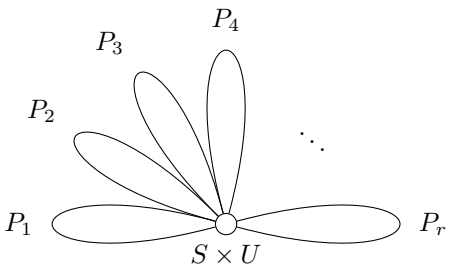


图 4.1：其基本群为定理 G 中的群 4.9。

证明（概要）。将S 替换为 $S \times U$后，[8, 定理 2] 的大部分证明仍然适用。这里只说明需要补充的两个小论证。首先，由于p的任意有限子群 G 都共轭于 $S \times U$的某个子群，又因为 $|U|$ 与 p互素，所以它实际上共轭于 S的某个子群，因此 $\mathsf{F}_S(G)$仍然定义良好。其次，取一个元素 $g \in G$，使其共轭 S的两个子群。由[8, 定理 2] 的证明可知， c_g 是形如 Φ_i或 Φ_i^{-1}的态射的复合，其中 $i \in$取自 r，并且还包含共轭态射 c_t，其中$t \in S \times U$取自 $S \times U$的子群之间。但实际上，由于我们从 S的一个子群出发，因此每一步复合后都必须到达 $S \times U$ 的一个 p-子群（即 S的一个子群）。此外， S 的子群之间由 $S \times U$ 的元素所作的共轭，无非就是由 S的元素所作的共轭，因为U 与 S可交换。因此， c_g 可以表示为形如 Φ_i 或 Φ_i^{-1} 的态射的复合，其中 $i \in$取自 r，并且还包含共轭态射 c_s，其中 $s \in S$取自 S的子群之间。换言之， c_g 属于 F。

□

最后，我们将使用融合系统态射的概念。

定义 4.10. 设 F 和 F′ 分别是有限 p群 S 和 S' 上的两个融合系统。从 F 到 F′ 的融合系统态射是一个群同态 α_0: $S \to S'$，以及一个协变

函子 $\alpha\colon \mathrm{F} \to \mathrm{F}'$，使得 $\alpha(P) = \alpha_0(P)$，并且对于任意 $P \leq S$、任意 F 中的 $\varphi\colon P \to S$以及任意 $u \in P$，都有 $\big(\alpha(\varphi) \circ \alpha_0\big)(u) = (\alpha_0 \circ \varphi)(u)$。

融合系统、融合系统态射，以及群同态和函子的通常复合，共同构成一个范畴。特别地，我们通常关注该范畴中同构意义下的融合系统。

引理 4.11. 设 G 是一个群，S 是 G的一个 p-子群。对于任意 $g \in G$，融合系统 $\mathcal{F}_S(G)$和 $\mathcal{F}_{S^g}(G)$ 同构。

证明. 考虑群同态 $c_g\colon S \to S^g$ 以及函子 $c_g{}^*\colon \mathrm{F}_S(G) \to \mathrm{F}_{S^g}(G)$，它在 S的子群上由 $P \mapsto P^g$定义。$c_g{}^*$ 对态射 $\varphi\colon P \to Q$（属于 $\mathrm{F}_S(G)$）的作用为

$$c_g{}^*(\varphi) \;=\; c_g \circ \varphi \circ c_g^{-1}\colon P^g \longrightarrow Q^g \ .$$

这显然定义了 $\mathrm{F}_S(G)$ 与 $\mathrm{F}_{S^g}(G)$ 之间的融合系统态射。此外，$c_{g^{-1}}\colon S^g \to S$是 c_g 的逆元，并且可以验证 $c_{g^{-1}}{}^*$ 是 $c_g{}^*$的逆元，因此该融合系统态射是一个同构。

□

4.2 融合系统在无限预群中的实现

正如我们在命题2.23中所证明的，预群是部分群的特殊实例。因此，我们可以在预群的某个（Sylow） p-子群上构造该预群的融合系统，并由此探讨能否以这种方式得到任意融合系统，即任意融合系统是否都能在有限预群类中实现。

首先，将预群 (P, D) 通过命题 2.23的嵌入视为部分群，并使用记号 1.7，不难验证，若 $g \in P$ 则有

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(g) \;&=\; \{x \in P \mid (g^{-1}, x), (x, g) \in D \text{ and } (g^{-1}x, g) \in D\} \\
&=\; \{x \in P \mid (g^{-1}, x), (x, g) \in D \text{ and } (g^{-1}, xg) \in D\} \quad \text{thanks to Axiom (Pr3)} \\
&=\; \{x \in P \mid (g^{-1}, x, g) \text{ associates}\} \ .
\end{aligned}$$

以下引理表明，在预群的情形下，共轭映射总是群同态。

引理 *4.12.* 设*(P, D)*为一个预群。设 $g \in P$，且 Q 是 P 的子群，使得 $Q \subseteq \mathbb{D}(g)$。按照记号 *1.7*，我们将 Q 在 c_g 下的像记为 Q^g 。则 Q^g 是 P的子群，包含于 $\mathbb{D}(g^{-1})$中，并且 $c_g\colon Q \to Q^g$ 是一个群同构，其逆元为$c_{g^{-1}}\colon Q^g \to Q$。

证明。 只需证明 $1_P \in Q^g$，$Q^g \times Q^g \subseteq D$ 并且 Q^g 在 P所诱导的运算下构成一个群 P，即可得出它是 $1_P \in Q$ 的子群 $g^{-1}1_P g = 1_P$。由于$1_P \in Q^g$，显然有 Q^g 在（–）$^{-1}$ 下封闭，这一事实源于引理 (1) 和(3) 中的条目2.2。

现在令 x_1，$x_2 \in Q$，因此（x_1，x_2） $\in D$ 且 $x_1x_2 \in Q$。我们要证明（x_1^g，x_2^g） $\in D$ 并且 $x_1^g x_2^g \in Q^g$。一方面，我们有（$g^{-1}x_1$，g），（g^{-1}，$x_2 g$） $\in D$，因此由引理 (4) 中的条目2.2 可得以下等价关系：

$$(x_1^g, x_2^g) \in D \iff (g^{-1}x_1, x_2 g) \in D$$

另一方面，利用 $x_1x_2 \in Q$ 以及两次应用公理 (Pr3)，我们知道

$$(g^{-1}, (x_1x_2)g) \in D \iff (g^{-1}, x_1(x_2 g)) \in D \iff (g^{-1}x_1, x_2 g) \in D \ .$$

因此（x_1^g， x_2^g） $\in D$，反复应用公理 (Pr3) 可得

$$(x_1^g)(x_2^g) \;=\; g^{-1}(x_1x_2)g \;\in Q^g.$$

上述等式还表明 $c_g\colon\ Q \to Q^g$ 是一个群同态。证明的其余部分只是引理 1.8。

□

注 4.13. 若 P 是一个预群，且 S 是 p-子群 P，则融合系统 $\mathcal{F}_S(P)$ 的态射（定义见 4.4）恰好是 $Q \to R$ 的子群之间的映射 S，它们是以下共轭映射的限制的复合 c_g，其中 $g \in P$。

现在我们可以证明，有限预群 P和它的泛群 $U(P)$ 的融合系统在同一个 Sylow p-子群 S上相同。

定理 4.14. 设 P 是一个预群， S 是一个有限 p-群。那么， S 嵌入为P的 *Sylow* p-子群，当且仅当它嵌入为 $U(P)$的 *Sylow* p-子群；在这种情况下，我们有 $\mathcal{F}_S\big(U(P)\big) = \mathcal{F}_S(P)$。

证明。我们通过典范嵌入 $P \hookrightarrow U(P)$，将 P 与其像等同。显然， P 的任意 Sylow p-子群 S 都是 $U(P)$ 的 p-子群。根据推论 3.9，$U(P)$ 的任意 p-子群 Q 都共轭于 P 的某个 p-子群 R，因此存在 $U(P)$ 的子群序列 $Q = Q_0, R = Q_1, Q_2, \cdots\ Q_r$，其中每个 Q_{i+1} 在 $U(P)$ 中都共轭于 Q_i 和 $Q_r \le S$。因此，S 实际上是 $U(P)$ 的一个 Sylow p-子群。

反之，如果 S 是 $U(P)$ 的一个 Sylow p-子群，那么根据推论 3.9，它通过共轭态射 c_g 嵌入 P，其中 $g \in U(P)$。由于 P 的任意 p-子群都是 $U(P)$ 的 p-子群，因此它共轭于 S 的一个子群，进而在 $U(P)$ 中共轭于 S^g 的一个子群。由此，根据命题 2.22 可得所需结论，即 S^g 是 P 的一个 Sylow p-子群。

由引理 4.11 可知，对于所有 $g \in G$，融合系统 $\mathrm{F}_S\big(U(P)\big)$ 和 $\mathrm{F}_{S^g}\big(U(P)\big)$ 同构。因此，我们可以假设 S 是 p 的 Sylow 子群。融合系统 $\mathrm{F}_S\big(U(P)\big)$ 显然包含 $\mathrm{F}_S(P)$ 中的所有态射。由于 $\mathrm{F}_S\big(U(P)\big)$ 由共轭映射 $c_g\colon\ Q \to R$ 生成，其中 $g \in U(P)$ 且 $Q, R \le S$，因此只需证明任意此类态射都属于 $\mathrm{F}_S(P)$。我们可以假设 $R = c_g(Q)$。现在，命题 2.22 明确指出， c_g 等于某些共轭映射 c_{g_i} 的复合，这些映射定义在 S 的子群之间，并且对每个 i 都有 $g_i \in P$。换言之， c_g 属于 $\mathrm{F}_S(P)$，证毕。

□

结合此定理与 Leary & Stancu 的结果以及 Rimlinger 的第二个定理，我们可以证明每个融合系统都能在有限预群类中实现。

推论 4.15. 有限 p-群 S 上的每个融合系统$\mathcal{F}$ 都是某个有限预群的融合系统，该有限预群包含 S，且 S 是其 *Sylow* p-子群。

证明。设 F 由 $\{\Phi_1, \cdots\ \Phi_r\}$ 生成，其中对每个 $i \in \{1, \cdots\ r\}$， Φ_i 是定义在 S 的子群 P_i 上的态射。令 q 为一个不同于 p 的素数，并令 C_q 表示阶为 q 的循环子群（不过，我们也可以改取任何阶与 p 互素的非平凡有限群）。设 $G := \big(\cdots((S \times C_q)*_{\Phi_1})\ *_{\Phi_2}\cdots\big)*_{\Phi_r}$。于是 S 嵌入 G，而 G 是图 4.1 中群图的基本群。

这个有限群的有限图是真（这正是加入 C_q 部分到 S的全部目的），因此根据定理 3.11，存在一个有限预群 P，其泛群同构于 G。此外，根据定理 4.9， G 包含 S 作为一个 Sylow p-子群，而 G 在 S 上的融合系统就是 $\mathcal{F}$。

最后，根据定理 4.14，我们得到 S 嵌入为 p-子群，且该子群是 P的 Sylow 子群，并且

$$\mathcal{F}_S(G) \;=\; \mathcal{F}_S\big(U(P)\big) \;=\; \mathcal{F}_S(P)\ .$$

□

5 实现融合系统的预群例子

本节根据定理4.14详细介绍两种实现融合系统的预群构造。第一种构造得到的预群，其泛群是定理 4.9 中给出的“Leary-Stancu 群”，从而为证明推论4.15 提供了一种更直接的方法（无需引用定理3.11）。第二种构造类似地得到一个预群，其泛群是 [15, 定理 2]中使用的“Robinson 群”。

5.1 Leary-Stancu 群的一个预群

设 F 是有限预群 S 上的任意融合系统。假设 F 由一族特定的态射 $\{\phi_1,\cdots\ \phi_r\}$ 生成，其中每个 ϕ_i 都是一个群同构 $P_i \to Q_i$，且满足 $P_i, Q_i \le S$。我们为每个 ϕ_i（$i \in \{1,\cdots\ r\}$）关联一个符号 t_i，并取 S 与由 $\{t_1,\cdots\ t_r\}$ 生成的自由群的自由积 F。Leary-Stancu 群 G 是 F 对元素$t_i{}^{-1}ut_i\phi_i(u)^{-1}$ 的正规闭包取商得到的商群，其中 $i \in \{1,\cdots\ r\}$ 且 $u \in P_i$。元素 $t_i \in G$ 有时称为 G的稳定字母 。

5.1.1 构造预群

粗略地说，我们考虑由元素 $s \in S \le G$ 以及所有形如 at_ia' 或 $bt_i^{-1}b'$ 的元素构成的 G 的子集 P，其中 $a,\ a',\ b,\ b' \in S$ 和 $i \in \{1,\ \cdots\ r\}$。有序对 $(x,\ y) \in P \times P$ 属于定义域 D，当且仅当 G 中的乘积 xy 属于 P；我们在 P 中定义逆元和乘法的方式与在 G 中相同。

更形式化地，对于每个 $i \in \{1,\ \cdots\ r\}$，我们固定 S 中 Q_i（分别为 P_i）的右陪集代表元系 A_i（分别为 B_i）。然后，我们将 P 定义为以下符号集（而非 G 的子集）：

$$P \;:=\; S \;\sqcup\; \{\ at_ia'\ ,\ bt_i^{-1}b' \mid i \in [\![1;r]\!],\ a,b \in S,\ a' \in A_i,\ b' \in B_i\ \}$$

我们将 D 定义为 $P \times P$ 的子集，它由下列所有有序对 $(x,\ y)$ 构成。只有在某些取值不包含于其中时，才会说明 x 和 y 中参数的可能取值（关于上述参数化）。我们也会在每种情况下明确 $m(x,\ y)$ 的取值。

- $\succ(s, s')$，乘积为 $m(s, s') = ss'$；$\succ(s, at_ia')$，乘积为 $m(s, at_ia') = (sa)t_ia'$；$\succ(s, bt_i^{-1}b')$，乘积为 $m(s, bt_i^{-1}b') = (sb)t_i^{-1}b'$；$\succ(at_ia', s)$，乘积为 $m(at_ia', s) = at_i(a's)$，可改写为 $(au)t_ia''$，其中 $u \in P_i$和 $a'' \in A_i$满足 $\phi_i(u)a'' = a's$；$\succ(bt_i^{-1}b', s)$，乘积为 $m(bt_i^{-1}b', s) = bt_i^{-1}(b's)$，可改写为 $(bv)t_i^{-1}b''$，其中 $v \in Q_i$和$b'' \in B_i$ 满足 $\phi_i^{-1}(v)b'' = b's$；

➢ $(at_ia',\ bt_i^{-1}b')$ 当且仅当 $a'b \in Q_i$，乘积为 $m(at_ia',\ bt_i^{-1}b') = a\phi_i^{-1}(a'b)b'$；➢ $(bt_i^{-1}b',\ at_ia')$ 当且仅当 $b'a \in P_i$，乘积为 $m(bt_i^{-1}b',\ at_ia') = b\phi_i(b'a)a'$。

求逆运算 $x \mapsto x^{-1}$ 在 P 上按以下方式定义：

➳ $(s)^{-1} = s^{-1} \in S$；➳ $(at_ia')^{-1} = a'^{-1}t_i^{-1}a^{-1}$，可改写为 $(a'^{-1}v)t_i^{-1}b'$，其中 $v \in Q_i$ 和 $b' \in B_i$ 满足 $\phi_i^{-1}(v)b' = a^{-1}$；➳ $(bt_i^{-1}b')^{-1} = b'^{-1}t_ib^{-1}$，可改写为 $(b'^{-1}u)t_ia'$，其中 $h \in P_i$ 和 $a' \in A_i$ 满足 $\phi_i(u)a' = b^{-1}$。

下文中，我们在记号中采用一些隐含假设。首先，除非另有说明，凡是在 t_x, t_x^{-1}, P_x, Q_x, A_x 或 B_x 中以下标形式出现的字母 x，都表示 x 是属于 $\{1, \cdots r\}$ 的整数。讨论 P的元素时，字母 s（或其变体，如用于$j \in \mathbb{N}$的 s'或 s_j）表示一个元素：该元素属于 S，并将其视为 P的子集。类似地，用 xt_iy（其中 x 和 y 是某些字母）表示 P 的一个元素，隐含地意味着 x 和 y 是 S 的元素，且满足 $y \in A_i$；用 $xt_i^{-1}y$（其中 x 和 y 是某些字母）表示 P 的一个元素，隐含地意味着 x 和 y 是 S 的元素，且满足 $y \in B_i$。

5.1.2 P 在 G中的包含映射

所选的参数化使我们只需将 s、at_ia' 和P 的 $bt_i^{-1}b'$ 映射到 G中对应的元素，就能将 P 嵌入 G。要证明这个映射是包含映射，最简便的方法是使用 HNN 扩张的 Britton 引理。

定义 5.1. 设 $H := U*_\alpha$是群 U关于同构 α：$U_1 \to U_2$的 HNN 扩张，其中 U_1，$U_2 \leq U$。记 t为稳定字母。若序列（u_0，t^{ε_1}，u_1，$\cdots$ t^{ε_n}，u_n）满足 $n \in \mathbb{N}$，每个 ε_j 均属于$\{-1, 1\}$，且每个 u_j 均属于 U，则称该序列为约化的，如果其中不存在形如（t^{-1}，u_j，t）且满足 $u_j \in U_1$，或形如（t，u_j，t^{-1}）且满足 $u_j \in U_2$的连续子序列。

命题 5.2 ([11, 第四章，Britton 引理])。采用定义 *5.1*中的记号，若序列 $(u_0,\ t^{\varepsilon_1},\ u_1,\ \cdots\ t^{\varepsilon_n},\ u_n)$ 是约化的，且 $n \geq 1$，则 $u_0t^{\varepsilon_1}u_1 \cdots t^{\varepsilon_n}u_n \neq 1$属于 H。

因此，我们可以得到关于群 G 的类似结果；该群可由 S 经过一系列 HNN 扩张得到。

定义 5.3。若序列 $(s_0,\ t_{i_1}^{\varepsilon_1},\ s_1,\ \cdots t_{i_n}^{\varepsilon_n},\ s_n)$ 满足 $n \in \mathbb{N}$，每个 ε_j 均属于 $\{-1,\ 1\}$，且每个 s_j 属于 S，则称该序列为约化的，如果它不含形如 $(t_i^{-1},\ s_j,\ t_i)$ 且满足 $s_j \in P_i$ 或形如 $(t_i,\ s_j,\ t_i^{-1})$ 且满足 $s_j \in Q_i$ 的连续子序列。

推论 5.4. 采用定义 *5.3*中的记号，若序列 $(s_0, t_{i_1}^{\varepsilon_1}, s_1, \cdots t_{i_n}^{\varepsilon_n}, s_n)$ 是约化的，且 $n \geq 1$，则 $s_0t_{i_1}^{\varepsilon_1}s_1 \cdots t_{i_n}^{\varepsilon_n}s_n \neq 1$ 属于 G。

证明。首先注意，在定义 5.1 中，对于任意 $u \in U$，$(u_0, t^{\varepsilon_1}, u_1, \cdots\ t^{\varepsilon_n}, u_n)$ 是约化的，当且仅当 $(u^{-1}u_0, t^{\varepsilon_1}, u_1, \cdots\ t^{\varepsilon_n}, u_n)$ 是约化的。特别地，若 $u_0t^{\varepsilon_1}u_1 \cdots t^{\varepsilon_n}u_n = u \in U$，则由命题 5.2 可知，序列 $(u_0, t^{\varepsilon_1}, u_1, \cdots\ t^{\varepsilon_n}, u_n)$ 必然不是约化的。我们在下面的证明中采用的正是这一陈述的特定表述。

设 $w:=(s_0,t_{i_1}^{\varepsilon_1},s_1,\cdots t_{i_n}^{\varepsilon_n},s_n)$ 是一个满足 $s_0t_{i_1}^{\varepsilon_1}s_1\cdots t_{i_n}^{\varepsilon_n}s_n=1$ 的序列。令 $K^{(0)}$ 为所有满足 $j\in\{1,\cdots\ n\}$ 的 i_j 构成的集合。若 $K^{(0)}$ 为空，则必有 $n=0$，结论成立。否则，我们将证明 w 不是约化的。取 $k_1\in K^{(0)}$。我们可以将 G 看作相对于 ϕ_{k_1}, $G^{(1)}$ 的某个群 $G^{(1)}$ 的 HNN 扩张，其中 S 相对于每个满足 $i\in\{1,\cdots\ r\}\setminus\{k_1\}$ 的 ϕ_i 构成"HNN扩张塔"。现在，我们可以将 $(s_0,t_{i_1}^{\varepsilon_1},s_1,\cdots t_{i_n}^{\varepsilon_n},s_n)$ 约化，得到一个由 $G^{(1)}$ 中的字以及符号 $t_{k_1},t_{k_1}^{-1}$ 构成的字，然后在 HNN 扩张 $G=G^{(1)}*_{\phi_{k_1}}$ 中应用命题 5.2。这意味着存在 w 的一个子序列 $w^{(1)}$，它仅由 S 中的元素以及符号 t_k,t_k^{-1} 构成；对于 $k\in K^{(0)}\setminus\{k_1\}$，其乘积要么属于 P_{k_1}，此时 $(t_{k_1}^{-1},w^{(1)},t_{k_1})$ 是 w 的一个子序列；要么属于 Q_{k_1}，此时 $(t_{k_1},w^{(1)},t_{k_1}^{-1})$ 是 w 的一个子序列。令 $K^{(1)}$ 表示 $K^{(0)}$ 的子集，其中包含 $w^{(1)}$ 中出现的稳定字母的指标。$K^{(1)}$ 的大小严格小于 $K^{(0)}$ 的大小。

我们对 $j\in\mathbb{N}^*$ 使用归纳法，证明以下结论：要么 w 不是约化的，要么存在一个元组 $(k_j,\ K^{(j)},\ w^{(j)})$，其中 $k_j\in K^{(j-1)}$, $K^{(j)}$ 是 $K^{(j-1)}$ 的真子集，且 $w^{(j)}$ 是 w 的子序列，只含有 S 中的字母或符号 t_k,t_k^{-1}，并满足 $k\in K^{(j)}$；此外，要么 $w^{(j)}$ 的乘积属于 P_{k_j}，且 $(t_{k_j}^{-1},\ w^{(j)},\ t_{k_j})$ 是 w 的子序列；要么 $w^{(j)}$ 的乘积属于 Q_{k_j}，且 $(t_{k_j},\ w^{(j)},\ t_{k_j}^{-1})$ 是 w 的子序列。

情况 $j=1$ 已在上文处理。现在假设我们已证明情况 $j\in\mathbb{N}$，并来证明情况 $j+1$。若 $K^{(j)}$ 为空，则结论成立，因为这意味着 $w^{(j)}$ 只是 S 中的一个字母：它要么在 P_{k_j} 中，且 $(t_{k_j}^{-1},\ w^{(j)},\ t_{k_j})$ 包含于 w；要么在 Q_{k_j} 中，且 $(t_{k_j},\ w^{(j)},\ t_{k_j}^{-1})$ 包含于 w。这两种情况下，w 都不是约化的。

否则，考虑任意元素 $k_{j+1}\in K^{(j)}$。我们可以看出，G 是相对于 $\phi_{k_{j+1}}$ 的某个群 $G^{(j+1)}$ 的 HNN 扩张，而 $G^{(j+1)}$ 则是对每个$i\in\{1,\cdots\ r\}\setminus\{k_{j+1}\}$，相对于 ϕ_i 的 S 的"HNN扩张塔"。接着，我们可以约化 $w^{(j)}$，得到一个由 $G^{(j+1)}$ 以及符号 $t_{k_{j+1}}$、$t_{k_{j+1}}^{-1}$ 构成的字，然后在 HNN 扩张 $G=G^{(j+1)}*_{\phi_{k_{j+1}}}$ 中对这个字应用命题 5.2，这意味着它不是约化的（因为 $w^{(j)}$ 的乘积属于 S）。因此，存在 $w^{(j)}$ 的一个子序列 $w^{(j+1)}$，它仅由 S 的元素以及符号 t_k、t_k^{-1} 构成，对于 $k\in K^{(j)}\setminus\{k_{j+1}\}$，其乘积属于 $P_{k_{j+1}}$，此时 $(t_{k_{j+1}}^{-1},w^{(j+1)},t_{k_{j+1}})$ 是 w 的一个子序列；或者属于 $Q_{k_{j+1}}$，此时 $(t_{k_{j+1}},w^{(j+1)},t_{k_{j+1}}^{-1})$ 是 w 的一个子序列。将 $w^{(j)}$ 中出现的稳定字母的指标构成的 $K^{(j)}$ 的（真）子集记为 $K^{(j+1)}$，归纳法至此完成。

随着 j 增大，$K^{(j)}$ 的大小会严格减小，但这些都是有限集，因此这个过程必定会停止，我们必然得到 w 不是约化的。□

现在，若 s 和 $ct_i^{\varepsilon}c'$ 属于 P，且满足 $s=ct_i^{\varepsilon}c'$ 属于 G，我们可以将这个等式改写为 $s^{-1}ct_i^{\varepsilon}c'=1$，再利用 Britton 引理得到矛盾（因为 $(s^{-1}c,t_i^{\varepsilon},c')$ 显然是一个约化字）。显然，S 中在 P 里不同的两个元素不可能在 G 中相等。这样只剩下 P 中的两个元素 $ct_i^{\varepsilon}c'$ 和 $dt_j^{e}d'$ 在 G 中相等的情形。这意味着 $ct_i^{\varepsilon}c'd'^{-1}t_j^{-e}d^{-1}=1$。我们可以对字 $(c,t_i^{\varepsilon},c'd'^{-1},t_j^{-e},d^{-1})$ 应用推论 5.4，由此必然有 $j=i$、$e=\varepsilon$，并且要么 $\varepsilon=1$ 和 $c'd'^{-1}\in Q_i$，要么 $\varepsilon=-1$ 和 $c'd'^{-1}\in P_i$。在这两种情形下，由于我们选取 c' 和 d' 作为 Q_i 或 P_i 在 S 中右陪集的固定代表元，可得 $c'=d'$。现在 $ct_i^{\varepsilon}c'd'^{-1}t_j^{-e}d^{-1}=1$ 变为 $cd^{-1}=1$，因此 $c=d$、$ct_i^{\varepsilon}c'$ 和 $dt_j^{e}d'$ 在 P 中相等。

注 5.5. 推论5.4 也可用于证明类似于 G的"HNN 扩张塔"的正规形定理。

因此，存在从 P 到 G 的自然包含映射。此外，可以验证，每当 $(x,y)\in D$ 时，$m(x,y)$ 在 P 中的乘积与通过此包含映射得到的 xy 在 G 中的乘法相同，而 x 在 P 和 G 中的元素的逆元也相同。

5.1.3 证明 P 是一个预群

引理 5.6。 对于任意 x、$y \in P$ 和 $s \in S \subseteq P$，有 $(s,x) \in D$，并且 $(x,y) \in D$ 当且仅当$(sx,y) \in D$。类似地，有 $(y,s) \in D$，并且 $(x,y) \in D$ 当且仅当 $(x,ys) \in D$。

证明。 首先， D 包含所有形如（s， x）的元素，其中 $x \in P$ 且 $s \in S$。要证明等价关系（x， y）$\in D$ $\Longleftrightarrow$（sx， y）$\in D$，由于乘以 S中的一个元素不会改变 x的“类型”（ S 的元素； at_ia' ；或 $bt_i^{-1}b'$），我们只需检查几种情况。如果 $x \in S$ 或 $y \in S$，结论显然成立，因此可以假设 $x = at_ia'$ 且 $y = bt_i^{-1}b'$（反过来的情形类似）。在这种情况下，

$$(x,y) \in D \iff a'b \in Q_i \iff \big((sa)t_ia', bt_i^{-1}b'\big) \in D \iff (sx,y) \in D\ .$$

另一个断言的证明类似。 □

命题 5.7。 如上所定义，（P， D）是一个预群。

证明。 公理 (Pr1) 和 (Pr2)很容易验证。对于公理 (Pr3)，我们只需检查关于 D的条件，因为乘积的结合律是由在 P和 G 中的乘法一致这一事实所导致的。考虑引理 5.6后，对于公理(Pr3)，我们只剩下两种主要情形需要检查。这里， X_i 表示 t_i 或t_i^{-1} （而 X_i^{-1} 表示另一个）。

- 若 $(cX_ic'$， $s) \in D$ 且 $(s$， $dX_jd') \in D$，则有 $(cX_ic's$， $dX_jd') \in D \Longleftrightarrow \big(cX_ic'$， $(sd)X_jd'\big) \in D$，因为条件 $(i=j, (X_i)^{-1} = X_j$ 和 $c'sd \in P_i$ 或 $Q_i)$ 在两种情况下相同。- 若 $(cX_ic'$， $dX_i^{-1}d') \in D$ 且 $(dX_i^{-1}d'$， $eX_ie') \in D$：这些有序对各自的乘积都属于 S，因此一切都有定义。

最后，对于公理 (Pr4)，取 $(w,x), (x,y), (y,z) \in D$。若 $w \in S$, $z \in S$或 $m(x,y) \in S$，则结论成立。否则，我们必有 $x \in S$或 $y \in S$，因此 $(x, m(y,z)) \in D$或 $(m(w,x)\ y) \in D$，而公理（Pr3）使我们得以得出结论。 □

推论 5.8。 有限预群 P 的泛群 G 是与 $\mathcal{F}$ 以及生成元族 $\{\phi_1, \cdots\ \phi_r\}$ 相关联的 *Leary-Stancu* 群。

证明。 我们已经证明 P 是 G的子预群，因为它是包含于 G 中的预群，且乘法律彼此兼容。此外， P 包含 S以及 t_i 对应的 $i \in \{1, \cdots\ r\}$，它们生成 G，因此根据命题 $G = U(P)$，可得命题 2.9。

□

5.1.4 P 能成为局部性吗?

这里我们要探讨上文构造的有限预群 P（更确切地说： P 的底层部分群）能否对于某个对象集 Δ 成为 S 上的局部性。

首先，我们来描述将 P 视为部分群时的定义域 $\mathbb{D}_P$。

命题 5.9。 定义域 $\mathbb{D}_P$ 由满足以下条件的所有字 $w \in \mathbb{W}(P)$ 构成：

(i) w 不同时包含形如 $ct_i^{\varepsilon}c'$ 的项和另一个形如 $dt_j^{\varepsilon'}d'$ 的项，除非 $i=j$。因此， w 只包含对于固定的 i，形如 $s \in S$、 at_ia' 或 $bt_i^{-1}b'$ 的项。

(ii) w 中不属于 S 的项，应在 at_ia' 和 $bt_i^{-1}b'$ 两种形式之间交替出现（中间可以插入 S 中的项）。

(iii) </style}在 中的任一项 与下一个形如 的项之间，若将插在 和 之间的所有（可能存在的） 中的项的乘积记为 ，则应有 。(iv) 在 w 中的任一项 $bt_i^{-1}b'$ 与下一个形如 at_ia' 的项之间，若将插在 $bt_i^{-1}b'$ 和 at_ia' 之间的所有（可能存在的） S 中的项的乘积记为 s ，则应有 $b'sa \in Q_i$。

证明 （概要）。回顾一下，我们将定义域 $\mathbb{D}_P$ 定义如下（就在命题2.23之前） ：

$$\mathbb{D}_P = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{W}(P) \mid \forall k, l \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ with } k < l, \quad x_k x_{k+1} \cdots x_l \in P \}$$

首先，设 $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{W}(P)$ 是满足陈述中四个条件的任意一个字。记 i 为可能出现在 t_i 各项中的符号 w 的指标（由条件 (i)唯一确定）。我们可以对 $m \in \mathbb{N}$使用归纳法证明，对于 $x_k, \cdots x_{k+m})$ 的任意子字 w，以下情况必有一种成立（其中符号 $y_1, \cdots y_q$指 P中任意允许的元素）：

- $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m} = at_ia'$若 $(x_k, \cdots x_{k+m}) = (s_1, \cdots s_j, ct_ic', y_1, \cdots y_q, dt_id', s'_1, \cdots s'_{j'})$，其中$s_1, \cdots s_j, s'_1, \cdots s'_{j'} \in S$（其中 $j, j', q \in \mathbb{N}$），且在此情况下，我们有 $a \in (s_1 \cdots s_j c)P_i$和 $a' \in Q_i(d's'_1 \cdots s'_{j'})$;

- $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m} = bt_i^{-1}b'$，如果 $(x_k, \cdots x_{k+m}) = (s_1, \cdots s_j, ct_i^{-1}c', y_1, \cdots y_q, dt_i^{-1}d', s'_1, \cdots s'_{j'})$，其中 $s_1, \cdots s_j, s'_1, \cdots s'_{j'} \in S$（其中 $j, j', q \in \mathbb{N}$），在此情况下我们有 $b \in (s_1 \cdots s_j c)Q_i$以及 $b' \in P_i(d's'_1 \cdots s'_{j'})$; - $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m} = s \in S$，如果 $(x_k, \cdots x_{k+m}) = (s_1, \cdots s_j, ct_i^{-1}c', y_1, \cdots y_q, dt_id', s'_1, \cdots s'_{j'})$，其中$s_1, \cdots s_j, s'_1, \cdots s'_{j'} \in S$（其中 $j, j', q \in \mathbb{N}$），在此情况下 $s \in (s_1 \cdots s_j c)Q_i(d's'_1 \cdots s'_{j'})$; - $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m} = s \in S$，如果 $(x_k, \cdots x_{k+m}) = (s_1, \cdots s_j, ct_ic', y_1, \cdots y_q, dt_i^{-1}d', s'_1, \cdots s'_{j'})$，其中 $s_1, \cdots s_j, s'_1, \cdots s'_{j'} \in S$（其中 $j, j', q \in \mathbb{N}$），在此情况下 $s \in (s_1 \cdots s_j c)P_i(d's'_1 \cdots s'_{j'})$; - $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m} = s \in S$，如果 $(x_k, \cdots x_{k+m}) = (s_1, \cdots s_{m+1})$，其中 $s_1, \cdots s_{m+1} \in S$，在此情况下 $s = s_1 \cdots s_{m+1}$。

情形 $m = 0$ 是平凡的。假设该结论已对秩 $m \in \mathbb{N}$证明。为了证明它对秩$m+1$成立，取 $x_k, \cdots x_{k+m+1})$ 作为 w的一个子字，并对 $(x_k, \cdots x_{k+m})$ 应用归纳假设。然后，针对 $(x_k, \cdots x_{k+m+1})$，分别考虑上文列出的关于 $(x_k, \cdots x_{k+m})$ 的五种情形，同时区分项 x_{k+m+1}的两种或三种可能性，并使用条件 (iii)和 (iv)。

现在我们用逆否命题证明 $\mathbb{D}_P$ 中的任意字都满足这四个条件。若 $w \in \mathbb{W}(P)$ 不满足条件 (i)，则考虑 w 中形如 $(ct_i^{\varepsilon}c', x_1, \cdots x_k, dt_j^{\varepsilon'}d')$ 且满足 $i \neq j$的最短子字。必然有 $x_1, \cdots x_k \in S$，因此 $x_1 \cdots x_k =: s \in S$，所以 $(ct_i^{\varepsilon}c', x_1, \cdots x_k, dt_j^{\varepsilon'}d')$ 的乘积属于 P当且仅当 $(ct_i^{\varepsilon}c's, dt_j^{\varepsilon'}d') \in D$，但这与 $i \neq j$ 矛盾。

如果 $w \in \mathbb{W}(P)$ 不满足条件 (ii)，我们可以考虑 w 中形如 $(ct_i^{\varepsilon}c', x_1, \cdots x_k, dt_i^{\varepsilon}d')$ 的最短子字。必然有 $x_1, \cdots x_k \in S$，因此 $x_1 \cdots x_k =: s \in S$，所以序列 $(ct_i^{\varepsilon}c', x_1, \cdots x_k, dt_i^{\varepsilon}d')$ 的乘积属于 P，当且仅当 $(ct_i^{\varepsilon}c's, dt_i^{\varepsilon}d') \in D$，这不可能成立。

如果 $w \in \mathbb{W}(P)$ 不满足条件 (iii)，那么我们可以考虑 w 的一个形如 $(at_ia', x_1, \cdots x_k, bt_i^{-1}b')$ 的子字，其中每个 x_j 都属于 S，且 $a'x_1 \cdots x_k b \notin Q_i$。于是 $\left(at_i(a'x_1 \cdots x_k)\ bt_i^{-1}b'\right)$不属于 D，因此乘积 $(at_ia', x_1, \cdots x_k, bt_i^{-1}b')$ 不属于 P。如果 $w \in \mathbb{W}(P)$ 不满足条件 (iv)，论证也完全相同。

□

现在我们可以寻找对象集 Δ，它包含于 S 的子群集之中，因为我们希望 (P, Δ, S) 成为一个局部性。注意，对于任意子群 $R \leq S$，我们有 $R \subseteq \mathbb{D}_P(s)$，对所有$s \in S$均成立（使用记号 1.7）。此外，对于所有 $i \in \{1, \cdots r\}$， $a \in S$以及 $a' \in A_i$，我们有

$$\begin{aligned} R \subseteq \mathbb{D}_P(at_ia') &\iff \forall s \in R, \quad \left((at_ia')^{-1}s, at_ia'\right) \in D \\ &\iff \forall s \in R, \quad a^{-1}sa \in P_i \\ &\iff R \leq {}^aP_i \end{aligned}$$

在这种情况下，我们得到 $R^{at_ia'} = \left(\phi_i(R^a)\right)^{a'}$。类似地， $R \subseteq \mathbb{D}_P(bt_i^{-1}b') \Longleftrightarrow R \leq {}^bQ_i$，而在那种情况下，$R^{bt_i^{-1}b'} = \left(\phi_i^{-1}(R^b)\right)^{b'}$。

由于 $\mathbb{D}_P$ 包含所有长度为一的词（at_ia'）和（$bt_i^{-1}b'$），由于 Δ 必须在 S中对取上群封闭，并且因为我们需要 $\mathbb{D}_P = \mathbb{D}_\Delta$，上述观察意味着 Δ 必须包含群 P_i和 Q_i，以及对每个 $i \in \{1, \cdots r\}$，它们所有的 S-共轭。

然而，只要存在满足 $P_i = P_j$的 $i \neq j$，等式 $\mathbb{D}_P = \mathbb{D}_\Delta$ 就不成立。事实上，在这种情况下，(t_i^{-1}, t_j) 通过 (Q_i, P_i, Q_j) 属于 $\mathbb{D}_\Delta$，但 $(t_i^{-1}, t_j) \notin \mathbb{D}_P$。类似地，如果某个 i满足 $P_i = Q_i$，我们就不能有 $\mathbb{D}_P = \mathbb{D}_\Delta$，因为在这种情况下，$(t_i, t_i)$ 通过 (P_i, P_i, P_i) 属于 $\mathbb{D}_\Delta$，但不属于 $\mathbb{D}_P$。

更糟的是，如果存在一个 $i \in \{1, \cdots r\}$ 使得 $P_i < S$，那么就存在 $s \in N_S(P_i) \setminus P_i$，且 (t_i^{-1}, s, t_i) 属于 $\mathbb{D}_\Delta$，这是通过 (Q_i, P_i, P_i, Q_i) 实现的，但它不属于 $\mathbb{D}_P$。总之，预群 P 永远不是局部性。

5.2 Robinson 群的一个预群

设 F 是定义在 S 上的融合系统，由一族可实现的融合子系统 $\{\mathrm{F}_{S_1}(G_1), \cdots, \mathrm{F}_{S_r}(G_r)\}$ 生成，其中 $S_1, \cdots S_r$ 是 S 的子群，而 $G_1, \cdots G_r$ 是有限群。对每个 $i \in [\![1; r]\!]$，假设 S_i 通过一个态射 f_i: $S_i \hookrightarrow G_i$ 包含在 G_i 中，且是其 Sylow p-子群；其像记为 S_i'。令 F 为 S 与群 G_i 的自由积。Robison 群 G 定义为 F 除以元素 $uf_i(u)^{-1}$ 的正规闭包所得的商群，其中任意 $i \in \{1, \cdots r\}$ 和 $u \in S_i$ 均适用。群 G 可视为一个迭代 amalgamated 自由积:

$$G = \Big(\cdots\big((S *_{S_1} G_1) *_{S_2} G_2\big)\cdots\Big) *_{S_r} G_r$$

注记 5.10. 在他的文章 [15], 中，Robinson 陈述了一个结果（定理 2），称 F =$\mathrm{F}_S(G)$，但仅限于“Alperin 融合系统”这一情形；这是一类包含饱和融合系统的融合系统。不过，同一篇文章中的定理 1 表明，对于由可实现的融合子系统族生成的更大类融合系统，该结果仍然成立，而这正是我们这里采用的框架。

5.2.1 构造预群

直观地说， P 是 G 的子集，其中包含 S 以及所有形如 aga' 的元素，其中$g \in G_i$，对于某个 $i \in \{1, \cdots r\}$ 和 $a, a' \in S$。一对（x, y）属于定义域 D，当且仅当乘积 xy 在 G 中属于 P；随后， P 中的元素的乘法和逆元按 G中的方式定义。

由于 G 中存在的关系， aga' 形式的元素在 G 中可能有多种这样的表示。为了得到双射参数化，我们需要对每个 $i \in \{1, \cdots r\}$ 固定一个非平凡双陪集 $S_i'gS_i'$ 在 G_i 中的代表元系。此外，我们还需要对每个 $g \in H_i$ 引入子群 $T_{i,\ g} := f_i^{-1}\left(S_i' \cap {}^gS_i'\right)$ of S_i，并固定一个 $A_{i,\ g}$ 的代表元系

在 $S/T_{i,\ g}$ 中的陪集。注意，$T_{i,\ g}$ 取决于双陪集 $S'_i g S'_i$ 中代表元的选择（不过，$T_{i,\ g}$ 的 S_i-共轭类不受此选择影响）。然后，我们可以将 P 明确定义为以下符号集：

$$P \ := \ S \ \sqcup \ \{ \ aga' \mid i \in [\![1; r]\!], \ g \in H_i, \ a \in A_{i,g}, \ a' \in S \ \}$$

我们将 D 定义为 $P \times P$ 的子集，由下文列出的所有有序对 $(x, \ y)$ 组成。关于 x 和 y 中参数的可能取值（就上述参数化而言），仅在某些取值不包含在内时才予以说明。我们还分别明确了每种情况下 $m(x, \ y)$ 的取值。

➢ $(s, \ s')$，其乘积为 $m(s, \ s') = ss'$；
➢ $(s, \ aga')$，其乘积为 $m(s, \ aga') = (sa)ga'$，可改写为 $a''g\big(f_i^{-1}(g^{-1}f_i(v)g)a'\big)$，其中 $a'' \in A_{i,\ g}$ 和 $v \in T_{i,\ g}$ 满足 $a''v = sa$ （其中 $i \in \{1, \ \cdots \ r\}$ 满足 $g \in H_i$）；

➢ $(aga', \ s)$，其乘积为 $m(aga', \ s) = ag(a's)$；

当且仅当 $g, h \in H_i$ 对某个 $i \in \{1, \cdots \ r\}$ 成立，且 $a'b \in S_i$ 时，$\succ(aga', bhb')$ 成立。此时，乘积 $m(aga', bhb')$ 等于 $af_i{}^{-1}\big(gf_i(a'b)h\big)b' \in S$，前提是 $gf_i(a'b)h \in G_i$ 属于 S'_i。否则，对于某些 $k \in H_i$ 和 $u, u' \in S_i$，有 $gf_i(a'b)h = f_i(u)kf_i(u')$，且乘积 $m(aga', bhb')$ 等于 $(au)k(u'b')$，可改写为 $ck\big(f_i^{-1}(k^{-1}f_i(v)k)u'b'\big)$，其中 $c \in A_{i,k}$ 和 $v \in T_{i,k}$ 满足 $cv = au$。

求逆运算 $x \mapsto x^{-1}$ 在 P 上按以下方式定义：

➽ $(s)^{-1} = s^{-1} \in S$；

➽ $(aga')^{-1} = a'^{-1}g^{-1}a^{-1}$ 属于 G，这等于 $(a'^{-1}u)h(u'a^{-1})$，其中某些 $h \in H_i$（指标 i 与 g的相同）以及 $u, \ u' \in S_i$（满足 $f_i(u)hf_i(u') = g^{-1}$ 属于 G_i），并导出元素$a''h\big(f_i^{-1}(h^{-1}f_i(v)h)u'a^{-1}\big)$ 属于 P，其中 $a'' \in A_{i,\ h}$ 且 $v \in T_{i,\ h}$ 满足 $a''v = a'^{-1}u$。

下文中，我们在记号中纳入一些隐含假设。首先，除非另有说明，任何作为 f_x、G_x、S_x、S'_x 或 H_x 下标出现的字母 x，都表示 x 是属于 $\{1, \cdots \ r\}$的整数。讨论 P的元素时，字母 s（或其变体，例如 s'或$j \in \mathbb{N}$的 s_j）表示一个元素 S，并将其视为 P的子集。类似地，当 g 属于某个 H_i 时，用 xgy表示 P 的一个元素（其中 x 和 y 是某些字母），隐含地表示 x 和 y 是 S 的元素，且 $x \in A_{i,\ g}$。

注 5.11。在 $r = 1$ 的情形下，我们已经知道一个有限预群，其泛群为$S *_{S_1} G_1$，即 $S \cup_{S_1} G_1$ 如例 2.8 所示。注意，这个预群与我们刚刚引入的集合P 并不相同。事实上，它严格包含于 P。我们可以问，能否不按上述方式定义 P，而直接将它定义为 $\Big(\cdots (S \cup_{S_1} G_1) \cup_{S_2} G_2 \cdots \Big) \cup_{S_r} G_r$。一般来说，只要 $r \leq 2$，这就不是一个预群，因为必须满足公理 (Pr4) 。

5.2.2 P 在 G 中的包含映射

我们将 P 中的元素定义为 G中某些元素的符号，因此存在一个显然的映射$P \to G$。此外， P中元素的乘积（在有定义时）与 G中相同元素的乘积一致。事实上，按照我们定义 $m(x, \ y)$的方式，唯一不显然的情况是它

被改写，而所有改写都源自 G 中的关系，例如对所有 $u \in S_i$，有 $f_i(u) = u$；或者对所有 $g \in H_i$ 和 $v \in T_{i,\ g}$，有$vg = gf_i^{-1}$ ($g^{-1}f_i(v)g$)。

接下来需要证明，将 P 中两个不同的元素视为 G 的元素时，它们不可能相等。为此，我们需要amalgamated自由积的正规形定理，现陈述如下。

定义 5.12. 设 $A *_C B$ 是群 A 和 B 沿 C amalgamated 得到的自由积，其中 C 是 A 的子群，并通过态射 f 与 B 的子群 C' 同构。若由 $A *_C B$ 中元素组成的序列 $(x_1, \cdots\ \ x_n)$ 满足以下条件，则称其为约化的：

- 每个 x_i 都属于其中一个因子 A 或 B；- x_i 和 x_{i+1} 总是来自不同的因子；- 若 $n > 1$，则没有 x_i 属于 C 或 C'；- 若 $n = 1$，则 $x_1 \neq 1$。

命题 5.13 ([11, 第四章，定理 2。6]). 采用定义 *5.12*中的记号，若 $(x_1, \cdots\ \ x_n)$是约化的，则 $x_1 \cdots x_n \neq 1$ 属于 $A *_C B$。

首先，若 s 和 aga' 属于 P，其中 g 属于某个 H_i，且它们作为 G 的元素相等，则 $s^{-1}aga' = 1$ 属于 $S *_{S_i} G_i$（视为 G 的子群）。对序列（$s^{-1}a$，g，a'）应用命题 5.13（更准确地说，应用其逆否命题），可得 $s^{-1}a \in S_i$或 $a' \in S_i$。将 g替换为 f_i（$s^{-1}a$）g、gf_i（a'）或 f_i（$s^{-1}a$）gf_i（a'）后，我们可以对一个乘积为 $s^{-1}aga'$ 的新约化序列应用命题 5.13，从而得到矛盾。因此，s 和 aga' 在 G 中不可能相等。

现在假设 aga' 和 bhb' 是 P 的两个元素，其中 g 属于某个 H_i，h 属于某个 H_j，且$aga' = bhb'$ 属于 G，即 $a'^{-1}g^{-1}a^{-1}bhb' = 1$。若 $i \neq j$，我们可以在 $G_i *_{S_i} \left(S *_{S_j} G_j\right)$ 中考虑这个等式（将其视为 G 的子群），并对序列（a'^{-1}，g^{-1}，$a^{-1}bhb'$）应用命题 5.13，从而得到矛盾；除非 $a'^{-1} \in S_i$ 或 $a^{-1}bhb' \in S_i$（或两者皆是）。将 g^{-1} 替换为其双陪集的另一个代表元后，我们可以对一个约化序列应用命题 5.13，从而得到矛盾。

因此 $i = j$，我们希望将 $a'^{-1}, g^{-1}, a^{-1}b, h, b'$ 视为 $S *_{S_i} G_i$ 中的一个序列，并对其应用命题 5.13。若 a'^{-1} 或 b' 属于 S_i，我们可以像之前一样采用相同的技巧，得到一个约化序列。于是命题 5.13 蕴含 $a^{-1}b$ 属于 S_i。因此我们可以改写为 $a'^{-1}g^{-1}a^{-1}bhb' = a'^{-1}\left(g^{-1}f_i(a^{-1}b)h\right)b'$，再由命题 5.13 得到 $g^{-1}f_i(a^{-1}b)h \in S_i'$，并且 $a'^{-1}f_i^{-1}\left(g^{-1}f_i(a^{-1}b)h\right)b' = 1$ 仍属于 S（这两个事实恰好对我们之前的 g 和 h 成立，无论我们不得不采用什么“技巧”）。特别地，存在 $u \in S_i'$ 使得 $gu = f_i(a^{-1}b)h$。由于 g 和 h 是 S_i' 的双陪集的固定代表元，这意味着 $g = h$；记 $v := f_i(a^{-1}b) \in S_i'$，则 $g^{-1}vg \in S_i'$。这等价于 $v \in S_i' \cap {}^gS_i'$，也就是 $a^{-1}b \in T_{i,g}$。因此 $b \in aT_{i,g}$；但我们选取 a 和 b 作为 $T_{i,g}$ 在 S_i 中的左陪集代表元，所以 $a = b$。现在 $a'^{-1}f_i^{-1}\left(g^{-1}f_i(a^{-1}b)h\right)b' = 1$ 可写为 $a'^{-1}b' = 1$，即 $a' = b'$。最后，aga' 和 bhb' 在 P 中相等，因此自然映射 $P \to G$ 是一个包含映射。

5.2.3 证明 P 是一个预群

引理 5.14. 上文构造的(P, D) 满足以下两个性质：

(1) 对于所有的 x、$y \in P$ 和 $s \in S \subseteq P$，总有 $(s, x) \in D$，并且 $(x, y) \in D$ 当且仅当$(sx, y) \in D$。类似地，总有 $(y, s) \in D$，并且 $(x, y) \in D$ 当且仅当 $(x, ys) \in D$。

(2) 设 $y \in P\setminus S$。若 $x \in P$ 满足 $(x,y) \in D$，则对于所有 $z \in P$，$(y,z) \in D$ 蕴含 $(xy,z) \in D$。
类似地，若 $z \in P$ 满足 $(y,z) \in D$，则对于所有 $x \in P$，$(x,y) \in D$ 蕴含 $(x,yz) \in D$。

证明。对于第一个性质，设 $x,y \in P$和 $s \in S \subseteq P$。根据我们对 D 的定义，显然有 $(s,x) \in D$(且 $(y,s) \in D$)。现在，若 $y \in S$，则等价关系 $(x,y) \in D \Longleftrightarrow (sx,y) \in D$ 出于同样的原因成立；若 $x \in S$，它也成立（因为此时 $sx \in S$ 也成立）。因此，我们可以假设 $x = aga'$ 且 $y = bhb'$，其中 g 属于某个 H_i，h 属于某个 H_j，$a \in A_{i,g}$, $b \in A_{j,h}$ 且 $a', b' \in S$。于是，对于满足 $a''v = sa$ 的 $a'' \in A_{i,g}$ 和 $v \in T_{i,g}$，有 $sx = a''g\big(f_i^{-1}(g^{-1}f_i(v)g)a'\big)$。因此

$$\begin{aligned}(x,y) \in D &\iff (aga', bhb') \in D \iff i = j \quad \text{and} \quad a'b \in S_i \\ &\iff i = j \quad \text{and} \quad f_i^{-1}(g^{-1}f_i(v)g)a'b \in S_i \\ &\iff (sx,y) \in D\ .\end{aligned}$$

$(x,y) \in D \Longleftrightarrow (x,ys) \in D$ 的证明类似。

对于第二个性质，固定 $y \in P\setminus S$and $x \in P$such that $(x,y) \in D$，并任取 $z \in P$。若 $x \in S$，则有等价关系 $(y,z) \in D \Longleftrightarrow (xy,z) \in D$，这由第一个性质得出。若 $z \in S$，显然也有等价关系。因此可以假设 $x = aga'$，其中 g 属于某个 H_i，$y = bhb'$，其中 h 属于同一个 H_i（因为 $(x,y) \in D$），而 $z = ckc'$ 属于某个 H_j，其中 k。此外，我们有 $a'b \in S_i$，并且可以假设 $xy \in P\setminus S$（否则显然有 $(xy,z) \in D$），也就是说，对于某些 $\widetilde{g} \in H_i$ 以及 $u, u' \in S_i$，有 $gf_i(a'b)h = f_i(u)\widetilde{g}f_i(u')$。于是，对于满足$dv = au$的 $d \in A_{i,\widetilde{g}}$ 和 $v \in T_{i,\widetilde{g}}$，有 $xy = d\widetilde{g}\big(f_i^{-1}(\widetilde{g}^{-1}f_i(v)\widetilde{g})u'b'\big)$。因此

$$\begin{aligned}(y,z) \in D &\iff (bhb', ckc') \in D \iff i = j \quad \text{and} \quad b'c \in S_i \\ &\iff i = j \quad \text{and} \quad f_i^{-1}(\widetilde{g}^{-1}f_i(v)\widetilde{g})u'b'c \in S_i \\ &\iff \Big(d\widetilde{g}\big(f_i^{-1}(\widetilde{g}^{-1}f_i(v)\widetilde{g})u'b'\big)\ ,\ ckc'\Big) \in D \\ &\iff (xy,z) \in D\ .\end{aligned}$$

特别地，蕴含式 $(y,z) \in D \implies (xy,z) \in D$ 成立。最后一个断言的证明类似。

□

命题 5.15. 按照上述定义，(P,D) 是一个预群。

证明。公理（Pr1）和公理（Pr2）很容易验证。为验证公理（Pr3）在 P 的元素三元组 (x,y,z) 上的“定义域部分”，引理 5.14 的第一个性质说明我们可以假设 $x \notin S$，否则我们会有 $(xy,z) \in D$，并且也有 $(x,yz) \in D$（因为 x 会属于 S）。同理，我们可以假设 $z \notin S$。根据第二个性质，若 $y \notin S$，则 (xy,z) 和 (x,yz) 都属于 D。因此我们可以假设 $y \in S$，于是 $(x,y,z) = (aga', s, bhb')$，其中 g 属于某个 H_i，而 h 属于某个 H_j。此时我们有

$$\begin{aligned}(xy,z) \in D &\iff \big((aga')s, bhb'\big) \in D \\ &\iff i = j \quad \text{and} \quad a'sb \in S_i \\ &\iff i = j \quad \text{and} \quad \forall v \in T_{i,h},\quad a'sbv^{-1} \in S_i \\ &\iff \big(aga', s(bhb')\big) \in D \qquad \text{because } s(bhb') = b''h\big(f_j^{-1}(g^{-1}f_j(v)h)b'\big) \text{ for some} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad b'' \in A_{j,h} \text{ and } v \in T_{j,h} \text{ satisfying } b'' = sbv^{-1}. \\ &\iff (x,yz) \in D\ .\end{aligned}$$

还需检查 (xy, z) 和 (x, yz) 是否相同，但这可由以下事实推出：P 包含在具有相容乘积的 G 中，并且 G 中的群运算满足结合律。

最后，对于公理 (Pr4)，假设 $(w, x), (x, y), (y, z) \in D$。若$w \in S$ 或 $z \in S$，结论显然成立。根据引理 5.14 的第一条性质，只要 $x \in S$ 或$y \in S$，结论也成立。因此，我们只需检查四个元素都不属于 S 的情形；此时结论可直接由引理 5.14 的第二条性质推出。

□

注 5.16。 可以验证，每个 G_i 都通过以下映射嵌入 P 成为一个子群：若$x \in G_i$ 属于 S_i，则将其直接映到 P 中的 $x \in S$；否则，将其写作 $x = f_i(a)gf_i(a')$，其中 $g \in H_i$、$a \in A_i$、g 和 $a' \in S_i$，并将其映到 P 中的 aga'。通过这个 G_i的嵌入， S_i 和 S_i' 在 P和 $S \cap G_i = S_i$中变得相同。

推论 5.17。 有限预群 P 的泛群为 G，即与$\mathcal{F}$ 及生成族$\{\mathcal{F}_{S_1}(G_1), \cdots, \mathcal{F}_{S_r}(G_r)\}$相关联的 *Robinson* 群。

证明。 我们已经证明 P 是 G的子预群，因为它是包含于 G 中的预群，且乘法律相容。此外， P包含 S以及 G_i对应的 $i \in \{1, \cdots r\}$，它们生成 G，因此根据命题 $G = U(P)$，有 2.9。

□

5.2.4 P 能成为局部性吗?

对于与 Leary-Stancu 群相关联的预群，我们可以思考（底层部分群） P是否可以配备一个对象集 Δ，使得 (P, Δ, S) 是一个局部性。首先，我们描述将 P 视为部分群时的定义域 $\mathbb{D}_P$。

命题 5.18。 定义域 $\mathbb{D}_P$ 由所有满足以下条件的字 $w \in \mathbb{W}(P)$ 构成：

(i) w 在 $g \in H_i$且 $h \in H_j$ 并满足 $i \neq j$时，不会同时包含一个形如 aga' 的项和一个形如 bhb' 的项。(ii) 对于 w 中的任一项 aga' 与下一个形如 bhb' 的项之间（该项必然满足 g，且对于固定的 i 有 $h \in H_i$），若将 aga' 与bhb'之间插入在 S 中的所有（可能的）项的乘积记作 s，则应有 $a's b \in S_i$。

证明 （概要）. 定义域 $\mathbb{D}_P$ 定义为

$$\mathbb{D}_P = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{W}(P) \mid \forall k, l \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ with } k < l, \ x_k x_{k+1} \cdots x_l \in P \} .$$

设 $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{W}(P)$ 是一个满足陈述中两个条件的字。根据第一个条件，存在 $i \in \{1, \cdots r\}$，使得每个 x_j 要么是 S 的一个元素，要么是一个形如 aga' 且满足 $g \in H_i$ 的元素。我们可以对 $m \in \mathbb{N}$ 使用归纳法证明：对于 w 的任意子字 $(x_k, \cdots x_{k+m})$，以下情况之一成立（其中符号 $y_1, \cdots y_q$ 表示P中任意允许的元素）：

- $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m}$ 等于某个 aga'，如果 $(x_k, \cdots x_{k+m}) = (s_1, \cdots s_j, bhb', y_1, \cdots y_q, chc', s_1', \cdots s_{j'}')$，其中 $s_1, \cdots s_j, s_1', \cdots s_{j'}' \in S$（其中 $j, j', q \in \mathbb{N}$），在这种情况下，我们有 $a \in (s_1 \cdots s_j b)S_i$ 和 $a' \in S_i(c' s_1' \cdots s_{j'}')$；
- $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m}$ 等于某个 $s \in S$，当且仅当 $(x_k, \cdots x_{k+m}) = (s_1, \cdots s_j, aga', y_1, \cdots y_q, bhb', s_1', \cdots s_{j'}')$，其中 $s_1, \cdots s_j, s_1', \cdots s_{j'}' \in S$ （其中 $j, j', q \in \mathbb{N}$），且在这种情况下 $s \in (s_1 \cdots s_j a)S_i(b' s_1' \cdots s_{j'}')$；

- $x_k x_{k+1} \cdots x_{k+m}$ 等于某个 $s \in S$，当且仅当 $(x_k, \cdots\ x_{k+m}) = (s_1, \cdots\ s_{m+1})$，其中 $s_1, \cdots\ s_{m+1} \in S$，且在这种情况下 $s = s_1 \cdots s_{m+1}$。

情形 $m = 0$ 显然。假设秩为 $m \in \mathbb{N}$时命题已得证。为了证明秩为$m+1$时命题成立，取 w的一个子字 $(x_k, \cdots\ x_{k+m+1})$，并对 $(x_k, \cdots\ x_{k+m})$应用归纳假设。然后检查 $(x_k, \cdots\ x_{k+m+1})$是否满足所需条件：针对 $(x_k, \cdots\ x_{k+m})$区分上述三种情形，同时区分项 x_{k+m+1}的两种可能性，并使用陈述中的两个条件。

反之，取 $w \in \mathbb{D}_P$。考虑 w的任意一个形如 $(aga', s_1, \cdots\ s_k, bhb')$ 的子字，其中$s_1, \cdots\ s_k \in S$。那么 $s := s_1 \cdots s_k$也属于 S，并且 $(aga')s_1 \cdots s_k(bhb') \in P$当且仅当$\big(ag(a's)\ bhb'\big) \in D$，因为在 P中，所有涉及 S的乘积都有定义。特别地，g和 h 必须属于同一个 H_i，且 $a'sb$ 必须属于 S_i。鉴于这一结论必须对 w 中每个形如上述形式的子字都成立，这就证明了 w 满足这两个条件。

□

现在我们可以在 S 的子群中寻找一个子集 Δ，使得 (P, Δ, S) 成为一个局部性。注意，对于任意子群 $R \leq S$，对于所有 $s \in S$，都有 $R \subseteq \mathbb{D}_P(s)$。此外，对于所有 $i \in \{1, \cdots\ r\}$、$g \in H_i$、$a \in A_{i,\ g}$ 和 $a' \in S$，我们有

$$\begin{aligned} R \subseteq \mathbb{D}_P(aga') &\iff \forall s \in R, \quad \big((aga')^{-1}s, aga'\big) \in D \\ &\iff a^{-1}sa \in S_i \\ &\iff R \leq {}^aS_i\ . \end{aligned}$$

在这种情况下，$R^{aga'}$ 是 $S_i^{ga'}$ 的一个子群。此外，$R^{aga'} \leq S \Longleftrightarrow R^{ag} \leq S$，且 R^{ag} 是 S_i^g（因此也是 G_i）的一个子群。但对于 G_i 的子群来说，包含于 S 等价于包含于 S_i，因此若我们希望 $R^{aga'} \leq S$，即 $R^{ag} \leq S$，则这等价于要求 $R^{ag} \leq S_i$，也就是改写为 $R^a \leq {}^gS_i$。由于我们处于 $R \leq {}^aS_i$ 的情形，这相当于 $R^a \leq S_i \cap {}^gS_i$，即 $R \leq {}^aT_{i,\ g}$。

因此，由于 $\mathbb{D}_P$ 包含所有长度为一的词（aga'），并且 Δ 在 S中必须对取上群封闭，Δ必须包含所有子群$T_{i,g}$，其中 $i \in \{1, \cdots\ r\}$且 $g \in H_i$，以及它们所有的 S-共轭（还有这些子群在 S中的所有上群）。

这种情形比与 Leary-Stancu 群相关联的预群更复杂。目前我们还不知道 P 成为局部性的刻画。一个有趣的候选方案是令 Δ 取所有 $O_p(G_i)$，其中 $i \in \{1, \cdots\ r\}$，再加上它们的 S-共轭，以及这些子群在 S中的所有上群。接下来需要假设 $S_i = N_S\big(O_p(G_i)\big)$（否则很容易构造出一个三元组（$g, s, g$），它属于 $\in \mathbb{D}_\Delta$，但不属于 $\mathbb{D}_P$）。由此可以证明 $\mathbb{D}_P \subseteq \mathbb{D}_\Delta$。然而，一般而言，反向包含并不成立：例如，我们需要满足以下条件：任意满足 $O_p(G_i) \leq R \leq T_i$、$_g$的 $R \leq S$，对于某个 $i \in \{1, \cdots\ r\}$和某个 $g \in H_i$，都满足 $N_S(R) \leq S_i$（否则，满足 $s \in N_S(R) \setminus S_i$的字（$g^{-1}, s, g$）会通过（${}^gR, R, R, R^g$）属于 $\mathbb{D}_\Delta$，但不属于 $\mathbb{D}_P$）。此外，还有其他必要条件，源于 $\mathbb{D}_P$ 不包含任何形如（aga', s, bhb'）的字，其中 g属于某个 H_i，h属于某个 H_j，且 $i \neq j$。无论如何，这似乎大幅减少了 P 成为局部性的可能性。

参考文献

[1] Michael Aschbacher、Radha Kessar 和 Bob Oliver。《代数与拓扑中的融合系统》，第391卷，伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2011。

[2] Carles Broto 和 Alex Gonzalez。部分群的扩张理论，2021。[3] Carles Broto、Ran Levi 和 Bob Oliver。融合系统的同伦论。美国数学会杂志，16(4):779–856，2003。[4] Andrew Chermak。融合系统与局部性。数学学报，211(1):47–139，2013。[5] Andrew Chermak。有限局部性 I。arXiv:1505.07786，2015。[6] Andrew Chermak、Bob Oliver 和 Sergey Shpectorov。bsol (q) 的单连通性。预印本，2006。[7] Alex Gonzalez。部分群与局部性的扩张理论，2015。[8] Ian J. Leary 和 Radu Stancu。实现融合系统。代数与数论，1(1):17–34，2007。[9] Assaf Libman 和 Nora Seeliger。诱导融合系统的群与同调分解。同调、同伦与应用，14(2):167–187，2012。[10] Sey mour Lipschutz 和 Wujie Shi。关于 Reinhold Baer 预群问题的注记。数学研究所出版物，新系列，68(82):53–58，2000。[11] Roger C. Lyndon 和 Paul E. Schupp。《组合群论》，第188卷。施普林格，1977。[12] Bob Oliver 和 Joana Ventura。以 p-群为核的链接系统扩张。数学年刊，338(4):983–1043，2007。[13] Sejong Park。在有限群中实现融合系统。美国数学会会刊，144(8):3291–3294，2016。[14] F. Rimlinger。《预群与 *Bass–Serre*理论》。美国数学会：美国数学会回忆录。美国数学会，1987。[15] Geoffrey R Robinson。Amalgam、块、权、融合系统与有限单群。代数学杂志，314(2):912–923，2007。[16] Jean-Pierre Serre。《树》。施普林格科学与商业媒体，2002。[17] J. Stallings。《群论与三维流形》。耶鲁大学专著。耶鲁大学出版社，1971。