离散时间系统的平坦性：一种简单的方法

Schlacher Kurt*，Lindorfer Martin*

arXiv:2303.05158v1 [math.DG] 9 Mar 2023

摘要

离散时间系统的平坦性可以通过两个简单性质来刻画。存在一个从平坦坐标及其前向移位到离散时间系统的状态和输入的映射，即一个浸没，使得系统方程恒等地成立。平坦坐标及其移位也描述了简单移位系统。因此，该映射将动力系统映射为动力系统。基于这些事实，可以推导出系统平坦的必要条件。值得一提的是，这并不需要微分几何方法。不过，这些方法可用于推导判断系统是否平坦的算法，也可用于推导平坦参数化。

1 引言

集总参数系统的平坦性约在 30 年前被提出，参见例如 [4], [5]。它在控制领域广受欢迎，并在连续时间系统领域有许多应用。通过静态反馈实现输入到状态线性化的问题已于 40 年前得到解决，见 [7], ，但迄今为止，动态反馈尚无相应的最终结果。

离散时间系统的平坦性可以类比连续时间情形来定义，但可以选择前向移位或后移来代替时间导数。通常采用前向移位。因此，本文也采用这种方式。这类系统的平坦性并不十分热门，因为缺少应用。不过，它仍然是系统理论中一个有趣的问题。有关该领域的发展，参见例如 [8], [1], [2],[9], [10] 。 [15] 或 [13], [3]中介绍了较新的方法。后两篇文献的参考资料也概述了该领域的最新进展。

本文是在 [15]中提出的思想基础上的进一步拓展。离散时间系统被视为流形之间的映射。因此，我们在第2节回顾微分几何中的一些事实，涉及抽象流形上的微积分。第 3 节给出了平坦系统的一种标准形式，并提出了系统变换为该形式的必要条件和局部充分条件。此外，文中还说明了如何构造这种变换。主要结果见第4节。第3节所述变换的存在，是系统具有平坦性的必要条件。值得一提的是，这里仅利用了某些映射的性质。与其他相关工作不同，本文并未采用基于微分几何的方法。第4节的结果以及第3节中的条件和方法，导出了两种检验系统是否平坦的方法。这些检验方法见第5节。较简单的方法可以直接在计算机代数系统中实现。若系统是平坦的，所得结果将是关于平坦输出的偏微分方程组。较复杂的检验方法则在平坦参数化存在时给出该参数化，但需要求解线性偏微分方程或非线性常微分方程。

2 符号与预备知识

这里借助抽象流形对动力系统进行建模。我们总结了后文将用到的微分几何方法的符号约定及若干结果；更多信息请参见例如 [14], [6]。令$\mathcal{M}$ 为一个 m 维光滑流形，其局部坐标为 $x = x^1, \ldots, x^m$。光滑函数 $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 的集合记为 $C^\infty(\mathcal{M})$[1]。函数$x^1, \ldots, x^m$ 称为典范基函数[2]。若序列 $b^i(x) \in C^\infty(\mathcal{M})$ 函数独立，则 $b^1, \ldots, b^m$ 是另一组基函数。A

*林茨约翰·开普勒大学自动控制与控制系统技术研究所，奥地利林茨市阿尔滕贝格街 69 号，邮编 4040（电子邮箱： {kurt.schlacher, martin.lindorfer}@jku.at）

[1]这里的讨论并不限于光滑情形，但这一假设可以简化符号表示。[2] 在不存在混淆的情况下，符号 x^i 既用于表示坐标，也用于表示函数 x^i。

丛 $\pi:\ \mathcal{S}\to\mathcal{X}$ 是一个三元组，其总流形为 $\mathcal{S}$，底流形为 $\mathcal{X}$，满射投影为 π。局部地，对于 $\mathcal{X}$，我们使用坐标 $x=x^1,\ldots,x^n$，对于 $\mathcal{S}$ 则使用 $x,u,\ u=u^1,\ldots,u^m$，从而得到 $\pi\colon\ x,u\mapsto x$。类型为 $x=x,\ u=\sigma(x)$ 的光滑截面或映射集合记为 $\Gamma(\mathcal{S})$。流形 $\mathcal{M}$ 的切丛和余切丛分别记为 $\mathcal{T}(\mathcal{M})$，$\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$。它们的标准基为 $\{\partial_{b^1},\ldots,\partial_{b^m}\}$，$\{\mathrm{d}b^1,\ldots,\mathrm{d}b^m\}$，其中$\langle \mathrm{d}b^j,\partial_{b^i}\rangle=\delta_i^j$，这里 δ_i^j 表示克罗内克符号。外微分 $\mathrm{d}:\ \Gamma\left(\bigwedge^p(\mathcal{M})\right)\to\Gamma\left(\bigwedge^{p+1}(\mathcal{M})\right)$，其中 $\bigwedge^0(\mathcal{M})\cong C^\infty(\mathcal{M})$，$\bigwedge^1(\mathcal{M})\to\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$，将 p 形式映射为 $(p+1)$ 形式；而内积 $\cdot\rfloor\cdot:\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{M}))\times\Gamma\left(\bigwedge^{p+1}(\mathcal{M})\right)\to\Gamma(\bigwedge^p(\mathcal{M}))$ 将 $(p+1)$ 形式映射为 p 形式。

分布 $D=\mathrm{span}(B_D)$，$B_D=\{v_1,\ldots,v_k\}$,$v_i\in\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{M}))$ 分别是一个子空间 $D_x\subset\mathcal{T}_x(\mathcal{M})$，或子模 $D\subset\mathcal{T}(\mathcal{M})$。当其维数在$x$的某个开邻域内保持不变时，称其为正则分布。当且仅当 k 是极小的，B_D 才是 D 的一组基。正则余分布 D^* 的定义类似。我们将讨论限定在正则情形。李括号$\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{M}))\times\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{M}))\to\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{M}))$ 记为 $[\cdot,\cdot]$。当且仅当满足条件 $[D,D]\subset D$ 时，称分布为对合的。D 的湮灭子 $D^\perp$ 定义为 $\langle D^\perp,D\rangle=\{0\}$。若$D$是对合的，则 $D^\perp$存在一组由局部恰当微分构成的基 $\{\mathrm{d}f^{k+1},\ldots,\mathrm{d}f^m\}$。设 $D\subset E$是两个对合分布，则可以证明存在一个对合分布，即补分布 D_c，使得满足条件 $D\oplus D_c=E$。设 P是一个余分布，与 $C\rfloor P=$ 相交的最大分布C，$\mathrm{span}(\{0\})$，$C\rfloor\mathrm{d}P\subset P$ 称为柯西特征分布。可以证明C 是对合的。

设 $f\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{N}$，$f=f^1,\ldots,f^n$是流形 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 之间的光滑映射，其坐标为 $x=x^1,\ldots,x^m$，$y=y^1,\ldots,y^n$。在 $x\in\mathcal{M}$ 处，切向量场 $v\in\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{M}))$ 的推前记作 $f_*(v)(x)$。设 f是一个微分同胚，则得到切向量场 $f_*(v)\circ f^{-1}(y)\in\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$。设 f是一个光滑浸没，D 是 $\mathcal{N}$上的一个分布。存在 $\mathcal{M}$上的一个分布 E，使得对于$y=f(x)$，$f_*^{-1}(D_y)=E_x$，见 [14]。在 $D=\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 的情况下，我们选择函数 $f^i(x)$，$i=n+1,\ldots,m$，使得 $f^1(x)\ldots,f^m(x)$ 是 $\mathcal{M}$的基函数。显然，$f_*(v_i)=\partial_{y^i}$满足，其中 v_i属于 $\{\partial_{f^1},\ldots,\partial_{f^n}\}$。分布 $E=\mathrm{span}(B)$ 连同环 $f^*(C^\infty(\mathcal{N}))$[3]，是 $\mathrm{span}(B)$ 的一个子模。$E\oplus\mathrm{span}(\ker(\partial_x f))$ 的元素是可投影切向量场。它们满足 $f_*(v)\circ f^{-1}(y)\in\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$。

[3] p-形式的拉回记为 $f^*\colon\ \bigwedge^p(\mathcal{N})\to\bigwedge^p(\mathcal{M})$。

3 平坦系统的标准形

离散时间系统是一个映射 $\mathcal{S}\to\mathcal{X}_+$，其中 $\mathcal{S}$是一个丛，其底流形 $\mathcal{X}$ 的维数为 n，称为状态流形；总流形 $\mathcal{S}=(\mathcal{X},\mathcal{U})$ 的维数为 $(n+m)$，并配有投影 $\pi\colon\ \mathcal{S}\to\mathcal{X}$。前移算子记作 $+$。我们用局部坐标 $x=x^1,\ldots,x^n$ 表示 $\mathcal{X}$，用 $x,u,\ u=u^1,\ldots,u^m$表示 $\mathcal{S}$。在这些坐标下，系统表示为

$$x_+=f(x,u)=f^1(x,u),\ldots,f^n(x,u)\ , \tag{1}$$

其中 $f^i\in C^\infty(\mathcal{S})$。 $\mathcal{U}$也称为输入流形。 $\mathcal{S}$ 的截面是形如 $u=u(x)$ 的控制律。保丛变换由微分同胚 $t:\ \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ 给出，其形式为

$$\bar{x}=t_x(x)\ ,\qquad \bar{u}=t_u(x,u)\ . \tag{2}$$

我们假设函数 f^i 函数独立。否则，系统在局部不可达。此外，映射 f 在点 (x,u) 的某个开邻域上具有常秩，或者等价地，f 是一个浸没映射。

设映射 f 在 (x,u) 的某个开邻域上满足秩 $(\partial_u f(x,u))=m_u$，其中 $1\le m_u\le m$。可能需要重新排列方程和变量，此时总能找到函数 $g^i=g(x,u)\in C^\infty(\mathcal{S})$、$i=m_u+1$、.....、$m$，使得映射

$$\bar{x}=x\ ,\qquad \bar{u}=t_u(x,u)\ , \tag{3}$$

见式 (2)，$t^i(x,u)=f^{n-m_u+i}(x,u)\quad i=1,\ldots,m_u$ 可逆。该系统具有如下形式

$$\bar{x}_+=\bar{f}^1(\bar{x},\bar{u}),\ldots,\bar{f}^{n-m_u}(\bar{x},\bar{u}),\bar{u}^1,\ldots,\bar{u}^{m_u}. \tag{4}$$

显然，$\bar{f}(\bar{x},\bar{u})=\bar{f}^1(\bar{x},\bar{u})\ldots,\bar{f}^{n-m_u}(\bar{x},\bar{u})$ 独立于平凡输入 $\bar{u}^{m_u+1},\ldots,\bar{u}^m$。这些变量可赋予任意值，而不会影响系统的其余部分。请注意，满足秩$(\partial_x f(x,u))=n-m_u$。为简化记号，在接下来的讨论中，我们令 $u=\bar{u}^1,\ldots,\bar{u}^{m_u},\ m=m_u$。

人们感兴趣的是，能否将该系统拆分成更简单的系统。我们考虑变换

$$\hat{x}=x\ ,\qquad \tilde{v},\tilde{w}=\hat{t}_{\tilde{v}}(x,u),\hat{t}_{\tilde{w}}(x,u) \tag{5}$$

其中 $\tilde{v}=\tilde{v}^1,\ldots,\tilde{v}^{m_v}$, $\tilde{w}=\tilde{w}^1,\ldots,\tilde{w}^{m_w}$，且 $m_v+m_w=m$。该系统的形式为

$$\hat{x}_+=\hat{f}\left(\hat{x},\tilde{v},\tilde{w}\right),\tilde{v},\tilde{w}\ ,$$

在新坐标中。粗略地说，我们将上文的 $\mathcal{S}$ 替换为其细化形式 $\mathcal{S}=(\mathcal{X},\mathcal{V}\times\mathcal{W})$, $\mathcal{U}=\mathcal{V}\times\mathcal{W}$。假设存在一个浸没 $\mathcal{S}\to\mathcal{X}_+$

$$\tilde{x}_+=g\left(\hat{x},\tilde{v}\right),\tilde{v},\tilde{w}$$

满足 $g=g^1\left(\hat{x},\tilde{v}\right)\ldots,g^{n-m}\left(\hat{x},\tilde{v}\right)$, $g^i\in C^\infty\left(\left(\mathcal{X},\mathcal{V}\right)\right)$，以及一个微分同胚 $h\colon\ \mathcal{X}_+\to\mathcal{X}_+$，使得

$$\hat{f}\left(\hat{x},\tilde{v},\tilde{w}\right),\tilde{v},\tilde{w}=h\left(g\left(\hat{x},\tilde{v}\right),\tilde{v},\tilde{w}\right)\tag{6}$$

成立。状态变换 $\hat{x}=h(\tilde{x})$, $\hat{x}_+=h\left(\tilde{x}_+\right)$ 得到

$$\tilde{x}_+=g\left(\hat{x},\tilde{v}\right),\tilde{v},\tilde{w}=\tilde{g}\left(\tilde{x},\tilde{v}\right),\tilde{v},\tilde{w}=\tilde{f}\left(\tilde{x},\tilde{v},\tilde{w}\right)\ ,\tag{7}$$

其中 $\tilde{g}(\tilde{x},\tilde{v})=g(h(\tilde{x})\ \tilde{v})$。显然，该系统分解为纯移位系统

$$\tilde{x}_+^{n-m_w+1},\ldots,\tilde{x}_+^n=\tilde{w}\tag{8}$$

以及剩余系统

$$\tilde{x}_+^1,\ldots,\tilde{x}_+^{n-m_w}=g\left(\hat{x},\tilde{v}\right),\tilde{v}\tag{9}$$

其输入为 $\tilde{v},\tilde{x}^{n-m_w+1},\ldots,\tilde{x}^n$。系统 (8) 描述了一个映射 $\mathcal{W}\to\mathcal{X}_+$。前向移位将函数 $C^\infty(\mathcal{X})$ 映射为 $C^\infty\left(\mathcal{X}_+\right)$，且在此情形下可逆。结合这些事实，可以很容易地推导出系统 (8) 的附加输入 $\tilde{x}^{n-m_w+1},\ldots,\tilde{x}^n$。此外，这些映射可以直接扩展到切空间 $\mathcal{T}(\mathcal{W})\quad\mathcal{T}(\mathcal{X})\quad\mathcal{T}(\mathcal{X}_+)$。

值得一提的是这一特殊情形 $m_v=0$，因为可以得到

$$\tilde{x}_+=\tilde{g}\left(\hat{x}\right),w=\tilde{g}\left(h\left(\tilde{x}\right)\right),w\ .$$

对于满足 $m=1$ 的单输入系统，情况总是如此。

该系统具有特定性质，尤其是无穷小性质。我们来引入系统

$$\tilde{P}_0=\operatorname{span}\left(\mathrm{d}g\left(\hat{x},\tilde{v}\right),\mathrm{d}\tilde{v},\mathrm{d}\tilde{w}\right)\tag{10}$$

以及分布

$$\tilde{V}=\operatorname{span}\left(B_{\tilde{V}}\right)\ ,\qquad B_{\tilde{V}}=\{\partial_{\tilde{v}^1},\ldots,\partial_{\tilde{v}^{m_v}}\}$$
$$\tilde{W}=\operatorname{span}\left(B_{\tilde{W}}\right)\ ,\qquad B_{\tilde{W}}=\{\partial_{\tilde{w}^1},\ldots,\partial_{\tilde{w}^{m_w}}\}\ .$$

我们可以直接得出以下性质:

1. $\tilde{f}_*\left(\partial_{\tilde{w}^i}\right)=\partial_{\tilde{x}_+^{n+m_v+i}}\in\mathcal{T}\left(\mathcal{X}_+\right)$.
2. 设 $P_1\subset P_0$ 为满足 $\tilde{W}\rfloor P_1=\operatorname{span}(\{0\})$ 的最大余分布。P_1 具有由恰当微分构成的基，且满足 $\tilde{W}\rfloor\mathrm{d}P_1=\operatorname{span}(\{0\})$。
3. 若 $f_*(\tilde{v})\in\mathcal{T}(\mathcal{X}_+)$，$\tilde{v}\in\tilde{V}$ 蕴含 $\tilde{v}=0$，则 m_W 是极大的。

由于系统 (1)、(7) 通过 (2) 相连，接下来只需将这些性质从 (10) 转移到系统

$$P_0=\operatorname{span}\left(\mathrm{d}f\left(x,u\right)\right)\tag{11}$$

其中 $U=\operatorname{span}\left(B_U\right)$, $B_U=\{\partial_{u^1},\ldots,\partial_{u^m}\}$，且这些条件对于适当变换的存在是必要且局部充分的。

1. There exists a distribution $W=\operatorname{span}\left(B_W\right)\subset U$, $\dim(W)\geq 1$ with a basis $B_W=\{w_1,\ldots,w_{m_w}\}$ and $f_*\left(w_i\right)\circ f^{-1}\left(x_+\right)\in\mathcal{T}\left(\mathcal{X}_+\right)$, see Sec. 2.
2. 设 $P_1\subset P_0$ 为满足以下条件的最大余分布

$$W\rfloor P_1=\operatorname{span}(\{0\})\,.\tag{12}$$

P_1 可积，且 W 是 P_1的柯西特征分布，这意味着 W 对合，见第 2 节。

3. 由于 U 对合，存在一个对合补分布 V，满足 $V\oplus W=U$，见第 2 节。若 $v\notin W$可投影，则意味着 $v=0$，于是 m_w 为极大。

剩下的工作是构造从 (1) 到 (7) 的变换。由于系统可积，存在函数 $g^i(x,u)$, $i=1,\ldots,n-m_w$，使得 $P_1=\operatorname{span}\left(\mathrm{d}g^1(x,u)\ldots,\mathrm{d}g^{n-m_w}(x,u)\right)$ 成立。设函数 g^i, f^j 已排序，使得映射 $(u,v)=q(x,u)$ 满足

$$\begin{aligned}v&=g^{n-m}\left(x,u\right),\ldots,g^{n-m_w}\left(x,u\right)\\ w&=f^{n-m_w+1}\left(x,u\right),\ldots,f^n\left(x,u\right)\end{aligned}$$

关于 u 可逆。由于 V、W 的构造，这总是可行的。W 是 P_1 的特征分布，这意味着 $\hat{g}^i(x,v)=g^i\left(x,q^{-1}(v,w)\right)$, $i=1,\ldots,n-m$ 或

$$P_1=\operatorname{span}\left(\mathrm{d}\hat{g}^1\left(x,v\right),\ldots,\mathrm{d}\hat{g}^{n-m}\left(x,v\right),\mathrm{d}v^1,\ldots,\mathrm{d}v^{m_v}\right)$$

得到满足。必须存在更多函数 $\hat{g}^{n-m+i}(x,v)$,$i=1,\ldots,m$, 使得映射 $z=p(x,v)$

$$z^1,\ldots,z^n=\hat{g}^1\left(x,v\right),\ldots,\hat{g}^n\left(x,v\right)$$

可逆，否则系统 (1) 在局部上不可达。可以根据关系确定映射 h，见 (6)。

$$f\left(p^{-1}(z,v),q^{-1}(v,w)\right)=h\left(z^1,\ldots,z^{n-m},v,w\right)\ .$$

最后，变换 $x=h(\tilde{x})$、$x_+=h(\tilde{x}_+)$ 得到

$$\tilde{x}_+=h^{-1}(x_+)=\tilde{g}^1(\tilde{x},v),\ldots,\tilde{g}^{n-m}(\tilde{x},v),v,w$$

其中 $\tilde{g}^i(\tilde{x},v)=\hat{}g^i(h(\tilde{x})\quad v),\quad i=1,\ldots,n-m$。

4 平坦性

在继续之前，我们先引入以下缩写$y^i_{a_i,\ b_i}=y^i_{a_i},\ldots,y^i_{b_i}$，$y^c_{a_i\ ,\ b_i}=y^c_{a_c,\ b_c},\ldots,y^d_{a_d,\ b_d}$，用于表示序列或序列的序列。

定义 1. 若存在一个光滑浸没 $F=(F_x,F_u)$，使得系统 (1) 关于前向移位局部平坦，则称系统 (1) 为局部平坦。

$$x=F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\ ,\quad u=F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\ ,\tag{13}$$

使得

$$F_{x,+}\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)=f\left(F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right),F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\right)\tag{14}$$

得到满足。

量 $y^{1,\ 0\ \ m}_{\ ,\ r_i}$ 称为平坦变量及其移位。我们假设数量 $r=\sum_{i=1}^m r_i$ 是最小的。显然，我们可以构造 m 个如下类型的简单移位系统

$$y^i_{0,+}=y^i_1,\ldots,y^i_{(r_i-1),+}=y^i_{r_i}\ ,\quad i=1,\ldots,m\ .\tag{15}$$

根据第 3 节的假设，$r_i\geq 1$、$i=1,\ldots,m$ 得到满足。

关系式 (14) 可改写为

$$F_x\left(y^{1,m}_{1,r_i+1}\right)=f\left(F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right),F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\right)\ ,\tag{16}$$

或者等价地，(13) 可表示为

$$x=F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i-1}\right)\ ,\quad u=F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\ .\tag{17}$$

若系统 (1) 转换为 (4)，则关系式 (17) 转化为

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\bar{F}_{\bar{x}}\left(y^{1,m}_{0,r_i-1}\right)=F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i-1}\right)\\ \bar{u}&=\bar{F}_{\bar{u}}\left(y^{1,m}_{1,r_i}\right)=t_u\left(F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i-1}\right),F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\right)\ ,\end{aligned}$$

见 (3)。关系式 (16) 还表明，右端必须独立于 $y_0=y^1_0,\ldots,y^m_0$。

从 (15) 中消去变量 $y_r=y^1_{r_1},\ldots,y^m_{r_m}$，得到子系统

$$y^i_{0,+}=y^i_1,\ldots,y^i_{(r_i-2),+}=y^i_{r_i-1}\ ,\quad i=1,\ldots,m\ .\tag{18}$$

由于 (13) 将系统 (15) 映射到 (1)，因此它必须将 (18) 映射到 (1) 的一个子系统，其中一些输入 $\tilde{w}$ 被消去。只有在存在如下变换时，这才有可能：

$$\begin{aligned}\tilde{v}&=\hat{F}_{\tilde{v}}\left(y^{1,m}_{1,r_i-1}\right)=\hat{t}_{\tilde{v}}\left(F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i-1}\right),F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\right)\\ \tilde{w}&=\hat{F}_{\tilde{w}}\left(y^{1,m}_{1,r_i}\right)=\hat{t}_{\tilde{w}}\left(F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i-1}\right),F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\right)\end{aligned}$$

其秩为 $\left(\partial_{y_r}F_u\left(y^{1,m}_{0,r_i}\right)\right)$，见 (5) 和 (17)。假设 r 是最小的，这意味着 $m_w\geq 1$。这个子系统有 $n-m_w$ 个状态和 m_v+m_w 个输入，并且必须属于类型 (7)。请注意，其中一些输入可以是平凡的。

考虑 (15) 的静态子系统 $y_0=y^1_0,\ \ldots,\ y^m_0$。由于缺少约束条件，可以为 y_0 赋任意值。根据前面的讨论，必定存在 (1) 的一个适当的 m 维子系统。这意味着必须满足秩 $\left(\partial_{y_0}F_x\left(y^{1,m}_{0,r_i-1}\right)\right)=m$，否则，$r$ 就不是最小的。总结本节的讨论，我们得到以下定理。

定理 1. 系统 (1) 要存在平坦参数化 (13)，一个必要条件是它必须能够变换为形式 (7)。

值得一提的是，推导这一结果并未用到微分几何工具。这里只用到了两个性质。映射 (13) 必须符合系统 (1)，也就是说，必须满足 (14)。此外，(13) 将纯移位系统 (15) 的动态映射到 (1)。这也必须适用于 (15) 的子系统。

如果系统 (1) 满足定理 1 的条件，那么就可以导出平坦子系统 (8) 以及剩余的子系统 (9)。接下来，对剩余的子系统重复这一过程，直到得到一个平凡子系统或非平坦子系统。重复次数最多为 n。以下结果是这一过程的直接而简单的推论，因为每一步中，部分输入（见 (9)）都会被新的输入替代。

推论 1. 设系统 (1) 存在一个平坦参数化 (13)。当且仅当不存在平凡输入时，平坦输出与输入 u无关。

5 示例

我们考虑 [11] 给出的例子:

$$
\begin{aligned}
x_+^1 &= x^2(u^1+1)\\
x_+^2 &= u^1\\
x_+^3 &= x^4+u^2-1\\
x_+^4 &= x^5+1-\frac{x^1(u^1+1)}{x^2+1}\\
x_+^5 &= u^2+x^2.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

5.1 变换与分解

利用 Pfaff 系统

$$
\begin{aligned}
P_0 = \operatorname{span}\Bigg(\Bigg\{&(u^1+1)\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}u^1,\\
&\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}x^4+\mathrm{d}u^2,\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}u^2\ ,\\
&\frac{1}{x^2+1}\Bigg(-(u^1+1)\mathrm{d}x^1+\frac{(u^1+1)x^1}{x^2+1}\mathrm{d}x^2\\
&\quad+(x^2+1)\mathrm{d}x^5-x^1\mathrm{d}u^1\Bigg)\Bigg\}\Bigg)\ ,
\end{aligned}
$$

见式 (11)，可推导出分布 W_0、V_0

$$
\begin{aligned}
W_0 &= \operatorname{span}(\{\partial_{u^2}\})\\
V_0 &= \operatorname{span}(\{\partial_{u^1}\}).
\end{aligned}
$$

P_1，见第 3 节，可得

$$
\begin{aligned}
P_1 = \operatorname{span}\Bigg(\Bigg\{&\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}x^4,(u^1+1)\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}u^1\ ,\\
&\frac{1}{x^2+1}\Bigg(-(u^1+1)\mathrm{d}x^1+\frac{(u^1+1)x^1}{x^2+1}\mathrm{d}x^2\\
&\quad+(x^2+1)\mathrm{d}x^5-x^1\mathrm{d}u^1\Bigg)\Bigg\}\Bigg).
\end{aligned}
$$

现在，我们能够确定函数 $g(x,u)$

$$
\begin{aligned}
g^1 &= \frac{-x^1\left(u^1+1\right)+x^5\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\\
g^2 &= x^2\left(u^1+1\right)\\
g^3 &= x^2-x^4\\
g^4 &= u^1.
\end{aligned}
$$

经过变换 $v^1,w^1 = q(x,u) = u^1,u^2+x^2$，函数 $\hat{}g(x,v)$ 得出

$$
\begin{aligned}
\hat{g}^1 &= \frac{-x^1\left(v^1+1\right)+x^5\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\\
\hat{g}^2 &= x^2\left(v^1+1\right)\\
\hat{g}^3 &= x^2-x^4.
\end{aligned}
$$

利用这些函数，可以确定变换 $x = h(\tilde{x})$，其形式如下

$$
\begin{aligned}
&x^1=\tilde{x}^2, && x^2=\tilde{x}^4, && x^3=\tilde{x}^5-\tilde{x}^3-1\\
&x^4=\tilde{x}^1+1, && x^5=\tilde{x}^5,
\end{aligned}
$$

新坐标下的系统如下

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_+^1 &= \frac{-\tilde{x}^2\left(v^1+1\right)+\tilde{x}^5\left(\tilde{x}^4+1\right)}{\tilde{x}^4+1}\\
\tilde{x}_+^2 &= \tilde{x}^4\left(v^1+1\right)\\
\tilde{x}_+^3 &= -\tilde{x}^1+\tilde{x}^4-1\\
\tilde{x}_+^4 &= v^1\\
\tilde{x}_+^5 &= w^1.
\end{aligned}
$$

现在可以消去最后一个状态。状态和输入将按以下方式重新命名

$$
\begin{aligned}
&x^1=\tilde{x}^1, && x^2=\tilde{x}^2, && x^3=\tilde{x}^3\\
&x^4=\tilde{x}^4, && u^1=\tilde{x}^5, && u^2=v^1\,.
\end{aligned}
$$

现在将重复此过程，并推导出 Pfaff 系统

$$
\begin{aligned}
P_1 = \operatorname{span}\Bigg(\Bigg\{&\mathrm{d}u^2,\mathrm{d}x^4-\mathrm{d}x^1,(u^2+1)\mathrm{d}x^4+x^4\mathrm{d}u^2\ ,\\
&\frac{1}{x^4+1}\Bigg((-u^2-1)\mathrm{d}x^2+\frac{(u^2+1)x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x^4\\
&\quad+(x^4+1)\mathrm{d}u^1-x^2\mathrm{d}u^1\Bigg)\Bigg\}\Bigg)\ ,
\end{aligned}
$$

这些分布

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \operatorname{span}(\{\partial_{u^1},\partial_{u^2}\})\\
V_1 &= \operatorname{span}(\{\})\,,
\end{aligned}
$$

以及约化 Pfaff 系统

$$
P_2 = \operatorname{span}(\{\mathrm{d}x^4,\mathrm{d}x^4-\mathrm{d}x^1\})\,. \tag{20}
$$

在这一步，满足 $m_v = 0$ ，因此函数$g(x,u)$ 得出

$$g^1 = x^4$$
$$g^2 = x^4 - x^1.$$

现在，函数 $\hat{}g(x,v)$ 保持不变，因此 $\hat{}g(x,v) = g(x,u)$ 成立。输入变换由以下关系确定:

$$w^1 = \frac{(x^4+1)u^1 - (u^2+1)x^2}{x^4+1}$$
$$w^2 = u^2.$$

状态变换 $x = h(\tilde{x})$和变换后的系统得出

$$x^1 = \tilde{x}^3, \qquad x^2 = (\tilde{x}^4+1)\tilde{x}^1$$
$$x^3 = \tilde{x}^2 - 1, \qquad x^4 = \tilde{x}^4$$

and

$$\tilde{x}^1_+ = \tilde{x}^4, \qquad \tilde{x}^2_+ = \tilde{x}^4 - \tilde{x}^3$$
$$\tilde{x}^3_+ = w^1, \qquad \tilde{x}^4_+ = w^2\,.$$

由于满足 $m_w = 2$ ，可以消去两个状态，因此最终系统如下所示

$$x^1_+ = u^2$$
$$x^2_+ = u^2 - u^1,$$

这表明该系统是平坦的。

5.2 变换与分布

现在，我们基于分布来检验平坦性。在 [12], [13], 中，通过不同的数学工具推导出了一个类似的结果。

第2节展示了如何构造所有可投射向量场的分布。我们选取（19）中的基函数$f^1,\dots,f^5$以及 $f^6 = x^1, f^7 = x^3$。这些向量

$$\partial_{f^1} = \frac{1}{u^1+1}\left(\partial_{x^2} + \partial_{x^4} - \partial_{u^2}\right) - \frac{x^1}{(x^2+1)^2}\partial_{x^5}$$
$$\partial_{f^2} = \frac{x^2}{u^1+1}\left(\partial_{u^2} - \partial_{x^2} - \partial_{x^4}\right) - \frac{x^1(2x^2+1)}{(x^2+1)^2}\partial_{x^5} + \partial_{u^1}$$
$$\partial_{f^3} = \partial_{x^4}$$
$$\partial_{f^4} = \partial_{x^5}$$
$$\partial_{f^5} = -\partial_{x^4} + \partial_{u^2}$$
$$\partial_{f^6} = \partial_{x^1} + \frac{u^1+1}{x^2+1}\partial_{x^5}$$
$$\partial_{f^7} = \partial_{x^3}$$

构成 $\mathcal{T}(\mathcal{S})$的基$B = \left\{\partial_{f^1},\dots,\partial_{f^7}\right\}$，使得前五个向量映射为单位向量$\partial_{x^1_+},\dots,\partial_{x^5_+}$。 f_*核的一组基为

$$B_K = \left\{\partial_{x^3}, (x^2+1)\partial_{x^1} + (u^1+1)\partial_{x^5}\right\}.$$

向量场 ∂_{u^1}、 ∂_{u^2}在基 B下表示如下

$$\partial_{u^1} = x^2\partial_{f^1} + \partial_{f^2} - \frac{x^1}{x^2+1}\partial_{f^4}$$
$$\partial_{u^2} = \partial_{f^3} + \partial_{f^5}\,.$$

显然，∂_{u^2} 是可投影的。但由于 $x^1/(x^2+1) \notin f^*(C^\infty(\mathcal{X}))$, 不存在与 ∂_{u^1} 的非平凡线性组合是可投影的。

下面给出一种计算上更简单的方法。给定 $B_U = \{\partial_{u^1},\dots,\partial_{u^m}\}$，我们令$f_*(U) = \text{span}\left(\{f_*(\partial_{u^1})\dots, f_*(\partial_{u^m})\}\right)$，并构造$V = \{v_1(x,u)\dots,v_m(x,u)\}$，使其具有归一化元素，从而满足 $f_*(U) = \text{span}\,(V)$。归一化是指存在 m个指标 $j_1,\dots,j_m$，使得 $v_i^{j_k}(x,u) = \delta_i^k$成立。一个场 $v = \sum_{i=1}^m \lambda^i v_i$ 是可投影的，当且仅当$v^i(x,u) \in f^*(C^\infty(\mathcal{X}))$成立。由归一化可得 $\lambda^i \in f^*(C^\infty(\mathcal{X}))$。因此，方程

$$\mathrm{d}v^i \wedge \mathrm{d}f^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^n = 0 \tag{21}$$

是关于 λ^i的线性方程，这使我们能够确定可投射向量场的一组基。可能需要对 λ_1、.....、 λ_m 的解集重复这一过程。

现在我们将上述过程应用于例（19）。向量场 ∂_{u^1}、∂_{u^2} 的推前结果为

$$f_*(\partial_{u^1}) = x^2\partial_{x^1_+} + \partial_{x^2_+} - \frac{x^1}{x^2+1}\partial_{x^4_+} = v_1$$
$$f_*(\partial_{u^2}) = \partial_{x^3_+} + \partial_{x^5_+} = v_2\,.$$

我们求出 $\text{vol} = \mathrm{d}f^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^n$，并根据（21）得到方程

$$\lambda^1 \underbrace{\mathrm{d}x^2 \wedge \text{vol}}_{=0} = 0 \qquad \lambda^1 \underbrace{\mathrm{d}1 \wedge \text{vol}}_{=0} = 0$$
$$\lambda^2 \underbrace{\mathrm{d}1 \wedge \text{vol}}_{=0} = 0 \qquad \frac{-\lambda^1}{x^2+1}\underbrace{\mathrm{d}x^1 \wedge \text{vol}}_{\neq 0} = 0$$
$$\lambda^2 \underbrace{\mathrm{d}1 \wedge \text{vol}}_{=0} = 0\,,$$

有解

$$\lambda^1 = 0, \qquad \lambda^2 = 1\,.$$

现在，我们可以确定这些分布

$$W_0 = \operatorname{span}(\{\partial_{u^2}\}), \quad V_0 = \operatorname{span}(\{\partial_{u^1}\}).$$

余分布 P_1，见式（12），如下

$$\begin{aligned} P_1 = \operatorname{span}\Bigg(\Bigg\{ & \mathrm{d}u^1, \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^4, (u^1+1)\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}u^1 \ , \\ & \frac{1}{x^2+1}\Bigg(-(u^1+1)\mathrm{d}x^1 + \frac{(u^1+1)x^1}{x^2+1}\mathrm{d}x^2 \\ & + (x^2+1)\mathrm{d}x^5 - x^1\mathrm{d}u^1\Bigg)\Bigg\}\Bigg). \end{aligned}$$

对于可投射向量场

$$f_*(\partial_{u^2}) = \partial_{x^5_+} + \partial_{x^3_+} \ ,$$

可得分布

$$U_1 = \operatorname{span}(\{\partial_{x^5} + \partial_{x^3}, \partial_{u^1}\}),$$

见式（8）、（9）。重复这一过程，在接下来的步骤中，我们推导出 U、 V、 W 和 P，如下

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{span}(\{\partial_{x^5} + \partial_{x^3}, \partial_{u^1}\}) \\ V_1 &= \operatorname{span}(\{\}) \\ P_2 &= \operatorname{span}(\{\mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^4\}) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} U_2 &= \operatorname{span}\left(\left\{\partial_{x^4}, x^1\partial_{x^1} + (x^2+1)\partial_{x^2}\right\}\right) \\ W_2 &= \operatorname{span}\left(\left\{\partial_{x^4}, x^1\partial_{x^1} + (x^2+1)\partial_{x^2}\right\}\right) \\ V_2 &= \operatorname{span}(\{\}). \end{aligned}$$

P_2 除状态变换外，与式（20）相同。现在满足 dim($W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$) $= n$，且分布$\overline{W} = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ 为

$$\begin{aligned} \overline{W} = \operatorname{span}\left(\{\partial_{u^2}, \partial_{x^5} + \partial_{x^3}, \partial_{u^1}, \partial_{x^4}, \right. \\ \left. x^1\partial_{x^1} + (x^2+1)\partial_{x^2}\}\right) \ . \end{aligned}$$

平坦输出被$\overline{W}$湮灭，并如下给出

$$y^1 = \frac{x^2+1}{x^1}, \quad y^2 = x^5 - x^3.$$

6 总结

本文的主要结果是给出了离散时间系统平坦的一个必要条件。该系统必须能够变换为标准形。这种形式允许将系统约化为一个平坦系统和一个补分布。值得一提的是，推导中只用到了两个简单事实。平坦参数化是从平坦坐标及其前向移位到离散时间系统的状态和输入的一个浸没，并且参数化后的系统方程恒等成立。由于平坦坐标及其移位也描述了从简单移位系统到平坦系统的变换，因此这一映射对其子系统也必须成立。值得一提的是，推导这一结果并不需要微分几何工具。

本文介绍的检验方法用于判断系统能否变换为标准形，采用了微分几何中的方法。较简单的方法用于检验系统是否平坦。它只需解线性方程，并对非线性表达式进行代入和化简。若系统是平坦的，检验结果将是一个偏微分方程组。平坦输出是这些方程的解。值得将此检验方法的简便性与其他方法进行比较。较复杂的检验方法会生成一个系统序列，其中后继系统是其前驱系统的真子系统。若平坦参数化存在，该检验的结果就是平坦参数化。但它需要求解线性偏微分方程或非线性常微分方程。

参考文献

.[1] E. Aranda-Bricaire、U. Kotta 和 C. H. Moog。离散时间系统的线性化。SIAM 控制与优化杂志，34(6):1999–2023, 1996。doi：https://doi.org/10.1137/S0363012994267315。

[2] Eduardo Aranda-Bricaire 和 Claude H. Moog. 通过外生动态反馈对离散时间系统进行线性化。Automatica, 44(7):1707–1717, 2008. ISSN 0005-1098. doi: https://doi.org/10.1016/j. automatica.2007.10.030.

[3] Johannes Diwold、Bernd Kolar 和 Markus Sch¨oberl. 双输入前向平坦非线性离散时间系统的一种标准形。《International Journal of Systems Science》，52，2021 年 1 月。doi: https://doi.org/10. 1080/00207721.2020.1866095.

[4]Michel Fliess、Jean L´evine、Philippe Martin 和 Pierre Rouchon。《关于微分平坦的非线性系统》。法国科学院院刊，I辑：数学，315：619–624，1992年7月。

[5]Michel Fliess、Jean L´evine、Philippe Martin 和 Pierre Rouchon。《非线性系统的平坦性与缺陷：入门理论与示例》。国际控制杂志，61：13–27，1995年6月。doi：https://doi.org/10.1080/00207179508921959。

[6] Theodore Frankel。《物理几何学：导论》。剑桥大学出版社，第3版，2011年。doi: 10.1017/CBO9781139061377。

[7] B. Jakubczyk 和 W. Respondek。论控制系统的线性化。《波兰科学院通报》，28:517–522，1980年。doi: 10.12691/ajme-5-6-13。

[8]Bronis law Jakubczyk。离散时间系统的反馈线性化。《系统与控制快报》，9(5):411–416，1987年。ISSN 0167-6911。doi: https: //doi.org/10.1016/0167-6911(87)90070-3。

.[9] Arvo Kaldm¨ae 和 Ulle Kotta。论离散时间非线性系统的平坦性。IFAC会议论文集，46(23):588–593，2013年。ISSN 1474-6670。doi: https: // doi.org/10.3182/20130904-3-FR-2041.00017。第9届IFAC非线性控制系统研讨会。

.[10] Bernd Kolar、Arvo Kaldm¨ae、Markus Sch¨ oberl、Ulle Kotta 和 Kurt Schlacher。在几何与代数框架下构造非线性离散时间系统的平坦输出。IFAC在线论文，49（18）：796–801，2016。ISSN 2405-8963。doi：https://doi. org/10.1016/j.ifacol.2016.10.263。第十届 IFAC 非线性控制系统研讨会 NOLCOS 2016。

[11] Bernd Kolar、Markus Sch¨oberl 和 Kurt Schlacher。用于构造离散时间非线性控制系统平坦输出的分解过程。第 22 届国际网络与系统数学理论研讨会论文集，第 775–782 页，2016 年 7 月。

[12] Bernd Kolar、Johannes Diwold 和 Markus Sch¨ oberl。差分平坦性的充要条件。arXiv 预印本，文章编号 arXiv:1909.02868，2019 年 9 月。doi：https://doi.org/10.48550/ arXiv.1909.02868。

[13] Bernd Kolar、Markus Sch¨oberl 和 Johannes Diwold。平坦非线性离散时间系统的微分几何分解。Automatica，132：109828，2021。ISSN 0005-1098。doi：https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109828。

[14]Alexei Kushner、Valentin Lychagin 和 Vladimir Rubtsov。《接触几何与非线性微分方程》。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，2006。doi：10.1017/CBO9780511735141。

[15] Kurt Schlacher。《平坦采样数据系统：一种算法方法》。2019。doi：https://doi.org/10. 48550/arXiv.1909.00555。