π-增强预群及其语言学应用

VALENTIN BOBOC

Abstract. 我们通过引入一种映射来扩展预群，使其能够对指定子串局部应用前循环置换。我们为这类代数结构证明了一个规范化定理，并简要形式化了预群在分析某些自然语言中的附着代词方面的一些已知应用。

arXiv:2303.05160v1 [cs.CL] 9 Mar 2023

1. Introduction

语言的目的是传达意义。本文聚焦于语言的组合性方面，即较长短语的意义由其结构及其组成部分的意义共同决定这一认识。

一个良好的语言组合性方面的数学模型，应能够通过“组合”句子各个部分的类型，计算短语的整体语法类型，从而判断句子是否结构完备（语法上可接受）。

在 [Lam97][Lam08] Lambek 提出了预群的概念，用以刻画自然语言中句子结构的句法学。预群已应用于多种自然语言的分析，从英语到法语、德语、波斯语、拉丁语和日语（例如参见 [LP04][BL01][CL05][Sad07][Car02]）。语言学应用中的大多数研究都采用自由预群，而自由预群也可以解释为紧闭单体范畴[CSC10][KL80]。

我们简要回顾一下相关的代数工具。

定义 1.1。 预群是一个元组 $(P, \cdot, 1, -^{\ell}, -^{r}, \leqslant)$，其中 $(P, \cdot, 1, \leqslant)$ 是一个偏序幺半群，且一元运算 $-^{\ell}$、$-^{r}$（左伴随和右伴随）对所有 $x \in P$ 都满足以下关系：

$$\begin{array}{lll} \text{(contractions)} & x \cdot x^{r} \leqslant 1 & x^{\ell} \cdot x \leqslant 1 \\ \text{(expansions)} & 1 \leqslant x^{r} \cdot x & 1 \leqslant x \cdot x^{\ell}. \end{array}$$

我们将 $p^{(n)}$ 归纳定义为 $p^{(0)} = p$、$(p^{(n)})^{r} = p^{(n+1)}$ 和 $(p^{(n)})^{\ell} = p^{(n-1)}$。预群 P 的普通元素 p 称为原子（或类型），形如 $p^{(n)}$ 的元素称为项，而项的连接 X 称为字符串（或词）。

显然可以验证，以下关系在每个预群中都成立：

$1^\ell = 1 = 1^r$ $(x^\ell)^r = x = (x^r)^\ell$

$(xy)^\ell = y^\ell x^\ell$ and $(xy)^r = y^r x^r$ if $x \leqslant y$ then $y^\ell \leqslant x^\ell$ and $y^r \leqslant x^r$.

例 1.2. 预群最简单的例子是有序群 G。在这种情况下，对于每个元素 $x \in G$，我们都有 $x^\ell = x^r = x^{-1}$。左伴随和右伴随运算合并为群逆元，因此我们在此情形下感兴趣的许多结构都不存在。

例 1.3. 在 [Lam97] 中，我们有如下一个并非有序群的预群例子：取 P 为从整数到其自身的所有无界单调函数构成的集合。令 $[x]$ 表示满足 m 的最大整数 $m \leqslant x$。对于$f(x) = 2x$，我们定义左伴随为 $f^\ell(x) = [(x+1)/2]$，右伴随为 $f^r(x) = [x/2]$。由此可见，$f^\ell \neq f^r$。

为了研究自然语言的语法，我们主要关注自由预群，即由有限个原子或语法类型自由生成、具有左伴随和右伴随的有序幺半群。

我们用英语举一个简单的例子。

例 1.4. 令 E 为由集合 $\{n, s\}$ 自由生成的预群，其中我们将 n 视为表示名词的原子，将 s 视为表示英语句子的原子。让我们分析句子“猫吃老鼠。”由于“猫”和“老鼠”都是名词，因此它们被赋予类型 n。英语的自然语序是主谓宾（主语—动词—宾语），因此，为了使动词“吃”构成一个合乎语法的句子，它需要左侧有一个主语，右侧有一个宾语。在我们的模型中，我们赋予它类型 $n^r s n^\ell$。整个句子的类型为 $n(n^r s n^\ell)n$，我们可以使用预群的公理进行如下推导：

$$n(n^r s n^\ell)n = (nn^r)s(n^\ell n) \leqslant s(n^\ell n) \leqslant s.$$

这里，我们利用幺半群 E 的结合律以及两次收缩，得出句子“猫吃老鼠”可约化为句子类型 s，因此它是合乎语法的。

例 1.5. 使用上一个例子中的预群 E，我们对名词短语“黑猫”进行建模。我们考虑到“猫”本身已经是一个名词，应赋予其类型 n。整个短语“黑猫”是一个名词短语，理想情况下应约化为名词类型。因此，形容词“黑”自然应赋予类型 nn^ℓ。这确实是适用于英语中所有形容词和形容词短语的合理规则。接下来，“黑猫”的约化过程很直接：

$$(nn^\ell)n = n(n^\ell n) \leqslant n.$$

这类计算自然地源自上述设置，并且与预群的字问题有关。给定一个预群 P，我们可以将字问题表述如下：

$$\text{for given strings } X, Y \in P \text{ verify whether } X \leqslant Y.$$

例如，解决这个字问题 $X \leqslant s$ 等价于验证在我们的自然语言语法模型中，给定的句子或短语在语法上是否可接受。以下结果对于理解我们为何能够检查一个字符串是否约化为句子类型至关重要。

定理 1.6（切换引理，[Lam97]）。给定自由预群P 中的两个字符串 X、Y以及 $X \leqslant Y$，存在一个字符串 U，使得 $X \leqslant U$ 无需使用扩张即可推导出来，而 $U \leqslant Y$ 无需使用收缩即可推导出来。

换言之，在自由生成的预群中推导出 $X \to Y$ 时，我们不妨假设它可以通过一系列步骤推导出来，其中扩张引入的项之后不会被收缩消去。因此，若设 $X = p$，其中 p是一个原子，那么 $p \to Y$ 只需通过扩张即可推导出来。另一方面，若对某个原子 q 设 $Y = q$，那么我们只需通过收缩即可推导出 $X \to q$。

第二种情况对语法学家来说很有意思，因为只通过收缩即可验证由某个词 X 表示的句子的语法可接受性 $X \leqslant s$。切换引理的另一个推论是，自由预群的字问题可以在多项式时间内解决。

人们已经考虑了多种为预群添加额外结构的装饰方式。建议读者参阅[KM12][Lam07]中聚焦语言学的讨论。一种显著的装饰是 Fadda 的 β-预群（或带模态的预群） [Fad02][KM07], ，其中预群通过一个额外的算子进行装饰β 该算子会局部抑制底层幺半群运算的结合律。

一个绝佳的例子展示了 β-预群的实用性，即以下歧义陈述的解读。

例 1.7. 短语“老教师和学生”可以有两种不同的理解。我们可以认为形容词“老”同时修饰并列名词，因此“教师”和“学生”都被理解为“老”。或者，我们可以认为形容词“老”只修饰邻近名词“教师”。在这种情况下，我们先得到名词短语“老教师”，之后才将其与未加修饰的名词“学生”并列。使用例 E1.4中的预群语法，可以通过以下约简得到解析“老（教师和学生）”：

$$(nn^{\ell})(\underline{nn^{r}}n\underline{n^{\ell}n}) \leqslant (n\underline{n^{\ell}})n \leqslant n.$$

带下划线的信件表示应用了收缩的位置。“（老教师）和学生”的另一种解读方式如下：

$$((\underline{nn^{\ell}})n)(n^{r}nn^{\ell})n \leqslant \underline{n(n^{r}}\underline{nn^{\ell}})n \leqslant n.$$

这两种句法分析方法都能得出语法上可接受的名词短语。二者唯一的区别在于我们如何选择运用预群的结合律。预群语法能够自然地处理句法分析歧义，这一点令人鼓舞，因为所有自然语言都内含歧义和

冗余（例如参见 [PTG12][TA22]）。 β-预群为我们提供了一种排除两种解释之一并选定默认解释的方法。比如，如果我们想明确表示形容词应始终作为修饰语分配给所有并列的名词短语，就可以用相应的β-预群来写这个句子：

$$\mathrm{n}\mathrm{n}^{\ell}\beta(\mathrm{n})\beta(\mathrm{n})^{\mathrm{r}}\mathrm{n}\beta(\mathrm{n})^{\ell}\beta(\mathrm{n}).$$

在 β-预群 E 中，某些原子可以用符号 β 修饰。更形式化地说， β是幺半群的单调态射，它在局部抑制结合律。请注意，我们不再需要使用括号，因为算子 β会强制所有修饰原子之间的收缩独立于未修饰原子之间的收缩而发生。将此字符串约化为名词类型的方式恰好只有一种：

$$\begin{aligned}\mathrm{n}\mathrm{n}^{\ell}\underline{\beta(\mathrm{n})\beta(\mathrm{n})^{\mathrm{r}}}\mathrm{n}\beta(\mathrm{n})^{\ell}\beta(\mathrm{n}) &\leqslant \mathrm{n}\mathrm{n}^{\ell}\mathrm{n}\underline{\beta(\mathrm{n})^{\ell}\beta(\mathrm{n})}\\ &\leqslant \mathrm{n}\underline{\mathrm{n}^{\ell}\mathrm{n}}\\ &\leqslant \mathrm{n}.\end{aligned}$$

请注意，某些收缩的顺序并不重要，但我们已无法在不先协调名词、再将形容词应用于整个名词短语的情况下解析此字符串。无需详述所有细节，只修饰邻近名词的形容词可以通过以下 β-预群 E中的字符串来实现：

$$\mathrm{n}\beta(\mathrm{n})^{\ell}\beta(\mathrm{n})\mathrm{n}^{\mathrm{r}}\mathrm{n}\mathrm{n}^{\ell}\mathrm{n}.$$

使用预群建模时，一种似乎较为复杂的语法现象是附着词移动。简而言之，附着词是一种语素，它具有词的句法属性，但在语音上依赖于另一个词；也就是说，它必须附加到一个宿主上才能发挥句法作用。在英语中，诸如“I’m”“he’s”和“we’ve”这样的助动词缩约形式就是附着词的例子。

任何词类都可以附着化。在英语中，助动词是常见的附着词。在拉丁语中，连词“que”（和）在短语“Senatus Popu- lusque Romanus”（罗马元老院与人民）中附着化。在罗马尼亚语中，定冠词“i”和“le”总是后附着的，例如“copiii”（孩子们）和“fetele”（女孩们）。

最常以附着词形式出现的词类是人称代词。在许多语言中，代词的附着词化伴随着一种称为附着词移动的现象。当某个词类被附着代词替代时，语序往往会因此改变。

例 1.8. 在法语中，常见的语序是主谓宾（主语-动词-宾语），如下例句所示：

Emmanuel 读了信件。
Emmanuel 已经读了这些信件。

如果我们将宾语名词“lettres”替换为附着代词，那么词序就变为主宾谓：

Emmanuel les a lues。
Emmanuel 它们 已经读了。

为了解释附着词移动，一些作者提出在预群中引入表示动词屈折成分和不定式的新原子[BL01]。例如，带直接宾语和间接宾语的动词同时被赋予两种不同的类型：类型为 j 的扩展不定式，以及类型为 i的短不定式。随后，附着代词被赋予相当长的字符串，作者巧妙地利用了预群允许迭代伴随这一事实。

更简单的方法见于[CS09], ，作者在其中引入了元规则（预群中的非正式关系），用以解释句子内部的移动。其中一条规则指出，若动词的类型为 qp^{ℓ} ，那么它也具有类型$\overline{p}^{r}q$，其中横线$\overline{p}$ 表示附着化代词。

继续以法语为例，我们可以考虑一个由 $\{n, s, p, \overline{p}\}$ 自由生成、带有 $n \leqslant p$ 的预群 F。句子“Emmanuel a lu les letres”的类型为 $n(n^{r}sn^{\ell})n$。第二个句子中，宾语“Emmanuel les a lues”被附着词化，其类型为$n\overline{p}(\overline{p}^{r}n^{r}s)$。不难验证，这两个句子都可以约化为句子类型 s，因此在语法上可接受。

这个元规则是通过应用一种称为前循环置换的操作得出的，这让人想起 Yetter 的循环线性逻辑[然而90]。左、右前循环置换分别由以下公理给出：

$$qp \leqslant pq^{\ell\ell} \qquad \text{and} \qquad qp \leqslant p^{rr}q.$$

可以利用这些公理推导出附着词元规则。遗憾的是，将其中任一公理纳入预群的公理中，都会导致预群退化为有序群，从而失去语法模型所需的重要结构[CS09, 第 6]节。文献中已经探讨过这类前循环规则的一些细节[KM12][DS19][CKM][Sta08] ，也探讨了附着词移动的不同预群方法[Cas07][CL08][Lam10][Cas10]。

本文旨在引入一种新的装饰，使前循环置换能够在局部进行。换言之，我们希望将附着词元规则形式化为一种代数结构，其方式类似于 β-预群，使我们能够在局部允许前循环性（而不是在局部禁止结合律）。这种方法将开辟一条途径，

使我们无需借助元规则或关系，而是通过装饰预群的内部特征来处理此类移位。

本文结构安排如下。第2节中，我们将 π-增广预群定义为具有某些重写规则的自由代数结构。第3 节陈述并证明 π-增广预群的规范化定理。该定理相当于传统的切换引理，它告诉我们，π-增广预群的字问题也可以用同样的方式解决。因此， π-增广预群是普通预群的一种合理扩展。第4节中，我们运用新的数学工具分析一些附着词移动的例子。我们既探讨文献中的经典例子，以展示 π-增广预群的威力，也介绍一些新例子，并提出一系列有待未来探索的问题和现象。

2. π-AUGMENTED PREGROUPS

我们扩展预群的定义，以涵盖我们称为局部预循环性的性质。本文仅关注左预循环性。

定义 2.1. π增广预群是一个预群 $\mathcal{P}$ ，并带有单调映射 $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ，使得受 π 作用的原子满足左前循环规则，即对于任意 $1 \neq p$、 $q \in \mathcal{P}$ ，都有 $[\pi(p)][\pi(q)]^{\ell} \to [\pi(q)]^{r}[\pi(p)]$。

接下来，我们展示如何构造自由的 π增广预群 $\mathcal{P}$。从一个非空偏序集 $(P, \leqslant)$开始。通过归纳法定义 $\mathcal{P}$ 的元素:

leftm1rg1n=1em 空字 1 属于 $\mathcal{P}$，leftm2rg2n=2em 对所有 $p \in P$ 和所有 $n \in \mathbb{Z}$，
$p^{(n)}$ 属于 $\mathcal{P}$，leftm3rg3n=3em 若 w_1、 w_2 属于 $\mathcal{P}$，则其连接 w_1w_2 属于 $\mathcal{P}$，
leftm4rg4n=4em 若词 w 属于 $\mathcal{P}$，则对所有 $n \in \mathbb{Z}$， $[\pi(w)]^{(n)}$ 属于 $\mathcal{P}$。

左伴随和右伴随遵循通常的约定。也就是说， $p^{(0)} = p$, $[p^{(n)}]^{r} = p^{(n+1)}$, $[p^{(n)}]^{\ell} = p^{(n-1)}$, $[\pi(p)]^{(n)r} = [\pi(p)]^{(n+1)}$, and $[\pi(p)]^{(n)\ell} = [\pi(p)]^{(n-1)}$。此外，左伴随和右伴随作用于连接项时会反转顺序，即

$$(p_1p_2 \dots p_k)^{\ell} = (p_k)^{\ell} \dots (p_2)^{\ell}(p_1)^{\ell}$$

右伴随的情况也类似。

下文中， p、 $q \in \mathcal{P}$ 是原子， X、 Y、 Y'、 $Z \in \mathcal{P}$ 是非空词。重写规则如下表所示。

（1）收缩规则

(CON) - simple contraction:
$X, p^{(n)}, p^{(n+1)}, Y \to X, Y$;
(π-CON) - augmented contraction:
$X, [\pi(p)]^{(n)}, [\pi(p)]^{(n+1)}, Y \to X, Y$;

(IND-C) - induced contraction:
$X, [\pi(Y)]^{(2n)}, Z \to X, [\pi(Y')]^{(2n)}, Z$
where $Y \to Y'$ is a contraction rule;
$X, [\pi(Y')]^{(2n+1)}, Z \to X, [\pi(Y)]^{(2n+1)}, Z$
where $Y \to Y'$ is an expansion rule.

(2) 扩张规则

(EXP) - simple expansion:
$X, Y \to X, p^{(n+1)}, p^{(n)}, Y$;
(π-EXP) - augmented expansion:
$X, Y \to X, [\pi(p)]^{(n+1)}, [\pi(p)]^{(n)}, Y$;
(IND-E) - induced expansion:
$X, [\pi(Y)]^{(2n)}, Z \to X, [\pi(Y')]^{(2n)}, Z$
where $Y \to Y'$ is an expansion rule;
$X, [\pi(Y')]^{(2n+1)}, Z \to X, [\pi(Y)]^{(2n+1)}, Z$
where $Y \to Y'$ is a contraction rule.

(3) 既非收缩也非扩张的特殊规则 , p)

(IND) - simple induced step:
$X, p^{(2n)}, Y \to X, q^{(2n)}, Y$;
$X, q^{(2n+1)}, Y \to X, p^{(2n+1)}, Y$
where $p \leqslant q$ in P.
(π-IND) - augmented induced step:
$X, [\pi(Y)]^{(2n)}, Z \to X, [\pi(Y')]^{(2n)}, Z$;
$X, [\pi(Y')]^{(2n+1)}, Z \to X, [\pi(Y)]^{(2n+1)}, Z$
where $Y \to Y'$ is a special rule.
(m-IND) - mixed induced step:
$X, Y^{(2n)}, Z \to X, [\pi(Y')]^{(2n)}, Z$;
$X, [\pi(Y')]^{(2n+1)}, Z \to X, Y^{(2n+1)}, Z$
where $Y \to Y'$ is a special rule.
(PRE) - precyclic rule:
$X, [\pi(Y)], [\pi(Y')]^{\ell}, Z \to X, [\pi(Y')]^{r}, [\pi(Y)], Z$.

接下来定义 $\Rightarrow$ 为 $\to$的自反传递闭包。在 $\mathcal{P}$ 上，字符串之间存在一个等价关系：当且仅当 $X \sim Y$ 且 $X \Rightarrow Y$ 和 $Y \Rightarrow X$时，$[X]$。字符串 $[X]$ 的等价类可以赋予幺半群运算：$[X] \cdot [Y] = [X, Y]$、左伴随一元运算：$[X]^{\ell} = [X^{\ell}]$、右伴随一元运算：$[X]^{r} = [X^{r}]$、等于空字等价类的单位串1，以及一个预序：当且仅当 $X \Rightarrow Y$时，$[X] \leqslant [Y]$。

由此，我们为 $\mathcal{P}$ 赋予了预群结构。 $\mathcal{P}$于是称为自由 π-增强预群。

备注。如果我们以这种方式定义普通预群，那么按照相同的步骤，重写规则就可以用一份短得多的清单来表示：

(CON) $X, p^{(n)}, p^{(n+1)}, Y \to X, Y$;
(EXP) $X, Y \to X, p^{(n+1)}, p^{(n)}, Y$;
(IND) $X, p^{(n)}, Y \to X, q^{(n)}, Y$ if $p \leqslant q$ ($q \leqslant p$) and n is even (odd).

这个重写系统是 Lambek 对预群逻辑的原始表述，也称为紧双线性逻辑（例如参见 [Bus03][CL02][Lam12]）。

备注。我们简要观察一下混合诱导步骤（m-IND）。由于 $\mathcal{P}$ 上的关系具有自反性，这意味着对于每个原子 $p \in \mathcal{P}$，我们都有 $p \to p$。应用（m-IND），可推出对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $p^{(2n)} \to [\pi(p)]^{(2n)}$ 和 $[\pi(p)]^{(2n+1)} \to p^{(2n+1)}$。给定的重写规则使我们得以断定，有时可以按以下方式收缩混合项：

$$p^{(2n)}[\pi(p)]^{(2n+1)} \to 1 \qquad \text{and} \qquad [\pi(p)]^{(2n-1)}p^{(2n)} \to 1.$$

这两种“混合收缩”都可以通过先应用（m-IND），再应用（CON）推导出来。不过请注意，由于 $[\pi(p)]\, p^r \not\to 1$，（m-IND）无法应用于 $\pi(p)$ 或 p^r。今后，每当我们对一个符合条件的混合项先应用（m-IND），再应用（CON）进行收缩时，我们将把这一组合步骤记作（m-CON）。

3. Normalisation theorem

本节将证明自由 π 增广预群的规范化定理，这类似于自由预群的切换引理。换言之，我们要证明，在 $X \Rightarrow Y$ 的任意推导中，所有收缩规则都可以先于所有扩展规则出现。下面将对这一命题进行形式化并加以证明。

定义 3.1. 若存在某个字符串 Y，使得 $X \Rightarrow Z$ $X \Rightarrow Z$ 可以表示为推导 $X \Rightarrow Y$ 和 $Y \Rightarrow Z$ 的复合，其中 $X \Rightarrow Y$ 的推导不含扩展规则，而 $Y \Rightarrow Z$ 的推导不含收缩规则，则称推导 $X \Rightarrow Z$ 为规范推导。

定理 3.2. 在 π 增广预群中，$X \Rightarrow Y$ 的每个最短推导都是规范推导。

证明。设 $X_0 \to X_1 \to \ldots\ldots \to X_n$ 是 $X \Rightarrow Y$ 的一个长度为 N 的推导，其中 $X = X_0$、$Y = X_N$，且每一步 $X_{i-1} \to X_i$ 都是 π 增广预群的一条重写规则。我们证明，每个这样的推导都可以写成长度至多为 N 的规范推导。

我们对 N 使用归纳法。对于 $N = 0$ 和 $N = 1$，该命题显然成立。现在，对于 $N \geqslant 2$，推导 $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_N$ 比最初的推导更短，因此可以将其转化为正规推导 $Y_1 \to Y_2 \to \ldots \to Y_m$，其中 $Y_1 = X_1$、$Y_m = X_N$ 和 $m \leqslant N$。假设 $m < N$。那么 $X_0 \to Y_1 \to Y_2 \to \ldots \to Y_m$ 是 $X \Rightarrow Y$ 的一个长度小于 N 的推导，因此根据归纳假设，可以将其转化为正规推导。

剩下要处理的是 $N = m$ 的情形。我们关注第一步 $X_0 \to X_1$ 的性质。只有当这一步是扩展规则时，才可能出现问题。我们聚焦于推导中的这一部分：$X_0 \to X_1 \ldots \ldots \to X_\ell$，其中 $X_0 \to X_1$ 是扩展规则，而 $X_{\ell-1} \to X_\ell$ 是第一个收缩规则。如果收缩规则紧接在扩展规则之后发生，且二者相互独立，那么我们可以

调换它们在推导中的顺序，这样问题便解决了。如果发生在 $X_0 \to X_1$ 和 $X_{\ell-1} \to X_\ell$ 之间的任何特殊规则与这两步相互独立，那么我们可以将这些规则移到 $X_0 \to X_1$ 之前或 $X_{\ell-1} \to X_\ell$ 之后，这与极小性矛盾。因此，我们假设在所分析的推导部分中，所有步骤都彼此相关。

应用于第一步的规则 $X_0 \to X_1$ 记作 A_0，应用于第 $X_{\ell-1} \to X_\ell$ 步的规则记作 A_1。需要分析以下情况：

II.1. A_0 =(扩张), A_1 =(收缩) II.2. A_0 =(扩张), A_1 =(π-收缩) II.3. A_0 =(扩张), A_1 =(IND-C) III.1. A_0 =(π-扩张), A_1 =(收缩) III.2. A_0 =(π- 扩张), A_1 = (π-收缩) III.3. A_0 =(π-扩张), A_1 = (IND-C) IV.1. A_0 =(IND-E), A_1 =(收缩) IV.2. A_0 =(IND-E), A_1 =(π- 收缩) IV.3. A_0 =(IND-E), A_1 =(IND-C)

我们给出一些示例分析。

情形 I。 $X_0 \to X_1$ 是一条收缩规则。那么 $X_0 \to Y_1 \to \ldots\ldots \to Y_m$ 是 $X \Rightarrow Y$ 的正规推导，这样就完成了。

情形 II。 $X_0 \to X_1$ 是一条（EXP）规则，例如， u、$v \to u$、$p^{(n+1)}$、$p^{(n)}$、v。

情形 II.1。假设在 $Y_1 \to Y_2 \to \ldots\ldots \to Y_m$中，没有对形如$p^{(n+1)}$、$p^{(n)}$的项应用收缩规则。此时我们跳过第一步，并从$Y_1 \to Y_2 \to \ldots\ldots \to Y_m$的收缩规则中出现的类型里删除所有项 $p^{(n+1)}$、$p^{(n)}$。然后通过一次（EXP）将项 $p^{(n+1)}$、$p^{(n)}$加回来，再继续执行序列中的扩张规则。由此得到一个长度为 N的正规推导。

情形 II.2。假设在推导的后续步骤中，对项 $p^{(n)}$ 应用了一步（CON）。这样的推导可以具有以下形式

$$
\begin{aligned}
u, q_0^{(2n)}, v &\to u, q_0^{(2n)}, q_k^{(2n+1)}, q_k^{(2n)}, v && (\mathrm{EXP})\\
&\to u, q_0^{(2n)}, q_{k-1}^{(2n+1)}, q_k^{(2n)}, v && (\mathrm{IND})\\
&\to u, q_0^{(2n)}, q_{k-2}^{(2n+1)}, q_k^{(2n)}, v && (\mathrm{IND})\\
&\to \cdots\\
&\to u, q_0^{(2n)}, q_0^{(2n+1)}, q_k^{(2n)}, v && (\mathrm{IND})\\
&\to u, q_k^{(2n)}, v && (\mathrm{CON})
\end{aligned}
$$

其中 $q_0 \leqslant q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_k$ 在 P 中成立。这是一个长度为 $k+2$ 的推导，由一个 (EXP) 步骤、一个 (CON) 步骤和 k 个 (IND) 步骤组成。

我们可以按以下方式变换这个推导。

$$\begin{aligned} U, q_0^{(2n)}, V &\to U, q_1^{(2n)}, V && (\mathrm{IND}) \\ &\to U, q_2^{(2n)}, V && (\mathrm{IND}) \\ &\to \cdots \\ &\to U, q_k^{(2n)}, V && (\mathrm{IND}) \end{aligned}$$

该推导中没有任何扩张发生在收缩之前，且其长度为k，因此比原推导更短。结合这一观察与归纳假设，我们得到一个正规推导。

情况 III。 $X_0 \to X_1$ 是一个（π-EXP）规则，设为 $U, V \to U, [\pi(p)]^{(n+1)}, [\pi(p)]^{(n)}, V$.

情况 III.1。假设序列后面有一个（CON）步骤。推导的相关部分可以写成：

$$\begin{aligned} U, q_0^{(2n)}, V &\to U, q_0^{(2n)}, [\pi(q_k)]^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{EXP}) \\ &\to U, q_0^{(2n)}, [\pi(q_{k-1})]^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\ &\to U, q_0^{(2n)}, [\pi(q_{k-2})]^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\ &\to \cdots \\ &\to U, q_0^{(2n)}, q_0^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (m - \mathrm{IND}) \\ &\to U, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\mathrm{CON}) \end{aligned}$$

其中 $q_0 \leqslant q_1 \leqslant \ldots\ldots \leqslant q_k$ 属于 P。该推导的长度为 $k+2$，可变换为：

$$\begin{aligned} U, q_0^{(2n)}, V &\to U, q_1^{(2n)}, V && (\mathrm{IND}) \\ &\to U, q_2^{(2n)}, V && (\mathrm{IND}) \\ &\to \cdots \\ &\to U, q_{k-1}^{(2n)}, V && (\mathrm{IND}) \\ &\to U, \pi(q_k)^{(2n)}, V && (m - \mathrm{IND}) \end{aligned}$$

新的推导长度为 k，且只使用诱导步。因此，我们得到一个正规推导。

情形 III.2. 假设存在一个 (π-CON) 步，它消去了 (π-EXP) 步所产生的某个项。推导中相关部分可以呈现如下形式：

$$\begin{aligned}
&U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, V \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_k)]^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{EXP}) \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_{k-1})]^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_{k-2})]^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to \cdots \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_0)]^{(2n+1)}, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to U, \pi(q_k)^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{CON})
\end{aligned}$$

其中，再次有 $q_0 \leqslant q_1 \leqslant \circ \leqslant q_k$ 在 P 中成立。这是一个长度为 $k+2$ 的推导。根据假设，所有必要的（PRE）步骤都在（π-EXP）之后、（π-CON）之前执行。这又可以缩短为：

$$\begin{aligned}
U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, V &\to U, [\pi(q_1)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to U, [\pi(q_2)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to \cdots \\
&\to U, [\pi(q_k)]^{(2n)}, V && (\pi - \mathrm{IND})
\end{aligned}$$

该推导由 k 个（π-IND）步骤组成。如果使用了任何（PRE）规则，可以假设这些规则在最开始执行，而不影响最终结果。再次利用归纳假设，我们得到：$X \Rightarrow Y$ 的这种最短推导必定是规范的。

情形 III.3。假设序列 $X_0 \to X_1$ 的末尾有一个（IND-C）步骤。这意味着我们从如下形式的推导开始：

$$U, V \to U, [\pi(p)]^{(2n+1)}, [\pi(p)]^{(2n)}, V,$$

这就是（π-EXP）步骤。接着，该步骤以 X_1 结束，得到如下形式的推导：

$$U', [\pi(p)]^{(2n+1)}, [\pi(p)]^{(2n)}, V' \to U', [\pi(p)]^{(2n+1)}, [\pi(q)]^{(2n)}, V',$$

其中 $p \leqslant q$ 是一个扩展规则。要将 $X \Rightarrow Y$ 化为标准形式，跳过第一步 $X_0 \to X_1$。然后像之前一样推导序列 $X_2 \to X_N$ 的其余部分。最后，补上最后几步 $X_N \to X_{N+1} \to X_{N+2}$，首先使用一个（π-EXP）步骤引入带装饰的 q-项，如下所示：

$$\overline{U}, \overline{V} \to \overline{U}, [\pi(q)]^{(2n+1)}, [\pi(q)]^{(2n)}, \overline{V}.$$

在最后一步，我们使用 (IND-E) 得到

$$\overline{U}', [\pi(q)]^{(2n+1)}, [\pi(q)]^{(2n)}, \overline{V}' \to \overline{U}', [\pi(p)]^{(2n+1)}, [\pi(q)]^{(2n)}, \overline{V}'.$$

现在，所有扩张都发生在收缩之后。因此，如上所述的推导 $X_2 \to X_3 \to \ldots \to X_N \to X_{N+1} \to X_{N+2}$ 是 $X \Rightarrow Y$ 的长度为 N 的正规推导。

情形 IV。 $X_0 \to X_1$ 是一个 (IND-E) 步骤，即 $U, [\pi(Y)]^{(2n)}, V \to U, [\pi(Y')]^{(2n)}, V$，其中 $Y \to Y'$ 是一条扩展规则。

情形 IV.1. 假设序列后面存在一个 (CON) 步骤，它消去第一步产生的某个项。该推导可采用以下形式

$$\begin{aligned} U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, q_k^{(2n+1)}, V &\to U, [\pi(q_1)]^{(2n)}, q_k^{(2n+1)}, V && (\mathrm{IND-E}) \\ &\to U, [\pi(q_2)]^{(2n)}, q_k^{(2n+1)}, V && (\pi-\mathrm{IND}) \\ &\to \cdots \\ &\to U, [\pi(q_{k-1})]^{(2n)}, q_k^{(2n+1)}, V && (\pi-\mathrm{IND}) \\ &\to U, q_k^{(2n)}, q_k^{(2n+1)}, V && (m-\mathrm{IND}) \\ &\to U, V && (\mathrm{CON}) \end{aligned}$$

其中 $q_0 \leqslant q_1$ 是一条扩展规则，且 $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_k$ 在 P 中作为一系列特殊规则成立。这是一个长度为 $k+1$ 的推导。我们可以按以下方式将其改写为正规推导：

$$\begin{aligned} U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, q_k^{(2n+1)}, V &\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, q_{k-1}^{(2n+1)}, V && (\mathrm{IND}) \\ &\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, q_{k-2}^{(2n+1)}, V && (\mathrm{IND}) \\ &\to \cdots \\ &\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_1)]^{(2n+1)}, V && (\pi-\mathrm{IND}) \\ &\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_0)]^{(2n+1)}, V && (\mathrm{IND-C}) \\ &\to U, V && (\pi-\mathrm{CON}) \end{aligned}$$

这是一个长度为 $k+1$ 的推导，其中不含任何扩张规则。结合归纳假设，这将得到一个 $X \Rightarrow Y$ 的正规推导。

情形 IV.2. 假设序列末尾出现了一个 (π-CON) 步骤。这种类型的推导可采用以下形式：

$$\begin{aligned} &U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_k)]^{(2n+1)}, V \\ &\to U, [\pi(q_1)]^{(2n)}, [\pi(q_k)]^{(2n+1)}, V && (\mathrm{IND-E}) \\ &\to U, [\pi(q_2)]^{(2n)}, [\pi(q_k)]^{(2n+1)}, V && (\pi-\mathrm{IND}) \\ &\to \cdots && (\pi-\mathrm{IND}) \\ &\to U, [\pi(q_k)]^{(2n)}, [\pi(q_k)]^{(2n+1)}, V && (\pi-\mathrm{IND}) \\ &\to U, V && (\pi-\mathrm{CON}) \end{aligned}$$

这是一个长度为 $k+1$ 的推导，其中 $q_0 \leqslant q_1$ 是扩展规则，且 $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_k$ 在 P 中作为一系列特殊规则成立。我们可以将其改写为

以下标准形式：

$$
\begin{aligned}
&U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_k)]^{(2n+1)}, V \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_{k-1})]^{(2n+1)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_{k-2})]^{(2n+1)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to \cdots && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_1)]^{(2n+1)}, V && (\pi - \mathrm{IND}) \\
&\to U, [\pi(q_0)]^{(2n)}, [\pi(q_0)]^{(2n+1)}, V && (\mathrm{IND} - \mathrm{C}) \\
&\to U, V && (\pi - \mathrm{CON})
\end{aligned}
$$

这个新序列的长度与前一个相同，但不包含任何扩张规则。结合归纳假设，可得到 $X \Rightarrow Y$ 的正规推导。

情况 V. $X_0 \to X_1$ 是一个（PRE）步骤。这既不是收缩规则，也不是扩展规则。由于 $X_1 \to \ldots X_m$ 是一个正规推导，因此（PRE）必定是一条促成广义收缩的特殊规则。由此，该推导是正规的。

□

推论 3.3. 给定 π-增强预群中的一个可空字符串 X，无需使用扩张规则即可验证 $X \leqslant 1$。

例 3.4. 考虑由偏序集 $P = (\{p, q\}, \to)$ 生成的自由 π-增强预群 $\mathcal{P}$，其中没有任何关系。字符串 $pq^{rr}p^{\ell}q^{r}$ 在 $\mathcal{P}$ 中不是可空的，但字符串 $p[\pi(q)]^{rr}[\pi(p)]^{\ell}q^{r}$ 是可空的。我们有如下推导：

$$
\begin{aligned}
p[\pi(q)]^{rr}[\pi(p)]^{\ell}q^{r} &\to p[\pi(p)]^{r}[\pi(q)]^{rr}q^{r} && (\mathrm{PRE}) \\
&\to [\pi(q)]^{rr}q^{r} && (m - \mathrm{CON}) \\
&\to 1 && (m - \mathrm{CON})
\end{aligned}
$$

4. Application to linguistics

4.1. 意大利语中的附着词移动。在许多语言中，主语和补语通常可以以附着代词的形式附着在动词之前或之后，从而可能改变语序。

例 4.2. 请看下面的意大利语例句。

(1)Gianni vede Maria。
Gianni 看见 Maria。
(2)Gianni la vede。
Gianni 看见她。

在第二个句子中，直接宾语“Maria”被动词前的附着代词“la”取代。

按照文献 [Cas07][CL01][CKM] 的做法，我们用自由预群来建模意大利语语法，该预群由以下原子类型生成： $\mathfrak{I}$，它们分别表示名词、代词、句子、直接宾语、间接宾语和处所短语。我们用符号 $\to$ 表示偏序。

此外，我们还考虑类型 $\overline{o}$、 $\overline{w}$ 和 $\overline{\lambda}$，它们分别表示直接宾语、间接宾语和处所短语的附着形式。我们施加以下等价关系 $\overline{o} \Leftrightarrow o$、 $\overline{w} \Leftrightarrow w$、 $\overline{\lambda} \Leftrightarrow \lambda$，并施加约化规则 $n \to p$。后者对于意大利语等代词脱落语言尤其重要。

在此框架下，我们可以分析两个例句，以检查其语法性。与之前一样，字符串 X 语法上可接受，当且仅当它约化为句子类型，即 $X \to s$。

对于第一个句子，“Gianni”是一个名词，因此其类型为 n；“vede”是一个类型为 $p^r s o^\ell$ 的及物动词；“Maria”是直接宾语，类型为 o。我们有如下约化：

$$\begin{aligned} n(p^r s o^\ell)o &= (np^r)s(o^\ell o) && \text{结合律} \\ &\to (pp^r)s(o^\ell o) && (\mathrm{IND}) : n \to p \\ &\to s(o^\ell o) && (\mathrm{CON}) \\ &\to s && (\mathrm{CON}) \end{aligned}$$

在第二个句子中，“la”是替代直接宾语的附着代词，因此类型为 $\overline{o}$。动词“vede”也必须改变其类型，变为 $\overline{o}^r p^r s$。

在[CS09] Casadio 和 Sadrzadeh 表明，意大利语中的动词前附着（通常）满足左前循环规则

$$qp^\ell \Rightarrow \overline{p}^r q.$$

由于将这条公理加入预群的公理列表会使预群退化为偏序群，因此我们可以采用 π-增广预群的概念，来彻底形式化附着词移动。这需要对语法类型标注做一些小幅修改。

发生动词前附着的及物动词将被标注为类型 $\pi(p)^r\pi(s)\pi(o)^\ell$，其直接宾语的类型为 $\pi(o)$。对于一个既有直接宾语又有间接宾语、且可能发生动词前附着的动词，其类型将为 $\pi(p)^r\pi(s)\pi(o)^\ell\pi(w)^\ell$，而直接宾语和间接宾语的类型将分别为 $\pi(o)$ 和 $\pi(w)$，而非简单的 o 和 w。

对于动词后附着，我们不在任何类型上添加符号π，因为解析此类附着词并不需要前循环规则。

现在我们将 π-增强预群应用于意大利语附着词。例子主要取自 [CS09]。该论文将前循环公理表述为“元规则”。我们的方法表明，可以将附着词移动纳入公理，并以代数方法推导出附着词化，而无需借助临时元规则。

首先，句子“Gianni vede Maria”可以通过以下一系列归约转换为“Gianni la vede”：

$$
\begin{aligned}
& n\left(\pi(p)^r\pi(s)\pi(o)^\ell\right)\underline{\pi(o)} \\
&= n\left(\pi(p)^r\pi(s)\pi(o)^\ell\right)(\pi(o)^r)^\ell && \text{因为 } (q^r)^\ell = q \\
&= n\left(\pi(p)^r\pi(s)\right)\left(\underline{\pi(o)^\ell(\pi(o)^r)^\ell}\right) && \text{结合律} \\
&= n\left(\underline{\pi(p)^r\pi(s)}\right)\left(\underline{\pi(o)^r\pi(o)}\right)^\ell && \text{因为 } p^\ell q^\ell = (qp)^\ell \\
&\to n\left(\underline{\pi(o)^r\pi(o)}\right)^r(\pi(p)^r\pi(s)) && (\mathrm{PRE}) \\
&= n\,\underline{\pi(o)^r\pi(o)^{rr}}\pi(p)^r\pi(s) && \text{因为 } (pq)^r = q^r p^r \\
&\to n\,\pi(\overline{o})^r\pi(\overline{o})^{rr}\pi(p)^r\pi(s) && (\pi-\mathrm{IND}) : \overline{o} \Leftrightarrow o
\end{aligned}
$$

至此，便完成了将“Gianni vede Maria”转换为“Gianni la vede”的过程，其中“Gianni”的类型为 n，“la”的类型为 $\pi(\overline{o})^r$，而“vede”的类型为 $\pi(\overline{o})^{rr}\pi(p)^r\pi(s)$。很容易验证，新句子在语法上是可接受的。

例 4.3. 我们来看一个动词同时带有直接宾语和间接宾语的例子。

(3)	*Niccolo*	*gives*	*a book*	*to Ludovica.*
	Niccolo	da	un libro	a Ludovica.
	n	$\pi(p)^r\pi(s)\pi(w)^\ell\pi(o)^\ell$	$\pi(o)$	$\pi(w)$

这里，“un libro”是直接宾语，“a Ludovica”是间接宾语。

现在，我们应用 π-增强预群的逻辑，推导出两个宾语都变为动词前附着代词时的句子类型。

$$
\begin{aligned}
& n\pi(p)^r\pi(s)\pi(w)^\ell\pi(o)^\ell\pi(o)\pi(w) \\
&= n\underline{\pi(p)^r\pi(s)\,(\pi(o)\pi(w))^\ell}\pi(o)\pi(w) && p^\ell q^\ell = (qp)^\ell \\
&\to n\,(\pi(o)\pi(w))^r\,\pi(p)^r\pi(s)\pi(o)\underline{\pi(w)} && (\mathrm{PRE}) \\
&= n\,(\pi(o)\pi(w))^r\,\pi(p)^r\pi(s)\underline{(\pi(o)^r)^\ell(\pi(w)^r)^\ell} && q = (q^r)^\ell \\
&= n\,(\pi(o)\pi(w))^r\,\underline{(\pi(p)^r\pi(s))\,(\pi(w)^r\pi(o)^r)^\ell} && p^\ell q^\ell = (qp)^\ell \\
&\to n\,(\pi(o)\pi(w))^r\,(\pi(w)^r\pi(o)^r)^r\,(\pi(p)^r\pi(s)) && (\mathrm{PRE}) \\
&= n\pi(w)^r\;\pi(o)^r\;\;(\pi(o)^{rr}\pi(w)^{rr}\pi(p)^r\pi(s)) && \text{pregroup rules} \\
&\to n\pi(\overline{w})^r\;\pi(\overline{o})^r\;\;(\pi(\overline{o})^{rr}\pi(\overline{w})^{rr}\pi(p)^r\pi(s)) && (\pi-\mathrm{IND}) : o \Leftrightarrow \overline{o}, w \Leftrightarrow \overline{w}
\end{aligned}
$$

前循环规则通常作用于子字符串，而非单个项。例如，在第一行中，为了应用 $qp^\ell \Rightarrow p^r q$，我们取 $q = \pi(p)^r\pi(s)$ and$p^\ell = (\pi(o)\pi(w))^\ell$。在最后一步，我们使用增广诱导步规则，从

$\overline{w} \to w$ 推导出 $\pi(w)^{r} \to \pi(\overline{w})^{r}$，这里用到了奇伴随在预序上反变作用这一事实。因此，我们得到附着词化句子：

(4)
Niccolo	*to her*	*it*	*gives*
Niccolo	glie	lo	da
n	$\pi(\overline{w})^{r}$	$\pi(\overline{o})^{r}$	$\pi(\overline{o})^{rr}\pi(\overline{w})^{rr}\pi(p)^{r}\pi(s)$

主语“Niccolo”的类型为 n，附着词间接宾语代词“glie”（给她，即给 Ludovica）的类型为 $\pi(\overline{w})^{r}$，附着词直接宾语代词“lo”（它，即这本书）的类型为 $\pi(\overline{o})^{r}$，动词“da”的类型为 $\pi(\overline{o})^{rr}\pi(\overline{w})^{rr}\pi(p)^{r}\pi(s)$。为求完整，我们将证明与该附着词化句子相关联的字符串在语法上可接受。

$$
\begin{aligned}
& n\pi(\overline{w})^{r}\ \underline{\pi(\overline{o})^{r}\ \pi(\overline{o})^{rr}}\pi(\overline{w})^{rr}\pi(p)^{r}\pi(s) && \\
& \to n\underline{\pi(\overline{w})^{r}\pi(\overline{w})^{rr}}\pi(p)^{r}\pi(s) && (\pi - \mathrm{CON}) \\
& \to \underline{n}\pi(p)^{r}\pi(s) && (\pi - \mathrm{CON}) \\
& \to \underline{p\pi(p)^{r}}\pi(s) && (\mathrm{IND}) : n \to p \\
& \to \pi(s) && (m - \mathrm{CON}) \\
& \to s && (m - \mathrm{IND})
\end{aligned}
$$

在最后一步中，我们从 $s \to s$ 开始应用混合诱导步规则；由于我们已取偏序的自反闭包，因此该规则成立。

例 4.4. 让我们考虑一个包含动词后附着的句子。

(5) Ludovica 想见 Chiara。Ludovica 想见 Chiara。 $n \quad p^{r}si^{\ell} \quad io^{\ell} \quad o$

这里，i 是表示不定式动词的原子类型。请注意，这个字符串中的类型都没有标上符号 π。对于动词后附着词，我们可以直接根据规则 $o \Leftrightarrow \overline{o}$ 推导出附着词化，无需使用前循环规则。

附着词化句子变为：

(6) Ludovica 想要看她 Ludovica vuole veder.la $n \quad p^{r}si^{\ell} \quad i\overline{o}^{\ell}\overline{o}$

这引出了一个问题：及物动词是否需要在预群中具有两种不同的类型，一种是原子带有符号 π 的类型，另一种则是不带该符号的类型，具体取决于我们讨论的是动词前还是动词后附着词化。作者提出，所有动词及其宾语都应标上符号 π。

考虑到这一点，句子“Ludovica vuole vedere Chiara”的类型将是

$$n\ \pi(p)^{r}\pi(s)\pi(i)^{\ell}\ \pi(i)\pi(o)^{\ell}\ \pi(o),$$

而句子“Ludovica vuole veder.la”的类型将是

$$\mathfrak{n}\ \pi(\mathfrak{p})^{\mathfrak{r}}\pi(\mathfrak{s})\pi(\mathfrak{i})^{\ell}\ \pi(\mathfrak{i})\pi(\overline{\mathfrak{o}})^{\ell}\pi(\overline{\mathfrak{o}}).$$

由于 $\mathfrak{n}$ 可化简为 $\mathfrak{p}$，例如，我们可以看到，应用三条收缩规则后，第一个句子在语法上可以接受。在任何位置使用前循环规则来移动 $\pi(\mathfrak{i})^{\ell}$ 和 $\pi(\overline{\mathfrak{o}})^{\ell}$ 中的任一项，都会使句子在语法上无法接受。因此，默认情况下为所有动词补语添加标记，是一种合理的约定。

4.5. 波斯语中的附着词移动。 遵循 [Sad07]，，我们使用 π-增强预群 $(\mathcal{F}, \to)$ 对波斯语语法建模，该预群由以下原子生成： $\mathfrak{n}$， $\mathfrak{p}$， $\mathfrak{o}$， $\mathfrak{s}$， $\mathfrak{q}$，它们分别表示名词、人称代词、直接宾语、句子和疑问句的类型。我们还加入 $\overline{\mathfrak{o}}$和 $\overline{\mathfrak{p}}$，分别表示直接宾语和人称代词的附着形式，并施加以下等价关系： $\overline{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow \mathfrak{p}$， $\overline{\mathfrak{o}} \Leftrightarrow \mathfrak{o}$。

波斯语中的附着词移动遵循右前循环规则。因此，在我们的 π-增强预群中，规则 **(PRE)** 被以下规则取代

$$\text{(R-PRE)} \qquad X, [\pi(Y)]^{r}, \pi(Y'), Z \to X, \pi(Y'), [\pi(Y)]^{\ell}, Z.$$

例 4.6。 请看下面这个波斯语附着词化的例子。第一个句子明确包含主语“Hassan”和直接宾语“Nadia”。第二个句子是部分附着词化的例子，其中“Nadia”被动词后附着词“ash”取代。第三个句子是完全附着词化句子，其中主语和宾语都被动词后的附着代词“d”和“ash”取代。

(7) Hassan Nadia-ra 做
Hassan 看见
$\mathfrak{p}$ $\mathfrak{o}$ $(\mathfrak{o}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{p}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{s})$(8)
Hassan 做 ash Hassan 看见
她$\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{s}\overline{\mathfrak{o}}^{\ell}$ $\overline{\mathfrak{o}}$(9) di d
ash 看见他 她$(\mathfrak{s}\overline{\mathfrak{o}}^{\ell}\overline{\mathfrak{p}}^{\ell})$ $\overline{\mathfrak{p}}$ $\overline{\mathfrak{o}}$

我们可以使用 π-增强预群的逻辑，通过以下推导序列推导出这个部分附着词化句子。

$$
\begin{aligned}
&\pi(p)\underline{\pi(o)}\,(\pi(o)^r\pi(p)^r\pi(s)) && \\
&= \pi(p)\underline{(\pi(o)^\ell)^r\pi(o)^r}\pi(p)^r\pi(s) && \pi(o) = (\pi(o)^\ell)^r \\
&= \pi(p)\underline{\left(\pi(o)\pi(o)^\ell\right)^r\,(\pi(p)^r\pi(s))} && p^r q^r = (qp)^r \\
&\to \pi(p)\,(\pi(p)^r\pi(s))\,\left(\pi(o)\pi(o)^\ell\right)^\ell && (R-PRE) \\
&= \pi(p)\left(\pi(p)^r\pi(s)\underline{\pi(o)^{\ell\ell}}\right)\underline{\pi(o)^\ell} && \text{associativity} \\
&\to \pi(p)\left(\pi(p)^r\pi(s)\pi(\overline{o})^{\ell\ell}\right)\pi(\overline{o})^\ell && (\pi-IND) : o \Leftrightarrow \overline{o}
\end{aligned}
$$

这里，主语“Hassan”的类型仍为 $\pi(p)$，动词“did”的类型为 $\pi(p)^r\pi(s)\pi(\overline{o})^{\ell\ell}$，附着词化直接宾语“ash”的类型为 $\pi(\overline{o})^\ell$。

按照类似的步骤，我们可以推导出完全附着词化句子“di d ash”，其中动词“di”的类型为 $\pi(s)\pi(\overline{o})^{\ell\ell}\pi(\overline{p})^{\ell\ell}$，附着词化主语“d”的类型为 $\pi(\overline{p})^\ell$，附着词化宾语“ash”的类型为 $\pi(\overline{o})^\ell$。

5. Conclusion

我们引入了 π-增强预群的概念，其中，任意给定字符串的带标记子字符串都满足前循环公理。这使我们能够将前循环性纳入预群的公理中，而无需将预群约化为偏序群。我们证明了一个类似于切换引理的规范化定理，并形式化描述了前循环置换在自然语言附着词移动中的一些应用。

如果能看到这种方法是否也可用于更一般地形式化其他元规则，将会很有意思。例如，若能形式化印地语句法中的语序灵活性，将会很有帮助；相关讨论见[DS19]关于 π-增强预群的论述。主要目标是形式化参考文献中所描述的对某些前循环置换的“阻断”。

作者目前正在研究东部罗曼语族语言中附着词移动的跨语言分析，其中，π-增强预群这一概念可作为一种合理的基础理论模型。

References

[BL01] Daniele Bargelli 和 Joachim Lambek。法语句子结构的代数方法。载于国际计算语言学逻辑方面会议，第 62–78 页。施普林格，2001 年。DOI:10.1007/3-540-48199-04。[Bus03] Wojciech Buszkowski。紧双线性逻辑的序列演算系统。《数学逻辑季刊》，49(5)：467–474，2003 年。[Car02] Kumi Cardinal。日语语法的代数研究，2002 年。博士论文。[Cas07] Claudia Casadio。将预群应用于意大利语陈述句和疑问句。《逻辑研究》，87(2)：253–268，2007 年。DOI:10.1007/s11225-007-9086-1。

[Cas10] Claudia Casadio。意大利语中的一致关系与附着词化：预群分析。载于《国际语言与自动机理论及应用会议》，第 166–177 页。施普林格，2010 年。[CKM] Claudia Casadio 和 A Ki´slak-Malinowska。元组预群：意大利语附着词模式研究。[CL01] Claudia Casadio 和 Joachim Lambek。意大利语附着代词的代数分析。载于《国际计算语言学逻辑方面会议》，第 110–124 页。施普林格，2001 年。DOI:10.1007/3-540-48199-0 7。[CL02] Claudia Casadio 和 Joachim Lambek。四种语法的故事。《逻辑研究》，71(3)：315–329，2002 年。[CL05] Claudia Casadio 和 Jim Lambek。拉丁语语法的计算代数方法。《语言与计算研究》，3(1)：45–60，2005 年。DOI:10.1007/s11168-005-1286-0。[CL08] C Casadio 和 J Lambek。形态学与句法学中近期的计算代数方法。Polimetrica，米兰，2008 年。[CS09] Claudia Casadio 和 Mehrnoosh Sadrzadeh。预群语法中的附着词移动：跨语言研究。载于《国际第比利斯逻辑、语言与计算研讨会》，第 197–214 页。施普林格，2009 年。DOI:10.1007/978-3-642-22303-7 13。[CSC10] Bob Coecke、Mehrnoosh Sadrzadeh 和 Stephen Clark。组合分布语义模型的数学基础，2010 年。DOI:10.48550/arXiv.1003.4394。[DS19] Alok Debnath 和 Manish Shrivastava。利用印地语句法表示语序交替的预群表示。载于《2019 年计算语言学协会北美分会会议论文集：学生研究研讨会》，第 125–135 页，2019 年。DOI:10.1007/978-3-319-06880-0 12。[Fad02] Mario Fadda。迈向灵活预群语法，2002 年。[KL80] Gregory M Kelly 和 Miguel L Laplaza。紧闭范畴的相干性，1980 年。DOI:10.1016/0022-4049(80)90101-2。[KM07]Aleksandra Ki´slak-Malinowska。论 β-预群的逻辑，2007 年。DOI:10.1007/s11225-007-9090-5。[KM12] Aleksandra Ki´slak-Malinowska。应用于自然语言的扩展预群语法，2012 年。DOI:10.12775/LLP.2012.012。[Lam97] Joachim Lambek。重访类型语法。载于《国际计算语言学逻辑方面会议》，第 1–27 页。施普林格，1997 年。DOI:10.1007/3-540-48975-4 1。[Lam07] Joachim Lambek。预群语法是否应配备附加运算？献给 Michael Moortgat 五十岁之际。《逻辑研究：国际符号逻辑杂志》，87(2/3)：343–358，2007 年。DOI:10.1007/s11225-007-9094-1。[Lam08] Joachim Lambek。从词到句子：语法的计算代数方法，2008 年。DOI: 10.1007/s10849-006-9035-9。[Lam10] Joachim Lambek。通过并行预群计算探究法语中的特征一致，2010 年。DOI:10.1007/s10849-009-9098-5。[Lam12] Joachim Lambek。逻辑与语法。《逻辑研究》，100(4)：667–681，2012 年。[LP04] Joachim Lambek 和 Anne Preller。德语句子的代数方法。《语言学分析》，2004 年。HAL ID: irmm-00108541。[PTG12] Steven T Piantadosi、Harry Tily 和 Edward Gibson。语言中歧义的交际功能。《认知》，122(3)：280–291，2012 年。[Sad07]Mehrnoosh Sadrzadeh。波斯语句子的预群分析，2007 年。https://www.cs.ox.ac.uk/files/2416/PersPreGroup.pdf。[Sta08] Edward P Stabler。元组预群语法，2008 年。[TA22] Shira Tal 和 Inbal Arnon。冗余有助于学习：来自语序和格标记的证据。《认知》，224：105055，2022 年。[Yet90] David N Yetter。量子格与（非交换）线性逻辑。《符号逻辑杂志》，55(1)：41–64，1990 年。

School of Mathematics, The University of Manchester, Alan Turing Building, Oxford Road, Manchester M13 9PL, United Kingdom

电子邮件地址：valentinboboc@icloud.com