arXiv:2303.05179v1 [math.NA] 9 Mar 2023

Funk-Radon变换的框架分解

Michael Quellmalz[1], Lukas Weissinger[2], Simon Hubmer[2], 和 Paul D. Erchinger[1]

[1] 柏林工业大学数学研究所，MA 4-3，6月17日大街136号，D-10623 柏林，德国
quellmalz@math.tu-berlin.de,
erchinger@campus.tu-berlin.dewww.tu.berlin/imageanalysis[2] 林茨约翰·拉东研究所，Altenbergerstraße 69，A-4040 林茨，奥地利
lukas.weissinger@ricam.oeaw.ac.at,
simon.hubmer@ricam.oeaw.ac.atwww.ricam.oeaw.ac.at

摘要。Funk-Radon 变换将定义在单位球面上的函数映射为其沿球面所有大圆的积分。本文研究 Funk-Radon 变换的一种框架分解，它是奇异值分解的一种灵活替代方案。具体而言，我们基于三角多项式构造了一种新颖的框架分解，并展示其在 Funk-Radon 变换反演中的应用。我们通过数值实验验证了理论结果，实验中还采用了一种正则化方案。

关键词： Funk-Radon 变换 · 框架分解 · 逆问题与不适定问题 · 数值分析 · 层析成像。

1 引言

Funk-Radon 变换 将定义在二维单位球面 上的函数 $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$ 映射为其沿球面所有大圆的积分，即:

$$Rf(\boldsymbol{\xi}) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\eta}=0} f(\boldsymbol{\eta}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2\,, \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$ 表示垂直于 $\boldsymbol{\xi}$的大圆弧长。追溯至二十世纪初 Funk [17] 和 Minkowski [36]的研究，这种变换也称为 Funk变换、明可夫斯基-芬克变换或球面Radon变换。它已应用于扩散磁共振成像 [43,49],雷达成像 [52],康普顿相机成像 [48],光声层析成像 [24], 和几何断层成像 [18, 第 4]章。除了解析反演公式，例如， [4,17,21,28],给定函数的 Funk-Radon 变换后，可通过磨光子方法 [34,44],特征值分解 [23], 或在立方球面上离散化 [5]来进行数值重建。针对球面的各种非中心截面 [2,39,45,46] 或针对导数 [28,42], 也已发展出相应的推广。

本文关注 框架分解 (FDs)，即 Funk-Radon 变换的框架分解。框架分解最初是在小波-模糊分解的框架下发展起来的 [1,10,11,14,15,31,33]，随后扩展至双正交曲波和剪切波分解 [6,8]。框架分解是奇异值分解（SVD）的推广 [12,16,25,26,27,50]。具体而言，它使有界线性算子能够进行类似 SVD 的分解，即使在 SVD 本身未知、计算不可行或其结构不理想的情况下也如此。更准确地说，给定实或复希尔伯特空间 A之间的一个 $X \to Y$ 有界线性算子 X 以及 Y，算子 A 的框架分解具有如下形式

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \langle x, e_k \rangle_X \tilde{f}_k , \qquad \forall x \in X . \tag{2}$$

这里，集合 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 和 Y上分别构成框架，并且$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 表示框架 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的对偶框架；参见下文第 2节。对 e_k 和 f_k 的主要要求是它们满足准奇异关系

$$\overline{\sigma_k}\, e_k = A^* f_k , \qquad \forall k \in \mathbb{N} , \tag{3}$$

其中，$\overline{\sigma_k}$ 表示系数 $\sigma_k \in \mathbb{C}$ 的复共轭，而 A^* 表示 A的伴随算子。利用傅里叶分解（2），可以计算线性方程 $Ax = y$的（近似）解，并像奇异值分解 [12,26,27]那样构建基于滤波器的正则化方案。然而，问题仍然是能否找到满足（3）的框架。对于一些例子，可以通过几何考量做到这一点；而在 [11,14,15,25],满足稳定性条件的情况下，则存在一种显式的构造“方法”A

$$c_1 \|x\|_X \le \|Ax\|_Z \le c_2 \|x\|_X , \qquad \forall x \in X , \tag{4}$$

对于某些常数 c_1，$c_2 > 0$ 以及一个希尔伯特空间 $Z \subseteq Y$。在这种情况下，可以从 Y 上的任意框架 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 开始，并要求其具有以下附加性质

$$a_1 \|y\|_Z^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 |\langle y, f_k \rangle_Y|^2 \le a_2 \|y\|_Z^2 , \qquad \forall y \in Y , \tag{5}$$

对于系数 $0 \neq \alpha_k \in \mathbb{R}$ 和某些常数 a_1，$a_2 > 0$。接下来，定义

$$e_k := \alpha_k A^* f_k ,$$

从而得到一个框架 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，定义在 X 上，并满足（3），其中$\overline{\sigma_k} = 1/\alpha_k$ [26]。如果 Z 和 Y是索博列夫空间，则通常可以找到满足（5）的框架（例如正交归一小波 [9]），这已促成了经典拉东变换的傅里叶分解 [26,27]。另一方面，尽管 Funk-Radon 变换满足形如（4）的稳定性性质，见下文定理2，但要找到满足（5）的框架则更加困难。球谐函数是一个常见的候选对象，但它们本身已经是 Funk-Radon 变换的特征函数，因此无法提供更多见解。

因此，本文考虑一种不同的框架分解构造方法，该方法最初概述于 [26]。这种方法仍基于稳定性性质（4），但不再要求满足（5），而只要求

$$\|y\|_Y \leq \|y\|_Z \,, \qquad \forall\, y \in Z \,, \tag{6}$$

它 $Z \subseteq Y$ 是 Y的稠密子空间，且框架函数 f_k 属于 Z，即 $\|f_k\|_Z < \infty$。在这种情况下，可以构造一个与（ A ）类似的 2 的替代傅里叶分解，随后可用于计算线性算子方程 $Ax = y$ 在任意 y 属于值域 $\mathcal{R}(A)$ 时的 A唯一解，并在含噪数据 y^δ的情况下开发稳定的重建方法。

本文旨在说明上述方法适用于 Funk-Radon 变换。具体而言，我们利用三角函数构造傅里叶分解；与球谐函数相比，三角函数计算速度更快，参见 [35,53]。为此，我们首先在第 2 节回顾框架和傅里叶分解的相关背景。随后，在第 3 节中，我们证明，只要适当选择函数 f_k，Funk-Radon 变换便满足所有所需性质。此外，我们给出框架函数 e_k的显式表达式，由此得到傅里叶分解及相应的重建公式。最后，在第 4 节中，我们探讨所推导的傅里叶分解的高效实现，并通过若干数值实例评估其重建质量。

2 框架与框架分解背景

本节回顾框架与傅里叶分解的一些背景知识，分别摘自开创性著作 [7,9] 和近期文章 [26],。

定义 1。希尔伯特空间 X 中的序列 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 称为X上的框架，当且仅当存在框架界 $0 < B_1, B_2 \in \mathbb{R}$，使得

$$B_1 \|x\|_X^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle_X|^2 \leq B_2 \|x\|_X^2 \,, \qquad \forall\, x \in X \,. \tag{7}$$

对于给定的框架 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，可以考虑框架（分析）算子 F及其伴随（合成）算子 F^*，它们定义为

$$\begin{aligned} F &: X \to \ell_2(\mathbb{N}) \,, \qquad x \mapsto (\langle x, e_k \rangle_X)_{k\in\mathbb{N}} \,, \\ F^* &: \ell_2(\mathbb{N}) \to X \,, \qquad (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \,. \end{aligned}$$

由于式（7）成立，因此有$\sqrt{B_1} \leq \|F\| = \|F^*\| \leq \sqrt{B_2}$。此外，可以定义

$$Sx := F^*Fx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_X \, e_k \,, \qquad \text{and} \qquad \tilde{e}_k := S^{-1} e_k \,.$$

由于 S 可连续可逆，且具有 $B_1 I \leq S \leq B_2 I$，函数 $\tilde{e}_k$ 定义良好，并且集合 $\{\tilde{e}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 上构成一个框架，其框架界为 B_2^{-1}，B_1^{-1}称为 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的对偶框架。此外，可以证明

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle\, x, \tilde{e}_k \,\rangle_X \, e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle\, x, e_k \,\rangle_X \, \tilde{e}_k \,, \qquad \forall\, x \in X \,.$$

一般而言，这种分解并不唯一，这是框架与基之间的一个关键区别，但可以将其理解为“最经济”的分解 [9]。

接下来，我们考虑框架分解。为此，我们采用以下

假设*1*。算子 $A\colon\ X \to Y$在希尔伯特空间 X、Y之间有界且线性，并且对某些常数 c_1、$c_2 > 0$满足条件 *(4)*，其中希尔伯特空间 $Z \subseteq Y$ 是 Y 的稠密子空间，且满足 *(6)*。此外，˜集 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 Y 上构成一个框架，其框架界为 C_1、$C_2 > 0$，而 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$表示 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的对偶框架。此外，函数 f_k 属于Z，即 $\|f_k\|_Z < \infty$，且 $E\colon\ Z \to Y$、$z \mapsto z$表示嵌入算子。

现在，构造 A 的傅里叶分解的关键思路是：根据框架 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，在 X 上适当地选择一个框架 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，如

命题1（[26, 引理4。5]）。设 $A\colon\ X \to Y$，并假设*1* 成立。那么集合 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中函数 e_k 定义为

$$e_k \coloneqq A^* L f_k \,, \qquad where \qquad L \coloneqq (EE^*)^{-1/2} \,, \tag{8}$$

在 X 上构成一个框架，其框架界为 $B_1 = c_1^2 C_1$ 和 $B_2 = c_2^2 C_2$，其中 C_1和 C_2 是 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的框架界，而 c_1 和 c_2 如假设*1*中所述。

对函数 e_k 取式（8）中的选择，可得以下

命题2（[26, 引理4。6]）。设 $A\colon\ X \to Y$，假设*1* 成立，并设函数 e_k 按（8）定义。那么对所有 $x \in X$，均有

$$LAx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle\, x, e_k \,\rangle_X \, \tilde{f}_k \,, \qquad and \qquad Ax = L^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle\, x, e_k \,\rangle_X \, \tilde{f}_k \right) , \tag{9}$$

其中第二个等号利用了 $L^{-1} = (EE^*)^{1/2}$ 连续这一事实。

接下来，我们利用上述 A 的傅里叶分解（FD），考虑线性算子方程 $Ax = y$ 的解。综合中引理4.7、定理4.8和注4.2的结果，这些结果本质上都是由（9）推出的，因此可得

定理1。设 $A\colon\ X \to Y$ 为有界线性算子，假设*1*成立，并设函数 e_k 按（8）定义。那么对于任意 $y \in \mathcal{R}(A) \subseteq Z$，

$$A^{\dagger} y \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \langle\, Ly, f_k \,\rangle_Y \, \tilde{e}_k \,,$$

是 $Ax = y$ 的定义良好且唯一的解，并且 $\left\| A^{\dagger} y \right\|_X \leq \sqrt{C_2/B_1}\, \|\overline{Ly}\|_Y$。

3 Funk-Radon 变换的框架分解

Funk-Radon 变换的特征值分解（1），它也是傅里叶分解，归功于 [36]。记 P_ℓ 为第 ℓ个勒让德多项式，我们有

$$RY_\ell^m = P_\ell(0)\, Y_\ell^m = \begin{cases} \frac{(-1)^{\ell/2}(\ell-1)!!}{\ell!!}\, Y_\ell^m\,, & \ell \text{ even}\,, \\ 0\,, & \ell \text{ odd}\,, \end{cases} \tag{10}$$

其中，特征函数是次数为 $\ell \in \mathbb{N}_0$、阶数为 $m = -\ell, \dots, \ell$ 的球谐函数 Y_ℓ^m [37]，它们构成了 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 的标准正交基。由其在 (1) 中的定义可知，对于任意 $f\colon\ \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$，$Rf$ 都是偶函数，即对所有 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2$，$Rf(\boldsymbol{\xi}) = Rf(-\boldsymbol{\xi})$。反过来，对于奇函数 $f(\boldsymbol{\xi}) = -f(-\boldsymbol{\xi})$，$Rf$ 为零，因此我们可以预期，只能从偶函数 f 的 Funk-Radon 变换中恢复它们。

球面索 *Sobolev* 空间 $H^s(\mathbb{S}^2)$，$s \in \mathbb{R}$，可定义为 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 关于范数 [3] 的完备化

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{S}^2)} := \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\ell + \tfrac{1}{2})^{2s} |\langle f, Y_\ell^m \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)}|^2\,, \tag{11}$$

其中 $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} := \int_{\mathbb{S}^2} f(\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$，并将其在偶函数上的限制记为 $H^s_{\text{even}}(\mathbb{S}^2)$，偶函数构成的空间由偶数阶球谐函数 Y_ℓ^m张成$\ell \in 2\mathbb{N}_0$。索博列夫空间是嵌套的，即当 $s > r$ 时，$H^s(\mathbb{S}^2) \subsetneq H^r(\mathbb{S}^2)$，并且有 $H^0(\mathbb{S}^2) = L^2(\mathbb{S}^2)$。

定理2。 设 $s \geq 0$。定义于 (1) 的 *Funk-Radon* 变换 R 从 $X = H^s_{\text{even}}(\mathbb{S}^2)$ 到 $Z = H^{s+1/2}_{\text{even}}(\mathbb{S}^2)$ 可延拓为一个连续双射算子，且满足 (4)，其界为 $c_1 = \sqrt{1/2}$ 和 $c_2 = \sqrt{2/\pi}$。此外，它还可延拓为一个从 $H^s_{\text{even}}(\mathbb{S}^2)$ 到 $H^s_{\text{even}}(\mathbb{S}^2)$的连续自伴算子。

证明。 映射 $R\colon\ X \to Y$的双射性源于 [47, § 4]。由[40], 中的定理3.13可知，c_1 和 c_2 在（ 4 ）中的刻画为

$$c_1 \left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{(\ell-1)!!}{\ell!!} = |P_\ell(0)| \leq c_2 \left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\,, \qquad \forall\, \ell \in 2\mathbb{N}_0\,. \tag{12}$$

类似于 [22], 中引理3.2的证明，我们可以看到序列$2\mathbb{N}_0 \ni \ell \mapsto (\ell+1/2)^{1/2}(\ell-1)!!/\ell!!$单调递增并收敛于 $2/\pi$，其中 $\ell \to \infty$。因此，它的下界是其在 $1/2$ 处的取值 $\ell = 0$，上界是其极限 $2/\pi$。此外，$R\colon\ X \to X$ 是自伴的，因为它的特征值$P_\ell(0)$，参见（10），均为实数。 □

接下来，我们介绍球面上的三角基，它使我们能够得到 Funk-Radon 变换的一种新颖傅里叶分解 R。我们从球坐标变换开始

$$\phi(\lambda, \theta) := (\cos\lambda\, \sin\theta,\, \sin\lambda\, \sin\theta,\, \cos\theta)\,, \qquad \forall\, \lambda \in [0, 2\pi)\,,\ \theta \in [0, \pi]\,, \tag{13}$$

该变换是一一对应的，但对应北极和南极的情况除外 $\theta \in \{0, \pi\}$。我们假设 λ 具有 2π周期性，并定义三角基函数

$$b_{n,k} \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}\,,\ b_{n,k}(\phi(\lambda,\theta)) \coloneqq \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}\,\sin(k\theta)}{\pi\sqrt{\sin\theta}}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,,\ k \in \mathbb{N}\,, \tag{14}$$

在 $\mathbb{S}^2$ 上定义良好且连续$b_{n,\,k}$ 当 $\theta \to 0$ 时为零，并且$\theta \to \pi$。 $\mathbb{S}^2$ 上的三角基具有计算简单、快速的优点， [53], 并构成双重傅里叶球面方法的基础[35,51]。注意，我们的函数（14）与 [35] 中的函数略有不同，因为我们取$\sin(k\theta)$ 以避免极点处的奇异性。

引理1。 序列 $\{b_{n,k}\}_{n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}}$ 构成 $L^2(\mathbb{S}^2)$的标准正交基。

证明。 设 n， $n' \in \mathbb{Z}$和 k， $k' \in \mathbb{N}$。由于在 $\mathbb{S}^2$ 球坐标（13）下的积分可写为 $\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda$， 因此有

$$\langle b_{n,k}, b_{n',k'}\rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n')\lambda}\sin(k\theta)\sin(k'\theta)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta = \delta_{n,n'}\delta_{k,k'}\,,$$

这表明其为标准正交。完备性则由 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$在 $L^2([0,2\pi])$ 中的完备性以及 $\{\sin(k\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$在 $L^2([0,\pi])$ 中的完备性推出。□

对于 $\boldsymbol{\xi} = \phi(\lambda,\ \theta) \in \mathbb{S}^2$，其对跖点为 $-\boldsymbol{\xi} = \phi(\pi+\lambda,\ \pi-\theta)$。因此，我们得到对称关系 $b_{n,\,k}(-\boldsymbol{\xi}) = (-1)^{n+k+1}b_{n,\,k}(\boldsymbol{\xi})$，这意味着序列 $\{b_{n,k}\}_{n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N},\ n+k\ \text{奇}}$ 是 $L^2_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$的标准正交基。

引理2。 基函数$b_{n,\,k}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ （其中 $n+k$ 为奇数）是 $H^1_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$ 中定义良好的元素。特别地，我们还有 $b_{n,\,k} \in H^{1/2}_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$。

证明。 根据 [41, § 5。2]， $H^1(\mathbb{S}^2)$ $f \in C^1(\mathbb{S}^2)$ 的索伯列夫范数可写为

$$\|f\|^2_{H^1(\mathbb{S}^2)} = \sum_{i=1}^{3}\|[\nabla_{\mathbb{S}^2}f]_i\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)} + \tfrac{1}{4}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)}\,, \tag{15}$$

其中 $[\nabla_{\mathbb{S}^2}f]_i$ 表示曲面梯度的第 i 个坐标分量，该梯度用球坐标表示为

$$\nabla_{\mathbb{S}^2}f(\phi(\lambda,\theta)) = \phi(\lambda,\tfrac{\pi}{2}+\theta)\,\partial_\theta f(\phi(\lambda,\theta)) + \phi(\tfrac{\pi}{2}+\lambda,\tfrac{\pi}{2})\,\tfrac{1}{\sin\theta}\,\partial_\lambda f(\phi(\lambda,\theta))\,.$$

令 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。对于 $f = b_{n,k}$，我们有

$$\partial_\theta b_{n,k}(\phi(\lambda,\theta)) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}}{\pi}\left(\frac{k\cos(k\theta)}{\sqrt{\sin\theta}} - \frac{\cos(\theta)\,\sin(k\theta)}{2\,\sin^{3/2}\theta}\right)$$

and

$$\partial_\lambda b_{n,k}(\phi(\lambda,\theta)) = \mathrm{i}n\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}}{\pi}\,\frac{\sin(k\theta)}{\sqrt{\sin\theta}}\,.$$

利用正弦函数和余弦函数（特别是 ϕ 的分量）的绝对值不超过 1，以及当 $a,b\in\mathbb{R}$ 时 $|a+b|^2\le 2(|a|^2+|b|^2)$ 的事实，我们得到

$$\begin{aligned}|[\nabla_{\mathbb{S}^2} b_{n,k}(\phi(\lambda,\theta))]_i|^2 &\le 2\left|\frac{k\cos(k\theta)}{\pi\sqrt{\sin\theta}}-\frac{\cos(\theta)\,\sin(k\theta)}{2\pi\,\sin^{3/2}\theta}\right|^2+2\frac{n^2\sin^2(k\theta)}{\pi^2\sin^3\theta}\\ &\le \frac{4k^2}{\pi^2\sin\theta}+\frac{\sin^2(k\theta)}{\pi^2\,\sin^3\theta}+\frac{2n^2\sin^2(k\theta)}{\pi^2\,\sin^3\theta}\,.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\|[\nabla_{\mathbb{S}^2} b_{n,k}]_i\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}|[\nabla_{\mathbb{S}^2} b_{n,k}]_i|^2\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta\\ &\le \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{4k^2}{\pi^2}+(1+2n^2)\frac{\sin^2(k\theta)}{\pi^2\sin^2\theta}\right)\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta\\ &= 8k^2+(1+2n^2)2k\,,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 [38, 例 1。15] 所涉及的$(k-1)$阶 Fejér核的积分公式得出。最后，由（15）和引理1 可得

$$\|b_{n,k}\|^2_{H^1(\mathbb{S}^2)}=\sum_{i=1}^{3}\|[\nabla_{\mathbb{S}^2} b_{n,k}]_i\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)}+\tfrac{1}{4}\|b_{n,k}\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)}\le 6k(4k+1+2n^2)+\tfrac{1}{4}$$

是有限的。由于 $H^1(\mathbb{S}^2)$ 连续嵌入于 $H^{1/2}(\mathbb{S}^2)$，故结论成立。 □

定理 3。令 $E\colon H^{1/2}_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)\to L^2_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$ 表示嵌入算子，并设 $L\coloneqq(EE^*)^{-1/2}$。则

$$e_{n,k}\coloneqq RLb_{n,k}\,,\qquad (n,k)\in J\coloneqq\{(n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}:n+k\ \ odd\}\,,$$

是 $L^2_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$中的一个框架，并且对任意 $g\in H^{1/2}_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$，*Funk-Radon* 变换反演问题的唯一解 $f\in L^2_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$ $Rf=g$ 满足

$$f=R^{\ddagger}g\coloneqq\sum_{(n,k)\in J}\langle Lg,b_{n,k}\rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)}\tilde{e}_{n,k}\,,\tag{16}$$

其中 $\tilde{e}_{n,\,k}$ 是 e_{n}的对偶框架，k。由此可得 $\left\|R^{\ddagger}g\right\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}\le 2\,\|Lg\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$.

证明。 根据定理 2、引理1 和 2，可知假设1 满足，其中 $X=Y=L^2_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$ 以及 $Z=H^{1/2}_{\mathrm{even}}(\mathbb{S}^2)$。由定理 1即可得证。

□

注 *1.* 索博列夫空间的定义（11）表明

$$E^*f=EE^*f=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}(\ell+\tfrac{1}{2})^{-1}\langle f,Y_\ell^m\rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)}\,Y_\ell^m\,,\qquad\forall f\in L^2(\mathbb{S}^2)\,.$$

因此，定理 L 中的自伴算子3 关于球谐函数是一个乘法算子，并且对于所有 $g \in H^{1/2}(\mathbb{S}^2)$，有

$$Lg = (EE^*)^{-1/2} g = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\ell + \tfrac{1}{2})^{1/2} \langle g, Y_\ell^m \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} Y_\ell^m \,. \tag{17}$$

记 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 为 $\mathbb{S}^2$上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，通过其特征值分解 [3, p. 121] 可得 $Lg = (-\Delta_{\mathbb{S}^2} + 1/4)^{1/4} g$ 对于 $g \in H^{1/2}(\mathbb{S}^2)$。此外，结合（10）和（17），可得

$$RLg = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} P_\ell(0)\, (\ell + \tfrac{1}{2})^{1/2} \langle g, Y_\ell^m \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} Y_\ell^m \,, \tag{18}$$

并且由于 $|P_\ell(0)|$ 按照 $(\ell + \frac{1}{2})^{-1/2}$ 衰减，根据（12），我们得到 $RLg \in H^{1/2}(\mathbb{S}^2)$。

4 数值结果

接下来，我们讨论正则化在 Funk-Radon 变换的傅里叶分解中的应用，概述其实现的主要步骤，并给出数值结果。首先注意，含噪数据 $g^\delta := Rf + \delta$ 不一定属于空间$H^{1/2}(\mathbb{S}^2)$，因此 $R^\ddagger g^\delta$ 并未明确定义。为此需要进行正则化，我们考虑 $R^\ddagger g^\delta$ 的稳定近似，其定义如下：

$$f_\alpha^\delta := R^\ddagger U_\alpha g^\delta \,, \qquad \text{and} \qquad LU_\alpha g^\delta := \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sigma_\ell h_\alpha(\sigma_\ell^2) \langle g^\delta, Y_\ell^m \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} Y_\ell^m \,,$$

其中 $\sigma_\ell := (\ell + \frac{1}{2})^{-1/2}$，且 $R^\ddagger$ 由式 (16) 给出。这相当于通过合适的滤波函数 h_α 对 L 的系数 σ_k 进行滤波，该滤波函数近似于 $s \mapsto 1/s$，如同奇异值分解情形 [13]。在我们的数值实验中，我们考察 Tikhonov 滤波函数 $h_\alpha(s) = 1/(\alpha + s)$ 对重建质量的积极影响。注意，选择 $h_\alpha(s) = 1/\sqrt{s}$ 意味着 $U_\alpha = L^{-1}$，根据注 1，这基本上相当于一个平滑算子；例如参见 [30]。

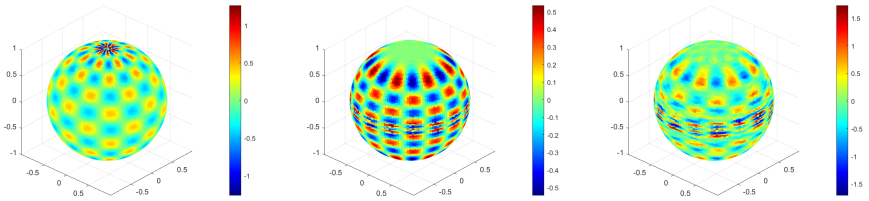
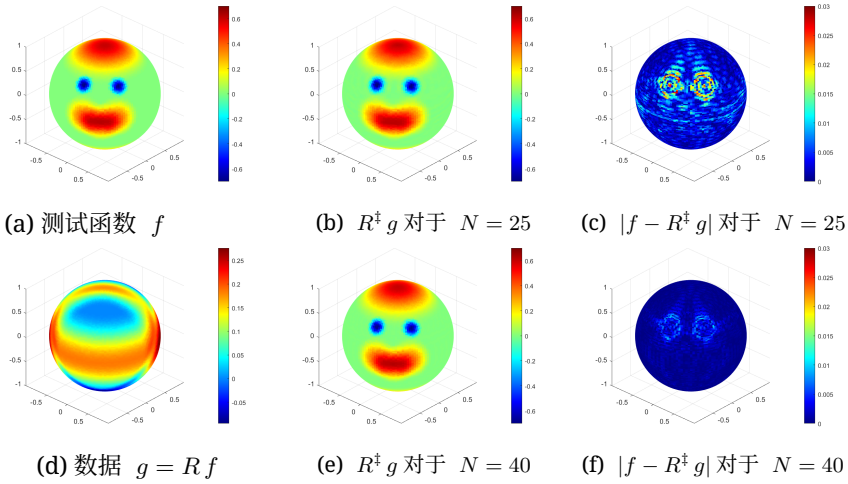


图 1：傅里叶分解的组成部分：b_{nk}（左）、e_{nk}（中）、$\tilde{e}_{nk}$（右），对应于 $n = k = 8$。

对于该问题的离散化，我们使用切比雪夫型求积来近似球面上的函数，即所有权重相等的求积点

参见 [20]。在我们的计算中，我们使用 [19] 中的求积点（球面设计），其精确度可达 200 阶。所有涉及球谐函数的计算均使用 NFSFT（非等距快速球面傅里叶变换）软件 [29,32] 完成。请注意，傅里叶分解（FD）的对偶框架函数可以预先计算并存储，因此对于任何新的测量值 g，根据（16）计算 $R^{\ddagger}g$ 所需的计算量仅包括应用一次算子 L （有噪声时则应用 LU_{α} ）、计算内积 $\langle Lg, b_{n,k}\rangle_{L^2_{\text{even}}}(\mathbb{S}^2)$ ，以及对这些结果求和。作为计算的起点，我们仅使用有限个框架函数 $\{b_{n,k}\colon (n,k) \in J, |n| \le N, k \le N\}$，其中 $N \in \mathbb{N}$. 。框架函数 e_n, $_k = RLb_{n,k}$ 通过截至 $\ell \le 100$ 阶的球谐分解（18）在求积节点处求值。˜对偶框架函数 $f_{n,k}$ 通过线性算子 S 相对于基 $b_{n,k}$ 的矩阵表示计算，另见 [27, 第 5] 章。请注意，该矩阵的反演本身可能是一个病态问题，需要进行正则化。图 1 展示了相关框架函数的示例。所有计算均使用 Matlab R2022b 完成。

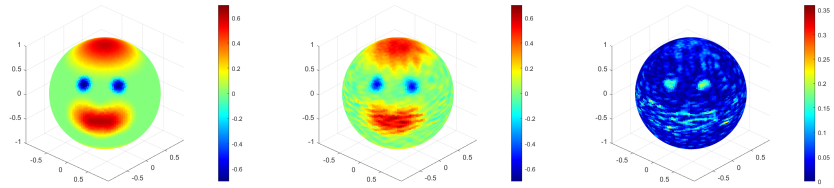


(a) 测试函数 f (b) $R^{\ddagger}g$ 对于 $N = 25$ (c) $|f - R^{\ddagger}g|$ 对于 $N = 25$

(d) 数据 $g = Rf$ (e) $R^{\ddagger}g$ 对于 $N = 40$ (f) $|f - R^{\ddagger}g|$ 对于 $N = 40$

图 2：使用精确数据时，采用不同数量的对偶框架函数进行切比雪夫型求积的重建评估。

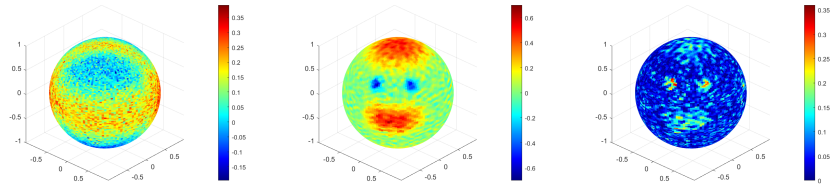
数值实验中使用的测试函数是径向对称二次样条函数的线性组合，其 Funk-Radon 变换可通过 [23, 引理 41],显式计算，以避免逆犯罪。我们的质量度量是相对重建误差，即 $\|f - R^{\ddagger}g\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}/\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$. 从图 2中可以看出，增加所用框架的数量能显著提高重建质量，使相对重建误差从 0。023 （对应 $N = 25$ ）降至0。006 （对应 $N = 40$）。对于图 3所示的含噪数据，正则化参数 α 的取值使相对重建误差最小。在



(a) 测试函数 f

(b) $R^\sharp U_\alpha g^\delta$ 对于 $N = 25$, $\alpha = 0.064$

(c) $|f - R^\sharp U_\alpha g^\delta|$ 对于 $N = 25$



(d) 含噪数据 $g^\delta = R f + \delta$

(e) $R^\sharp U_\alpha g^\delta$ 对于 $N = 40$, $\alpha = 0.14$

(f) $|f - R^\sharp U_\alpha g^\delta|$ 用于 $N = 40$

图 3：使用不同数量的对偶框架函数时，切比雪夫型求积在高斯噪声 δ下的重建评估，噪声水平为 20%。

当 $N = 25$ 且噪声水平为 20% 时，未正则化解（即 $\alpha = 0$）的误差为 0。269，而参数为$\alpha = 0.076$ 的正则化解的误差则降至 0。222。 然而，我们发现，增加框架函数的数量反而会降低重建质量，使误差达到 0。332（经过最优正则化）。这是因为截断本身具有正则化作用：框架函数越多，重建越不稳定，但在精确数据的情况下精度更高。请注意，对于随机生成的高斯噪声 δ 的特定实现，含噪情况下的所有具体误差值变化都不显著。

5 结论

本文利用单位球面上的三角基函数$b_{n,\ k}$ 以及索博列夫空间中适当的嵌入算子，推导出 Funk-Radon 变换的一种新型框架分解。该分解不涉及球谐函数，并导出了 Funk-Radon 变换的显式反演公式。在数值示例中，即使在噪声非常大的情况下，通过加入正则化，我们也获得了令人鼓舞的重建结果。虽然目前正则化本身使用了算子的球谐函数展开 L，但在未来的工作中，我们计划采用其他形式的正则化，完全避免计算开销较大的球谐函数。

致谢 本研究由奥地利科学基金（FWF）：项目 F6805-N36（SH）和德国研究基金会（DFG）资助:

项目 495365311（MQ），隶属于 SFB F68：“跨尺度层析成像”。LW 部分获得上奥地利州政府的资助。

参考文献

1. Abramovich, F., Silverman, B.W.：用于统计反问题的小波分解方法。Biometrika 85(1)，115–129（1998） 2. Agranovsky, M.L., Rubin, B.：具有一个和两个中心的非测地球面Funk变换。载于：Bauer, W., Duduchava, R., Grudsky, S., Kaashoek, M.（编），《算子代数、Toeplitz算子及相关主题》，第29–52页。Birkhäuser，Cham（ 2020 10 1007 978 3 030 44651 2_7 ）。 3 https://doi.org/ . / - - - - . Atkinson, K., Han, W.：《单位球面上的球谐函数与逼近：导论》。Springer，海德堡（2012）。https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-25983-8 4. Bailey, T.N., Eastwood, M.G., Gover, A., Mason, L.：复分析与Funk变换。韩国数学会会刊 40(4)，577–593（2003） 5. Bellet, J.B.：立方球面上的离散Funk变换。HAL电子预印本 03820075（2022 03820075 6 ），https://hal.archives-ouvertes.fr/hal- . Candes, E.J., Donoho, D.L.：在病态反问题中恢复边缘：曲波框架的最优性。统计年刊 30(3)，784–842（2002）。https://doi.org/ 10.1214/aos/1028674842 7. Christensen, O.：《框架与Riesz基导论》。应用与数值调和分析，Birkhäuser，Cham（2016） 8. Colonna, F., Easley, G., Guo, K., Labate, D.：利用剪切波表示进行Radon变换反演。Appl. Comput. Harmon. Anal. 29(2)，232–250（2010）。https://doi.org/10 005 9 1016 2009 10 . /j.acha. . . . Daubechies, I.：《小波十讲》。工业与应用数学学会，费城，PA（1992 9781611970104 10 10 1137 1 ）。https://doi.org/ . / . . Dicken, V., Maass, P.：不适定问题的小波-Galerkin方法。反问题与病态问题期刊 4(3)，203–221（1996）。https://doi.org/10.1515/jiip.1996.4.3.203 11. Donoho, D.L.：通过小波–Vaguelette分解非线性求解线性反问题。Appl. Co mput. Harmon. Anal. 2(2)，101 1008 12 126 1995 10 1006 1995 –（）。https://doi.org/ . /acha. . . Ebner, A., Frikel, J., Lorenz, D., Schwab, J., Haltmeier, M.：通过滤波对角框架分解对反问题进行正则化。Appl. Comput. Harmon. Anal. 62, 66 005 13 83 2023 10 1016 2022 08 –（）。https://doi.org/ . /j.acha. . . . Engl, H. W., Hanke, M., Neubauer, A.：《反问题正则化》。Kluwer学术出版社，多德雷赫特（1996） 14. Frikel, J.：有限角度层析成像中的稀疏正则化。Appl. Comput. Harmon. Anal. 34(1)，117–141（2013）。https://doi.org/10.1016/j.acha.2012.03.005 15. Frikel, J., Haltmeier, M.：光声层析成像中采用小波稀疏约束的高效正则化。《反问题》34(2)，024006（2018）。https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaa0ac 16. Frikel, J., Haltmeier, M.：通过算子适配的框架阈值法对反问题进行稀疏正则化。载于：Dörfler, W., Hochbruck, M., Hundertmark, D., Reichel, W., Rieder, A., Schnaubelt, R., Schörkhuber, B.（编），《波动现象数学》，第163–178页。Springer，Cham（2020）

17. Funk, P.：《全由闭测地线组成的曲面》。《数学年刊》74 01456044 18 2 278 300 1913 10 1007（），–（）。https://doi.org/ . /BF . Gardner, R.J.：《几何断层成像》。剑桥大学出版社，剑桥，第二版（2006 9781107341029 19 10 1017）。https://doi.org/ . /CBO . Gräf, M.：流形上的求积公式。http://www.tu-chemnitz.de/~potts/ workgroup/graef/quadrature 20. Gräf, M., Potts, D.：基于快速球面傅里叶变换的新优化方法计算球面设计。《数值数学》119，699–724（2011 7 21 10 1007 00211 011 0399）。https://doi.org/ . /s - - - . Helgason, S.：《积分几何与Radon变换》。Springer，纽约（2011 9 22 10 1007 978 1 4419 6055）。https://doi.org/ . / - - - - . Hielscher, R., Potts, D., Quellmalz, M.：球面表面波层析成像中的奇异值分解。载于：Hofmann, B., Leitao, A., Zubelli, J.P.（编），《数学模型参数识别的新趋势》，第121–144页。Birkhäuser，巴塞尔（2018）。https://doi.org/10 1007 978 3 319 70824 9_7 . / - - - - . Hielscher, R., Quellmalz, M.：球面反卷积的最优磨光子。《反问题》31(8)，085001（2015）。https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/8/085001 24. Hristova, Y., Moon, S., Steinhauer, D.：具有圆形探测器的光声层析成像中产生的一种Radon型变换：球面几何。《反问题科学与工程》24 1088537 25 6 974 989 2016 10 1080 17415977 2015（），–（）。https://doi.org/ . / . . . Hubmer, S., Ramlau, R.：大气层析成像算子的框架分解。《反问题》36(9)，094001（2020）。https://doi.org/10.1088/1361-6420/aba4fe 26. Hubmer, S., Ramlau, R.：希尔伯特空间中有界线性算子的框架分解及其在层析成像中的应用。《反问题》37(5)，055001（2021 8 27 10 1088 1361 6420 5）。https://doi.org/ . / - /abe b . Hubmer, S., Ramlau, R., Weissinger, L.：框架分解正则化及其在层析成像中的应用。《反问题》38(5)，055003（2022）。https://doi.org/10 86 28 1088 1361 6420 5 . / - /ac b . Kazantsev, S.G.：重建球面函数中的Funk–Minkowski变换与希尔伯特型球面卷积。《西伯利亚电子数学汇刊》15，1630–1650 135 29 2018 10 33048 2018 15 3（）。https://doi.org/ . /semi. . . . Keiner, J., Kunis, S., Potts, D.：使用NFFT——用于各种非等距快速傅里叶变换的软件库。ACM数学软件汇刊 36，文章19，1 1555388 30 30 2009 10 1145 1555386 –（）。https://doi.org/ . / . . Klann, E., Ramlau, R.：分数阶滤波方法与数据平滑。《反问题》 24(2) （ 2008 ） 31. Kudryavtsev, A.A., Shestakov, O.V.：使用小波-模糊小波分解求解不适定问题时损失函数的估计。《数学科学杂志》237，804 809 2019 10 1007 10958 019 04206 –（）。https://doi.org/ . /s - - -z 32. Kunis, S., Potts, D.：快速球面傅里叶算法。《计算与应用数学杂志》161，75 6 33 98 2003 10 1016 0377 0427 03 00546 –（）。https://doi.org/ . /S - ( ) - . Lee, N.：小波-模糊分解与齐次方程。ProQuest LLC，安娜堡，MI（1997），博士论文——普渡大学 34. Louis, A.K., Riplinger, M., Spiess, M., Spodarev, E.：球面Radon变换与余弦变换的反演算法。《反问题》27(3)，035015（2011）。https://doi.org/10 035015 35 1088 0266 5611 27 3 . / - / / / . Mildenberger, S., Quellmalz, M.：双重傅里叶球面方法的逼近性质。《傅里叶分析与应用杂志》28（2022）。https://doi.org/10.1007/s00041-022-09928-4

36. Minkowski, H.: 《关于等宽体》。Matematiceskij Sbornik 25(3), 505 6643 37 508 1905– ( ), http://mi.mathnet.ru/sm。Müller, C.: 《球谐函数》。Springer, 亚琛 (1966) 38. Plonka, G., Potts, D., Steidl, G., Tasche, M.: 《数值傅里叶分析》。Birkhäuser, Cham (2018 3 39 10 1007 978 3 030 04306)。https://doi.org/ . / - - - - 。Quellmalz, M.: 《Funk–Radon变换的一种推广》。《反问题》33 035016 40 3 035016 2017 10 1088 1361 6420 33 3 ( ), ( )。https://doi.org/ . / - / / / 。Quellmalz, M.: 《由圆形均值重建球面上的函数》。博士论文，开姆尼茨大学出版社 (2019), https://nbn-resolving.org/urn: nbn:de:bsz:ch1 384068 41 2-qucosa - 。Quellmalz, M.: 《经过同一点的超平面截面上的 Funk-Radon 变换》。《分析、数学与物理》10(38) (2020)。https://doi.org/10.1007/ s13324-020-00383-2 42. Quellmalz, M., Hielscher, R., Louis, A.K.: 《锥束变换与球面卷积算子》。《反问题》34(10), 105006 (2018)。https://doi.org/ 10.1088/1361-6420/aad679 43. Rauff, A., Timmins, L.H., Whitaker, R.T., Weiss, J.A.: 《一种用于估计纤维材料中三维纤维取向分布函数（ODF）的非参数方法》。IEEE医学影像学汇刊 41(2), 446–455 (2022)。https: //doi.org/10 3115716 44 1109 2021 . /TMI. . . Riplinger, M., Spiess, M.: 《使用一类特殊的局部支撑磨光子，通过近似逆算子对球面Radon变换和余弦变换进行数值反演》。反问题与病态问题期刊 22(4), 497–536 (2013)。https: //doi.org/10 0095 45 1515 2012 . /jip- - 。Rubin, B.: 《关于球面切片变换》。《分析与应用》20(3), 483–497 (2022)。https://doi.org/10.1142/S021953052150024X 46. Salman, Y.: 《通过对一类特殊子球面进行积分来恢复定义在单位球面上的函数》。《分析、数学与物理》7(2), 165–185 (2017)。https: //doi.org/ 10 1007 13324 016 0135 7 . /s - - - 。Strichartz, R.S.: 《欧几里得及非欧几里得空间中L^pRadon变换的估计》。杜克数学杂志 48(4), 699–727 (1981) 48. Terzioglu, F.: 《通过与Radon变换的关系，从函数在圆锥曲面上的积分恢复该函数》。《反问题》39(2), 024005 (2023)。https: //doi.org/10 24 49 1088 1361 6420 . / - /acad 。Tuch, D.S.: 《Q球成像》。磁共振医学 52(6), 1358–1372 (2004)。https: //doi.org/10 20279 50 1002. /mrm. . Weissinger, L.: 《大气层析算子框架分解的实现》。硕士论文，林茨约翰内斯·开普勒大学 (2021)，https://lisss.jku.at/permalink/f/n 2 1 _ 5185824070003340 r to/ULI alma 。Wilber, H., Townsend, A., Wright, G.B.: 《球面与极坐标几何中的函数计算 II. 圆盘》。SIAM科学计算杂志 39(3), C238–C262 (2017)。https://doi.org/10 1070207 52 1137 16. / M 。Yarman, C.E., Yazici, B.: 《使用Funk变换反演圆平均变换》。《反问题》27(6), 065001 (2011)。https://doi.org/10. 1088/0266-5611/27/6/065001 53. Yee, S.Y.K.: 《球面上的傅里叶级数研究》。月刊天气评论 108(5), 676–678 (1980)。https://doi.org/10.1175/1520-0493(1980)108<0676:SOFSOS>2.0.CO;2