arXiv:2303.05188v1 [math.CT] 9 Mar 2023

完备限制幺半群范畴与 étale 范畴范畴之间的伴随

MARK V. LAWSON

Abstract. 我们证明，所谓的 ´étale拓扑范畴与限制量子框架之间存在伴随关系，并由此得到与完备限制幺半群范畴之间的伴随。这推广了 ´étale群胚与伪群之间的伴随关系。

1. Introduction

我们所说的“非交换拓扑空间”究竟是什么意思？当然，一种回答是 Connes 的 C^*-代数 `。更具体的回答则是 ´étale群胚 [13, 14, 15]。 [9, 1中对 ´étale群胚作为非交换拓扑空间的明确描述见]。不过，群胚带有对合，因此成为相当特殊的一类非交换空间。另一方面，更一般的 ´étale范畴则不具备这一特征。因此，我们将 ´étale范畴视为非交换拓扑空间。在 [8] 中，我们从局部化视角发展了 ´étale范畴理论，其灵感来自 Resende 的工作 [16]。我谨向合著者 Ganna Kudryavtseva 致谢，她尤其积极推动了这一视角。另一方面，本文从拓扑视角发展 ´étale范畴理论，并将 [12] 中针对 ´étale群胚所述的方法加以拓展；不过，我们应当强调，证明必须有所不同。我们将以定理 7.4 证明，某个适当的完备限制幺半群范畴与某个适当的（小） ´étale范畴范畴之间存在伴随。本文的动机来自 [1] 和 [2]。

2. Notation and background results

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集。若 $Y \subseteq X$，定义

$$Y^{\uparrow} = \{x \in X : \exists y \in X; y \leq x\}$$

and

$$Y^{\downarrow} = \{x \in X : \exists y \in X; x \leq y\}.$$

当 $Y = \{y\}$ 时，我们分别用 $y^{\uparrow}$ 和 $y^{\downarrow}$ 代替 $\{y\}^{\uparrow}$ 和 $\{y\}^{\downarrow}$。若 $Y = Y^{\downarrow}$，我们称 Y 为序理想。若 x、$y \in Y$ 蕴含存在 $z \in Y$ 使得 $z \leq x$、y，则称子集 Y 为向下有向。若 $Y = Y^{\uparrow}$，我们称 Y 向上封闭。若 X 存在底元，则它是唯一的，且是 X 的最小元素；我们将其记为 0。若 X 和 Y 是偏序集，则函数 f: $X \to Y$ 是保序的，当且仅当 $x \leq x'$ 蕴含 $f(x) \leq f(x')$。若双射函数 f 的 f 和 f^{-1} 都是保序的，则称其为序同构。

我们将讨论小范畴 C。在这类范畴中，所有元素都是态射。其中包括恒等式。C 的恒等式集合记为 C_o。令 $a \in C$。用 $\mathsf{d}(a)$ 表示

a的唯一右恒等元，用 $\mathsf{r}(a)$ 表示 a的唯一左恒等元。注意，当且仅当 $\mathsf{d}(a) = \mathsf{r}(b)$ 时， ab 在范畴 C 中有定义。若乘积 ab 在该范畴中有定义，我们记作 $\exists ab$ 。用 $C * C$ 表示所有有序对（a， b）构成的集合，其中 $\mathsf{d}(a) = \mathsf{r}(b)$。将乘法映射记为 $\mathsf{m} : C * C \to C$。因此，我们把范畴视为“具有多个对象的幺半群”。令 C 为一个小范畴。若 d（分别地，r）限制在子集 A上时是单射，则称子集 $A \subseteq C$ 为局部双截面。可以验证，局部双截面的乘积仍是局部双截面。若函子 $F\colon C \to D$ （范畴之间）满足以下条件，则称其为 d-单射：$F(x) = F(y)$ 且 $\mathsf{d}(x) = \mathsf{d}(y)$ 蕴含 $x = y$；若 $F(e) = \mathsf{d}(y)$ 蕴含存在元素 $x \in C$ ，使得 $\mathsf{d}(x) = e$且 $F(x) = y$，则称该函子为 d-满射。既是 d-单射又是 d-满射的函子称为 d-双射。对 r-函数也可以作类似定义。覆盖函子是既为 d-双射又为 r-双射的函子。以下结论可由定义直接得出。

引理 2.1. 设 $F\colon C \to D$ 是一个 d-单射函子（例如覆盖函子）。那么，如果 e 是 D 中的一个单位元，且 $F(a) = e$ ，则 a 是一个单位元。

若一个范畴 C 配备了拓扑，且映射 m、d 和 r 均连续，则称其为拓扑范畴。

最后，我们谈谈拓扑空间与框架的经典理论。更详细的讨论见 [7, 第二章]。看待一个空间有两种方式：我们可以将点的概念作为基本概念，并由此导出开子集的概念（开集是点集中的一种特殊集合）；也可以将开集的概念作为基本概念，而将点的概念作为次要概念（如何从开集得到点将在后文讨论）。前一种方式导向经典的拓扑空间概念，后一种方式则导向框架与局部的概念，也就是所谓的“无点空间”。这两种方法之间存在联系，但并非同构。框架是任意并完备格，其中有限交对任意并满足分配律。框架具有最大元（1）和底元（0），且框架态射必须保持这些元素、任意并和有限交。这样便得到一个框架范畴，记作 Frame。它的对偶范畴称为局部范畴，记作 Locale。

定义。若 X 是一个拓扑空间，则其所有开子集构成的集合 $\Omega(X)$ 是一个框架。

若 $f\colon X \to Y$是一个连续函数，则 $f^{-1}\colon \Omega(Y) \to \Omega(X)$ 是一个框架态射。定义 $\Omega(f) = f^{-1}$。用 Top 表示由拓扑空间及连续函数构成的范畴。因此，我们定义了一个从 Top 到 Locale 的函子 Ω。

我们将定义一个反向的函子，但在此之前，先说明这些定义的动机。

定义。设 X 是一个拓扑空间，且 $x \in X$。定义 O_x 为所有包含 x的开集所组成的集合。

注意， $O_x \subseteq \Omega(X)$ 是一个完全素滤子 [7, 第 41] 页。

定义。若 F 是一个框架，则用 $\mathrm{pt}(F)$ 表示 F 中所有完全素滤子的集合；我们将这些看作 F 的“点”。

请注意，在框架 Ω(X) 中，不同的点完全可能产生相同的完全素滤子，而且我们并未声称每个完全素滤子都来自某个点。尽管如此，这已是我们所能做到的最好结果。给定一个框架 F，我们有一个点集 pt(F)。现在我们将为这个集合赋予一个拓扑。

定义。设 F 是一个框架。对每个 $a \in F$，定义 X_a 为 F 中所有包含 a的完全素滤子的集合。

注意到 $X_a \subseteq$ pt(F)。我们有如下结论：

(1) $X_0 = \varnothing$。(2) $X_1 =$ pt(F)。(3) $X_a \cap X_b = X_{a \wedge b}$。(4) $\bigcup_{i \in I} X_{a_i} = X_{\bigvee a_i}$。

由此可知，集合 $\{X_a : a \in F\}$ 在pt(F)上构成一个拓扑。若 $\alpha: F \to G$ 是框架态射，则 α^{-1}: pt(G) $\to$pt(F)是连续函数。定义pt(α) $= \alpha^{-1}$。因此，我们定义了一个从Locale到Top的函子pt。

根据 [7, 定理1.4], ，函子pt是函子Ω的右伴随。定义函数 $\chi: F \to$Ω(pt(F))，其定义为 $a \mapsto X_a$。当且仅当对于任意 $a \not\leq b$ ，存在一个包含 a但不包含 b的完全素滤子时，该函数才是框架同构。在这种情况下，我们称该框架为空间的。定义函数ω: $X \to$ pt(Ω(X))，其定义为 $x \mapsto O_x$。当且仅当 ω是双射时，该函数才是同胚。在这种情况下，我们称该拓扑空间是凝聚的。以下结论已在 [7, 第43页，引理1.7]中证明。

引理 2.2。

(1) 对任意框架 F，拓扑空间 pt(F) 是索伯空间；(2) 对任意拓扑空间 X，框架 Ω(X) 是空间的。

上述伴随给出了空间局部与索伯空间之间的范畴等价。

3. 艾塔尔拓扑范畴

我们将要研究的半群类如下，它们最初在 [10] 中引入。设 S 是一个幂等元集为 E(S) 的半群。若存在交换子半群 P $\subseteq$ E(S)（称为投影集），以及两个一元运算 $a \mapsto a^*$ 和 $a \mapsto a^+$，其中 a^*、$a^+ \in$ 属于 P，且在 P 上为单位运算，并满足 $aa^* = a$、 $a^+a = a$以及 $(ab)^* = (a^*b)^*$ 和 $(ab)^+ = (ab^+)^+$，则称 S 为 Ehresmann 半群。在 Ehresmann 半群上定义如下二元关系：若 $a = a^+b = ba^*$，则有序对 (a, b) 属于该二元关系。事实上，这个二元关系是一个偏序。它在下文中起着重要作用，但并非对所有元素都如此。

设 S 和 T 为 Ehresmann 半群。若半群同态 $\theta: S \to T$ 满足 $\theta(a^*) = \theta(a)^*$ 且 $\theta(a^+) = \theta(a)^+$，则称其为态射。

对于每个 Ehresmann 半群 S，我们可以按如下方式构造一个范畴 cat(C)：在 S 上定义部分乘积 $\cdot$，其中 $a \cdot b$ 有定义当且仅当 $a^* = b^+$，此时它等于 ab；恒等式为投影，其中 d(a) $= a^*$ 且 r(b) $= b^+$。参见 [10, 第 437] 页。

若 Ehresmann 半群还满足两个恒等式： $fa = a(fa)^*$和 $af = (af)^+a$，则称其为限制半群，其中 f 为任意投影， a 为任意元素。Ehresmann 半群的若干类源自约克学派的半群理论 [5]。Marco Grandis 在局部结构的背景下研究了限制半群 [6]。限制半群的若干类已被推广到范畴

框架中，Cockett 等人对此进行了研究 [3]。下面的例子为我们的方法提供了动机。参见[11, 例 1]。

例 3.1. 设 C 是一个小范畴。暂且将 C 视为离散拓扑空间。考虑由 C 的所有子集构成的集合 $Q = \mathsf{P}(C)$。若 A 和 B 是其中两个子集，则可将它们的乘积 AB 定义为所有满足 $a \in A$、$b \in B$ 且 $\mathsf{d}(a) = \mathsf{r}(b)$ 的乘积 ab 所构成的集合。如此一来，Q 就成为一个单位元为 C_o 的幺半群。然而，C 的范畴结构会延伸到幺半群 Q 中。令 $\mathsf{P} = \mathsf{P}(C_o)$。这些是幂等元中的一个特殊类别，我们称之为投影。在 Q 上定义两个一元运算如下：$A^* = \{\mathsf{d}(a) \colon a \in A\}$，以及 $A^+ = \{\mathsf{r}(a) \colon a \in A\}$。相对于这两个运算，$Q$ 成为一个 Ehresmann 幺半群。

现在我们将描述例 3.1 中引入的幺半群 $\mathsf{P}(C)$ 的代数性质和序理论性质。设 Q 是一个并格，并配备了一个对并具有分配性的半群运算。则称 Q 为量子化。量子化态射是保持并的半群同态。设 Q 是一个量子化。若 $(Q, \leq)$ 是一个框架，则称它为量子框架。若一个量子化中的半群实际上是一个幺半群，则称该量子化为含幺的。Ehresmann 量子化是一个含幺量子化 Q，它同时也是一个单位元（或称幺元）为 e、满足 $e^{\downarrow} = \mathsf{P}$ 的 Ehresmann 半群，并且映射 $a \mapsto a^*$ 和 $a \mapsto a^+$ 是并映射。Ehresmann 量子框架是同时也是 Ehresmann 量子化的量子框架；这些结构在 [8] 中首次引入。例 3.1 所述的形如 $\mathsf{P}(C)$ 的 Ehresmann 幺半群，实际上是 Ehresmann 量子框架。

设 C 是一个拓扑范畴。若映射 d 和 r 都是局部同胚，我们称它为 ´étale。由命题 2.4] 可知，C_o 是 C 的开子集，且乘法映射是局部同胚。下面的结果推广了例 3.1。

命题 3.2. 设 C 是一个 ´étale 拓扑范畴。则 $\Omega(C)$ 是一个 Ehresmann 量子框架。

现在我们来描述形如上文 $\Omega(C)$ 的幺半群所具有的一项额外性质。

引理 3.3. 设 C 是一个拓扑范畴，其中 d 和 r 是开映射。当且仅当开局部双截面构成 C 上拓扑的拓扑基时，映射 d 和 r 才是局部同胚。

证明. 首先假设开局部双截面构成 C 上拓扑的拓扑基。我们证明 d 是局部同胚。设 $x \in C$。那么，对某个开局部双截面 A，有 $x \in A$。集合 $\mathsf{d}(A) = \{\mathsf{d}(a) \colon a \in A\}$ 是开集，并且 A 与 $\mathsf{d}(A)$ 之间存在一个双射。我们证明这是一个同胚。设 B 是 A 的一个开子集。那么，$\mathsf{d}(B)$ 是 $\mathsf{d}(A)$ 的一个开子集。设 U 是 $\mathsf{d}(A)$ 的一个开子集。定义 B 为 A 的子集，其中包含满足 $\mathsf{d}(a) \in U$ 的元素 $a \in A$。根据假设，映射 d 连续，因此 B 也是开集。

现在证明逆命题。假设 d 和 r 都是局部同胚。我们证明开局部双截面构成 C 上拓扑的一个基。设 $x \in U$，其中 U 是 C 的任意开子集。根据假设，存在一个开集 A_x，使得 $x \in A_x$，且映射 d 诱导出到集合 $\mathsf{d}(A_x)$ 的一个同胚。类似地，存在一个开集 $x \in B_x$，使得映射 r 诱导出到集合 $\mathsf{r}(B_x)$ 的一个同胚。注意，$x \in U \cap A_x \cap B_x = A$ 是一个包含 x 的开集，在该集合上 d 和 r 都是双射。因此，A 是一个包含 x 且包含于 U 的开局部双截面。由此我们证明了，C 的每个开子集都是开局部双截面的并集。□

由引理 3.3 可知，开局部双截面构成一个 ´étale 范畴上的拓扑基。

设 S 是一个 Ehresmann 量子化。若 $b \leq a$ 蕴含 $b = b^{+}a = ab^{*}$，则称 S 中的元素 a 为偏等距元。注意，所有投影都是偏等距元。偏等距元是指量子化中偏序完全由代数性质决定的那些元素。

定义。设 S 是一个限制量子框架。用 PI(S) 表示 S 中偏等距元的集合。

尽管它们一般不满足乘法封闭性，但它们确实构成一个序理想[8, 引理 2.29]; 这一结果将在下文多次用到。下面的结果描述了 ´étale 范畴中的偏等距元。

引理 3.4。在一个 ´étale 范畴中，开偏等距元恰好是开局部双截面。

证明。我们先证明每个开局部双截面都是开偏等距元。设 A 是一个开局部双截面。假设 $B \subseteq A$，其中 A 是一个开集。我们证明 $B = AB^{*}$。显然， $B \subseteq AB^{*}$。下面证明反向包含。设$ae \in AB^{*}$，其中 $a \in A$ 且 $e \in B^{*}$。那么 d(a) $= e$ 且 $e =$d(b)，其中 $b \in B$。但是a， $b \in A$ 且 d(a) $=$ d(b)。根据假设， A 是一个局部双截面。因此 $a = b$，于是 $a \in B$。对偶论证表明 $B = B^{+}A$。因此我们证明了 $A \leq B$，所以 B 是一个偏等距元。

现在我们证明逆命题。我们使用引理 3.3。设 A 是一个开偏等距元。我们将证明 A 是一个局部双截面。设 $a, b \in A$ 满足 d(a) $=$d(b) $= e$。由于 A 是一个开集，因此存在一个开局部双截面 A_a，使得 $a \in A_a \subseteq A$。但 A 是一个部分等距元，因此 $A_a = AA_a^{*}$。类似地，存在一个开局部双截面 A_b，使得 $b \in A_b \subseteq A$。同样可得 $A_b = AA_b^{*}$。注意到 $a, b \in A_b$是一个局部双截面。因此 $a = b$。对偶地论证可知， A 确实是一个局部双截面。□

设 Q 是一个 Ehresmann 量子框架，其单位元为 e，最大元为 1。我们称 Q 为 ´étale 的，如果 1 是若干偏等距元的上确界；若它是 ´étale 的，且偏等距元在乘法下封闭，则称其为限制量子框架。这类量子化在 [8, 第 2 节4]中引入。现在我们得到以下结果，它是整篇论文的基础；由引理 3.3、引理 3.4，以及两个开局部双截面的乘积仍为开局部双截面这一事实可得。

命题 3.5. 设 C 是一个 ´étale 拓扑范畴。那么 Ω(C) 是一个限制量子框架。

下文中我们只讨论限制量子框架。设 S 和 T 是限制量子框架。限制量子框架的一个态射 θ: $S \to T$ 是一个半群同态，并满足以下条件：

(1) θ 保持所有并。(2) θ 保持有限交。(3) θ 是 Ehresmann 半群的一个态射。(4) θ 将顶元映射为顶元，并且是一个幺半群同态。(5) θ 将偏等距元映射为偏等距元。

引理 3.6. 设 θ: $C \to D$ 是 ´étale 范畴之间的连续覆盖函子。那么 θ^{-1} 是限制量子框架 Ω(D) $\to$ Ω(C) 的一个态射。

证明。由于 θ 是连续的，因此 θ^{-1} 是一个定义良好的函数。接下来证明 θ^{-1} 是半群同态。设 $U, V \in$ Ω(D)。为证明

$\theta^{-1}(UV) \subseteq \theta^{-1}(U)\theta^{-1}(V)$，我们利用 θ 是覆盖函子的事实。为证明反向包含，只需利用 θ 是函子的事实。注意，$\theta^{-1}(D_o)$包含 C_o，但由于 θ 是覆盖函子，它必定等于该集合。因此我们证明了 θ^{-1} 是幺半群同态。我们已证明，由一个 ´Étalé 范畴构造的限制量子框架中的偏等距元恰好是开局部双截面。利用 θ 是连续覆盖函子的事实，不难验证 θ^{-1} 将开局部双截面映射到开局部双截面。注意，θ^{-1} 自动是一个框架映射，因此保持并和有限交。显然，θ^{-1} 将最大元映射到最大元。接下来只需证明 θ^{-1} 是 Ehresmann 半群的态射。设U 是 D的一个开集。我们证明 $\theta^{-1}(U^*) = \theta^{-1}(U)^*$。因此，我们需要证明 $\theta^{-1}(\mathsf{d}(U)) = \mathsf{d}(\theta^{-1}(U))$。包含关系 $\theta^{-1}(\mathsf{d}(U)) \subseteq \mathsf{d}(\theta^{-1}(U))$ 由 θ 是覆盖函子的事实得出。反向包含只需利用 θ 是函子的事实。□

定义 $\Omega(\theta) = \theta^{-1}$。根据命题 3.5 和引理 3.6，我们证明了以下结论。

命题 3.7。Ω 是一个反变函子，它将对象为 ´étale拓扑范畴、态射为连续覆盖函子的范畴映到对象为限制量子框架、态射为限制量子框架态射的范畴。

下面的例子为我们的工作提供了很好的动机。

例 3.8。设 X 是一个非空有限集。定义 $\mathsf{d}(x,y) = (y,y)$、$\mathsf{r}(x,y) = (x,x)$ 和 $(x,y)(y,z) = (x,z)$ 后，$X \times X$ 就成为一个范畴。相对于离散拓扑，$X \times X$ 是一个 étale 范畴（事实上，它是一个 étale 群胚）。$X \times X$ 的所有子集构成 $\mathsf{P}(X \times X)$，也就是 X 上所有二元关系组成的集合。偏等距元是由部分双射诱导的二元关系。现在很容易看出，除非我们处理的是本质上具有“函数性”的元素，否则通常的序并非代数定义的。

4. Restriction quantal frames

在上一节中，我们展示了如何从 ´étale拓扑范畴构造限制量子框架。本节我们将反向进行：从限制量子框架 Q 构造一个 ´étale拓扑范畴 $\mathsf{C}(Q)$。在本节中，我们始终假设所讨论的是一个限制量子框架。限制量子框架的最大元记作 1_Q，或简记为 1。幺半群单位元记作 e_Q，或简记为e。限制量子框架中的偏序记作 $\leq$。

注 4.1. 注意，在限制量子框架 Q 中，Q 的每个元素都是偏等距元的上确界（这一点在 [8, 命题 2.40] 之前的段落中陈述）。为说明原因，我们可以写成 $1 = \bigvee_{i\in I} a_i$，其中 a_i 是偏等距元。现在，令 x 为 Q 的任意元素。那么 $x \leq 1$。由于我们讨论的是框架，因此可得 $x = \bigvee_{i\in I} a_i \wedge x$。接下来使用偏等距元构成一个序理想这一事实。

设 Q 是一个框架。Q 中的滤子是一个非空子集，对二元交封闭且向上封闭。设 A 是一个向上封闭且向下有向的集合。那么，事实上，A 是一个滤子。为了解释原因，设 a、$b \in A$ 和 $c \leq a$、b，其中 $c \in A$。那么 $c \leq a \wedge b$。由于集合 A 向上封闭，因此可得 $a \wedge b \in A$。真滤子是指不包含底元的滤子。若真滤子 A 满足 $\bigvee_{i\in I} a_i \in A$ 蕴含对某个 $i \in I$ 有 $a_i \in A$，则称其为完全素滤子。框架中的完全素滤子与点 [7] 相对应。

注 4.2. 要检验量子框架的一个子集是否为滤子，只需检查它是否向上封闭且向下有向。

设 Q 是一个限制量子框架。若 $a \vee b$ 是部分等距元，则 a 和 b 也都是部分等距元，因为部分等距元构成一个序理想。然而，这个必要条件并不充分。为此，我们需要相容性的概念。定义 $a \sim b$ 当且仅当 $ab^* = ba^*$ 且 $b^+a = a^+b$。我们称 $\sim$ 为相容关系。若 $a \sim b$，则称 a 和 b 相容。

引理 4.3. 设 Q 是一个限制量子框架，并假设 a和 b 是部分等距元。那么， $a \vee b$ 是部分等距元，当且仅当 $a \sim b$。

证明。首先假设 $a \sim b$。我们证明 $a \vee b$ 是部分等距元。设$c \leq a \vee b$。那么 $c^* \leq a^* \vee b^*$。现在， $ca^* \leq aa^* \vee ba^*$。但是 $ba^* = ab^*$。由此可得 $ca^* \leq a$。然而 a 是部分等距元，因此 $ca^* = ac^*a^* = ac^*$。类似地，$cb^* = bc^*$。于是 $c = c(a^* \vee b^*)$ $= (a \vee b)c^*$。对偶结果说明 $a \vee b$ 是部分等距元。现在证明反向结论。假设 $a \vee b$ 是部分等距元。我们有 $a \leq a \vee b$。因此 $a = a \vee ba^*$，从而 $ba^* \leq a$。但是 a是部分等距元。由此可得 $ba^* = ab^*$。由对称性可得对偶结果，因此 a 和 b 相容。□

如果每个相容子集都有上确界，且乘法对这样的上确界满足分配律，则称限制半群是完备的。

命题 4.4. 设 Q 是一个限制量子框架。那么， Q 的部分等距元集合构成一个完备限制幺半群。

证明. 设 a 是任意元素， f 是一个投影。那么 $fa \leq a$。但是 a 是一个部分等距元。因此， $fa = a(fa)^*$。对偶结果也成立。这表明部分等距元集合构成一个限制幺半群。现在很容易验证，它实际上是一个完备限制幺半群。□

定义. 设 Q 是一个限制量子框架。用 C(Q) 表示 Q 的完全素滤子集合。

我们将研究这个集合。首先，我们将 Q 中的完全素滤子与 $e^{\downarrow}$ 中的完全素滤子联系起来。我们的第一个结果说明如何将 $e^{\downarrow}$ 中的完全素滤子映射到 Q 中的完全素滤子。

引理 4.5。

(1) 设 F 是 $e^{\downarrow}$ 中的完全素滤子。那么 $F^{\uparrow}$ 是 Q 中的完全素滤子。(2) 设 F 和 G 是 $e^{\downarrow}$ 中的完全素滤子。那么 $F^{\uparrow} = G^{\uparrow}$ 当且仅当 $F = G$。

证明。(1) 证明中唯一需要说明的部分如下。假设 $\bigvee_{i \in I} x_i \in F^{\uparrow}$。那么存在一个投影 $f \in F$，使得 $f \leq \bigvee_{i \in I} x_i$。因此，利用我们是在框架中工作的这一事实，可得 $f = \bigvee_{i \in I}(x_i \wedge f)$。但投影的集合是一个序理想。因此，每个 $x_i \wedge f$ 都是投影。由此可知，对某个 i，有 $x_i \wedge f \in F$。但 $x_i \wedge f \leq x_i$，所以 $x_i \in F^{\uparrow}$。

(2) 只需证明一个方向。假设 $F^{\uparrow} = G^{\uparrow}$。令 $f \in F$。那么 $f \in F^{\uparrow}$，所以 $f \in G^{\uparrow}$。因此，存在 $g \in G$ 使得 $g \leq f$。但 f 和 g 都是投影。由此可得 $f \in G$。因此，我们证明了 $F \subseteq G$。反向包含的证明由对称性可得。□

下一个结果描述了根据引理 4.5 中所述步骤在 Q 中得到的完全素滤子。

引理 4.6. Q 中形如 $F^{\uparrow}$ 的完全素滤子（其中 F 是 $e^{\downarrow}$ 中的某个完全素滤子），就是包含投影的 Q 的完全素滤子。

证明。设 A 是 Q 中包含投影 f 的一个完全素滤子。令 $F = A \cap e^{\downarrow}$，根据假设这是一个非空集合。显然，$F^{\uparrow} \subseteq A$。我们证明反向包含。设 $a \in A$。于是 $a \wedge f \in A$。但 $a \wedge f$ 是一个投影，因为投影集构成一个序理想。另一方面，$a \wedge f \leq a$。由此可得 $a \in F^{\uparrow}$。现在不难验证，F 是 $e^{\downarrow}$ 中的一个完全素滤子。□

注 4.7。注意，在包含投影的完全素滤子中，每个元素都大于某个投影。

包含投影的 Q 的一个完全素滤子称为一个单位元。

引理 4.8。设 A 是限制量子框架 Q 中的一个完全素滤子。那么，对于任意 $a \in A$，A 是一个单位元滤子，当且仅当 $a^* \in A$（对偶地亦然）。

证明。假设 A 包含一个投影 f。令 $a \in A$。那么存在一个投影 $f' \in A$，使得 $f' \leq a, f$。由此可得 $f' \leq a^*$。因此我们已经证明了 $a^* \in A$。反向的证明是显然的。□

以下结果推广了引理 4.5 和引理 4.6。它将 Q 中的单位完全素滤子与 $e^{\downarrow}$中的完全素滤子联系起来。

命题 4.9。设 Q 是一个限制量子框架。那么，Q 中的单位完全素滤子集合与 $e^{\downarrow}$ 中的完全素滤子集合之间存在一个序同构。

证明。设 A 是Q的一个单位完全素滤子。那么，$A \cap e^{\downarrow}$ 是 $e^{\downarrow}$中的一个完全素滤子。若 $A \subseteq B$，则 $A \cap e^{\downarrow} \subseteq B \cap e^{\downarrow}$。另一方面，若 F是 $e^{\downarrow}$ 的一个完全素滤子，则 $F^{\uparrow}$ 是 Q的一个完全素滤子。若 $F \subseteq G$，则 $F^{\uparrow} \subseteq G^{\uparrow}$。注意，$A = (A \cap e^{\downarrow})^{\uparrow}$ 且 $F = F^{\uparrow} \cap e^{\downarrow}$。由此可得我们得到了所述的序同构。□

在下一个结果中，我们展示两种从 Q 中的完全素滤子构造 $e^{\downarrow}$ 中完全素滤子的方式。设 A 是 Q中的一个完全素滤子。定义

$$A^* = \{a^* \colon a \in A\} \text{ and } A^+ = \{a^+ \colon a \in A\}.$$

引理 4.10. 设 A 是 Q中的一个完全素滤子。那么 A^* 和 A^+ 是 $e^{\downarrow}$ 中的完全素滤子。

证明. 我们证明关于 A^* 的结论，因为关于 A^+ 的证明类似。注意到 $0 \in A^*$ 当且仅当对于某个 $a \in A$ 有 $a^* = 0$，这意味着 $a = 0$。根据假设，滤子 A 是真滤子，因此 $0 \notin A^*$。假设 $a^* \subseteq f$，其中 $a \in A$ 且 f 是一个投影。显然，$a \subseteq 1$，因此 $a \subseteq 1f$。由此可得 $1f \in A$。因此 $(1f)^* = f \in A^*$。我们已经证明 A^* 在 $e^{\downarrow}$ 中向上封闭。设 a^*、$b^* \in A^*$，其中 a、$b \in A$。根据假设，存在 $c \in A$ 使得 $c \leq a$、b。但于是 $c^* \leq a^*$、b^*。因此，我们已经证明 A^* 是 $e^{\downarrow}$ 中的一个真滤子。现在证明它是完全素的。设 $\bigvee_{i \in I} f_i \in A^*$。那么对于某个$a \in A$, 有 $a^* \leq \bigvee_{i \in I} f_i$。显然，$a \leq 1$。由此可得 $a \subseteq \bigvee_{i \in I} 1f_i$。现在利用 A 是完全素滤子这一事实，推出对于某个 $i \in I$ 有 $1f_i \in A$。由此可得$f_i \in A^*$。□

定义

$$\mathbf{d}(A) = (A^*)^{\uparrow} \text{ and } \mathbf{r}(A) = (A^+)^{\uparrow}.$$

根据引理 4.6 和引理 4.10，它们都是 Q 中的完全素滤子。下面命题的证明显而易见。

引理 4.11. 设 A 和 B 是完全素滤子。那么 $A^* = B^+$ 当且仅当 $\mathsf{d}(A) = \mathsf{r}(B)$。

现在我们说明如何由 $e^\downarrow$ 中的完全素滤子构造出 Q 中的所有完全素滤子。

引理 4.12。

(1) 设 A 是一个完全素滤子， $a \in A$ 任意。则 $aA^* \subseteq A$，反之亦然。(2) 设 A 是一个完全素滤子。若 $a \in A$ 是一个部分等距元，则 $A = (aA^*)^\uparrow = (a\mathsf{d}(A))^\uparrow$，反之亦然。(3) 设 A 是 Q 中的一个恒等完全素滤子。假设 $a^* \in A$，且 a 是一个部分等距元。则 $B = (aA)^\uparrow$ 是 Q 中的一个完全素滤子，满足 $\mathsf{d}(B) = A$。(4) 设 A 和 B 是完全素滤子，满足 A 和 B 有一个共同的部分等距元，且 $\mathsf{d}(A) = \mathsf{d}(B)$。则 $A = B$。

证明。(1) 设 $b \in B$，并设 $c \in A$ 满足 $c \subseteq a$、b。则 $c = cc^* \subseteq ab^*$。由此可得 $ab^* \in A$。

(2) 令 $x \in A$。存在 $c \in A$ 使得 $c \leq x, a$。但是 a 是一个部分等距元，因此 $c = ac^*$。于是 $ac^* \leq x$。因此我们证明了 $A = (aA^*)^\uparrow$。容易证明 $(aA^*)^\uparrow = (a\mathsf{d}(A))^\uparrow$。

(3) 容易验证 B 是一个真滤子。我们证明它是完全素的。假设 $\bigvee x_i \in B$。那么 $au \leq \bigvee x_i$ 对某个 $u \in A$ 成立；不妨假设 u 是一个投影。因此 $au = \bigvee(x_i \wedge au)$。注意到 $x_i \wedge au \leq au$。由于 au 是一个部分等距元， $x_i \wedge au$ 也是如此。由此可得，对每个 i， $x_i \wedge au = au(x_i \wedge au)^*$。注意到 $(x_i \wedge au)^* \in A$，其中某个 i。于是 $x_i \wedge au \in B$，因此 $x_i \in B$。最后一个断言的证明是显然的。

(4) 由上面的第 (2) 部分立即可得。 □

注 4.13. 上述引理表明，在限制量子框架中，所有完全素滤子都具有 $(aA)^*$ 的形式，其中 a 是部分等距元， $a^* \in A$，且 $A \cap e^\downarrow$ 是 $e^\downarrow$ 中的完全素滤子。

现在我们可以证明 $\mathsf{C}(Q)$ 是一个范畴。设 A 和 B 是 Q 中的完全素滤子。若 $A^* = B^+$，则定义 $A \cdot B = (AB)^\uparrow$；否则，乘积未定义。

引理 4.14. 按照上述定义， $A \cdot B$ 是一个完全素滤子。

证明。假设 $0 \in A \cdot B$。那么 $ab \leq 0$，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$。由此可得 $ab = 0$。因此 $(ab)^* = 0$。也就是说 $(a^*b)^* = 0$。但是，对于某个 $b_1 \in B$，有 $a^* = b_1^+$。由此可得 $(b_1^+ b)^* = 0$。但是 $b_1^+ b \in B$。由此可知，存在一个元素 $b_2 \in B$，使得 $b_2^* = 0$。然而， $b_2 = 0$，并且根据假设， B 是真滤子，因此产生矛盾。由此可得 $0 \notin A \cdot B$。根据定义， $A \cdot B$ 向上封闭。我们证明 $A \cdot B$向下有向。设 x、$y \in A \cdot B$。那么，对于某些 a_1、$a_2 \in A$和 $b_2 \in B$，有 $a_1 b_1 \leq x$且 $a_2 b_2 \leq y$。设 $a \in A$满足 $a \leq a_1$、b_1，并设 $b \in B$ 满足 $b \leq b_1$、b_2。由此可得 $ab \leq a_1 b_1$、$a_2 b_2$，因而 $ab \leq x$、y。我们证明 $A \cdot B$ 是完全素的。假设 $\bigvee_{i \in I} x_i \in A \cdot B$。那么 $ab \leq \bigvee_{i \in I} x_i$，其中不失一般性，可假设 a 和b 是偏等距元，因此它们的乘积也是偏等距元。由此可得$ab = \bigvee_{i \in I}($ $ab \wedge x_i)$。注意， $ab \wedge x_i \leq ab$，其中 ab 是偏等距元。由此，对于每个 $i \in I$，都有 $ab \wedge x_i = ab(ab \wedge x_i)^*$。现在利用 $*$ 保持上确界这一事实，推得 $(ab)^* = \bigvee_{i \in I}(ab \wedge x_i)^*$。但是，利用 $A^* = B^+$这一事实，$(ab)^* = (a^*b)^* = (b_1^+ b)^*$。根据引理 4.12，$b_1^+ b \in B$。因此 $(b_1^+ b)^* \in B^*$，它是 $e^\downarrow$ 中的完全素滤子（引理 4.10）。由此可得

对于某个 $i \in I$，有 $(ab \wedge x_i)^* \in B^*$。现在， $b \in B$ 且 $(ab \wedge x_i)^* \in B^*$，因此根据引理 4.12，我们有 $b(ab \wedge x_i)^* \in B$。因此 $ab(ab \wedge x_i)^* \in AB$。由此我们证明了 $ab \wedge x_i \in AB$，因此 $x_i \in (AB)^{\uparrow}$。□

下面的证明是直接的。

引理 4.15. 设 Q 是一个限制量子框架。则 $A \cdot \mathsf{d}(A) = A$ 且 $\mathsf{r}(A) \cdot A = A$。

命题 4.16. 设 Q 是一个限制量子框架。则 $\mathsf{C}(Q)$ $\cdot$) 是一个范畴，其恒等元为恒等完全素滤子。

证明. 注意到 $(A \cdot B)^* = B^*$ 且 $(A \cdot B)^+ = A^+$。由此可得 $\mathsf{d}(A \cdot B) = \mathsf{d}(B)$ 且 $\mathsf{r}(A \cdot B) = \mathsf{r}(A)$。由此我们看到，$(A \cdot B) \cdot C$ 有定义，当且仅当 $A \cdot (B \cdot C)$ 有定义。显然，两种情形得到的结果相同。现在来确定这个范畴的恒等元。首先，假设 $F^{\uparrow}$ 是一个包含投影的完全素滤子（由引理 4.6 可知），且 $A \cdot F^{\uparrow}$有定义。则 $(A^*)^{\uparrow} = F^{\uparrow}$。因此 $A^* = F$。由此可得 $F^{\uparrow} = \mathsf{d}(A)$，于是$A \cdot F^{\uparrow} = A$。因此，所有包含投影的完全素滤子都是恒等元。现在假设 B 是一个恒等元，且 $A \cdot B$ 有定义。则$A \cdot B = A$。但是 $A \cdot \mathsf{d}(A)$ 有定义，因此根据结合律，$\mathsf{d}(A) \cdot B$ 有定义。我们已经证明 $\mathsf{d}(A)$ 是一个恒等元。由此可得 $\mathsf{d}(A) = B$。□

现在，我们将赋予 $\mathsf{C}(Q)$ 一个拓扑，使其成为一个 ´étale 范畴。

定义。设 Q 是一个限制量子框架。若 a 是 Q的任意元素，则定义$\mathfrak{X}_a$ 为所有包含 a 的完全素滤子的集合。

引理 4.17。设 Q 是一个限制量子框架，其最大元为 1，单位元为e。

(1) $\mathfrak{X}_1$ 是所有完全素滤子的集合。(2) $\mathfrak{X}_e$ 是所有恒等完全素滤子的集合。(3) $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_{a_i} = \mathfrak{X}_{\bigvee_{i \in I} a_i}$。(4) $\mathfrak{X}_a \cap \mathfrak{X}_b = \mathfrak{X}_{a \wedge b}$。

证明。(1) 最大元大于等于每个元素，因此每个完全素滤子都包含最大元。

(2) 包含幺半群单位元的完全素滤子恰好是恒等完全素滤子。

(3) 这依赖于完全素滤子的定义性质。

(4) 这依赖于这样一个事实：作为滤子，完全素滤子是向下有向的。□

令 $\tau = \{\mathfrak{X}_a \colon a \in \mathsf{PI}(Q)\}$。注意， τ 由满足以下条件的元素 $\mathfrak{X}_a$ 构成：a 是部分等距元。

引理 4.18. τ 是 $\mathsf{C}(Q)$ 上某个拓扑的基。

证明。设 A 是任意一个完全素滤子。那么 A 包含一个部分等距元，记作 a。因此 $A \in \mathfrak{X}_a$。设 $\mathfrak{X}_a \cap \mathfrak{X}_b$ 有非空交集。令$A \in \mathfrak{X}_a \cap \mathfrak{X}_b$。那么 a，$b \in A$。由此可得 $a \wedge b \in A$。但是 $a \wedge b \leq a$，且 a 是部分等距元，因此 $a \wedge b$ 是部分等距元，因为部分等距元构成一个序理想。注意， $A \in \mathfrak{X}_{a \wedge b} \subseteq \mathfrak{X}_a \cap \mathfrak{X}_b$。由此我们证明了$\tau$ 是 $\mathsf{C}(Q)$ 上某个拓扑的基。□

我们赋予 $\mathsf{C}(Q)$ 以拓扑，该拓扑以 τ 为基；这是我们在 $\mathsf{C}(Q)$ 上唯一考虑的拓扑。

引理 4.19. 设 Q 是一个限制量子框架。那么对于任意 a, $\mathcal{X}_a$ 都是一个开集。

证明。若 a 是部分等距元，则由定义可得结论。假设 a 不是部分等距元。那么 $a = \bigvee_{i\in I} a_i$，其中 a_i 是部分等距元。任何包含 a 的完全素滤子都必须包含至少一个 a_i。另一方面，任何包含某个 a_i 的完全素滤子都必须包含 a。由此可得

$$\mathcal{X}_a = \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_{a_i}.$$

□

引理 4.20. 设 Q 是一个限制量子框架。那么 $\mathsf{C}(Q)$ 是一个拓扑范畴。

证明。我们首先证明乘法映射 $\mathbf{m}$ 是连续的。设 s 是一个部分等距元。那么

$$\mathbf{m}^{-1}(\mathcal{X}_s) = \left(\bigcup_{0\neq bc\leq s} \mathcal{X}_b \times \mathcal{X}_c \right) \cap (\mathsf{C}(Q) * \mathsf{C}(Q))$$

其中 b 和 c 是部分等距元。剩下要证明映射 d 和 r 是连续的。只需证明 d 连续，因为 r 连续的证明可由对称性得到。我们需要计算 $\mathsf{d}^{-1}(\mathcal{X}_s)$。假设 s 下方唯一的投影是 0。那么 $\mathsf{d}^{-1}(\mathcal{X}_s) = \varnothing$；为说明原因，假设该集合非空。于是存在一个完全素滤子 A，使得 $s \in \mathsf{d}(A) = (A^*)^\uparrow$。由此可得存在一个非零投影 $f \leq s$，这与假设矛盾。现在假设 s 下方存在非零投影。由于任意上确界都存在，且一组投影的上确界仍是投影，因此存在最大的投影 f，使得 $f \leq s$。注意到 $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}_s$，并且任何包含 s 和一个投影的完全素滤子都必须属于 $\mathcal{X}_f$。由此可得 $\mathsf{d}^{-1}(\mathcal{X}_s) = \mathsf{d}^{-1}(\mathcal{X}_f)$。剩下要计算 $\mathsf{d}^{-1}(\mathcal{X}_f)$，其中 f 是任意投影。设 A 是一个完全素滤子，使得 $\mathsf{d}(A) \in \mathcal{X}_f$。设 $a \in A$ 是任意部分等距元。那么 $A = (afF^\uparrow)$。由此可得，集合 $\mathsf{d}^{-1}(\mathcal{X}_f)$ 是所有形如 $\mathcal{X}_{af}$ 的集合之并，其中 a 是部分等距元且 $af \neq 0$。□

引理 4.21。映射 d 和 r 是开映射。

证明。我们证明映射 d 是开映射；由对称性可知，r 是开映射。注意，$\mathsf{d}(\mathcal{X}_s) = \mathcal{X}_{s^*}$。□

只需注意到，当 s 是一个部分等距元时，集合 $\mathcal{X}_s$ 是开局部双截面，即可立即得到以下结论。

命题 4.22。如果 Q 是一个限制量子框架，那么 $\mathsf{C}(Q)$ 是一个 ´étale 拓扑范畴。

我们可以描述 $\mathsf{C}(Q)$ 的恒等空间。

引理 4.23。设 Q 是一个恒等元为 e 的限制量子框架。那么 $\mathsf{C}(Q)$ 的恒等空间与空间 $\mathsf{pt}(e^\downarrow)$ 同胚。

证明。我们使用命题 4.9 中建立的序同构。现在证明这个双射是一个同胚。设 $\mathcal{X}_a$ 包含一个恒等完全素滤子。那么 a 位于某个投影之上。由此可知，我们可以将注意力限制在形如 $\mathcal{X}_f$ 的开集上，其中 f 是一个投影。注意，$A \in \mathcal{X}_f$当且仅当 $A \cap e^\downarrow \in X_f$。这就建立了我们的同胚。□

引理 4.24。设 ϕ: $R \to S$ 是限制量子框架的一个态射。那么它诱导出一个连续覆盖函子 ϕ^{-1}: C(S) $\to$ C(R)。

证明。若 B 是 S 中的一个完全素滤子，则 $\phi^{-1}(B)$ 是 R 中的一个完全素滤子，因此 ϕ^{-1} 由 [7, 定理 1.4] 诱导出一个连续函数。

剩下要证明 ϕ^{-1} 是一个覆盖函子。我们将分阶段证明这一点。

注意，ϕ^{-1} 将恒等完全素滤子映射到恒等完全素滤子；我们将证明这一点。假设 B 含有一个投影 f。我们需要证明 $\phi^{-1}(B)$ 含有一个投影。令 $x \in \phi^{-1}(B)$。则 $\phi(x) \in B$。因此，由于 B 含有一个投影，根据引理 4.8 可得 $\phi(x)^* \in B$。但是，θ 是 Ehresmann 半群之间的一个态射，因此 $\phi(x)^* = \phi(x^*)$。由此我们推得 $x^* \in \phi^{-1}(B)$。因此 $\theta^{-1}(B)$ 含有一个投影。

设 B 是 S 中的一个完全素滤子。根据上文，$A = \phi^{-1}(B)$ 是 R 中的一个完全素滤子。现在我们来描述完全素滤子 A 和 B。我们可以写成 $A = (aA^*)^\uparrow$，其中 $a \in A$，且 a 是一个部分等距元。但 $a \in A = \phi^{-1}(B)$，因此 $b = \phi(a) \in B$，并且 ϕ 保持偏等距元。因此 b 也是一个部分等距元。由此可得 $B = (bB^*)^\uparrow$。我们两次用到了引理 4.12。

现在我们证明

$$\mathbf{d}(\phi^{-1}(B)) = \phi^{-1}(\mathbf{d}(B)),$$

对偶结果的证明可由对称性得到。因此，我们实际上需要证明

$$(\phi^{-1}(B)^*)^\uparrow = \phi^{-1}((B^*)^\uparrow).$$

我们先证明

$$(\phi^{-1}(B)^*)^\uparrow \subseteq \phi^{-1}((B^*)^\uparrow).$$

设 $r \in (\phi^{-1}(B)^*)^\uparrow$。则 $u^* \leq r$，其中 $u \in A = \phi^{-1}(B)$。对两边应用 ϕ，得到 $\phi(u^*) = \phi(u)^* \leq \phi(r)$；这里我们用到了这样一个事实：$\phi$ 是 Ehresmann 半群的态射。但 $\phi(u) \in B$。根据上文对 B 中元素的描述，可得 $\phi(u) \geq bf$，其中 $f \in B^*$。因此 $(bf)^* \leq \phi(r)$，从而 $r \in \phi^{-1}((B^*)^\uparrow)$。现在我们证明反向包含。也就是说，我们证明

$$\phi^{-1}(\mathbf{d}(B)) \subseteq \mathbf{d}(\phi^{-1}(B)).$$

令 $x \in \phi^{-1}(\mathsf{d}(B))$。注意到 $\mathsf{d}(B)$ 是一个包含投影的完全素滤子。因此，根据我们上面的证明，$\phi^{-1}(\mathsf{d}(B))$ 是一个包含投影的完全素滤子。所以存在一个投影 $f \in \phi^{-1}(\mathsf{d}(B))$，使得$f \leq x$。根据定义，$\phi(f) \in \mathsf{d}(B)$。注意到 $\phi(af) = \phi(a)\phi(f) \in B\mathsf{d}(B) \subseteq B$。由此可得 $af \in \phi^{-1}(B)$。现在，$(af)^* = a^*f \leq f$。因此我们已证明 $(af)^* \leq x$ 且 $\phi(af) \in B$。所以 $x \in \mathsf{d}((\phi^{-1}(B))$。

现在我们可以证明 θ^{-1} 是一个函子。设 B_1, B_2 是 S 中的完全素滤子，且 $\mathsf{d}(B_1) = \mathsf{r}(B_2)$。那么 $B_1 \cdot B_2 = (B_1B_2)^\uparrow$ 是 S中的一个完全素滤子。由此可得 $\phi^{-1}(B_1 \cdot B_2)$是 R中的一个完全素滤子。根据上述结果，$\mathsf{d}(\phi^{-1}(B_1)) = \phi^{-1}(\mathsf{d}(B_1))$，且 $\mathsf{r}(\phi^{-1}(B_2)) = \phi^{-1}(\mathsf{r}(B_2))$。由此可得 $\mathsf{d}(\phi^{-1}(B_1)) = \mathsf{r}(\phi^{-1}(B_2))$。因此，$\phi^{-1}(B_1) \cdot \phi^{-1}(B_2)$ 是 R 中定义良好的完全素滤子。还需证明 $\phi^{-1}(B_1 \cdot B_2) = \phi^{-1}(B_1) \cdot \phi^{-1}(B_2)$。容易验证，$\phi^{-1}(B_1) \cdot \phi^{-1}(B_2) \subseteq \phi^{-1}(B_1 \cdot B_2)$。但两边都是完全素滤子，且两边的 d 相同。根据引理 4.12，这两个完全素滤子相等。

只需再验证 ϕ^{-1} 是一个覆盖（函子）。设 A 和 B 是 S 中的完全素滤子，满足 $\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(B)$ 且 $\mathsf{d}(A) = \mathsf{d}(B)$。我们证明 $A = B$。令 $r \in \phi^{-1}(A) = \phi^{-1}B$) 为任意一个部分等距元。则 $\phi(r) \in A$ 且 $\phi(r) \in B$。由此可知，A 和 B 的定义域相同，且共享一个部分等距元。因此，根据引理 4.12，我们有 $A = B$。令 F 为 S 中的一个恒等完全素滤子。那么 $\phi^{-1}(F)$ 是一个恒等素滤子

在 R 中。设 A 是 R 中的一个完全素滤子，满足 $\mathsf{d}(A) = \phi^{-1}(F)$。令 a 为 R 中任意一个满足 $a \in A$ 的部分等距元。则 $a^* \in \phi^{-1}(F)$，且 $\phi(a)$ 是 S 中的一个部分等距元。注意到 $\phi(a^*) \in F$。因此，根据引理 4.12，我们可以构造完全素滤子 $B = (\phi(a)F)^\uparrow$。我们断言 $A = \phi^{-1}(B)$；这是因为 $\phi(a) \in B$，所以 $a \in \phi^{-1}(B)$ 且 $\mathsf{d}(\phi^{-1}(B)) = \phi^{-1}(\mathsf{d}(B)) = \phi^{-1}(F)$。对于 d 所做的上述论证，由对称性可同样用于 r。由此可知，ϕ^{-1} 是一个覆盖（函子）。□

将 C 扩展到态射上。根据命题 4.22 和引理 4.24，我们证明了以下结论。

命题 4.25. C 是一个反变函子，其定义域范畴的对象是限制量子框架，态射是限制量子框架态射；其陪域范畴的对象是 ´étale拓扑范畴，态射是连续覆盖函子

5. There and back again

在命题 3.5 中，我们证明了如果 C 是一个 ´étale 范畴，那么 $\Omega(C)$ 是一个限制量子框架。在命题 4.22 中，我们证明了如果 Q 是一个限制量子框架，那么 $\mathsf{C}(Q)$ 是一个 ´étale 范畴。现在我们迭代这两种构造。设 Q 是一个限制量子框架。那么 $\mathsf{C}(Q)$ 是一个 ´étale 范畴。由此可知，$\Omega(\mathsf{C}(Q))$ 是一个 Ehresmann 量子框架。定义映射$\chi\colon Q \to \Omega(\mathsf{C}(Q))$，使得 $\chi(a) = \mathcal{X}_a$；根据引理 4.19，这是一个开集。

引理 5.1. 设 Q 是一个限制量子框架，其最大元为 1，单位元为 e。

(1) $(\mathcal{X}_a)^* = \mathcal{X}_{a^*}$，并且对偶地，在限制量子框架 $\Omega(\mathsf{C}(Q))$ 中也成立。(2) 若 a 是部分等距元，则 $\mathcal{X}_a$ 是限制量子框架 $\Omega(\mathsf{C}(Q))$ 中的部分等距元。

证明。(1) 根据定义，$(\mathcal{X}_a)^* = \{\mathsf{d}(A)\colon\ A \in \mathcal{X}_a\}$。根据引理 4.12，这恰好是所有包含 a^* 的完全素滤子的集合。对偶结果同理可得。

(2) 设 A、$B \in \mathcal{X}_a$，其中 $\mathsf{d}(A) = \mathsf{d}(B)$。由引理 4.12 可知，必有 $A = B$。对偶结果的证明类似。□

引理 5.2. 函数 χ 是一个限制量子框架态射。

证明。为证明 χ 是半群同态，我们需要证明 $\mathcal{X}_{ab} = \mathcal{X}_a\mathcal{X}_b$。我们先证明 $\mathcal{X}_a\mathcal{X}_b \subseteq \mathcal{X}_{ab}$。设 $A \in \mathcal{X}_a$ 和 $B \in \mathcal{X}_b$，并假设 $A \cdot B$ 有定义。则 $A \cdot B = (AB)^\uparrow$，因此 $A \cdot B$ 包含元素 ab。我们来证明反向包含关系 $\mathcal{X}_{ab} \subseteq \mathcal{X}_a\mathcal{X}_b$。设 $A \in \mathcal{X}_{ab}$。可将 a 写成偏等距元 a_i 的乘积，使得 $a = \bigvee_{i\in I} a_i$；同理，可将 $b = \bigvee_{j\in J} b_j$ 写成偏等距元的乘积。因此 $ab = \bigvee a_i b_j$，因为我们是在量子化中运算。于是，对某个 i 和某个 j，有 $a_i b_j \in A$。注意，由于 Q 是一个限制量子框架，因此 $a_i b_j$ 是一个部分等距元，且 $a_i \leq a$ 和 $b_j \leq b$。所以，只需在假设 a 和 b 是部分等距元的情况下证明 $\mathcal{X}_{ab} \subseteq \mathcal{X}_a\mathcal{X}_b$。设 $C \in \mathcal{X}_{ab}$。令 $B = (b(C^*)^\uparrow)$，其中 $b^* \in C^*$。根据引理 4.12，B 是一个完全素滤子。令 $A = (a(B^+)^\uparrow)^\uparrow$。注意，根据构造，$\mathsf{d}(A) = \mathsf{r}(B)$，且 $C = A \cdot B$。至此，我们已证明所需结果。还需证明 χ 满足定义限制量子框架态射的四个条件。这由引理 4.17 和引理 5.1 得出。□

我们称限制量子框架 Q 为空间的，当且仅当 χ 是一个同构。

引理 5.3. 设 Q 是一个 Ehresmann 量子框架。那么， Q 为空间的，当且仅当 $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$ 蕴含 $a = b$。

证明。一个方向的证明是显然的。显然，若条件成立，则 χ 是单射。现在证明它是满射。设 U 是 $\Omega(\mathsf{C}(Q))$ 的一个元素。因此， U 是 $\mathsf{C}(Q)$ 中的一个开集。由此可知， U 是形如 $\mathcal{X}_q$ 的集合之并，其中 $q \in Q$ ，且 q 是一个部分等距元。因此， U 本身就是某个 $q \in Q$ 的形如 $\mathcal{X}_q$ 的集合。□

以下结果最初作为 [8, 引理 8.3] 得到证明。

命题 5.4。设 Q 是一个 Ehresmann 量子框架。那么 Q 是空间的，当且仅当 $e^{\downarrow}$ 是空间的。

证明。首先假设 Q 是空间的。我们证明 $e^{\downarrow}$ 是空间的。设 f、g 是任意满足 $f \not\leq g$ 的投影。我们证明 $e^{\downarrow}$ 中存在一个完全素滤子，它包含 f 但不包含 g。在 Q 中存在一个完全素滤子 A ，它包含 f 但不包含 g。然而， A 是一个包含投影的完全素滤子。因此， $A \cap e^{\downarrow}$ 是 $e^{\downarrow}$ 中一个包含 f 但不包含 g 的完全素滤子。这证明了 $e^{\downarrow}$ 是空间的。

现在，假设 $e^{\downarrow}$ 是空间的。我们证明 Q 是空间的。由引理 5.3，只需证明若 $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$ ，则 $a = b$。我们先假设 a 和b 是部分等距元。设 $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$。则 $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_{a \wedge b}$。由此可得$\mathcal{X}_{a^*} = \mathcal{X}_{(a \wedge b)^*}$。现在利用 $e^{\downarrow}$ 是空间的这一事实，以及恒等完全素滤子由其所包含的（完全素）投影集合确定这一事实，推出 $a^* = (a \wedge b)^*$。现在 $a \wedge b \leq a$ 且 a 是部分等距元。因此 $a \wedge b = a(a \wedge b)^* = a$。我们已经证明 $a \leq b$。由对称性可推出 $a = b$。现在我们处理一般情形。设 $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$。则 $a = \bigvee_{i \in I} a_i$ ，其中 a_i 是部分等距元。我们有 $\mathcal{X}_{a_i} \subseteq \mathcal{X}_b$ ，因此 $\mathcal{X}_{a_i} = \mathcal{X}_{a_i \wedge b}$。现在 a_i 是部分等距元，而 $a_i \wedge b$ 也是部分等距元，因为部分等距元构成一个序理想。由上文可推出$a_i = a_i \wedge b$。我们已经证明，对任意 i，都有 $a_i \leq b$ 。因此我们已经证明$a \leq b$。由对称性可推出 $a = b$。□

设 C 是一个 ´étale 拓扑范畴。那么 $\Omega(C)$ 是一个限制量子框架。因此，$\mathsf{C}(\Omega(C))$ 是一个 ´étale 拓扑范畴。定义映射 ω: $C \to \mathsf{C}(\Omega(C))$，使得 $\omega(x) = O_x$ 是 C 中包含 x 的所有开集。这是一个完全素滤子。我们证明如下结论。

引理 5.5。函数 ω 是一个连续覆盖函子。

证明。我们首先证明 ω 是一个函子。假设 x 是范畴 C 的一个单位元。那么 O_x 是一个包含 C_o 的完全素滤子。因此， O_x 是一个恒等完全素滤子。设 U 是一个包含 x 的开集。那么 $\mathsf{d}(U)$ 是 C_o 的一个包含 $\mathsf{d}(x)$ 的开子集。设 V 是 C 中任意一个包含 $\mathsf{d}(x)$ 的开集。那么 $V \cap C_o$ 是 C_o 的一个包含 $\mathsf{d}(x)$ 的开子集。因此，我们已证明 $\mathsf{d}(O_x) = O_{\mathbf{d}(x)}$，对偶情形亦然。假设在范畴 C 中，$\mathsf{d}(x) = \mathsf{r}(y)$。那么由上文可知，$\mathsf{d}(O_x) = \mathsf{r}(O_y)$。显然， $O_x O_y \subseteq O_{xy}$ ，因为开集的乘积仍是开集。因此， $O_x \cdot O_y \subseteq O_{xy}$。但是 $O_x \cdot O_y$ 和 O_{xy} 是完全素滤子，其中一个包含于另一个，且经 d 映射后取值相同。因此， $O_x \cdot O_y = O_{xy}$。这证明了 ω 是一个函子。$\mathsf{C}(\Omega(C))$ 上拓扑的一个基由形如 $\mathcal{X}_U$ 的集合构成，其中 U 是 C 的一个开子集。注意， $\omega^{-1}(\mathcal{X}_U) = U$。因此， ω 是连续的。设 x、$y \in C$ 满足 $\mathsf{d}(x) = \mathsf{d}(y)$ 且 $O_x = O_y$。我们证明 $x = y$; 若改为假设 $\mathsf{r}(x) = \mathsf{r}(y)$，则有对偶结论。 C 上拓扑的一个基是由开局部双截面构成的。因此

存在一个同时包含 x 和 y 的开局部双截面 U。由此可得 $x = y$。我们已证明 ω 是 d- 单射。现在，假设 f 是 C 的一个单位元，且 $\mathsf{d}(F^{\uparrow}) = \omega(f) = O_f$，并且 $\mathsf{d}(A) = F^{\uparrow}$。设 U 是属于 A 的一个开局部双截面。那么存在唯一的元素 $x \in U$，使得 $\mathsf{d}(x) = e$。于是，完全素滤子 O_x 包含 U，且 $\mathsf{d}(O_x) = O_f$。因此，$\omega(x) = A$。对于 $\mathbf{r}$ 也可以证明类似的结果。因此，我们已证明 ω 是一个覆盖函子。□

若一个 ´étale拓扑范畴满足 ω 是范畴同构和拓扑空间同胚，则称其为凝聚的。

引理5.6. 设 C 是一个 ´étale拓扑范畴。那么，C 是凝聚的，当且仅当映射 ω 是一个双射。

证明. 只需证明一个方向。我们假设函数 ω 是一个双射。它已经是一个函子，因此是范畴同构。于是，只要证明 ω 是开映射，结论便得证。设 U 是C的一个开集。根据定义，$\omega(U) = \{O_c\colon c \in U\}$，其中每个 O_c都是包含 c的所有开集构成的集合。对于每个 c，我们有 $U \in O_c$。因此，$\omega(U)$中的每个元素都是包含 U的完全素滤子。于是，我们可以考虑$\Omega(C)$中所有包含 U 的完全素滤子所组成的集合，即 $\mathcal{X}_U$。由此可得$\omega(U) \subseteq \mathcal{X}_U$。另一方面，设 $A \in \mathcal{X}_U$。于是，A是一个包含 U的完全素滤子。根据假设，ω 是一个双射。因此，对某个 x，有 $A = \omega(x)$。于是，对某个 $x \in C$，有$A = O_x$。但是，x 属于 A 中的每个开集，因此也属于U。由此可得 $A \in \omega(U)$。因此我们证明了 $\omega(U) = \mathcal{X}_U$。由此可得 ω 是开映射。□

以下内容最初以 [8, 引理 8.2]的形式证明。

命题 5.7. 设 C 是一个 ´étale 范畴。那么，C 是凝聚的，当且仅当 C_o 是凝聚的。

证明. 当函数 $C_o \to \Omega(C_o)$是一个双射时，空间 C_o 是凝聚的。先假设 C 是凝聚的。我们证明 C_o 是凝聚的。用 O_e表示$\sim$ $\sim$ $\sim C_o$中包含 $e \in C_o$的开集所成的集合。设 $e, f \in C_o$，且假设 $O_e = O_f$。那么$O_e = O_f$；为说明这一点，任取一个包含 e的开集 V。则 $V \cap C_o$ 是 C_o 中包含 e的开集。因此，$V \cap C_o$ 是 C_o 中包含 f的开集。由此可知，V 是 C 中包含 f的开集。这证明了一个包含关系，反向包含关系由对称性可得。根据定义，$\omega(e) = \omega(f)$。因此，$e = f$，证毕。现在假设 F 是 C_o的开集上的任意一个完全素滤子。那么 $F^{\uparrow}$是 C的开集上的一个完全素滤子。根据假设，存在某个 $x \in C$使得 $F^{\uparrow} = \omega(x)$。但是，$F^{\uparrow}$ 包含 F，而后者由 $\widetilde{}$恒等式集的开子集组成。这意味着 $x = e$ 是一个单位元。因此 $F = O_e$。由此我们证明了：若 C 是凝聚的，则 C_o 也是凝聚的。

现在假设 C_o 是凝聚的，并证明 C 是凝聚的。我们使用对 C中完全素滤子的描述。这些滤子具有如下形式：$(aF)^{-1}$，其中 F 是 $e^{\downarrow}$中的完全素滤子，a 是一个部分等距元，且 $a^* \in F$。根据假设，$\widetilde{F}$具有如下形式：O_e，其中 $e \in C_o$。´étale 范畴中的部分等距元是开局部双截面。因此，存在唯一的元素 $x \in a$，使得 $\mathsf{d}(x) = e$。由此可得 $O_e \subseteq (aF)^{-1}$，但这两个完全素滤子相等，因为 $(O_e)^* = F$。由此便可得凝聚性。□

引理 5.8。

(1) 对于每个 ´étale 范畴 C，限制量子框架 $\Omega(C)$ 都是空间的。(2) 对于每个限制量子框架 Q，´étale 范畴 $\mathsf{C}(Q)$ 都是凝聚的。

证明。(1) 根据命题 5.4，$\Omega(C)$ 是空间的当且仅当 $\Omega(C_o)$ 是空间的；由于 $\Omega(C_o)$ 恰好是 $\Omega(C)$ 的投影集，因此结论成立。但现在我们使用引理 2.2，由此可以推得 $\Omega(C_o)$ 总是空间的。

(2) 这由命题 5.7 得出：当且仅当 $\mathsf{C}(Q)$ 是凝聚的，$\mathsf{C}(Q)_o$ 是凝聚的。然而，根据引理 4.23，$\mathsf{C}(Q)_o$ 与 $\mathsf{pt}(e^{\downarrow})$ 同胚。现在我们使用引理 2.2，由此可推得 $\mathsf{pt}(e^{\downarrow})$ 总是凝聚的。□

记限制量子框架及其态射构成的范畴为 RQF。记 ´étale 范畴及其态射构成的范畴为 EC。

定理 5.9（伴随定理 I）。函子

$$\mathsf{C}\colon \mathbf{RQF}^{op} \to \mathbf{EC}$$

是函子的右伴随

$$\Omega\colon \mathbf{EC} \to \mathbf{RQF}^{op}.$$

证明。给定一个连续覆盖函子 $\alpha\colon C \to \mathsf{C}(Q)$，我们可以构造态射 $\alpha^{-1}\chi\colon Q \to \Omega(C)$。同样，给定一个态射 $\beta\colon Q \to \Omega(C)$，我们可以构造态射 $\beta^{-1}\omega\colon C \to \mathsf{C}(Q)$。我们将证明这两种构造互为逆构造。

设 $\alpha\colon C \to \mathsf{C}(Q)$ 是一个连续覆盖函子。我们计算 $(\alpha^{-1}\chi)^{-1}\omega$ 对 C 中元素的作用。设 $c \in C$。那么 $q \in ((\alpha^{-1}\chi)^{-1}\omega)(c)$ 当且仅当$q \in (\alpha^{-1}\chi)^{-1}(O_c)$ 当且仅当 $(\alpha^{-1}\chi)(q) \in O_c$ 当且仅当 $c \in (\alpha^{-1}\chi)(q)$ 当且仅当 $c \in \alpha^{-1}(\mathcal{X}_q)$ 当且仅当 $\alpha(c) \in \mathcal{X}_q$ 当且仅当 $q \in \alpha(c)$。由此可得$\alpha(c) = ((\alpha^{-1}\chi)^{-1}\omega)(c)$，这正是所需证明的。

设 $\beta\colon Q \to \Omega(C)$ 是一个态射。我们计算 $(\beta^{-1}\omega)^{-1}\chi$ 对 Q 中一个元素的作用。设 $q \in Q$。那么 $c \in ((\beta^{-1}\omega)^{-1}\chi)(q)$ 当且仅当 $c \in (\beta^{-1}\omega)^{-1}(\mathcal{X}_q)$ 当且仅当 $(\beta^{-1}\omega)(c) \in \mathcal{X}_q$ 当且仅当 $q \in (\beta^{-1}\omega)(c)$ 当且仅当 $q \in \beta^{-1}(O_c)$ 当且仅当 $\beta(q) \in O_c$ 当且仅当 $c \in \beta(q)$。由此可得 $\beta(q) = ((\beta^{-1}\omega)^{-1}\chi)(q)$，这正是所需证明的。

自然性的证明在此显而易见，因此我们得到一个伴随。 □

由定理 5.9 和引理 5.8，以下结论显而易见。

推论 5.10. 空间限制量子框架范畴与凝聚的 ´étale 范畴范畴对偶等价。

6. Complete restriction monoids and restriction quantal frames

本节内容取自 [8] 的第 2.4 节和第 2.5 节。设 $\theta\colon Q \to R$ 是限制量子框架之间的一个态射。根据命题 4.4，$\mathsf{PI}(Q)$ 和 $\mathsf{PI}(R)$ 都是完备限制幺半群。态射 θ 通过限制定义了一个函数 $\theta' = (\theta \mid \mathsf{PI}(Q)) : \mathsf{PI}(Q) \to \mathsf{PI}(R)$。它是一个幺半群同态；它是 Ehresmann 半群的同态；它保持所有相容并；并且保持所有有限交。由于 θ 将顶元映射为顶元，它还具有一个额外性质。设 Q 的最大元为 1_Q。根据假设，我们可以写成 $1_Q = \bigvee_{i\in I} q_i$，其中 q_i 是偏等距元。因此 $\theta(1_Q) = \bigvee_{i\in I} \theta'(q_i) = 1_R$。取 R 的任意一个偏等距元 r。那么 $r \leq 1_R$。因此 $r = 1_R \wedge r$。由此可得 $r = \bigvee_{i\in I} r \wedge \theta'(q_i)$。然而，偏等距元构成一个序理想。因此我们证明了，在 $\mathsf{PI}(R)$ 中可以写成 $r = \bigvee_{i\in I} r_i$，其中每个 $r_i \leq \theta'(q_i)$；我们称这一性质为 θ' 是真的。

形式上，完备限制幺半群之间的态射 $\theta\colon S \to T$ 是真态射，当且仅当 $\mathsf{im}(\theta)^{\vee} = T$。

完备限制幺半群之间的态射，定义为保持相容并的 Ehresmann 幺半群幺半群同态。完备限制幺半群 S 中的完全素滤子 A，是一个真滤子（即不包含底元），并且向下有向；它还满足：若 $\bigvee_{i\in I} a_i$ 有定义且 $\bigvee_{i\in I} a_i \in A$，则对某个 $i \in I$，有 $a_i \in A$。

引理 6.1. 设 $\phi\colon S \to T$ 是完备限制幺半群之间的一个态射。若 ϕ 是真，则 T 的每个完全素滤子都包含 ϕ 的像中的一个元素。

证明. 设 B 是 T 中任意一个完全素滤子。令 $b \in B$。根据假设，我们可以写作 $b = \bigvee_{i\in I} b_i$，其中每个 $b_i \leq \phi(s_i)$。由于 B 是一个完全素滤子，故对于某个 $i \in I$，有 $b_i \in B$。由此可得 $\phi(s_i) \in B$。□

回顾 [8, 第 2 节 4],，若 S 是一个完备限制幺半群，则 $\mathcal{L}^{\vee}(S)$ 是由 S 的所有对任意并封闭的序理想构成的限制量子框架。由 [8, 命题 2.40], 可知，若 R 是一个限制量子框架，且 $\mathsf{PI}(R) = S$，则 $\mathcal{L}^{\vee}(S)$ 与 R 同构。

保持有限交的完备限制幺半群真态射称为 callitic。设 $\theta\colon S_1 \to S_2$ 是完备限制幺半群之间的 callitic 态射。设 R_1 满足 $\mathsf{PI}(R_1) = S_1$，并设 R_2 满足 $\mathsf{PI}(R_2) = S_2$。我们可以定义 $\Theta\colon R_1 \to R_2$，使得 $\Theta(a) = \bigvee_{i\in I} \theta(a_i)$，其中 $a \in R_1$ 且 $a_i \in S_1$。利用 [8, 第 2 节的内容可以证明这一定义良好；不过，也可以直接利用 θ 的性质证明。现在很容易验证 Θ 是限制量子框架态射；我们只证明 R_1 的最大元映射到 R_2 的最大元。设 1_1 是 R_1 的最大元，设 1_2 是 R_2 的最大元。我们知道，1_1 必须是 S_1 中所有元素的上确界。因此 $1_1 = \bigvee_{s\in S_1} s$。根据定义，$\Theta(1_1) = \bigvee_{s\in S_1} \theta(s)$。同理，$1_2 = \bigvee_{s'\in S_2} s'$。然而，$\theta$ 是 callitic。因此，对每个 $s' \in S_2$，都有 $s' \in \mathsf{im}(\theta)^{\vee}$。于是，$1_2 \leq \Theta(1_1)$。但 $\Theta(1_1) \leq 1_2$，所以 $\Theta(1_1) = 1_2$。我们用 CRM 表示完备限制幺半群与 callitic 态射构成的范畴。以下结论已在 [8, 定理 2.44], 中证明，但也可由本节的结果推出。

定理 6.2。范畴 CRM 等价于范畴 RQF。

7. The second adjunction theorem

我们将利用上一节的结果来证明本节的结果。特别是，我们将重述定理 5.9, 并将限制量子框架替换为完备限制幺半群。

设 S 是一个完备限制幺半群。若非空子集 $A \subseteq S$ 对二元交封闭且向上封闭，则称其为滤子。若 $0 \notin A$，则称其为真滤子。若只要 $\bigvee_{i\in I} a_i$ 在 S 中存在且 $\bigvee_{i\in I} a_i \in A$，就有 $a_i \in A$ 对某个 $i \in I$ 成立，则称其为完全素滤子。

设 S 是一个完备限制幺半群。那么 S 可视为限制量子框架 R 的一个子集，并且满足 $\mathsf{PI}(R) = S$；因此，R 的偏等距元集合恰好是集合 S。证明见 [8, 第 2 节。4]。由于下文中有 $S \subseteq R$，我们需要引入一些记号，以便明确我们所讨论的是哪个幺半群。若 $X \subseteq R$，定义

$$X{\downarrow} = X \cap \mathsf{PI}(R);$$

换言之，即属于 X 的 S 中的那些元素。若 $Y \subseteq S$，定义

$$Y{\uparrow} = (Y^{\uparrow}){\downarrow};$$

换言之，即位于 Y 中某个元素之上的 S 中的那些元素。用 $\mathsf{C}'(S)$ 表示 S 的所有完全素滤子集合。我们用撇号标记 S 中的完全素滤子，而 R 中的完全素滤子则不加撇号。

引理 7.1. 设 $S \subseteq R$ 如上所述。则存在一个从 $\mathsf{C}'(S)$ 到 $\mathsf{C}(R)$ 的双射，由 $A' \mapsto (A')^{\uparrow}$ 给出。

证明. 设 A' 是 S的一个完全素滤子。我们证明， $A = (A')^{\uparrow}$ 是 R的一个完全素滤子。容易验证， A 是 R的一个真滤子。假设 $\bigvee_{i\in I} a_i \in A$。那么存在一个元素 $a \in A'$ ，使得$a \leq \bigvee_{i\in I} a_i$。由此可得 $a = \bigvee_{i\in I} a_i \wedge a$。根据假设， a 是一个部分等距元。因此，每个元素 $a_i \wedge a$ 都是部分等距元。于是，对某个$i \in I$，有 $a_i \wedge a \in A'$。由此可得 $a_i \in A$，正如所需。由此我们定义了一个从 $\mathsf{C}'(S)$ 到 $\mathsf{C}(R)$ 的映射。注意到 $A \downarrow = A'$。由此可知该映射是单射。若$A \in \mathsf{C}(R)$，则 $A' = A\downarrow$ 是一个非空集合，因为 R 中的每个元素都是偏等距元的上确界，并且容易验证， A' 是 S中的一个完全素滤子。注意到，在 R中有 $A = (A')^{\uparrow}$。由此我们定义了一个双射。□

若 $a \in S$，定义 $\mathcal{X}'_a$ 为包含元素 a的 S 的完全素滤子的集合。以下结论的证明是直接的。

引理 7.2. 在上述双射下，集合 $\mathcal{X}'_a$ 映射到集合 $\mathcal{X}_a$。

设 A' 是 S中的一个完全素滤子。定义 $(A')^* = \{a^* \colon a \in A'\}$，以及 $(A')^+ = \{a^+ \colon a \in A'\}$。定义 $d(A') = (A')^* \uparrow$，以及 $r(A') = (A')^+ \uparrow$。若 A'、B' 都是 S中的完全素滤子，则定义 $A' \bullet B' = (A'B') \uparrow$ 当且仅当$d(A') = r(B')$。

引理 7.3. 设 $S \subseteq R$ 如上。若 A' 和 B' 是 S中的完全素滤子，令 $A = (A')^{\uparrow}$ 以及 $B = (B')^{\uparrow}$。

(1) $d(A') = \mathsf{d}(A)\downarrow$ 且 $r(A') = \mathsf{r}(A)\downarrow$；特别地， $d(A')$ 和 $r(A')$ 都是 S 中的完全素滤子。(2) $\mathsf{d}(A) = d(A')^{\uparrow}$ 且 $\mathsf{r}(A) = r(A')^{\uparrow}$。(3) $d(A') = r(B')$ 当且仅当 $\mathsf{d}(A) = \mathsf{r}(B)$。(4) 若 $d(A') = r(B')$，则 $(A' \bullet B')^{\uparrow} = A \cdot B$；由此可得 $(A \cdot B)\downarrow = A' \bullet B'$。(5) $(\mathsf{C}'(S), \bullet, d, r)$ 是一个范畴，且与范畴 $\mathsf{C}(R)$ 同构。

证明。(1) 我们只证明 $d(A')$ 的情形，因为 $r(A')$ 的证明类似。设 A' 是 S 中的一个完全素滤子。那么 $A = (A')^{\uparrow}$ 是 R 中的一个完全素滤子。由于 $A' \subseteq A$ ，可得 $(A')^* subseteq A^*$ ，因此 $((A')^*)^{\uparrow} \subseteq (A^*)^{\uparrow} = \mathsf{d}(A)$。设 $b \in (A^*)^{\uparrow}$。那么存在一个元素 $a^* \in A^*$ ，使得 $a^* \leq b$且 $a \in A$。根据假设， $a = \bigvee_{i\in I} a_i$ ，其中的 a_i 是偏等距元。注意到 $a^* = \bigvee_{i\in I} a_i^*$。由于 A 是 R 中的一个完全素滤子，因此对于某个 $i \in I$，有 $a_i \in A$。于是 $a_i^* \in (A')^*$。由此可得 $a^* \in ((A')^*)^{\uparrow}$ ，因此 $b \in ((A')^*)^{\uparrow}$。于是， $d(A') = \mathsf{d}(A)\downarrow$。我们已经证明 $\mathsf{d}(A)$ 是 R 中的一个完全素滤子，因此可得 $d(A')$ 是 S 中的一个完全素滤子。

(2) 由 (1) 可立即得出。

(3) 由 (1) 可立即得出。

(4) $A' \bullet B'$ 和 $A \cdot B$ 均有定义。显然，$(A' \bullet B')^{\uparrow} \subseteq A \cdot B$。令$x \in A \cdot B$。则 $ab \leq x$ ，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$。根据假设，我们可以写成$a = \bigvee a_i$，其中 a_i 为偏等距元；并且 $b = \bigvee b_j$，其中 b_j 为偏等距元。由于假设 A 和 B 均为 R中的完全素滤子，因此 $a_i \in A$ 且 $b_j \in B$ ，其中某些 i 和 j满足条件。由此， $a_i \in A'$ 且 $b_j \in B'$。注意到 $a_i b_j \leq x$。因此我们已证明， $x \in (A'B')^{\uparrow} \subseteq (A' \bullet B')^{\uparrow}$。

(5) 由上述结果和引理 7.1 即可得出。 □

设 S 是一个完备限制幺半群。根据上述结果，我们将用 C(S) 代替 C′(S)。因此，C(S) 是一个 ´etale 范畴，其元素是 S 的完全素滤子。

记 CRM 为完备限制幺半群与 callitic 态射构成的范畴。记 EC 为 ´étale 范畴及其态射构成的范畴。根据本节已证明的结果、第 6 节的结果以及定理 5.9，可得以下定理。

定理 7.4（伴随定理 II）。函子

$$\mathsf{C}\colon \mathbf{CRM}^{op} \to \mathbf{EC}$$

是函子的右伴随

$$\Omega\colon \mathbf{EC} \to \mathbf{CRM}^{op}.$$

References

[1] T. Bice, 《非交换 Pierce 对偶：Steinberg 环与 ample 环群胚丛》, arXiv 2012.03006。[2] G. G. de Castro、N. Machado, 《étale 范畴、限制半群及其算子代数》, arXiv:2211.07618v1。[3] J. R. B. Cockett、S. Lack, 《限制范畴 I：偏映射范畴》, *Theoret. Comp. Sci.* **270** 2002 223 259 ( ), –。

[4] A. Connes, 《非交换几何》, Academic Press, 1994。[5] V. A. R. Gould、M. V. Lawson, 《致敬 John B. Fountain》, *Semigroup Forum* **99** (2019), 1–8。[6] M. Grandis, 《凝聚范畴与流形》, *Ann. Mat. Pura Appl.* **157** (1990), 199–244。[7] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, CUP, 1986。[8] G. Kudryavtseva、M. V. Lawson, 《非交换框架理论展望》, *Adv. Math.* **311** 2017 378 468 ( ), –。

[9] A. Kumjian, 《关于局部化与简单 C^*-代数》, *Pacific J. Math.* **112** (1984), 141–192。[10] M. V. Lawson, 《半群与有序范畴 I：约化情形》, *Jour Algebra* **141** (1991), 422–462。[11] M. V. Lawson, 《关于 Ehresmann 半群》, *Semigroup Forum*, 103 (2021), 953–965。[12] M. V. Lawson、D. H. Lenz, 《伪群及其 ´étale 群胚》, *Adv. Math.* **244** (2013), 117–170。[13] A. L. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Progress in Mathematics, 170, Birkh¨auser, 波士顿, 1998。[14] J. Renault, *A groupoid approach to C^*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 793, Springer, 1980。[15] P. Resende, 《关于 ´étale 群胚、逆半群与量格的讲义》, GAMAP IP 会议讲义, 安特卫普, 2006 年 9 月 4–18 日, 共 115 页。[16] P. Resende, 《étale 群胚及其量格》, *Adv. Math.* **208** (2007), 147–209。

Mark V. Lawson, Department of Mathematics and the Maxwell Institute for Mathematical Sciences, Heriot-Watt University, Riccarton, Edinburgh EH14 4AS, UNITED KINGDOM*Email address*: m.v.lawson@hw.ac.uk