arXiv:2303.05196v1 [math.GN] 9 Mar 2023

使用半开集的覆盖博弈

Manoj Bhardwaj[a]，Alexander V. Osipov[b]

[a]德里大学数学系，新德里-110007，印度[b]乌拉尔联邦大学克拉索夫斯基数学与力学研究所，俄罗斯叶卡捷琳堡

摘要

本文证明以下定理

1. 极端不连通空间 X 具有半 Menger 性质，当且仅当玩家 One 在博弈$G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$中没有获胜策略。 2. 极端不连通空间 X 具有半 Rothberger 性质，当且仅当玩家 One 在博弈$G_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$中没有获胜策略。

这些结果回答了 [1]的问题3.7和 [2]的问题3.9。

关键词：半孟格尔博弈、半罗斯伯格博弈、选择原理 2010年数学学科分类：54D20，54B20

1. 引言

在拓扑空间中，通过各种变化来研究拓扑性质并非新鲜事。Scheepers [4]开启了对拓扑中的选择原理及其与博弈论和拉姆齐理论之间关系的研究（另见 [8]）。在过去二十年里，这一领域已变得足够重要，成为集合论拓扑学中最活跃的领域之一。

1924 年，孟格尔 [3] （另见 [7, 4]）在拓扑空间中引入并研究了孟格尔性质。该性质强于林德洛夫性，弱于 σ-紧致性。

网址：manojmnj27@gmail.com（Manoj Bhardwaj），OAB@list.ru（Alexander V. Osipov）

预印本提交至..... 2023年3月10日

拓扑博弈是研究拓扑性质及其与拉姆齐理论、强迫法、函数空间和其他相关主题之间关系的重要工具。选择原理理论的核心是，覆盖性质通过以典范的方式对开覆盖序列进行对角化来定义。每种覆盖性质都对应一个双人博弈。通常，在相应博弈中，第一位玩家不存在获胜策略等价于原性质；这为证明有关原性质的结果提供了有力工具。本文给出这类定理的概念性证明。

本文组织如下：第 2 节给出本文所用术语的定义。第 3 节研究半孟格尔博弈和半 Rothberger 博弈。

2. 预备知识

设 (X,τ) 或 X 是一个拓扑空间。对于 X 的子集 A，我们分别用 $Cl(A)$ 和 $Int(A)$ 表示 A 的闭包和 A 的内部。本文中，X 表示拓扑空间，集合 A 的基数记为 $|A|$。设 ω 为第一个无限基数，ω_1 为第一个不可数基数。下面给出基本定义。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的开覆盖族。

符号 $S_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 表示如下选择假设：对于 $\mathcal{A}$ 中元素的每个序列 $<\mathcal{U}_n: n\in\omega>$，都存在一个序列 $<U_n: n\in\omega>$，使得对于每个 n，$U_n\in\mathcal{U}_n$ 且 $\{U_n: n\in\omega\}\in\mathcal{B}$ [4]。

符号 $S_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 表示这样的选择假设：对于 $\mathcal{A}$ 中的每个序列 $<\mathcal{U}_n: n\in\omega>$，都存在一个序列 $<\mathcal{V}_n :n\in\omega>$，使得对于每个 n，$\mathcal{V}_n$ 都是 $\mathcal{U}_n$ 的有限子集，且 $\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{V}_n$ 是 $\mathcal{B}$ [4] 的一个元素。

若拓扑空间 X 的子集 A 满足 $A\subseteq Cl(Int(A)))$，则称其为半开集 [5] 。

本文中，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 表示空间 X 的以下开覆盖的集族：

$\mathcal{O}$： X 的所有开覆盖构成的集族，
$s\mathcal{O}$： X 的所有半开覆盖构成的集族。

定义 2.1. [3] 若空间 X 满足$S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$，则称其具有孟格尔性质。

若空间 X 满足$S_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$，则称其具有半 Rothberger 性质 [1] 。

在 [1], 中，作者提出了以下问题，作为问题3.7。

问题 2.2. 半 Rothberger 性质能否从博弈论或 Ramsey 理论的角度加以刻画?

定义 2.3. [2] 若对于 X 的每个半开覆盖序列 $<\mathcal{U}_n: n\in\omega>$，都存在一个序列$<\mathcal{V}_n: n\in\omega>$，使得对于每个 n，$\mathcal{V}_n$ 都是 $\mathcal{U}_n$ 的有限子集，并且每个 $x\in X$ 都属于 $\bigcup\mathcal{V}_n$，其中某个 n，即 X 满足 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$，则称空间 X 具有半 Menger 性质。

在 [2], 中，作者提出了以下问题，作为问题3.9。

问题 2.4. 半 Menger 性质能否从博弈论或 Ramsey 理论的角度加以刻画?

3. 半孟格尔博弈

半 Menger 游戏 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 是 Alice 和 Bob 两位玩家参与的博弈，每个自然数 n 对应一局。在每一局中，Alice 选取空间的一个半开覆盖，Bob 从该覆盖中选取有限多个成员。如果 Bob 在整个博弈过程中选取的集合覆盖了该空间，则 Bob 获胜；否则，Alice 获胜。

如果 Alice 在博弈 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中没有获胜策略，那么 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 成立。反向蕴含则需要深入研究。我们通过简化证明了这一点，这种简化使计算更容易；此外，我们采用了一个适合归纳法的概念，从而无需追踪对局历史。

定义 3.1. 空间 X 的可数覆盖 $\mathcal{U}$ 是一个尾覆盖，如果 $\mathcal{U}$ 的余有限子集的交集所组成的集合是 X 的一个开覆盖。等价地，覆盖 $\{U_1, U_2, ...\}$ 是一个尾覆盖，如果该族

$$\{\bigcap_{1\le n\le\infty} U_n, \bigcap_{2\le n\le\infty} U_n, ...\}$$

覆盖的共尾段的交集构成一个开覆盖。

如果覆盖中的元素是半开集，则称尾覆盖为 s-尾覆盖或尾半覆盖。

回顾一下，如果每个半开覆盖都有一个可数子覆盖，则称空间 X 是半林德洛夫¨的。

显然，每个半孟格尔空间都是半 Lindel¨of 空间。

定义 3.2. ([9]) 豪斯多夫空间 X 称为卢津空间（按照 Kunen 的定义），如果

(a) X 中的每个无处稠密集都是可数的；(b) X 至多有可数多个孤立点；(c) X 不可数。

根据 [10], 中的推论 2.5，如果 X 是一个不可数的豪斯多夫空间，那么 X是半林德洛夫空间，当且仅当 X 是按 Kunen 意义定义的卢津空间。

然而，值得注意的是，Kunen（ [9]中的定理 0.0）已证明，在苏斯林假设（SH）成立的条件下，根本不存在卢津空间。K. Kunen 证明，在 MA（$\aleph_1$, $\aleph_0$-中心）成立的条件下，存在卢津空间，当且仅当存在苏斯林直线。

由于卢津空间 X 是遗传林德洛夫且为豪斯多夫空间，因此其基数至多为 $\mathfrak{c} = 2^{\omega}$ （de Groot, [11]）。

因此，接下来我们只考虑遗传林德洛夫的豪斯多夫空间，并假设 SH 不成立。

空间 X 是极端不连通空间 [6] ，当且仅当每个开集的闭包都是开集。我们还知道，在极端不连通空间 X中，半开集的集族构成 X上的一个拓扑。

定理 3.3. 设 X 是满足 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 空间条件的极端不连通空间。那么 Alice 在博弈 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中没有获胜策略。

证明。设 σ 是 Alice 在博弈 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中的任意策略。如果 Bob 在某次对局中经过有限步后覆盖了空间，那么结论成立。否则，在每次对局中，Bob 都无法在有限步后覆盖空间。因此，我们假设在任何局面中，有限次选择连同此前的选择都不足以覆盖空间。由于空间 X 满足 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$，它是半 Lindel¨of 的；我们假设 X 的每个半开覆盖都是可数的。将 Bob 的行动限制为从 Alice 的半开覆盖中选取可数子覆盖后，我们可以假设 Alice 的覆盖都是可数的。因此，我们可以将这些半开覆盖枚举为 $\{U_1, U_2, ...\}$，并假设 $\{U_1, \subseteq U_2, \subseteq ...\}$，也就是说，Alice 的半开覆盖递增，而 Bob 每一轮都从递增的半开覆盖 $\{U_1, \subseteq U_2, \subseteq ...\}$ 中选择一个集合。事实上，给定一个可数半开覆盖 $\{U_1, U_2, ...\}$，我们可以将 Bob 的选择限制为 $\{U_1, \subseteq U_2, \subseteq ...\}$ 的形式，其中 $n \in \omega$。由于 Bob 的目标只是覆盖空间，我们可以假设 Bob 获得的覆盖具有 $\{U_1, U_1 \cup U_2, U_1 \cup U_2 \cup U_3, ...\}$ 的形式，或者能够覆盖空间；也就是说，Bob 选择一个

元素 $U_1 \cup ... \cup U_n$ 时，他以合法行动 $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ 回复 Alice。最后，我们假设对于 Alice 的策略针对行动 U 给出的每个回复 $\{U_1, U_2, ...\}$（其中 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq ...$），都有 $U = U_1$。事实上，我们可以将给定的半开覆盖变换为半开覆盖 $\{U, U \cup U_1, U \cup U_2, ...\}$。如果 Bob 选择 U，我们就向 Alice 提供答案 U_1；如果他选择 $U \cup U_n$，我们就向 Alice 提供答案 U_n。由于 Bob 已经选择了集合 U，在新策略中加入该集合并不能帮助覆盖更多的点。经过这些简化后，Alice 的策略可以表示为由半开集构成的一棵树，如下所示：

Alice's initial move is a semi-open cover
$\sigma(<>) = \mathcal{U}_1 = \{U_1, U_2, ...\}$;
Bob replies with $U_{k_1} = U_{\sigma(1)}$;
then Alice's move is an increasing cover
$\sigma(U_{\sigma(1)}) = \mathcal{U}_{\sigma(1)} = \{U_{\sigma(1),1}, U_{\sigma(1),2}, ...\}$;
Bob replies with $U_{\sigma(1),k_2} = U_{\sigma(1),\sigma(2)}$;
then Alice's move is an increasing cover
$\sigma(U_{\sigma(1),\sigma(2)}) = \mathcal{U}_{\sigma(1),\sigma(2)} = \{U_{\sigma(1),\sigma(2),1}, U_{\sigma(1),\sigma(2),2}, ...\}$;
Bob replies with $U_{\sigma(1),\sigma(2),k_3} = U_{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)}$;
.
.
.
if Bob replies with U_σ, for $\sigma \in \mathbb{N}^m$,
then Alice's move is an increasing semi-open cover
$\sigma(U_{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(m)}) = \mathcal{U}_{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(m)} =$
$\{U_{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(m),1}, U_{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(m),2}, ...\}$;

现在证明 $\mathcal{V}_n = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^m} \mathcal{U}_\sigma$ 是 X的尾半开覆盖。我们将对 n使用归纳法来证明。半开覆盖 $\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_{<>}$ 是递增的，因此余有限交集的集合仍然是 $\mathcal{V}_1$，即 X的半开覆盖，也就是 X的 s-尾覆盖。设 n 是一个自然数，并假设结论对 n成立，也就是说，$\mathcal{V}_n$ 是 X的尾半开覆盖。由于

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &= \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^m} \mathcal{U}_\sigma \\ &= \bigcup_{\sigma(i) \in \omega} \mathcal{U}_{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(m)}, \end{aligned}$$

也就是说，这是可数个可数集的并集，因为每个 σ（i）都有可数无穷多个选择。

由于 $\mathcal{V}_n$ 是可数的，我们将其枚举为

$$\mathcal{V}_n = \{V_1, V_2, ..., V_n, ...\}$$
and
$$\mathcal{V}_{n+1} = \{V_1 = V_1^1, V_2^1, V_3^1, ...\} \text{ (such that } V_1^1 \subseteq V_2^1 \subseteq V_3^1 \subseteq ...)$$
$$\cup\{V_2 = V_1^2, V_2^2, V_3^2, ...\} \text{ (such that } V_1^2 \subseteq V_2^2 \subseteq V_3^2 \subseteq ...)$$
$$\cup\{V_3 = V_1^3, V_2^3, V_3^3, ...\} \text{ (such that } V_1^3 \subseteq V_2^3 \subseteq V_3^3 \subseteq ...)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$

现在证明 $\mathcal{V}_{n+1}$ 是 X 的尾半开覆盖。设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_{n+1}$ 是一个余有限子集。对于每个 k，令 m_k 为满足 $V_{m_k}^k \in \mathcal{V}$ 的最小自然数。于是 $I = \{k \in \omega : m_k = 1\}$ 是自然数的余有限子集，因为 $\mathcal{V}$ 是余有限的。现在

$$\cap\mathcal{V} = \cap_{k\in\omega} V_{m_k}^k = (\bigcap_{k\in I} V_k) \cap (\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus I} V_{m_k}^k).$$

集合 $\bigcap_{k\in I} V_k$ 是半开集，因为 $\mathcal{V}_n$ 是尾半开覆盖，因此 $\bigcap_{k\in I} V_k$ 属于半开覆盖 $\mathcal{V}_n$ 的共尾段交集所构成的族。集合 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus I} V_{m_k}^k$ 是半开集，因为它是有限个半开集的有限交。因此 $\bigcap\mathcal{V}$ 是半开集。

现在证明 $\bigcap\mathcal{V}$ 覆盖 X。设 $x \in X$。由于 $\mathcal{V}_n$ 是尾半开覆盖，集合 $I = \{k \in \omega : x \in V_k\}$ 是余有限的。对于每个 $k \in \mathbb{N} \setminus I$，令 m_k 为满足 $x \in V_{m_k}^k$ 的最小自然数。于是

$$x \in (\bigcap_{k\in I} V_k) \cap (\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus I} V_{m_k}^k),$$

族 $\mathcal{V}_{n+1}$ 中某个余有限子集的交集。因此，对于每个 n，$\mathcal{V}_n$ 都是 X 的尾半开覆盖。

由于对于每个 n，$\mathcal{V}_n$ 都是 X 的尾半开覆盖。令 $\mathcal{V}_n'$ 为 $\mathcal{V}_n$ 的余有限子集的交集所构成的集合。那么对于每个 n，$\mathcal{V}_n'$ 都是 X 的半开覆盖。现在，将性质 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 应用于序列 $\langle\mathcal{V}_n' : n \in \omega\rangle$，Bob 得到 $\mathcal{H}_n$；对于每个 n 和 $X = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup\mathcal{H}_n$，它都是 $\mathcal{V}_n'$（一个递增覆盖）的有限子集。由于 $\mathcal{H}_n$ 是 $\mathcal{V}_n'$ 的有限子集且 $\mathcal{V}_n'$ 是递增覆盖，不妨假设 $\mathcal{H}_n$ 是 $\mathcal{V}_n'$ 的单元素子集。于是对于 $H \in \mathcal{H}_n$，H 是某个余有限子集（记作 $\mathcal{W}_n$）与 $\mathcal{V}_n$ 的交集，也就是说，$H = \bigcap\mathcal{W}_n$ 并且

$$\bigcup\mathcal{H}_n = H = \bigcap\mathcal{W}_n.$$

因此 $X = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap\mathcal{W}_n$。由于 $\mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{V}_n$ 的余有限子集，且处于 nth-inning 中，Alice 提供了 $\mathcal{V}_n$的一个无限子集 $\mathcal{G}_n$（它是一个递增覆盖），Bob

提供 $V_n \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{W}_n$ 和 $\bigcap \mathcal{W}_n \subseteq V_n$。然后 $X = \bigcup_{n\in\omega} V_n$，Bob 获胜。证明至此完成。 □

对于半 Rothberger 博弈，我们需要一个比上述定理稍强的结果。为此，我们首先证明半 Menger 性质 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 在可数并下保持：给定半孟格尔空间的一个可数并，以及一个半开覆盖序列，我们可以将覆盖序列拆分成无穷多个两两不相交的子序列，并用每个子序列覆盖给定的一个半孟格尔空间。

定理 3.4. 半 Menger 性质 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 在可数并下保持。

证明. 设 $\{X_k : k \in \omega\}$ 是空间 X 中具有半 Menger 性质的子空间族，且 $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega\rangle$ 是 X的一个半开覆盖序列。对于每个 $k \in \omega$，考虑序列 $\langle \mathcal{U}_n : n \geq k\rangle$。对于每个 $k \in \omega$，由于 X_k是半孟格尔空间，存在序列$\langle \mathcal{V}_{n,\,k} : n \geq k\rangle$，使得对于每个 $n \geq k$，$\mathcal{V}_{n,\,k}$ 是 $\langle \mathcal{U}_n : n \geq k\rangle$ 的有限子集，且$\bigcup_{n\geq k} \mathcal{V}_{n,\,k} \supseteq X_k$。对于每个 n，令

$$\mathcal{V}_n = \bigcup\{\mathcal{V}_{n,j} : j \leq n\}.$$

那么每个 $\mathcal{V}_n$ 都是$\mathcal{U}_n$的有限子集。于是对每个 $x \in X$，$x \in \bigcup X_k$。存在 $k \in \omega$ 使得 $x \in X_k$。因此，$\bigcup_{n\geq k} \mathcal{V}_{n,\,k} \supseteq X_k$。于是$\bigcup_{n\geq k} \mathcal{V}_{n,\,k} \subseteq \bigcup_{n\geq k} \mathcal{V}_n$，从而 $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$。证明完毕。 □

定理 3.5. 设 X 是满足 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 的空间。对于 Alice 在博弈 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中的任意策略，都存在一场遵循该策略的对局，

$$(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, ...),$$

使得对于每个点 $x \in X$，都有 $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$ 对无穷多个 n 成立。

证明. 积空间 $X \times \mathbb{N}$ 是半孟格尔空间的可数并，满足 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$。我们定义 Alice 在博弈 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中的一个策略，该博弈在空间 $X \times \mathbb{N}$ 上进行。设 U 是 Alice 在原博弈中的第一步。于是，在新博弈中，她的第一步是

$$\mathcal{U}' = \{U \times \{n\} : U \in \mathcal{U}, n \in \omega\}.$$

如果 Bob 选择一个有限集合 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{U}'$，我们就将集合

$$\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : \text{there is } n \text{ with } U \times \{n\} \in \mathcal{V}'\}$$

视为原博弈中的一步。然后 Alice 用一个覆盖 $\mathcal{V}$ 作出回应，我们以同样的方式继续进行。根据上述定理，存在一场对局

$$(\mathcal{U}_1', \mathcal{V}_1', \mathcal{U}_2', \mathcal{V}_2', ...)$$

在新博弈中，$\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n'$ 是 $X \times \mathbb{N}$的一个覆盖。考虑原策略中与之对应的对局，

$$(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, ...).$$

设 $x \in X$。存在一个自然数 n_1，使得 $(x, 1) \in \bigcup \mathcal{V}_{n_1}'$。于是$x \in \bigcup \mathcal{V}_{n_1}$。集合

$$V = \{k \in \omega : \text{there is } U \text{ with } U \times \{k\} \in \bigcup_{i\le n_1} \mathcal{V}_i'\}$$

是有限的。设 m 是一个大于集合 V中所有元素的自然数。存在一个自然数 n_2，使得 $(x, m) \in \bigcup \mathcal{V}_{n_2}'$。于是$x \in \bigcup \mathcal{V}_{n_2}'$，且$n_1 < n_2$。以类似的方式继续下去，我们看到，对于无穷多个 n，都有 $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$。 □

4. 半 Rothberger 博弈

半 Rothberger 性质 $S_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$及相应博弈 $G_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$的定义，分别类似于 $S_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$和 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$的定义；但在这里，我们从每个覆盖中选取一个元素。同样，如果 Alice 没有获胜策略，那么该空间就具有 $S_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$。下一些结果将证明其逆命题。

为此，我们需要以下引理。

引理 4.1. 设 X 是满足 $S_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 的极端不连通空间。设 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, ...$ 是非空的有限半开集族，并且对每个点 $x \in X$，对于无穷多个 n，都有 $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$。那么存在元素 $U_1 \in \mathcal{V}_1, U_2 \in \mathcal{V}_2, ...$，使得族 $\{U_1, U_2, ...\}$ 覆盖空间X。

证明。对于每个 n，令 $\mathcal{U}_n$ 为从序列 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, ...$ 的不同项中各取一个 n 半开集后所得的所有交集组成的族。于是，对于每个 n，$\mathcal{U}_n$都是 X 的半开覆盖。由于 X 满足 $S_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$，存在半开集 $V_1 \in \mathcal{U}_1, V_2 \in \mathcal{U}_2, ...$，使得 $\{V_1, V_2, ...\}$ 覆盖空间X。由于 $V_1 \in \mathcal{U}_1$, V_1 是某个 n对应的 $\mathcal{V}_n$ 中的一个成员。对于 $V_2 \in \mathcal{U}_2$，V_2 是来自两个不同 $\mathcal{V}_i$的半开集的交集。我们可以将 V_2 扩展为另一个族 $\mathcal{V}_m$ 中的一个元素，依此类推。通过这一过程，我们得到一个

至多从每个族 $\mathcal{V}_i$ 中选取一个元素的选择，它覆盖 X。因此，我们可以扩展这一选择，使其从每个族 $\mathcal{V}_i$中都包含一个元素。 □

对于自然数 k和集合族 $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_k$，令

$$\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 \wedge ... \wedge \mathcal{U}_k = \{U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k : U_1 \in \mathcal{U}_1, ..., U_k \in \mathcal{U}_k\}.$$

定理 4.2. 设 X 是一个满足 $S_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 的极端不连通空间。则 Alice 在博弈 $G_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中没有获胜策略。

证明. 固定 Alice 在半 Rothberger 博弈 $G_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中的任意策略。由于 $S_1(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 空间是半 Lindel¨of，我们可以假设策略中的每个半开覆盖都是可数的。令 $\mathbb{N}^{<\infty}$ 为自然数的有限序列集合。我们将策略中的半开覆盖编号为

$$\mathcal{U}_\sigma = \{U_{\sigma,1}, U_{\sigma,2}, ...\},$$

对于 $\sigma \in \mathbb{N}^{<\infty}$，使得 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ...\}$ 是 Alice 的第一步；对于每个由自然数组成的有限序列 $k_1, k_2, ..., k_n$，$\mathcal{U}_{k_1,k_2,k_3,...,k_n}$ 是 Alice 对局面

$$(\mathcal{U}, U_{k_1}, \mathcal{U}_{k_1}, U_{k_1,k_2}, \mathcal{U}_{k_1,k_2}, ..., U_{k_1,k_2,...,k_n}).$$

对于有限序列 $\tau, \sigma \in \mathbb{N}^n$，我们记作 $\tau \leq \sigma$，如果对所有 $i = 1, 2, ..., n$，都有 $\tau(i) \leq \sigma(i)$。我们定义 Alice 在半 Menger 游戏 $G_{fin}(s\mathcal{O}, s\mathcal{O})$ 中的一个策略。Alice 的第一步是 $\mathcal{U}$，即她在原策略中的第一步。假设 Bob 选择了 $\mathcal{U}$ 的一个有限子集 $\mathcal{F}$。令 m_1 为满足 $\mathcal{F} \subseteq \{U_1, U_2, ..., U_{m_1}\}$ 的最小自然数。那么，在半 Menger 游戏中，Alice 的应对是共同加细 $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 \wedge ... \wedge \mathcal{U}_{m_1}$。假设 Bob 从这个共同加细中选取了一个有限子集 $\mathcal{F}$。令 m_2 为满足 $\mathcal{F}$ 加细了 $i = 1, 2, ..., m_1$ 的所有集合 $\{U_{i,1}, U_{i,2}, ..., U_{i,m_2}\}$ 的最小自然数。于是 Alice 的应对是共同加细 $\bigwedge_{\tau \leq (m_1,m_2)} \mathcal{U}_\tau$。一般而言，对于 $\sigma \in \mathbb{N}^{<\infty}$，Alice 提供形如 $\bigwedge_{\tau \leq \sigma} \mathcal{U}_\tau$ 的半开覆盖；Bob 选择一个有限族，使其加细所有 $\tau \leq \sigma$ 对应的族 $\{U_{\tau,1}, U_{\tau,2}, ..., U_{\tau,m}\}$，其中 m 为最小自然数；随后 Alice 应对 $\bigwedge_{\tau \leq (\sigma,m)} \mathcal{U}_\tau$。

现在根据定理 3.5，存在一个对局

$$(\mathcal{U}, \mathcal{F}_1, \bigwedge_{k_1 \leq m_1} \mathcal{U}_{k_1}, \mathcal{F}_2, \bigwedge_{(k_1,k_2) \leq (m_1,m_2)} \mathcal{U}_{k_1,k_2}, ...),$$

根据新策略，使空间中的每个点都在序列 $\bigcup \mathcal{F}_1, \bigcup \mathcal{F}_2, ...$ 中被覆盖无限多次。根据引理 4.1，我们可以从每个集合 $\mathcal{F}_n$ 中选取一个元素来覆盖空间。存在 $k_1 \leq m_1$ 使得

第一个选取的元素是 U_{k_1} 的子集。存在 $k_2 \leq m_2$ 使得第二个选取的元素是 $U_{k_1,\ k_2}$ 的子集，依此类推。然后对局

$$(\mathcal{U}, U_{k_1}, \mathcal{U}_{k_1}, U_{k_1,k_2}, ...)$$

符合 Alice 在半 Rothberger 博弈中的策略，并由 Bob 获胜。

□

参考文献

[1] A. Sabah 和 M. Khan，半 Rothberger 空间及相关空间，波兰科学院通报，43(6) (2017), 1969-1987。[2] A. Sabah、M. Khan 和 Lj. D. R. Ko$\check{c}$inac，由半开集定义的覆盖性质，非线性科学与应用杂志，9 (2016), 4388-4398。.[3] K. Menger，点集论中的若干覆盖定理，会议报告第 3a 部，数学、天文学、物理学、气象学与力学（维也纳科学院，维也纳）133 (1924), 421-444。[4] M. Scheepers，开覆盖组合学（I）：拉姆齐理论，拓扑学及其应用，69 (1996), 31-62。[5]N. Levine，拓扑空间中的半开集与半连续性，《美国数学月刊》70 (1963), 36-41。[6] R. Engelking，一般拓扑学，修订完整版，Heldermann Verlag Berlin (1989)。.[7] W. Hurewicz，关于博雷尔定理的一种推广，数学杂志 24 (1925), 401-421。[8] W. Just、A.W. Miller、M. Scheepers 和 P.J. Szeptycki，开覆盖组合学（II），拓扑学及其应用，73 (1996), 241-266。[9] K. Kunen，卢津空间，拓扑学论文集，第 1 卷 (1976) 191–199。[10] M. Ganster、D.S. Jankovi´c、I.L. Reilly，关于相对于半开集的紧致性，Comment.Math.Univ.Carolinae 31:1 (1990) 37–39。[11] J. De Groot，豪斯多夫空间的离散子空间，波兰科学院通报，13 (1965) 537–544。