arXiv:2303.05198v1 [math.CO] 9 Mar 2023

无限多个绝对宇宙

Urban Larsson[1]印度理工学院孟买分校，印度**Richard J.Nowakowski**[2]达尔豪斯大学数学与统计系，加拿大**CarlosP. Santos**[3]数学与应用中心（NovaMath），FCT NOVA，葡萄牙

摘要

绝对组合博弈论最近被发展为一种统一的工具，用于构造性/局部博弈比较（Larsson 等，2018年）。该理论研究组合博弈的亲代宇宙；这些宇宙满足标准的闭包性质，且其中任意一对非空形式集都会生成该宇宙中的一个形式。在此，我们通过递归扩展二分博弈 mis`ère 宇宙和终局宇宙，证明绝对 mis`ère 宇宙有无限多个。另一方面，我们证明正常玩法恰有两个绝对宇宙，即全空间和所有小博弈组成的宇宙。

1 引言

绝对组合博弈论最近被发展为一种统一的工具，用于构造性/局部博弈比较 [6, 5]。文献中少量但意义重大的实例曾被用于阐释这一理论。在此，我们展示绝对理论有无限多种应用。

回顾短组合博弈偏序的定义： $G \geqslant H$ 若对所有博弈 X，只要左方在 $H + X$ 中获胜，她就会分别作为先手和后手在 $G + X$ 中获胜。组合博弈论中最著名的定理之一指出，在常规玩法约定下，$G \geqslant H$ 当且仅当左方玩家作为后手在 $G - H$ 中获胜。

在 mis`ere 博弈中，由于群结构的缺失，比较结果更为复杂。但近期研究发现，存在构造性方法，其意义在于

[1]larsson@iitb.ac.in[2]r.nowakowski@dal.ca[3]本研究由 UIDB/00297/2020 和 UIDP/00297/2020 项目资助；cmf.santos@fc.ul.pt

只需要游戏 G 和 H，以及一些先决条件。由于完整 mis`ere 中的等价类很小（例如零类是平凡的），人们往往转向受限／模化的 mis`ere，以寻求更多的阶和代数结构。这自然要求标准游戏算子具有闭包性质，例如取选项、加法和共轭。任何满足闭包性质的游戏集合都是一个游戏宇宙。

最近的一项突破中，作者证明了一个一般性的构造性比较结果：只要满足另一种称为亲代性的自然闭包性质，这一结果不仅适用于正常玩法和 mis`ere 玩法，也适用于计分玩法。若对于宇宙中的任意两个非空博弈子集 A 和 B，博弈 $\{A \mid B\}$ 都属于该宇宙，则称该宇宙具有亲代性。具有亲代性且“结果饱和”的宇宙称为绝对宇宙，此时绝对理论适用。事实证明，结果饱和是亲代性的推论。因此，判断某个宇宙是否属于绝对理论框架，唯一需要检验的相关性质就是亲代性。

通常，对某种约定的限制只涉及博弈形式，而不涉及胜负/终局约定。最著名的限制是“无偏”，意指在每个游戏阶段，双方玩家拥有相同的选项。然而，无偏游戏宇宙不具有亲代性。另一种标准限制是二分博弈，意指在每个游戏阶段，要么双方玩家都能行动，要么双方玩家都不能行动。所有二分游戏的宇宙都具有亲代性（与胜负/终局约定无关）。另一种应用广泛的限制是终止型游戏宇宙。如果在某个游戏阶段，左方玩家无法行动，那么无论右方玩家之后采取何种一系列着法，左方玩家仍然无法行动。右方玩家不可能再为左方玩家创造更多选项。反之亦然。所有放置规则游戏都具有这一性质。终局宇宙包含二分游戏宇宙，并且具有亲代性。

Siegel [11, 10] 研究完全计分的 mis`ere，Dourbec 等人 [1] 研究二分计分的 mis`ere，而 Milley 等人研究终结博弈中的 mis`ere [7, 9]。Milley 等人 [8] 对这一进展作了精彩的综述。在绝对理论框架下，还研究了类似的亲代计分玩法宇宙：Stewart 研究了完全计分玩法，[12, 13]，Ettinger 研究了二分计分玩法，[2]，作者则研究了保证计分玩法。[3, 6]

因此，我们已经知道绝对理论涵盖了若干常见情形。然而，要使一套理论真正有用，人们希望它适用于无限多个实例。本文证明，就可区分性而言，亲代宇宙有无限多个。我们

分别通过递归扩展 mis`ère 二分博弈和终结博弈来证明这一点。我们证明，与之相反，正常玩法只有两个绝对宇宙。

在第2节中，我们回顾一些绝对术语和组合博弈的基本定义。在第2.1节中，我们定义亲代性的概念。在第3节中，我们讨论博弈形式的二分核，并定义给定博弈形式集合的（亲本）闭包。本文其余部分专论经典约定，即第4节。我们从第4.1节的正常玩法开始，最后在第4.2节讨论无穷多个 mis`ere 绝对宇宙。在第4.2.1节中，我们研究介于二分宇宙与终局宇宙之间的宇宙；在第4.2.2节中，我们研究包含终局宇宙的宇宙。

2 一些绝对术语

该理论建立在一个关于装饰值 $\mathcal{A}$ 的全序、加法阿贝尔群之上。终端局面具有 $\{\varnothing^\ell \mid \varnothing^r\}$ 的形式，其中 $\ell, r \in \mathcal{A}$。一般而言，若 G 是一个没有左选项的博弈，则我们写作 $G^{\mathcal{L}} = \varnothing^\ell$，其中某个 $\ell \in \mathcal{A}$；若右方没有选项，则对某个 $r \in \mathcal{A}$，我们写作 $G^{\mathcal{R}} = \varnothing^r$。

我们将 $\varnothing^a$ 称为原子，将 $a \in \mathcal{A}$ 称为装饰值。左方（右方）没有可行棋步的局面称为左方原子（右方原子）。纯原子局面同时是左方原子和右方原子。令 $\mathbf{0} = \{\varnothing^0 \mid \varnothing^0\},$，其中 0 是 $\mathcal{A}$的单位元。在本文中，每当 $\mathcal{A} = \{0\}$时，我们省略装饰值 0，直接写作 $\varnothing = \varnothing^0$。

自由空间在一组装饰值的基础上递归构造所有可能的博弈形式。令 $\mathcal{A}$ 为一组装饰值，并令 $\Omega_0 = \{\{\varnothing^\ell \mid \varnothing^r\} \mid \ell, r \in \mathcal{A}\}$。对于$n > 0$，$\Omega_n$ 是所有选项为 Ω_{n-1}中有限集合的博弈形式的集合，其中包括左方原子和/或右方原子的博弈形式；生日为 n 的博弈形式的集合为 $\Omega_n \backslash \Omega_{n-1}$。令 $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 0} \Omega_n$。则 $\Omega = (\Omega\ \mathcal{A})$是一个博弈形式自由空间。

有时我们会宽泛地把博弈形式 $G \in \Omega$ 简称为博弈，尽管目前还没有任何动机促使人们进行博弈，也没有在同一自由空间中将 G 与其他博弈进行比较。求值函数ν：$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$负责前一部分；这里我们只关注 $A = 0$ 和 $V = \{-1, +1\}$。函数 ν 区分正常玩法与反常玩法：在正常玩法中，$\nu_L(0) = -1$，$\nu_R(0) = +1$；而在反常玩法中，我们有 $\nu_L(0) = +1, \nu_R(0) = -1$。

博弈空间 $(\Omega\ \mathcal{A}, V, \nu)$ 这一概念还包括自由空间

以及 E 和 ν。通常，我们写作 $G \in \Omega$，并假定存在一个给定的底层博弈空间四元组。

在博弈的析取和中，当前玩家恰好选取一个博弈分量进行博弈，同时保持其余分量不变。这里以及下文中，形如 $G^{\mathcal{L}} + H$ 的表达式表示形式为 $G^L + H$, $G^L \in G^{\mathcal{L}}$ 的博弈集合；只有当 $G^{\mathcal{L}}$ 非原子时，这个概念才有定义。

考虑一个自由空间 $(\Omega\ \mathcal{A})$，以及一对博弈形式 $G, H \in (\Omega\ \mathcal{A})$。$G$ 与 H 的析取和定义如下：

$$G+H = \begin{cases} \{\varnothing^{\ell_1+\ell_2} \,|\, \varnothing^{r_1+r_2}\} \text{ if } G = \{\varnothing^{\ell_1} \,|\, \varnothing^{r_1}\} \text{ and } H = \{\varnothing^{\ell_2} \,|\, \varnothing^{r_2}\}; \\ \left\{\varnothing^{\ell_1+\ell_2} \,|\, G^{\mathcal{R}} + H, G + H^{\mathcal{R}}\right\}, \text{ if } G = \left\{\varnothing^{\ell_1} \,|\, G^{\mathcal{R}}\right\}, H = \left\{\varnothing^{\ell_2} \,|\, H^{\mathcal{R}}\right\}, \\ \text{ and at least one of } G^{\mathcal{R}} \text{ and } H^{\mathcal{R}} \text{ non-atomic}; \\ \left\{G^{\mathcal{L}} + H, G + H^{\mathcal{L}} \,|\, \varnothing^{r_1+r_2}\right\}, \text{ if } G = \left\{G^{\mathcal{L}} \,|\, \varnothing^{r_1}\right\}, H = \left\{H^{\mathcal{L}} \,|\, \varnothing^{r_2}\right\}, \\ \text{ and at least one of } G^{\mathcal{L}} \text{ and } H^{\mathcal{L}} \text{ non-atomic}; \\ \left\{G^{\mathcal{L}} + H, G + H^{\mathcal{L}} \,|\, G^{\mathcal{R}} + H, G + H^{\mathcal{R}}\right\}, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

给定博弈的共轭会交换玩家的角色。$G \in \Omega$ 的共轭为

$$\overleftarrow{G} = \begin{cases} \{\varnothing^{-r} \,|\, \varnothing^{-\ell}\}, & \text{if } G = \{\varnothing^{\ell} \,|\, \varnothing^{r}\},\ \ell, r \in \mathcal{A} \\ \{\overleftarrow{G^{\mathcal{R}}} \,|\, \varnothing^{-\ell}\}, & \text{if } G = \{\varnothing^{\ell} \,|\, G^{\mathcal{R}}\} \\ \{\varnothing^{-r} \,|\, \overleftarrow{G^{\mathcal{L}}}\}, & \text{if } G = \{G^{\mathcal{L}} \,|\, \varnothing^{r}\} \\ \{\overleftarrow{G^{\mathcal{R}}} \,|\, \overleftarrow{G^{\mathcal{L}}}\}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，$G^{\mathcal{L}}$ 表示博弈形式 G^L（$G^L \in G^{\mathcal{L}}$）的集合，$G^{\mathcal{R}}$ 同理。

2.1 博弈形式的亲本宇宙

若博弈形式集合 $\mathrm{U} \subseteq (\Omega\ \mathcal{A})$ 满足基本定义上的以下闭包性质，则其性质良好，并构成一个游戏宇宙。

a) $\Omega_0 \subseteq \mathrm{U}$;

b) U 对析取和封闭：若 G、$H \in \mathrm{U}$，则 $G + H \in \mathrm{U}$;

c) U 对共轭封闭：若 $G \in \mathrm{U}$，则 $\overleftarrow{G} \in \mathrm{U}$;

d）U 是遗传闭合的：如果 $G \in \mathrm{U}$，且 G' 是 G 的一个选项，那么 $G' \in \mathrm{U}$；

如果对于任意一对非空有限的博弈形式集合 $\mathcal{G}$、$\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$，都有 $\{\mathcal{G}|\mathcal{H}\} \in S$，那么博弈形式集合 $S \subset (\Omega\ \mathcal{A})$ 就是亲本的。若亲本集合 S =U 是一个宇宙，则 U 是一个亲代宇宙。

根据以下定义，可以得到一些经典亲本宇宙。

定义 1（二分游戏）。若博弈形式 G 满足 $G^{\mathcal{L}} = \varnothing \Leftrightarrow G^{\mathcal{R}} = \varnothing$，且所有选项都是二分博弈，则称其为二分博弈。二分博弈形式的亲代宇宙记作 D。

定义 2（终结博弈）。终结博弈形式具有这样的性质：如果在游戏的某个阶段，一名玩家无法行动，那么无论另一名玩家随后进行什么一系列行动，该玩家都无法行动。若终结博弈形式 G 满足 $G^{\mathcal{L}} = \varnothing$，则称其为左端；若满足 $G^{\mathcal{R}} = \varnothing$，则称其为右端；因此，零博弈 $\{\varnothing\,|\,\varnothing\}$ 既是左端，也是右端。左端或右端称为终端。终结博弈形式的亲代宇宙记作 E。

3 亲本博弈形式的闭包

问题 3. 对于给定的自由空间 Ω，最“小”的亲代宇宙是什么?

“最小”这一概念需要加以定义。

定义 4（核）。考虑博弈宇宙 $\mathrm{U}' \subseteq \mathrm{U} \subset (\Omega\ \mathcal{A})$，其中 U 是亲本的。那么，如果 U 满足以下条件，U 就是 Ω 的核：若 U′ 是一个亲代宇宙，则 U′ =U。

事实证明，问题 3 的答案并不取决于所包含的博弈空间。

对于任意给定的博弈空间，最小的亲代宇宙是二分宇宙。

定理5（二分博弈形式）。设有自由空间 $(\Omega\ \mathcal{A})$，以及宇宙 $\mathrm{U} \subseteq (\Omega\ \mathcal{A})$。如果 U 是亲本宇宙，那么 Ω 的所有二择形式都属于 U。

证明。假设存在一个二分博弈形式 $G \notin \mathrm{U}$。假定在这种条件下，G 是一个最简形式。我们不可能有 $G \in \Omega_0$，因为根据宇宙的定义，

$\Omega_0 \subseteq \mathsf{U}$，这与事实 $G \notin \mathsf{U}$ 矛盾。因此，我们有 $G^{\mathcal{L}} \neq \varnothing$ 和 $G^{\mathcal{R}} \neq \varnothing$。但是，根据二择形式的定义， $G^{\mathcal{L}}$ 和 $G^{\mathcal{R}}$ 的元素都是二择形式；根据最小秩假设，这些元素属于 U。因此，根据亲代性， $G \in \mathsf{U}$；这又构成了矛盾。Ω 的所有二分博弈形式都属于 U。 □

推论 6（二分核）。自由空间的核就是其二分游戏宇宙。

证明。结合定义 4 和定义 1 与定理5即可。 □

我们来定义博弈形式上的三个集合算子。

定义 7（集合算子）。在博弈形式集合 $S \subseteq (\Omega\ \mathcal{A})$ 上有三个集合算子。

析取和算子： $\mathcal{D}(S) = \{G + H : G, H \in S\}$;

↩共轭算子： $\mathcal{C}(S) = \{G : G \in S\}$;

The parental operator: $\mathcal{P}(S) = \{\{X \,|\, Y\} : X, Y \subseteq S, |X| > 0, |Y| > 0\}$.

定义 8（博弈形式的闭包）。设 $S \subseteq (\Omega\ \mathcal{A})$ 是一个遗传闭合的博弈形式集合，并考虑以下递归:

第 0 天。 $S_0 = S \cup \Omega_0$;

Day $n > 0$. $S_n = \mathcal{D}(\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i) \cup \mathcal{C}(\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i) \cup \mathcal{P}(\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i)$.

S 的闭包是博弈形式的集合 $\overline{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$。

定理 9。设 $S \subseteq (\Omega\ \mathcal{A})$ 是一个遗传闭合的博弈形式集合。集合 $\overline{S}$ 是一个亲代宇宙。

证明。遗传闭合可通过展开第 0 天得出，同时考虑到 S 是遗传闭合的。析取和的闭包、共轭的闭包以及亲本性则由定义 8 得出。 □

4 经典约定

问题 10。在经典约定下，正常玩法和错失玩法中分别有多少个亲代宇宙?

我们使用博弈的标准区分算子。

固定一种约定：常规玩法或 mis`ere-play。博弈 G 的完美博弈结果为

- $o(G) = \mathscr{L}$ 如果无论谁先开始，左方都会获胜。
- $o(G) = \mathscr{R}$ 如果无论谁先开始，右方都会获胜。
- $o(G) = \mathscr{N}$ 如果无论谁先开始，下一位玩家都会获胜。
- $o(G) = \mathscr{P}$ 如果无论谁先开始，上一位玩家都能获胜。

在经典约定中，装饰值的集合是 $\mathcal{A} = \{0\}$，我们可以将 $\Omega = (\Omega\ \mathcal{A})$ 视为相同，并省略对空博弈集合的装饰。

定义 11（可区分性）。设 $\mathrm{U} \in \Omega$ 是一个宇宙。若存在 $X \in \mathrm{U}$，使得 $o(G+X) \neq o(H+X)$，则一对博弈 $G, H \in \mathrm{U}$ 在模 U 意义下可区分。若 G 和 H 在模 U 意义下不可区分，我们就称它们相等，并记作 $G = H$ (模 U)。

定义 12（真扩张）。设 U、$\mathrm{U}' \in \Omega$ 是两个宇宙，且 $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{U}'$。若存在 $G \in \mathrm{U}'$,，使得对于所有 $H \in$U， G 和 H 在模 U' 意义下可区分，则称 U' 是 U 的真扩张。若 U' 不是 U 的真扩张，我们记作 $\mathrm{U} \simeq \mathrm{U}',$，表示宇宙 U 与 U' 在可区分性方面相同。

观察 13。请注意，游戏宇宙在博弈形式方面可能有所不同，但在可区分性方面可能相同。

回到问题 10，随之而来的问题是如何从二分核中获得真扩张。

4.1 正常玩法

我们先来分析正常玩法下的博弈空间 Ω。

定理14。设 $\mathrm{U} \subseteq \Omega$ 是一个正常玩法的亲代宇宙。如果 U 中包含一个模 Ω 与零可区分的非二分形式，那么 $\mathrm{U} \simeq \Omega$。

证明。在定义 12 中，取 U′ =Ω；所有比较都针对正常玩法博弈的完整博弈空间。我们假设 U 中存在一个非二分形式，因此它有一个后继 G，该后继是左原子或右原子，但不同时是两者。不失一般性，设 G 是右原子而不是左原子。那么左方后手获胜，所以 $G \geqslant \mathbf{0}$。但根据假设，$G \neq \mathbf{0}$，所以 $G > \mathbf{0}$。

我们断言 $G = \boldsymbol{k}$ 是一个正整数。也就是说，对于 G 的所有左选项，$k = \min\{\ell : \boldsymbol{\ell} > G^L\}$，且 ℓ 是一个正整数。首先，假设右方先手进行博弈 $G - \boldsymbol{k}$。由于 G 是右原子的，唯一的选项是$G-\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$。根据 k 的最小性，存在一个左选项 G^L，使得 $G^L \geqslant \boldsymbol{k}-\mathbf{1}$。因此，右方先手进行 $G^L - \boldsymbol{k} + \mathbf{1}$ 时，左方获胜。接下来，假设左方先手进行 $G - \boldsymbol{k}$。根据定义，对于所有左选项，$G^L - \boldsymbol{k} < 0$。因此，左方失败。

我们有以下几种可能：

1. 如果 $k = 1$，那么 U 中存在一个等于 1 的形式；

2. 如果 $k > 1$，那么，根据简洁性定理 $\{\mathbf{0} \mid \boldsymbol{k}\} = \mathbf{1}$，并且由于 U 是亲本的，U 中存在一个等于 1 的形式；

在这两种情况下，U 中都有一个等于 1 的形式。但由于 U 对共轭和析取和封闭，每个整数都有一个属于 U 的形式。

现在，令 $G = \{G^{\mathcal{L}} \mid G^{\mathcal{R}}\}$ 为正常玩法下任意一个非原子典范形式。考虑由 $G^{\mathcal{L}} \cup G^{\mathcal{R}}$ 得到的形式 G'：将其中所有整数替换为 U 中与之相等的形式（这些形式的存在性已得到保证），并将 $G^{\mathcal{L}} \cup G^{\mathcal{R}}$ 中所有其他形式替换为 U 中与之相等的形式（根据归纳法，假定这些形式存在）。一方面，根据构造，$G' =_{\mathbb{Np}} G$，因为这两个形式的选项集合模 Ω 等价。另一方面，根据亲本性，$G' \in$U。由此可知，每个短博弈值都有一个属于 U 的形式，因此 U $\simeq$Ω。

□

因此，我们得到如下结果。

推论15. 二叉（全小）宇宙是在正常玩法下唯一的真绝对宇宙。

证明。根据定理14，我们知道，绝对宇宙不会小于所有二分游戏的宇宙。根据定理5，我们知道，向二分游戏中加入任何非二分博弈形式，都会产生完整的博弈空间 Ω。因此，二分游戏的宇宙 U $\subseteq$ Ω；注意，如果 $X \in$ U，那么 $X + \mathbf{1} \in \mathscr{L}$，但 $-\mathbf{1} + \mathbf{1} \in \mathscr{P}$，所以 U $\subset$ Ω 确实是真扩张。

□

4.2 先手必胜玩法

那么 mis`ere-play 呢？定理 19 是解答这个问题的第一步。我们将给出两种不同的证明：首先采用一种经典变体，找出明确的区分游戏；然后使用现代方法，即在 [5] 中发展起来的绝对理论。

我们将结果函数分为两个部分。先手必胜玩法可能的结果为 L（左方获胜）和 R（右方获胜）；按照惯例，它们按全序排列，且 L > R。在双方都采取最优策略时，先手必胜博弈的左方结果和右方结果分别为

$$o_L(G) = \begin{cases} \mathrm{L}, & \text{if } G^{\mathcal{L}} = \varnothing; \\ \max o_R(G^L), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$o_R(G) = \begin{cases} \mathrm{R}, & \text{if } G^{\mathcal{R}} = \varnothing; \\ \min o_L(G^R), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

。在 [5], 中，我们证明了以下结果。

定理 16（基本序，[5]）。设 $\mathbf{U} \subseteq (\Omega\ \mathcal{A})$ 是一个组合博弈的绝对宇宙，并令 $G, H \in \mathbf{U}$。那么 $G \geqslant H$ 当且仅当以下两个条件成立

先决条件:

$o_L(G + X) \geqslant o_L(H + X)$ *for all Left-atomic* $X \in \mathbb{U}$;

$o_R(G + X) \geqslant o_R(H + X)$ *for all Right-atomic* $X \in \mathbb{U}$;

保持性:

对于所有 G^R，都存在一个 H^R 使得 $G^R \geqslant H^R$；或者存在一个 G^{RL} 使得 $G^{RL} \geqslant H$;

对于所有 H^L，都存在一个 G^L 使得 $G^L \geqslant H^L$；或者存在一个 H^{LR} 使得 $G \geqslant H^{LR}$。

由此可得以下有用的结果。它之所以有用，是因为正常游戏理论广为人知，因此很容易看出正常玩法不等式何时不成立。如果该不等式不成立，那么它在任何（！）绝对宇宙中都不成立。事实上，本文证明了这样的宇宙有无穷多个。

推论 17（正则玩法序保持，[5]）。设 $G, H \in \mathrm{U}$ 为一个绝对宇宙。若 $G \geqslant_{\mathbb{U}} H$，则 $G \geqslant_{\mathbb{N}\mathbb{P}} H$。

接下来的结果表明，mis`ere-play 约定比正常玩法具有更丰富的结构。

4.2.1 严格介于 D 与 E 之间的绝对宇宙

首先，我们给出两个证明，说明存在一个严格介于 D 与 E 之间的绝对宇宙。我们将用到一个与共轭密切相关的概念。

定义 18（伴随）。设 U 是一个 mis`ere-play 游戏宇宙，$G \in \mathrm{U}$ 是一个博弈。那么，G° 是 G的伴随，其中

$$G^\circ = \begin{cases} \{\mathbf{0} \,|\, \mathbf{0}\} & \text{if } G = \mathbf{0}; \\ \left\{G^{\mathcal{R}\circ} \,|\, \mathbf{0}\right\} & \text{if } |G^{\mathcal{R}}| > 0 \text{ and } G^{\mathcal{L}} = \varnothing; \\ \left\{\mathbf{0} \,|\, G^{\mathcal{L}\circ}\right\} & \text{if } |G^{\mathcal{L}}| > 0 \text{ and } G^{\mathcal{R}} = \varnothing; \\ \left\{G^{\mathcal{R}\circ} \,|\, G^{\mathcal{L}\circ}\right\} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且，$\circ$ 作用于一个集合时，是对其元素进行操作。

众所周知，在 mis`ere-play 约定下，$G + G^\circ \in \mathcal{P}$。

定理 19. 设 $S = \mathrm{D} \cup \{\mathbf{1}\}$，其中 $\mathbf{1} = \{\mathbf{0} \,|\, \varnothing\}$。那么，$\overline{S}$ 是 D 的真扩张，而 E 是 $\overline{S}$ 的真扩张。

证明 1. 根据 S 的闭包定义，我们注意到，$\mathbf{0}$、$\mathbf{1}$、$\mathbf{1}+\mathbf{1}$、.....是 $\overline{S}$ 中唯一的右原子博弈。

首先，我们证明每个右原子博弈都可与任意二分博弈区分开来。这由保持性推出，具体来说是由推论 17 得出，因为严格右原子博弈是一个正数，因此在正常玩法中大于任何二分博弈。因此，模 $\overline{S}$，非零的右原子博弈不可能等于二分博弈。由此，$\overline{S}$ 是 D 的真扩张。

我们来看看，模 E 时，$\{\mathbf{0}、\ \mathbf{1} \,|\, \varnothing\}$ 与 $\overline{S}$ 中所有右原子博弈都不同。

- 博弈 $\{\mathbf{0}、\ \mathbf{1} \,|\, \varnothing\} \neq \mathbf{0}$，因为 $o(\{\mathbf{0}、\ \mathbf{1} \,|\, \varnothing\}) = \mathscr{R}$ 和 $o(\mathbf{0}) = \mathscr{N}$。
- 博弈 $\{\mathbf{0}、\ \mathbf{1} \,|\, \varnothing\} \neq \mathbf{1}$，因为 $o(\{\mathbf{0}、\ \mathbf{1} \,|\, \varnothing\} + \{\mathbf{0} \,|\, *\}) = \mathscr{L}$和 $o(\mathbf{1} + \{\mathbf{0} \,|\, *\}) = \mathscr{P}$。

- 博弈 $\{\mathbf{0}、\ \mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq \mathbf{1}+\mathbf{1}$，因为 $o(\{\mathbf{0}、\ \mathbf{1}\,|\,\}+\{\mathbf{0}\,|\,*\}) = \mathscr{L}$和 $o(\mathbf{1}+\mathbf{1}+\{\mathbf{0}\,|\,*\}) = \mathscr{N}$。
- 博弈 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq \mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}$（加项多于两个），因为 $o(\{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\,|\,\varnothing\}+\{\mathbf{0}\,|\,*\}) = \mathscr{L}$和 $o(\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}+\{\mathbf{0}\,|\,*\}) = \mathscr{R}$。

现在，考虑一个非右原子博弈 G。因为 $o(\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\}) = \mathscr{R}$，在相等的情况下，这就迫使 $o(G) = \mathscr{R}$。设

$$X = \{\{\mathbf{0}\,|\,\text{all adjoints of followers of } G\}\,|\,*, \{\mathbf{0}\,|\,*\}\}.$$

先手时，右方通过选择 G 的局部 mis`ere 博弈获胜路线，在 $G+X$ 中获胜。这是因为左方在 X 中只有败着。也就是说，每当左方在 X 中行棋，右方就回应到 G 的相应伴随后继。若左方最后一步走到 $\mathbf{0}+X$，右方则回应 $*$；若左方最后一步走到 $\mathbf{1}+X$，右方则回应 $\mathbf{1}+\{\mathbf{0}\,|\,*\}$；若左方最后一步走到 $\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}+X$（至少有两个加项），右方则回应 $\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}+*$。另一方面，先手时，右方在 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\}+X$ 中输掉。因此，$\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq G$。这证明 E 是 $\overline{S}$ 的真扩张。 □

证明2。前两段与第一个证明相同。

让我们用定理 16 证明 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\}$ 在模 E 意义下不同于所有由 $\overline{S}$ 构成的右原子博弈。我们大量运用了推论 17。在第三项中，我们无法使用它，但保持性会在 E 中导出矛盾，而且先决条件也会导出另一个矛盾。

- 这个博弈是 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq \mathbf{0}$，因为 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} =_{\text{正常玩法}} \mathbf{2} >_{\text{正常玩法}} \mathbf{0}$。
- 这个博弈是 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq \mathbf{1}$，因为 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} =_{\text{正常玩法}} \mathbf{2} >_{\text{正常玩法}} \mathbf{1}$。
- 这个博弈是 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq \mathbf{1}+\mathbf{1}$，因为对于 $\mathrm{L} = o_L(\{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\,|\,\varnothing\}-\mathbf{1}) > o_L(\mathbf{1}+\mathbf{1}-\mathbf{1}) = \mathrm{R}$，先决条件并不成立。事实上，尽管正常玩法下相等，保持性仍不成立。也就是说，取 $H = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\}$和 $G = \mathbf{1}+\mathbf{1}$。选择 $H^L = \mathbf{0}$。那么不存在满足$G^L \geqslant H^L$的 G^L，因为在 mis`ere 玩法中 $\mathbf{1} \not\geqslant \mathbf{0}$，并且不存在满足 $G \geqslant H^{LR}$的 H^{LR}。
- 博弈 $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq \mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}$（加项多于两个），因为 $\{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\,|\,\varnothing\} =_{\mathbb{Np}} 2 <_{\mathbb{Np}} 3 \leqslant \mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}$。

此外，根据正常游戏理论和推论 17，可以推得$\{\mathbf{0},\mathbf{1}\,|\,\varnothing\} \neq G$当 $G^{\mathcal{R}} \neq \varnothing$且 $G \neq_{\mathbb{Np}} \mathbf{2}$时。否则，就需要采用与第一个证明中类似的论证。 □

定理 19 表明，$S = \mathsf{D} \cup \{\mathbf{1}\}$ 的闭包大于二分宇宙，但小于终局宇宙。通过扩展这种方法，我们证明了二分宇宙与终局宇宙之间严格存在无限多个扩张。

定义 20。设 n 是一个非负整数。那么，n 左方步数递归定义如下：

$\mathbf{0} = \{\varnothing \,|\, \varnothing\}$;

$\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{n}-\mathbf{1} \,|\, \varnothing\}$ if $n \geqslant 1$.

形式 $-\boldsymbol{n}$、n 右方步数的递归定义方式类似。

定义 21。设 n 是一个非负整数。那么，n 左方受控步数递归定义如下：

$\widehat{0} = \mathbf{0}$;

$\widehat{n} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}-1 \,|\, \varnothing\}$ if $n \geqslant 1$.

形式 $\widehat{-n}$、n 右方受控步数的递归定义方式类似。

注意，在正常玩法中，我们无需区分步数和受控步数。然而，在 mis`ère 玩法中，这些形式并不相等。我们将研究以下游戏宇宙的闭包。

定义 22。对于 $n \geqslant 1$，令 $S_n = \mathsf{D} \cup \{\widehat{1}, \ldots, \widehat{n+1}\}$。

因此，$\overline{S_0}$ 是定理 19 中研究的宇宙。游戏宇宙 $\overline{S_n}$ 是亲本的，因为它们是二分宇宙的扩张。

定义 23。递归地，令 $\circledast_n$ 为博弈形式

$\circledast_0 = *$;

$\circledast_n = \{0 \,|\, \circledast_{n-1}\}$, if $n > 0$.

观察 24。在常规玩法约定下，这些博弈形式是博弈 $*$、$\uparrow$、$\Uparrow *$、$3.\uparrow$、$4.\uparrow *$、...的典范形式。

引理 25. 考虑 mis`ere-play，其中 $n \geqslant 1$。若且唯若 $n = k$，左方后手时获胜。

证明. 若 k 为零，结论显然。

假设 $k > 0$ 且 $n = k$。右方玩家从 $\boldsymbol{k} + \circledast_k$ 走到$\boldsymbol{k} + \circledast_{k-1}$，走出第一步后，左方玩家应对为 $\boldsymbol{k} - \mathbf{1} + \circledast_{k-1}$，并通过归纳法获胜。

假设 $k > 0$ 且 $n \neq k$。右方玩家从 $\boldsymbol{n} + \circledast_k$走到 $\boldsymbol{n} + \circledast_{k-1}$，走出第一步后，有两种可能。如果左方玩家从 $\boldsymbol{n} + \circledast_{k-1}$ 走到 $\boldsymbol{n}$，右方玩家获胜，因为他没有其他着法了。如果左方玩家从 $\boldsymbol{n} + \circledast_{k-1}$ 走到$\boldsymbol{n} - \mathbf{1} + \circledast_{k-1}$，右方玩家应对为 $\boldsymbol{n} - \mathbf{1} + \circledast_{k-2}$，并通过归纳法获胜；或者，如果$k - 1 = 0$，右方玩家走到 $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$，也能获胜，因为这样会让左方玩家走最后一步。在第二种情况下，注意到，由于 $k = 1$、 $n \geqslant 1$ 和 $n \neq k$，我们必有 $n \geqslant 2$。□

以下结果依赖于失常玩法约定中的等价类。我们给出两种证明；第一种证明中，我们找出一个明确的区分博弈；第二种证明中，我们使用绝对理论。

定理 26. 在 D 和 E 之间严格存在无限多个绝对宇宙。

证明 1. 设 n 为一个非负整数。只需证明，若 $G \in \overline{\widehat{S_n}}$，则 $G \neq n + 2 \mod \overline{S_{n+1}}$，也就是说，$\overline{S_{n+1}}$ 是 $\overline{S_n}$ 的真扩张。

我们注意到，根据 S_n 的闭包定义，形式 k with$0 \leqslant k \leqslant n + 1$ 及这些形式的所有析取和，是 $\overline{S_n}$ 中仅有的$\widehat{\ }$右原子博弈。首先，我们来看 $n + 2$ 是否等于 $\overline{S_n}$ 中的某个右原子博弈。

Trivially, $\widehat{n + 2} \neq \mathbf{0}$, since $o(\widehat{n + 2}) = \mathscr{R}$ and $o(\mathbf{0}) = \mathscr{N}$.

设 $X = \{* \mid \circledast_0, \ldots, \circledast_{n+1}\}$。根据引理 25，左方在 $\frown n + 2 + X$ 中后手必胜。也就是说，右方必须走到 $\circledast m$，其中某个 $0 \leqslant m \leqslant n + 1$，然后左方以博弈 $\widehat{m} + \circledast m$ 应对。

现在考虑任意一个右原子析取和 $G_1 + \ldots + G_j \in \overline{S_n}$。

如果这个右原子博弈有多个加项，那么左方后手时会输 $G_1 + \ldots + G_j + X$，因为右方会走到 $G_1 + \ldots + G_j + \circledast_0 = G_1 + \ldots + G_j + *$。左方会输，因为她在右原子加项中有两个或更多可走步。

如果析取和只有一个加项，那么对$\widehat{\ }$左方 $n + 1 + X$而言，最好的情况就是 $n + 1 + X$。（在 mis`ere 博弈中，对于非空的选项集合，适用“束手原则”。）但即便如此，左方后手仍会输，因为右方会选择 $\widehat{n + 1} + \circledast_{n+1}$（引理 25）。因此，在所有情况下，左方在 $G_1 + \ldots + G_j + X$中后手都会输。

$\widehat{\ }$我们得出结论： $n+2$ 不等于模$\overline{S_{n+1}}\,\overline{S_n}$ 的右原子博弈。

现在假设 $o(G)=\mathscr{R}$，并令

$$X=\{\{0\,|\,\text{all adjoints of followers of } G)\}\,||\circledast_0,\circledast_1,\ldots,\circledast_{n+1}\}.$$

先手时，右方通过选择 G 的局部 mis`ère-play 获胜线路，在 $G+X$ 中获胜。根据伴随构造，左方无论在任何阶段于 X 中落子都会输。若左方走到 $\mathbf{0}+X$，右方回应 $\circledast_0$；若左方走到 $G_1+\ldots+G_j+X$，且其中有多个右原子加项，右方回应 $G_1+\ldots+G_j+\circledast_0$；若左方走到 G_1+X，且其中只有一个右原子加项，右方回应 $G_1+\circledast_{n+1}$。另一方面，先手时，右方在 $\widehat{n+2}+X$ 中会输（引理15）。因此， $\widehat{n+2}$ 与 G 在模 $\overline{S_{n+1}}$ 意义下不同，证明完毕。

□

$\widehat{\ }$证明2。只需证明，若 $G\in\overline{S_n}$，则 $G\neq n+2$ 模 $\overline{S_{n+1}}$。

根据 S_n 的闭包定义，我们注意到这些形式 k 与 $0\leqslant k\leqslant n+1$ 以及这些形式的所有析取和，是 $\overline{S_n}$ 中唯一的右原子$\widehat{\ }$博弈。首先，让我们看看 $n+2$ 是否不等于 $\overline{S_n}$的任何右原子博弈 G。

根据推论 17， $\widehat{n+2}\neq G$，除非可能是 $G=\sum\hat{k_i}$，且 $\sum k_i=n+2$，$\widehat{\ }$，因为 $n+2=_{\mathbb{Np}}n+2$。因此，只需证明只要 $\sum k_i=n+2$，保持性$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$模 $\overline{S_{n+1}}$ 就给出 $G=\sum k_i\neq n+2=H$。由于 $\frown n+2\notin\overline{S_n}$，这个析取和至少有两个加项。存在一个左方选项 $H^L=\mathbf{0}$，而对于这个选项，不存在 G^L 使得 $H^L\geqslant G^L$。也就是说，任何 G^L 都至少有一个加项， $1\leqslant_{\mathbb{Np}}G^L$，因此违反了正常玩法不等式；根据推论 17，我们知道 $H^L=_{\mathbb{Np}}0\prec_{\mathbb{Np}}1\leqslant_{\mathbb{Np}}G^L$ 不可能发生。

此外，选项 $H^L=\mathbf{0}$没有右方选项，因此我们不可能有 $H^{LR}\geqslant G$。

$\widehat{\ }$我们得出结论： $n+2$ 不等于模 $\overline{S_{n+1}}$的 $\overline{S_n}$ 右原子博弈。

此外， $\widehat{n+2}$ 不等于任何满足 $G^{\mathcal{R}}\neq\varnothing$ 模 $\overline{S_{n+1}}$的 G；论证与定理 19 的证明相同。 □

4.2.2 严格位于 E 与 Ω 之间的绝对宇宙

首先，我们证明存在一个严格介于 E 与 Ω 之间的绝对宇宙。为方便起见，接下来只给出一个证明。

定理27。设 $S = \mathrm{E} \cup \{\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\}\}$。那么， $\overline{S}$ 是 E 的真扩张，而 Ω 是 $\overline{S}$ 的真扩张。

证明。我们注意到，根据 S 的闭包定义，$\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + \ldots + \{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + L$ 这些形式（其中 L 是左端形式）是 $\overline{S}$ 的唯一左原子博弈。

首先，我们证明，模 $\overline{S}$， $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\}$ 与任意左端形式 G 都可区分。设 $X = \{-\mathbf{1} \,|\, \mathbf{0}\}$。这是因为，先行时，左方通过走到 $G - \mathbf{1}$ 而在 $G + X$ 中获胜；她获胜的原因是 G 是左端。另一方面，先行时，左方在 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + X$ 中落败；她只能走到 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} - \mathbf{1}$，而右方回应 $\mathbf{2} - \mathbf{1}$。

其次，考虑一个并非左原子形式的博弈 $G \in \mathcal{N}$。令 $X = \{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + \ldots + \{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\}$ 中包含数量足够多的 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\}$ 个副本，其数量取决于 G 的秩。左方先行时在 $G + X$ 中落败；这是因为，左方在 G 中走第一步后，右方可以通过打开各个分量，让左方有大量步数可走。另一方面，左方先行时在 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + X$ 中获胜；她无步可走。因此， $\overline{S}$ 是 E 的真扩张。

第三，考虑 $\mathcal{N}$-局面 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{3}\} \in \Omega$。我们证明，对于任意 $G \in \overline{S}$，形式 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{3}\}$ 与 G 模 Ω 不同。当然，我们只需考虑 $G \in \mathcal{N}$的情形。令

$$X = \{-\mathbf{2}, \{\{-\boldsymbol{n} \,|\, \varnothing\} \,|\, \varnothing\} \;\; | \; \{\text{all adjoints of followers of } G \,|\, \mathbf{0}\}\},$$

其中 n足够大。左方先手则输 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{3}\} + X$，因为$\{\varnothing \,|\, \mathbf{3}\} - \mathbf{2}$和 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{3}\} + \{\{-\boldsymbol{n} \,|\, \varnothing\} \,|\, \varnothing\}$都是败着；右方则回应到 $\mathbf{3} - \mathbf{2}$或 $\mathbf{3} + \{\{-\boldsymbol{n} \,|\, \varnothing\} \,|\, \varnothing\}$。另一方面，左方先手可以赢得 $G + X$。由于G 是一个 $\mathcal{N}$-局面，她可以迫使右方在 G 分量中走最后一步。这必然会产生一个类似 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + \ldots + \{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + L + X$的局面，轮到左方行动。有两种可能：

1. 右方在 $\{\varnothing|\mathbf{2}\} + \ldots + \{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + L$ 中连续走棋两步或更多；在这种情况下，左方以 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + \ldots + \{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + L + \{\{-\boldsymbol{n} \,|\, \varnothing\} \,|\, \varnothing\}$ 应对，她来得及到达 $-\boldsymbol{n}$；2. $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + \ldots + \{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} + L$ 是 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\}$ 或 L；在这种情况下，左方以$\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\} - \mathbf{2}$ 或 $L - \mathbf{2}$ 应对（L 是一个左端）。

因此，Ω 是 $\overline{S}$ 的真扩张。 □

观察 28。之所以用 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{2}\}$ 而不用 $\{\varnothing \,|\, \mathbf{1}\}$ 来构造扩张，原因很容易理解。如果右方在一个析取和上行棋，

$\{\varnothing|\,\mathbf{2}\}+\ldots+\{\varnothing|\,\mathbf{2}\}$ 且其中有大量加项，他就能“送给”左方大量步数，而在误`玩法规则下，这可能会带来很大优势。另一方面，如果右方在一个析取和 $\{\varnothing|\,\mathbf{1}\}+\ldots+\{\varnothing|\,\mathbf{1}\}$ 上行棋，且其中有大量加项，他就无法“送给”左方大量步数，因为每当他开启一个分量，左方都会立即结束该分量。事实上，$\mathrm{E}\cup\{\{\varnothing|\,\mathbf{1}\}\}$ 并不是 E 的真扩张；利用定理 16，~~可以验证~~ $\{\varnothing|\,\mathbf{1}\}$ 模 $\mathrm{E}\cup\{\{\varnothing|\,\mathbf{1}\}\}$等于 0。

通过扩展前面的方法，我们证明在 E 与 Ω 之间严格存在无限多个扩张。我们需要一个预备引理和一个定义。

引理29. 设 G是析取和 $\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_1\}+\ldots+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_k\}$，其中$k\geqslant 2$，且对所有 i，$n_i\geqslant 2$。设 n 为正整数。如果右方玩家先行并赢得 $G-\boldsymbol{n}$，那么右方玩家先行时也能赢得两者

1. $G-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*$, *and*
2. $G+\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$.

证明. 情形1. 在博弈 $G-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*$中，右方玩家先行，走到 $G-\boldsymbol{n}+*$。左方玩家唯一可行的应对是走到 $G-\boldsymbol{n}$。根据假设，面对这一应对，右方玩家获胜。注意，在左方玩家可走的 $n_1+\ldots+n_k+1$ 步之前，右方玩家总共走了$k+n+1$ 步（加项 1 是在星中的那一步）。

情形2。在博弈 $G+\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$ 中，右方可以走到 $\boldsymbol{n}_1+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_2\}+\ldots+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_k\}+\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$。左方若走到 $(\boldsymbol{n}_1-\mathbf{1})+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_2\}+\ldots+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_k\}+\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$，就会输掉博弈，因为右方可以用 $(\boldsymbol{n}_1-\mathbf{1})+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_2\}+\ldots+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_k\}$ 应对；经过这一着后，左方仍可在第一个分量中行动，从而打开所有剩余分量。因此，我们来分析左方走到 $\boldsymbol{n}_1+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_2\}+\ldots+\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}_k\}-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*$ 的情况。面对这一步，右方采取的策略是在分量 $-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ 中连续行动。

可能发生两种情况：(1) 右方在左方必须在星中行动之前，就在该分量中用完所有步数；他打开 G的第二个加项并获胜；(2) 左方在右方用完 $-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$中的步数之前，就在分量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $*$ 中用完所有步数，右方按对 $G-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*$的分析中所述的方式走完所有步数。总之，在左方走 $n_1+\ldots+n_k+2$ 步之前，右方走了 $k+n+1$ 步（加项 2 对应左方在 $\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$ 和 $*$中的两步）。这甚至比

在分析博弈 $G-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*$的情况下，左方多走了一步。因此，在第二种情况下，右方也会获胜。 □

定义30。设 $n \geqslant 2$ 为一个整数。那么，阶为 n 的左钩是博弈形式 $\widetilde{n}=\{\varnothing|\,\boldsymbol{n}\}$。阶为 n 的右钩是博弈形式 $\widetilde{-n}=\{-\boldsymbol{n}\,|\varnothing\}$。

定义31。对于 $n \geqslant 2$，令 $Z_n=\mathrm{E} \cup\{\widetilde{2}, \ldots, \widetilde{n}\}$。

定理32。E 与 Ω 之间严格存在无穷多个绝对宇宙。

$\widetilde{\ }$证明。只需证明，对于所有 $n \geqslant 2$，若 $G \in \overline{Z_n}$，则 $G \neq n+1$ 模 $\overline{Z_{n+1}}$。事实上，这证明了 $\overline{Z_{n+1}}$ 是 $\overline{Z_n}$ 的真扩张。

我们注意到，根据 Z_n 的闭包定义（定义 8），在 $\overline{Z_n}$ 中，形式 $\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}+L$（其中 $2 \leqslant n_i \leqslant n$ 且有一个左端 L）是仅有的左原子博弈。首先，我们来看 $n+1$ 是否等于 $\overline{Z_n}$ 的某个左原子博弈。

若 $L \ncong\{\varnothing|\varnothing\}$，则在正常-$\widetilde{\ }$玩法约定下，$\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}+L$ 是负整数，而在正常玩法约定下，$n+1$ 等于零。因此，根据推论 17，博弈 $\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}+L$ 和 $\widetilde{n+1}$ 模 $\overline{Z_{n+1}}$不相等。于是，假设 $L \cong\{\varnothing|\varnothing\}$，也就是说，只考虑形如 $\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}$的析取和。

如果只有一个加项，令 $X=-\boldsymbol{n}$。我们知道，先手时，右方通过走到 $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}-\boldsymbol{n}$而赢得 $\widetilde{\ }$Right $n+1+X$，并因 $n_1 \leqslant n$而输掉 $\widetilde{n_1}+X$。因此，假设有两个或更多加项。

设 $X=-\boldsymbol{n}$。如果右方先手时输掉 $\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}+X$，那么由于 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$右方赢得 $n+1+X$，$\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}$和 $n+1$ 在模 $\overline{Z_{n+1}}$的意义下不相等。因此，假设右方先手时赢得 $\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}-\boldsymbol{n}$。由引理29可知，右方也赢得 $\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}+\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$。但是，右方先手时会输掉 $\widetilde{n+1}+\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$；如果他走到 $\widetilde{n+1}$，左方就会无路可走并获胜；如果他走到 $(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$，左方则以着法 $(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*$获胜，因为她可以迫使右方在星中多走一步。因此，在最后这种情况下，$X=\{-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+*\,|\,\mathbf{0}\}$ 将$\widetilde{n_1}+\ldots+\widetilde{n_k}$与 $\widetilde{n+1}$区分开来。

现在假设 $G \in \mathcal{N}$有一个左方选项。设 $X=\widetilde{2}+\ldots+\widetilde{2}$ 为一个˜析取和，其中包含足够多的 2 的副本，具体数量取决于 G的秩。在 $G+X$中，左方先行时会输；这是因为左方在 G中先走一步后，右方可以通过打开各个分量，及时让左方走非常多步。另一方面，左方会赢

$\widetilde{\ }$在 $n+1+X$中先行；她没有可走的步。 $\overline{Z_{n+1}}$ 是$\overline{Z_n}$的一个真扩张。
□

参考文献

[1] P. Dorbec、G. Renault、A. N. Siegel 和 E. Sopena，《二分游戏：对 mis`ere 游戏的分类排名》，《组合理论杂志 A辑》，第 130 卷，第 42–63 页，2015 年。[2] J. M. Ettinger，《位置游戏的度量》，《理论计算机科学》（数学游戏），第 230 卷，第 207–219 页，2000 年。[3] U. Larsson、R. J. Nowakowski、J. P. Neto 和 C. P. Santos，《保证得分游戏》，《电子组合学杂志》，第 23 卷，第 3 期，论文 3.27，共 29 页，2016 年。[4] U. Larsson、R. Milley、R. J. Nowakowski、G. Renault、C. P. Santos，《终止型 mis‘ere 玩法中的可逆性、典范形式与可逆性》，本卷。[5] U. Larsson、R. J. Nowakowski、C. P. Santos，《绝对组合博弈论》；本卷及 http://arxiv.org/abs/1606. 01975。[6] U. Larsson、R. J. Nowakowski、C. P. Santos，《通过对弈进行博弈比较》，《理论计算机科学》，725:52–63，2018 年。[7] U. Larsson、R. Milley、R.J. Nowakowski、G. Renault 和 C.P. Santos，《mis`ere 玩法下二分博弈与终止型游戏的递归比较测试》，《整数》21B (2021)，#A16。[8] R. Milley、G. Renault，《偏方 mis‘ere 博弈论中的受限发展》，载于 U. Larsson（编）《Games of No Chance 5》，MSRI图书系列 70，剑桥大学出版社（2018）。[9] R. Milley 和 G. Renault，《mis`ere 玩法中的死局：典范数的 mis`ere 幺半群》，《离散数学》，第 313 卷，第 20 期，第 2223–2231 页。[10]A. N. Siegel，《偏方博弈的 mis`ere 典范形式》，载于 R.J. Nowakowski （编）《无胜算游戏 4 》，MSRI 图书系列 63，剑桥大学出版社，马萨诸塞州（2015）。

[11] A. N. Siegel, 《组合博弈论》，美国数学学会（2013）。[12] F. Stewart, 《计分组合博弈》。博士论文，邓迪大学，2011 年。[13] F. Stewart, 《计分组合博弈》。载于 UrbanLarsson（编），《Games of No Chance 5》，数学科学研究所出版物第 70 卷，第 455–475 页。剑桥大学出版社，2019 年。