arXiv:2303.05204v1 [math.OC] 9 Mar 2023

# 希尔伯特空间中的单个二次约束二次规划

SantiagoGonzalez Zerbo Alejandra Maestripieri Francisco Mart´ınez Per´ıa

*

摘要

本文研究希尔伯特空间中的二次约束二次规划问题，其中目标函数和约束函数均非凸。文中给出了必要且充分条件，以保证对于每个初始数据（取自适当集合），该问题都有解。

## 1 引言

作为非线性规划最简单的形式，二次规划（QP）在优化中发挥着重要作用。投资组合优化、经济均衡（的确定）、控制理论和机器学习 [28, 19, 25], 都是自然采用QP方法的领域。特别是，本文研究的二次约束二次规划（QCQP）出现在雷达检测中的转向方向估计、最大割问题和布尔优化 [16, 10, 6],等领域。QCQP问题已得到广泛研究，尤其是在有限维情形下 [38, 46, 37, 33]。在无限维情形下，这些问题最初于 [23, 4,41, 45, 40] 得到分析，近年来则针对特定情形开发了算法 [1, 9]。

在希尔伯特空间中，QCQP可表述为

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(x) = \langle T_0 x, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle y_0, x \rangle + \alpha_0 \\ \text{subject to} \quad & g_i(x) = \langle T_i x, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle y_i, x \rangle \le \alpha_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \end{aligned}$$

其中，优化变量 $x$ 属于希尔伯特空间 $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$，数据由作用于 $\mathcal{H}$ 上的有界自伴算子 $T_i$、向量 $y_i \in \mathcal{H}$ 以及标量 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 组成，其中 $i = 0, 1, ..., m$。近期， [3] 在假设解存在的情况下，分析了实希尔伯特空间中的此类问题； [11, 12] 则在假设算子 $T_i$ 为半正定的情况下对其进行了研究，从而得到凸约束。这些情形可通过经典凸优化技术 [39, 44, 5, 6]进行分析。

仅考虑一个约束（QP1QC）的情形，与系统辨识和机器学习理论中的实际问题有关。在有限维情形下，QP1QC出现在到达时间地理定位问题 [22], 以及含噪测量条件下的时间序列模型辨识问题[36, 34, 35]中。在经典机器学习理论中，问题通常表述于再生核希尔伯特空间（RKHS） [42], ，QCQP中的目标函数通常是凸的，这是因为核是正定的 [14, 30, 29]。然而，验证核是否正定（即所谓的Mercer条件）在计算上非常困难。 [8, 7, 31, 32] 提出使用再生核克莱因空间（RKKS），其中的核是不定的，从而无需验证Mercer条件。不定核技术也已证明对模式识别理论 [20, 43]有用。

本文致力于研究以下二次规划一二次约束问题:

问题 1. 给定作用于希尔伯特空间 $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上的有界自伴算子 $A, B$、向量 $a, b \in \mathcal{H}$ 以及常数 $\beta \in \mathbb{R}$，分析以下问题的存在性

$$\min \langle Ax, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle a, x \rangle \quad \text{subject to} \quad \langle Bx, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle b, x \rangle \le \beta,$$

*2020年数学主题分类：47N10, 90C20, 47B15, 47B65

以及与之相关的具有一个二次等式约束的二次规划问题（QP1EQC）：

问题 2。分析.....的存在性

$$\min \langle Ax, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle a, x \rangle \quad \text{subject to} \quad \langle Bx, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle b, x \rangle = \beta.$$

我们假设 $A$ 和 $B$ 是不定的（既非半正定也非半负定），因此问题 2 中的目标函数和约束均非凸。这带来了很大的困难，因为该问题不适用于经典的凸优化技术，尽管在有限维情形下，其类似问题已被证明可多项式时间求解 [6, 37, 21]。

本文的主要结果给出了问题 1 对 $\big(R(A)+R(B)\big)\times R(B)$中的每个初始数据点都存在解的充要条件。问题 1 存在解的一个必要条件是存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$，使得 $A+\lambda_0 B$为半正定。在这种情况下，存在一个闭区间 $[\lambda_-, \lambda_+]$，使得当 $\lambda$属于 $[\lambda_-, \lambda_+]$时，算子束 $A+\lambda B$ 为半正定。我们首先证明，$\lambda_- > 0$ 同样是问题 1 存在解的必要条件，并且（在此假设下）问题 1 存在解当且仅当问题 2 存在解。随后，这两个问题的解集相同，因此我们可以聚焦于问题 2。

下文中，第 2 节介绍本文所用的记号，并给出一些关于线性算子束的结果，这些结果将在本文其余部分中用到。给定有界自伴算子 $A$ 和 $B$，Krein 和 Smul'jan [24] 的一个著名结果指出，若 $B$是不定的，则存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$，使得 $A+\lambda_0 B$半正定，当且仅当 $\langle Ax、\ x\rangle \geq 0$ 在 $\langle Bx、\ x\rangle = 0$时成立。此外，对于每个 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$，$A+\lambda B$都是半正定的，其中

$$\lambda_- = -\inf_{\{x\in\mathcal{H}:\langle Bx,x\rangle>0\}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle Bx,x\rangle} \quad \text{and} \quad \lambda_+ = -\sup_{\{x\in\mathcal{H}:\langle Bx,x\rangle<0\}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle Bx,x\rangle}.$$

第 3 节给出了对于固定常数 $\beta \in \mathbb{R}$ 和初始数据 $(a, b) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$，问题 2 存在解的充要条件。

第 4 节致力于寻找问题 2 对于 $\big(R(A)+R(B)\big)\times R(B)$中的每个初始数据点均存在解的充要条件。我们将初始问题化简为一个等价的较简单问题。首先，必须满足 $\lambda_- < \lambda_+$，其取值为在

$$\lambda_- = -\min_{\{x\in\mathcal{H}:\langle Bx,x\rangle>0\}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle Bx,x\rangle} \quad \text{and} \quad \lambda_+ = -\max_{\{x\in\mathcal{H}:\langle Bx,x\rangle<0\}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle Bx,x\rangle}.$$

因此，对于每个 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$，必须满足 $R(A+\lambda B) = R(A) + R(B)$；当 $\lambda = \lambda_-$ 或 $\lambda = \lambda_+$ 时，也必须满足类似条件。并且证明了这些必要条件也是充分的。此外，还建立了问题 2 对每个 $(a, b) \in \mathcal{H}\times R(B)$ 都有解的充要条件。

# 2 关于值域具有正性的线性算子束的一些结果

本文中，$\mathcal{H}$ 表示一个复可分希尔伯特空间，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子代数。

若对所有 $x \in \mathcal{H}$，$\langle Ax, x\rangle \geq 0$，则算子 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 为半正定；若存在 $\alpha > 0$，使得对每个 $x \in \mathcal{H}$ 都有 $\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2$，则其为正定。半正定算子锥记为 $\mathcal{L}(\mathcal{H})^+$。若 $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，则 $A \geq B$ 表示 $A - B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$。每个自伴算子 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 都可以典范分解为两个正算子之差：存在唯一的闭子空间 $\mathcal{H}_+$ 和 $\mathcal{H}_-$，它们属于 $\mathcal{H}$；并且存在单射算子 $A_+ \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_+)^+$ 和 $A_- \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_-)^+$，使得

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus N(A), \tag{2.1}$$

并且 $A = \begin{pmatrix} A_+ & 0 & 0 \\ 0 & -A_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相对于 (2.1)。

我们称自伴算子 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是不定的，如果它既非正半定也非负半定；也就是说， $A_+$ 和 $A_-$ 均非零。若 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的，定义集合

$$Q(A) := \{\, x \in \mathcal{H} : \langle Ax, x \rangle = 0 \,\},$$

$$\mathcal{P}^-(A) := \{\, x \in \mathcal{H} : \langle Ax, x \rangle < 0 \,\} \quad \text{and} \quad \mathcal{P}^+(A) := \{\, x \in \mathcal{H} : \langle Ax, x \rangle > 0 \,\}.$$

本小节考虑形式为 $P(\lambda) = A + \lambda B$ 的线性铅笔，其中 $A$、$B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的，且参数为 $\lambda \in \mathbb{R}$。令

$$I_{\geq}(A, B) := \{\, \lambda \in \mathbb{R} : \ A + \lambda B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+ \,\},$$
$$I_{>}(A, B) := \{\, \lambda \in \mathbb{R} : \ A + \lambda B \text{ is positive definite} \,\}.$$

以下陈述是 Krein-Smul'jan 的一个著名结果的变体 [24, 定理 1.1], 另见[2, 引理 1.35]。它刻画了 $I_{\geq}(A, B)$ 非空的情形，并将该集合描述为一个闭区间。

命题 2.1. 若 $B$ 是不定的，则 $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$ 当且仅当

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \qquad \textit{whenever} \qquad \langle Bx, x \rangle = 0.$$

在此情形下，若

$$\lambda_- := -\inf_{x \in \mathcal{P}^+(B)} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} \qquad \textit{and} \qquad \lambda_+ := -\sup_{x \in \mathcal{P}^-(B)} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle}, \tag{2.2}$$

则 $\lambda_- \leq \lambda_+$ 且 $I_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$。

若 $A$ 和 $B$ 均为不定，且 $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$，则 $\lambda_- > 0$ 或 $\lambda_+ < 0$。此外，

命题 2.2. 若 $A$ 和 $B$ 是不定的，则以下条件等价：

i) $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ 当 $\langle Bx, x \rangle \leq 0$时；

ii) $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$ 和 $\lambda_- > 0$；

iii) $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$ 和 $\langle Ax, x \rangle > 0$ 当 $\langle Bx, x \rangle < 0$时。

证明. i)→ii) 若 i) 成立，则特别地，当 $\langle Bx, x \rangle = 0$ 时 $\langle Ax, x \rangle \geq 0$，并且根据命题 2.1，$I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$。此外，

$$\lambda_+ = -\underset{x \in \mathcal{P}^-(B)}{\text{上确界}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} \geq 0,$$

并且由于 $A$ 是不定的， $0 \notin [\lambda_-, \lambda_+]$。因此， $\lambda_- > 0$。
ii)→iii) 若 $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$ 且 $\lambda_- > 0$，考虑满足 $\langle Bx, x \rangle < 0$ 的 $x \in \mathcal{H}$。由 $\langle (A + \lambda_- B)x, x \rangle \geq 0$可得 $\langle Ax, x \rangle \geq -\lambda_- \langle Bx, x \rangle > 0$。
iii)→i) 由于 $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$, $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ 在 $\langle Bx, x \rangle = 0$ 时成立。因此 i) 得证。 □

将 $B$ 替换为 $-B$，还可得到

推论 2.3. 若 $A$ 和 $B$ 是不定的，则以下条件等价：

*i)* $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ *whenever* $\langle Bx, x \rangle \geq 0$;

ii) $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$ 和 $\lambda_+ < 0$；

iii) $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$ 且 $\langle Ax,$ 当 $\langle Bx, x \rangle > 0$ 时， $x \rangle > 0$。

从现在起，我们假设 $B$ 是不定的，且 $I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$。以下结果可见 [18]。如果 $\lambda_- < \lambda_+$，则 $(A + \lambda B)^{1/2}$ 的值域对 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$是常数，这意味着$N(A + \lambda B)$也为常数（且等于 $N(A) \cap N(B)$），而 $N(A + \lambda_- B)$ 和 $N(A + \lambda_+ B)$ 包含$N(A) \cap N(B)$。如果上确界（分别地，下确界）在 (2.2) 中取到，那么 $N(A + \lambda_- B)$（分别地， $N(A + \lambda_+ B)$）严格包含 $N(A) \cap N(B)$。

命题 2.4. 假设 $\lambda_- < \lambda_+$。那么，

*i)* $N(A+\lambda B) = Q(A)\cap Q(B) = N(A)\cap N(B), \quad$ *for every* $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$;

*ii)* $N(A+\lambda_\pm B) = \left\{ x \in \mathcal{P}^{\mp}(B) \ : \ \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\langle Bx, x\rangle} = -\lambda_\pm \right\} \cup \big(N(A)\cap N(B)\big)$.

命题 2.5. 假设 $\lambda_- < \lambda_+$。T *hen,*

*i)* $R\big((A+\lambda B)^{1/2}\big) = R\big((A+\lambda' B)^{1/2}\big) \quad$ *for every* $\lambda, \lambda' \in (\lambda_-, \lambda_+)$;

*ii)* $R\big((A+\lambda_\pm B)^{1/2}\big) \subseteq R\big((A+\lambda B)^{1/2}\big) \quad$ *for every* $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$.

下文中，我们利用命题 2.5 说明，如何将对算子铅笔 $A+\lambda B$ 的行为的研究，化为对作用于 $\mathcal{H}$ 的稠密子空间上的形如 $I+\eta G$ 的辅助算子铅笔的行为的研究，其中 $G$ 是某个自伴算子。这种约化方法在算子铅笔领域被广泛采用，因为辅助算子铅笔更易于分析，参见例如 [15]。

由于 $A+\lambda B \equiv 0$ 属于 $N(A)\cap N(B)$（且它是该算子铅笔的不变子空间），从现在起我们假设 $N(A)\cap N(B) = \{0\}$。每当 $\lambda_- < \lambda_+$ 时，令 $\rho := \frac{\lambda_- + \lambda_+}{2}$ 并记

$$W := (A+\rho B)^{1/2} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{R} := R(W). \tag{2.3}$$

由命题 2.4 和命题 2.5， $W$ 是单射且 $\mathcal{R}$ 是稠密的。此外，

$$\mathcal{R} = R\big((A+\lambda B)^{1/2}\big) \qquad \text{for every } \lambda \in (\lambda_-, \lambda_+).$$

对于 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$，令 $D = D(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 为由 Douglas 引理 [13] 给出的 $(A+\lambda B)^{1/2} = WX$ 的（唯一）解。由此可得

$$A+\lambda B = WDD^*W \qquad \text{for every } \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+], \tag{2.4}$$

并且，如果 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$，那么 $D = W^{-1}(A+\lambda B)^{1/2}$ 可逆。

**Lemma** 2.6. 假设 $\lambda_- < \lambda_+$。那么，存在一个自伴算子 $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使得

$$B = WGW.$$

证明. 给定 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$， $\lambda \neq \rho$，由于 $A+\lambda B = A+\rho B + (\lambda-\rho)B = W^2 + (\lambda-\rho)B$，由 (2.4) 可得 $WDD^*W = W^2 + (\lambda-\rho)B$，或者等价地，$(\lambda-\rho)B = W(DD^* - I)W$。于是，

$$B = \frac{1}{\lambda-\rho} W(DD^* - I)W = WGW,$$

其中 $G := \frac{1}{\lambda-\rho}(DD^* - I) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的。由于 $W$ 是单射，我们得到

$$G\big|_{\mathcal{R}} = W^{-1}BW^{-1}\big|_{\mathcal{R}},$$

因此， $G$ 仅依赖于 $\rho$。 □

记 $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 为引理 2.6 中给出的（唯一）自伴算子。于是，对于 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$， $DD^* = I + (\lambda-\rho)G$ 是半正定的，并且

$$A+\lambda B = W\big(I + (\lambda-\rho)G\big)W \qquad \text{for each } \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]. \tag{2.5}$$

因此,

推论 2.7. 若 $\lambda_- < \lambda_+$，则,

$$R(A) + R(B) = \operatorname{span}\left\{ \bigcup_{\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]} R(A+\lambda B) \right\} \subseteq \mathcal{R}.$$

现在我们分析 $R(A+\rho B) = R(A)+R(B)$ 的情形。我们经常用到，对于 $C$， $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

$$R(C+D) = R(C) + R(D) \qquad \text{if and only if} \qquad R(C) \subseteq R(C+D),$$

命题 2.8. 假设 $\lambda_- < \lambda_+$。给定 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$:

i) $\lambda \neq \rho$, $R(A+\lambda B) \subseteq R(A+\rho B)$ 当且仅当 $R(A+\rho B) = R(A) + R(B)$;

ii) $R(A+\lambda B) = R(A) + R(B)$ 当且仅当 $\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + G(\mathcal{R})$;

iii) $R(A+\lambda B) = R(A+\rho B)$ 当且仅当 $\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$。

证明. i) 若 $R(A+\lambda B) \subseteq R(A+\rho B)$，则

$$(\lambda-\rho)Bx = (A+\lambda B)x - (A+\rho B)x \in R(A+\rho B) \qquad \text{for every } x \in \mathcal{H}.$$

因此， $R(B) \subseteq R(A+\rho B)$，或者等价地， $R(A+\rho B) = R(A) + R(B)$。反向结论显然。ii) 由于 $R(A+\lambda B) = W\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R})$ 且

$$R(A) + R(B) = R(W^2) + R(B) = W\big(\mathcal{R} + G(\mathcal{R})\big),$$

在等式两边应用 $W^{-1}$，得到 $R(A+\lambda B) = R(A) + R(B)$ $\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + G(\mathcal{R})$。再次在等式两边应用 $W$，即可得到其逆命题。

iii) 根据 (2.5)， $R(A+\lambda B) = R(A+\rho B)$ 当且仅当 $W\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = W(\mathcal{R})$；等价地，在上述最后一个等式两边应用 $W^{-1}$，可得 $\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$。 □

由于对于任意 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$， $I+(\lambda-\rho)G$ 都是可逆的，等式 $\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ 可直接写为

$$\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cap R\big(I+(\lambda-\rho)G\big).$$

下一个引理给出了一个更一般的结果，也考虑了 $\lambda$ 取区间端点值的情形。这是最后一节所需的技术性结果。

引理 2.9. 假设 $\lambda_- < \lambda_+$。给定 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$，则

$$R(A+\lambda B) = R(A+\rho B) \cap R(WDD^*) \text{ if and only if } \big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cap R\big(I+(\lambda-\rho)G\big). \quad (2.6)$$

证明。为证明这一等价关系，注意到

$$R(A+\lambda B) = R(A+\rho B) \cap R(WDD^*) \qquad \text{if and only if} \qquad R(WDD^*W) = R(W^2) \cap R(WDD^*).$$

最后一个等式成立，当且仅当 $W\big(DD^*(\mathcal{R})\big) = W\big(\mathcal{R} \cap R(DD^*)\big)$，或者等价地， $\big(I+(\lambda-\rho)G\big)(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cap R\big(I+(\lambda-\rho)G\big)$，其中用到了 $W$ 是单射这一事实。 □

备注 2.10. (2.6) 中的第一个等式可以用算子 $A$ 和 $B$来表示。事实上，由 (2.4) 可得 $WDD^*W = A+\lambda B$。于是 $DD^*W = W^{-1}(A+\lambda B)$，或者等价地，

$$WDD^* = \big(W^{-1}(A+\lambda B)\big)^*.$$

# 3 带有一个约束的二次约束二次规划

给定两个不定自伴算子 $A$、 $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 以及向量 $a$、 $b \in \mathcal{H}$，考虑实值函数

$$f(x) := \langle Ax, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle a, x \rangle \qquad \text{and} \qquad g(x) := \langle Bx, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle b, x \rangle, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

本文的主要目的是研究以下二次规划一二次约束问题:

问题 1. 给定常数 $\beta \in \mathbb{R}$，分析其存在性

$$\min\ f(x) \qquad \text{subject to} \qquad g(x) \le \beta.$$

将其解集记为 $\mathcal{W}(\beta, a, b)$。

在某些条件下，对该问题的分析可归结为分析相应的带有等式约束的问题。

问题 2. 给定常数 $\beta \in \mathbb{R}$，分析.....的存在性

$$\min\ f(x) \qquad \text{subject to} \qquad g(x) = \beta.$$

将其解集记为 $\mathcal{Z}(\beta, a, b)$。

利用 Fr´echet 导数，我们现在证明：如果问题 1 存在解，那么问题 1 和问题 2 的解集相同。函数 $f$ 和 $g$ 在每个 $x \in \mathcal{H}$ 处均 Fr´echet 可微，且 $f$ 的一阶和二阶 Fr´echet 导数为

$$Df(x)\ \Delta x = 2\,\mathrm{Re}(\langle\, Ax + a, \Delta x \,\rangle), \qquad \Delta x \in \mathcal{H},$$

$$D^2 f(x)\ (\Delta x_1, \Delta x_2) = 2\,\mathrm{Re}(\langle\, A\Delta x_1, \Delta x_2 \,\rangle), \qquad \Delta x_1, \Delta x_2 \in \mathcal{H}.$$

$g$ 的导数也可以类似地表示。

命题 3.1. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $(a, b) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$，若 $\mathcal{W}(\beta, a, b) \neq \varnothing$，则

$$\min_{g(x) \le \beta} f(x) = \min_{g(x) = \beta} f(x) \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{W}(\beta, a, b) = \mathcal{Z}(\beta, a, b).$$

证明. 假设存在 $x_0 \in \mathcal{W}(\beta, a, b) \setminus \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，即 $g(x_0) < \beta$。那么 $f$ 在 $x_0$处取得局部极小值。根据 [27, 命题 2.4.18 和 2.4.19]，我们有 $Df(x_0) = 0$，并且

$$0 \le D^2 f(x_0)(\Delta x, \Delta x) = 2\,\langle\, A\Delta x, \Delta x \,\rangle \qquad \text{for every } \Delta x \in \mathcal{H},$$

但这会导致矛盾，因为 $A$是不定的。因此 $x_0 \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，$\min_{g(x) \le \beta} f(x) = \min_{g(x) = \beta} f(x)$，且 $\mathcal{W}(\beta, a, b) = \mathcal{Z}(\beta, a, b)$。 □

下一个定理给出了问题 2 存在解的充要条件，这是拉格朗日乘子技巧的直接推论。我们先给出一个技术性结果。

引理 3.2. 给定 $(a, b) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$，设 $f$和 $g$如上所述。

i) 若存在 $x \in \mathcal{H}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $(A + \lambda B)x = -(a + \lambda b)$，则

$$(f + \lambda g)(y) - (f + \lambda g)(x) = \langle\, (A + \lambda B)(y - x), y - x \,\rangle \qquad \textit{for every } y \in \mathcal{H}.$$

ii) 若存在 $x \in \mathcal{H}$ 使得 $Bx = -b$，则

$$g(y) - g(x) = \langle\, B(y - x), y - x \,\rangle \qquad \textit{for every } y \in \mathcal{H}.$$

证明. i) 对于 $y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
&\big(f(y) + \lambda g(y)\big) - \big(f(x) + \lambda g(x)\big) = \\
&= \big(\langle\, (A + \lambda B)y, y \,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, a + \lambda b, y \,\rangle\big) - \big(\langle\, (A + \lambda B)x, x \,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, a + \lambda b, x \,\rangle\big) \\
&= \big(\langle\, (A + \lambda B)y, y \,\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, (A + \lambda B)x, y \,\rangle\big) - \big(\langle\, (A + \lambda B)x, x \,\rangle - 2\,\langle\, (A + \lambda B)x, x \,\rangle\big) \\
&= \langle\, (A + \lambda B)y, y \,\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, (A + \lambda B)x, y \,\rangle + \langle\, (A + \lambda B)x, x \,\rangle \\
&= \langle\, (A + \lambda B)(y - x), y - x \,\rangle .
\end{aligned}$$

ii) 类似地可得。 □

定理 3.3. 设 $\beta \in \mathbb{R}$ and $(a,b) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$。那么， $x \in \mathcal{Z}(\beta,a,b)$ 当且仅当存在满足以下条件的 $\lambda \in I_{\geq}(A,B)$

$$\begin{cases} (A+\lambda B)x = -(a+\lambda b), \\ \langle\, Bx, x\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, b, x\,\rangle = \beta. \end{cases} \tag{3.1}$$

证明。假设存在 $\lambda \in I_{\geq}(A,B)$ 和满足 $g(x) = \beta$ 及 $(A+\lambda B)x = -(a+\lambda b)$ 的 $x \in \mathcal{H}$。若 $y \in \mathcal{H}$ 满足 $g(y) = \beta$，则利用引理 3.2,

$$f(y) - f(x) = \big(f(y) + \lambda g(y)\big) - \big(f(x) + \lambda g(x)\big) = \langle\, (A+\lambda B)(y-x), y-x\,\rangle \geq 0.$$

因此， $x \in \mathcal{Z}(\beta,a,b)$。

反过来，假设 $x \in \mathcal{Z}(\beta,a,b)$。若 $Bx \neq -b$，则证明过程与定理 3.5] 的证明类似。现在假设 $Bx = -b$，并令 $y \in Q(B)$。考虑到 $g(x) = \beta$ 和 $\langle\, By, y\,\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \langle\, B(x+y), x+y\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, b, x+y\,\rangle \\ &= (\,\langle\, Bx, x\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, b, x\,\rangle\,) + \langle\, By, y\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, Bx, y\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, b, y\,\rangle \\ &= \beta + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, Bx, y\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, b, y\,\rangle = \beta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

令 $\theta \in [0, 2\pi)$ 和 $t \in \mathbb{R}$，由于 $te^{i\theta}y \in Q(B)$,

$$\langle\, Ax, x\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, a, x\,\rangle = f(x) \leq f(x + te^{i\theta}y) = \left\langle\, A(x+te^{i\theta}y), x+te^{i\theta}y\,\right\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left\langle\, a, x+te^{i\theta}y\,\right\rangle,$$

由此得到

$$0 \leq t^2\,\langle\, Ay, y\,\rangle + 2\,t\,\mathrm{Re}\left\langle\, Ax+a, e^{i\theta}y\,\right\rangle.$$

若 $\theta \in [0, 2\pi)$ 满足 $\left\langle\, Ax+a, e^{i\theta}y\,\right\rangle = |\,\langle\, Ax+a, y\,\rangle\,|$，则

$$0 \leq t^2\,\langle\, Ay, y\,\rangle + 2\,t|\,\langle\, Ax+a, y\,\rangle\,| \qquad \text{for every } t \in \mathbb{R}.$$

由此可得 $\langle\, Ay, y\,\rangle \geq 0$ 和 $\langle\, Ax+a, y\,\rangle = 0$。这意味着，对每个 $y \in Q(B)$，都有 $\langle\, Ay, y\,\rangle \geq 0$。由于 $B$ 是不定的，因此有 $I_{\geq}(A,B) \neq \varnothing$ 且 $Ax+a \in Q(B)^{\perp} = \{\,0\,\}$，即 $Ax = -a$。于是，任取 $\lambda \in I_{\geq}(A,B)$，便有 $(A+\lambda B)x = -(a+\lambda b)$。 □

由上述证明可知，存在 $x \in \mathcal{H}$ 使得

$$\begin{cases} Ax &= -a, \\ Bx &= -b, \end{cases} \tag{3.3}$$

必须单独处理。令 $\mathcal{A}$ 为满足以下条件的那些 $(a,b) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 的集合：方程组 (3.3) 有解，且 $\mathcal{A}^c = \mathcal{H}\times\mathcal{H} \setminus \mathcal{A}$。若对于 $(a,b) \in \mathcal{A}$，问题 2 有解，则任意 $\lambda \in I_{\geq}(A,B)$ 都是合适的拉格朗日乘子。但若 $(a,b) \in \mathcal{A}^c$，则 (3.1) 中的拉格朗日乘子 $\lambda$ 是唯一的，下一命题将对此作出说明。其证明与 [17, 命题 5.1]，的证明类似，收录于附录中。

命题 3.4. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$，令 $(a,b) \in \mathcal{A}^c$ be 满足 $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$。则存在唯一的$\lambda \in I_{\geq}(A,B)$，使得

$$(A+\lambda B)x = -(a+\lambda b),$$

对每个 $x \in \mathcal{Z}(\beta,a,b)$，均成立。

在命题 3.1 中，我们证明了问题 1 存在解保证问题 2 也存在解。现在我们陈述问题 2 存在解蕴含问题 1 存在解的条件。

定理 3.5. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $(a,b) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$，以下条件等价：

*i)* $\mathcal{W}(\beta,a,b) \neq \varnothing$;

ii) $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$ 和 $\lambda_- > 0$。

在这种情况下，$\mathcal{W}(\beta,a,b) = \mathcal{Z}(\beta,a,b)$。

证明。假设 $\mathcal{W}(\beta,a,b) \neq \varnothing$。由命题 3.1，$\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$，这意味着 $I_{\geq}(A,B) \neq \varnothing$，并且当 $\langle Bx,x\rangle = 0$ 时，$\langle Ax, x\rangle \geq 0$。现在令 $y \in \mathcal{W}(\beta,a,b)$，并假设存在 $x \in \mathcal{H}$ 使得 $\langle Bx,x\rangle < 0$ 且 $\langle Ax,x\rangle < 0$。那么，存在 $\alpha_0 > 0$ 使得

$$g(\alpha x) = \alpha^2 \langle Bx,x\rangle + \alpha\, 2\,\mathrm{Re}\langle b,x\rangle \leq \beta \qquad \text{for every } \alpha > \alpha_0.$$

But

$$f(y) \leq f(\alpha x) = \alpha^2 \langle Ax,x\rangle + \alpha\, 2\,\mathrm{Re}\langle a,x\rangle \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} -\infty,$$

这就产生了矛盾。因此，当 $\langle Bz,z\rangle \leq 0$ 时，$\langle Az,z\rangle \geq 0$，并且由命题 2.2，$\lambda_- > 0$。

反过来，假设 $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$ 且 $I_{\geq}(A,B) = [\lambda_-,\lambda_+]$，其中 $0 < \lambda_- \leq \lambda_+$。若 $\widetilde{x} \in \mathcal{Z}(\beta,a,b)$，则存在 $\lambda \in [\lambda_-,\lambda_+]$ 使得 $(A+\lambda B)\widetilde{x} = -(a+\lambda b)$。令 $x \in \mathcal{H}$ 满足 $g(x) \leq \beta$。考虑到 $g(\widetilde{x}) = \beta$ 且 $0 < \lambda$，由引理 3.2,

$$f(x) - f(\widetilde{x}) \geq \big(f(x) + \lambda g(x)\big) - \big(f(\widetilde{x}) + \lambda g(\widetilde{x})\big) = \langle (A+\lambda B)(x-\widetilde{x}), x-\widetilde{x}\rangle \geq 0.$$

因此，$\widetilde{x} \in \mathcal{W}(\beta,a,b)$。最后，由命题 3.1 可知，$\mathcal{W}(\beta,a,b) = \mathcal{Z}(\beta,a,b)$。 □

即使在有限维情形下，也很容易构造这样的例子：对于给定的 $\beta$ 和 $(a,b)$，$\mathcal{W}(\beta,a,b)$ 为空，而 $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$。

作为本小节的结束，我们描述当 $(a,b) \in \mathcal{A}$ 时解集 $\mathcal{Z}(\beta,a,b)$。下一小节中，我们将说明，在某些条件下，考虑更大的初始数据点集合时也会出现相同行为。

命题 3.6。假设 $I_{\geq}(A,B) \neq \varnothing$。给定 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $(a,b) \in \mathcal{A}$，令 $x_0 \in \mathcal{H}$ 满足$Ax_0 = -a$ 和 $Bx_0 = -b$。以下条件成立：

*i) if* $g(x_0) = \beta$, *then*

$$\mathcal{Z}(\beta,a,b) = x_0 + Q(A) \cap Q(B);$$

ii) 若 $g(x_0) > \beta$，则 $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$ 当且仅当 $N(A+\lambda_+ B) \neq \{0\}$。在此情形下，

$$\mathcal{Z}(\beta,a,b) = x_0 + \{\, x \in N(A+\lambda_+ B) : \langle Bx,x\rangle = \beta + \langle Bx_0,x_0\rangle \,\};$$

iii) 若 $g(x_0) < \beta$，则 $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$ 当且仅当 $N(A+\lambda_- B) \neq \{0\}$。在此情形下，

$$\mathcal{Z}(\beta,a,b) = x_0 + \{\, x \in N(A+\lambda_- B) : \langle Bx,x\rangle = \beta + \langle Bx_0,x_0\rangle \,\}.$$

证明。记 $\nu = \beta + \langle Bx_0,x_0\rangle$。利用 $Ax_0 = -a$ 和 $Bx_0 = -b$ 可得

$$f(x) = \langle A(x-x_0), x-x_0\rangle - \langle Ax_0,x_0\rangle \qquad \text{and} \qquad g(x) = \langle B(x-x_0), x-x_0\rangle - \langle Bx_0,x_0\rangle.$$

此外，注意到 $g(x_0) = -\langle Bx_0,x_0\rangle = \beta - \nu$。于是，$x \in \mathcal{Z}(\beta,a,b)$ 当且仅当 $y := x - x_0$ 是下式的一个解

$$\min \langle Az,z\rangle \qquad \text{subject to} \qquad \langle Bz,z\rangle = \nu.$$

由此可得，$\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\mathcal{Z}(\nu,0,0) \neq \varnothing$，且在此情形下

$$\mathcal{Z}(\beta,a,b) = x_0 + \mathcal{Z}(\nu,0,0).$$

i) 若 $g(x_0) = \beta$，则 $\nu = 0$。考虑到当 $\langle Bx,x\rangle = 0$ 时，$\langle Ax,x\rangle \geq 0$，可得$\mathcal{Z}(\nu,0,0) = \mathcal{Z}(0,0,0) = Q(A) \cap Q(B)$。

ii) $g(x) > \beta$这一事实意味着 $\nu < 0$。由 $x \in \mathcal{H}$, $x \in \mathcal{Z}(\nu,0,0)$ 当且仅当 $(A+\lambda B)x = 0$，其中某个 $\lambda \in [\lambda_-,\lambda_+]$，以及 $\langle Bx,x\rangle = \nu < 0$，参见定理 3.3。仅当 $x \in N(A+\lambda B) \cap \mathcal{P}^-(B)$ 时才会出现这种情况，或者等价地，$x \in N(A+\lambda_+ B)$。因此，$x \in \mathcal{Z}(\nu,0,0)$ 当且仅当 $x \in N(A+\lambda_+ B)$ 满足$\langle Bx,x\rangle = \nu$。

iii) 使用与上述类似的论证即可得出结果。 □

# 4 解存在的充要条件

本小节旨在给出问题 2 存在解的充要条件，其中初始数据点 $(a, b)$ 需属于某个适当的集合。首先，如果 $b = Bx_0$ 对于某个 $x_0$ 成立，那么 $g(x) = \langle B(x - x_0)\ x - x_0 \rangle + g(x_0)$，并且 $x \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$ 当且仅当 $x + x_0 \in \mathcal{Z}(\nu, a, 0)$ 对于 $\nu = \langle Bx_0, x_0 \rangle + \beta$成立。因此，我们关注属于 $R(B)$ 的向量 $b$。其次，如果 $\mathcal{Z}(\nu, a, 0) \neq \varnothing$，那么根据定理 3.3，存在 $\lambda \in I_{\geq}(A, B)$ 使得 $a \in R(A + \lambda B)$。由于对于 $I_{\geq}(A, B)$，$= [\lambda_-, \lambda_+]$ 满足 $\lambda_- < \lambda_+$，

$$\operatorname{span}\left\{ \bigcup_{\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]} R(A + \lambda B) \right\} = R(A) + R(B),$$

我们考虑属于 $R(A) + R(B)$ 的向量 $a$。

给定 $\beta \in \mathbb{R}$ 和向量 $a \in R(A) + R(B)$、$b \in R(B)$，如果问题 2 有解，那么解集包含一个平行于 $N(A) \cap N(B)$ 的仿射流形。事实上，如果 $x_{(a,b)} \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，那么

$$x_{(a,b)} + N(A) \cap N(B) \subseteq \mathcal{Z}(\beta, a, b).$$

从现在起，我们假设 $N(A) \cap N(B) = \{0\}$，不过在第 4.1 小节中，我们将讨论如何将这些结果轻松地表述为一般情形。

我们首先给出本小节所讨论问题的几种等价表述。

命题 4.1。以下条件等价：

i) 对于固定的 $\beta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}(\beta, a, b)$，$\neq \varnothing$ 对每个 $a \in R(A) + R(B)$ 以及每个 $b \in R(B)$ 都成立；

ii) 对于每个 $\nu \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}(\nu, a, 0)$，$\neq \varnothing$ 对每个 $a \in R(A) + R(B)$ 都成立；

iii) 对于每个 $\beta' \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}(\beta', a, b)$，$\neq \varnothing$ 对每个 $a \in R(A) + R(B)$ 以及每个 $b \in R(B)$ 都成立。

证明。i)→ii) 给定 $\nu \in \mathbb{R}$ 和 $a \in R(A) + R(B)$，令 $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$ 满足

$$a = Ax_1 + Bx_2 \qquad \text{and} \qquad \langle Bx_3, x_3 \rangle = \nu - \beta.$$

由于 $\mathcal{Z}\big(\beta, A(x_1 + x_3) + Bx_2, Bx_3\big) \neq \varnothing$，由定理 3.3，存在 $\lambda \in I_{\geq}(A, B)$ 和 $x \in \mathcal{H}$ 满足

$$\begin{cases} (A + \lambda B)x = -\big(A(x_1 + x_3) + Bx_2 + \lambda Bx_3\big), \\ \langle Bx, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle Bx_3, x \rangle = \beta, \end{cases}$$

或者等价地，利用 $\nu = \langle Bx_3, x_3 \rangle + \beta$,

$$\begin{cases} (A + \lambda B)(x + x_3) = -(Ax_1 + Bx_2) = -a, \\ \langle B(x + x_3), x + x_3 \rangle = \nu. \end{cases} \tag{4.1}$$

因此，$x + x_3 \in \mathcal{Z}(\nu, a, 0)$。

ii)→iii) 给定 $\beta' \in \mathbb{R}$, $a \in R(A) + R(B)$ 和 $b \in R(B)$，令 $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$ 和 $\nu \in \mathbb{R}$ 满足

$$a = Ax_1 + Bx_2, \qquad b = Bx_3 \qquad \text{and} \qquad \langle Bx_3, x_3 \rangle = \nu - \beta'.$$

由于 $\mathcal{Z}\big(\nu, A(x_1 - x_3) + Bx_2, 0\big) \neq \varnothing$，由定理 3.3，存在 $\lambda \in I_{\geq}(A, B)$ 和 $x \in \mathcal{H}$ 满足

$$\begin{cases} (A + \lambda B)x = -\big(A(x_1 - x_3) + Bx_2\big), \\ \langle Bx, x \rangle = \nu. \end{cases}$$

利用 $\nu = \beta' + \langle Bx_3, x_3 \rangle$,

$$\begin{cases} (A + \lambda B)(x - x_3) = -\big(Ax_1 + Bx_2 + \lambda Bx_3\big) = -(a + \lambda b), \\ \langle B(x - x_3), x - x_3 \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle Bx_3, x - x_3 \rangle = \beta', \end{cases}$$

这意味着 $x - x_3 \in \mathcal{Z}(\beta', a, b)$。
iii)→i) 这是显然的。

□

注 4.2. 由命题 4.1 的证明可得一个事实，我们将在本小节余下部分经常用到。具体而言，给定 $\beta \in \mathbb{R}, a \in R(A)+R(B)$ 和 $b \in R(B)$，若 $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$ 满足 $a = A(x_1+x_3)+Bx_2$和 $b = Bx_3$，那么 $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$ 当且仅当存在 $(\lambda, y) \in I_{\geq}(A, B) \times \mathcal{H}$ 满足

$$\begin{cases} (A + \lambda B)y = c, \\ \langle By, y \rangle = \nu, \end{cases} \tag{4.2}$$

with

$$c = -(Ax_1 + Bx_2) \qquad \text{and} \qquad \nu = \langle Bx_3, x_3 \rangle + \beta \tag{4.3}$$

为此，取 (4.1) 中的 $y = x + x_3$。

下一个引理给出了问题 2 对任意感兴趣的数据点存在解的一些必要条件。

引理 4.3. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$，若对每个 $a \in R(A) + R(B)$ 和每个 $b \in R(B)$，$\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$ 均成立，则以下条件成立：

*i)* $I_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$ *with* $\lambda_- < \lambda_+$;

*ii)* $N(A + \lambda_- B) \neq \{0\}$ *and* $N(A + \lambda_+ B) \neq \{0\}$.

证明。由定理 3.3，$I_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$。若 $\lambda_- = \lambda_+ = \lambda$，则 $N(A + \lambda B) = \{0\}$。事实上，给定$a \in R(A) + R(B)$，存在满足 $g(x) = \beta$ and 的 $x \in \mathcal{H}$

$$(A + \lambda B)x = -a,$$

因为 $\mathcal{Z}(\beta, a, 0) \neq \varnothing$。由于 $a$ 是任意的，$R(A + \lambda B) = R(A) + R(B)$，因此 $N(A + \lambda B) = \{0\}$。

现在考虑满足 $\langle Bx_0, x_0 \rangle > -\beta$ 的 $x_0 \in \mathcal{H}$。由于对每个 $a \in R(A) + R(B)$ 及每个 $b \in R(B)$，$\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$，根据命题 4.1 的 ii)，有 $\mathcal{Z}(\nu, 0, 0) \neq \varnothing$，其中 $\nu = \langle Bx_0, x_0 \rangle + \beta$。于是，存在 $\lambda \in I_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$ 以及满足以下条件的 $y \in \mathcal{H}$

$$(A + \lambda B)y = 0 \qquad \text{and} \qquad \langle By, y \rangle = \nu > 0.$$

因此，$y \in N(A + \lambda B) \cap \mathcal{P}^+(B)$。根据命题 2.4，这种情况只有在 $\lambda = \lambda_- \neq \lambda_+$ 时才会发生。于是$y \in N(A + \lambda_- B)$。

取一个向量 $x_0 \in \mathcal{H}$ 使得 $\langle Bx_0, x_0 \rangle < -\beta$，并按照相同的步骤，我们得到$N(A + \lambda_+ B) \neq \{0\}$。

□

假设 4.4。从现在起，我们假设

$$I_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+] \qquad \textit{with } \lambda_- < \lambda_+.$$

固定 $\rho := \frac{\lambda_- + \lambda_+}{2}$，考虑算子 $W$、在 (2.3) 中定义的子空间 $\mathcal{R}$，以及引理 2.6 中给出的自伴算子 $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$。若 $\kappa := \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}$，则 $I_{\geq}(I, G) = [\lambda_- - \rho, \lambda_+ - \rho] = [-\kappa, \kappa]$。此外，根据推论 2.7，可得

$$R(A) + R(B) \subseteq \mathcal{R}.$$

下一个引理表明，通过将 (4.2) 表示为等价形式，可以对其进行简化。

引理 4.5. 给定 $\nu \in \mathbb{R}$ 和 $c \in R(A) + R(B)$，定义向量 $u_0 := W^{-1}c$。那么，存在满足条件的 $(\lambda, x) \in [\lambda_-, \lambda_+] \times \mathcal{H}$

$$\begin{cases} (A + \lambda B)x = c, \\ \langle Bx, x \rangle = \nu, \end{cases}$$

当且仅当存在满足条件的 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{R}$

$$\begin{cases} (I + \gamma G)y = u_0, \\ \langle Gy, y \rangle = \nu. \end{cases} \tag{4.4}$$

因此，给定 $\beta \in \mathbb{R}$、$a \in R(A) + R(B)$ 和 $b \in R(B)$，$\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$ 当且仅当存在满足 (4.4) 且具有 $u_0 = W^{-1}c$ 的 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{R}$，其中 $c$ 和 $\nu$ 由 (4.3) 给出。

证明。令 $x \in \mathcal{H}$ 和 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$。方程 $(A + \lambda B)x = c$ 成立当且仅当

$$W\big(I + (\lambda - \rho)G\big)Wx = c,$$

参见 (2.5)。若 $y := Wx$ 且 $\gamma := \lambda - \rho \in [-\kappa, \kappa]$，则最后这个方程等价于

$$(I + \gamma G)y = u_0.$$

此外，$\langle Gy、\ y \rangle = \langle Bx、\ x \rangle = \langle WGWx、\ x \rangle = \langle Bx、\ x \rangle = \nu$，证明完毕。

最后，固定 $\beta \in \mathbb{R}$，取 $a \in R(A) + R(B)$ 和 $b \in R(B)$，并令 $x_1、\ x_2、\ x_3 \in \mathcal{H}$ 满足 $b = Bx_3$ 且 $a = A(x_1 + x_3) + Bx_2$。定义 $u_0 := -W^{-1}(Ax_1 + Bx_2)$ 和 $\nu := \langle Bx_3, x_3 \rangle + \beta$，利用注 4.2 可得，$\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$ 当且仅当存在满足 (4.4) 的 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{R}$。 □

命题 4.6. 给定 $\nu \in \mathbb{R}$ 和 $u_0 \in \mathcal{H}$，假设存在满足 (4.4) 的 $(\gamma_1, y_1) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{H}$。若 $u_0 \notin N(G)$，且 $(\gamma_2, y_2) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{H}$ 也满足 (4.4)，则 $\gamma_1 = \gamma_2$。

证明。令 $u_0 \notin N(G)$，并假设存在满足 $\langle Gy_1, y_1 \rangle = \langle Gy_2, y_2 \rangle = \nu$ 和的 $(\gamma_1, y_1)、(\gamma_2, y_2) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{H}$，

$$\begin{aligned} (I + \gamma_1 G)y_1 &= u_0, \\ (I + \gamma_2 G)y_2 &= u_0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

一方面，由于对于 $i = 1,\ \langle Gy_i, y_i \rangle = \nu$ 和 $I + \gamma_i G$ 是半正定的，2, $\langle u_0, y_i \rangle = \|y_i\|^2 + \gamma_i \nu \geq 0$。另一方面，

$$\begin{aligned} \|y_1\|^2 + \gamma_1 \nu &= \langle u_0, y_1 \rangle = \langle (I + \gamma_2 G)y_2, y_1 \rangle = \langle y_2, y_1 \rangle + \gamma_2 \langle Gy_2, y_1 \rangle, \\ \|y_2\|^2 + \gamma_2 \nu &= \langle u_0, y_2 \rangle = \langle (I + \gamma_1 G)y_1, y_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle + \gamma_1 \langle Gy_1, y_2 \rangle, \end{aligned} \tag{4.6}$$

这意味着

$$(\gamma_1 - \gamma_2)\big(\langle Gy_1, y_2 \rangle + \nu\big) = \|y_2\|^2 - \|y_1\|^2. \tag{4.7}$$

接下来，我们看到 $\|y_1\| = \|y_2\|$。考虑 $a_{ij} := \|(I + \gamma_j G)^{1/2} y_i\|$ 对于 $i, j = 1, 2$。根据柯西-施瓦茨不等式以及 $\|(I + \gamma_j G)^{1/2} y_i\|^2 = \|y_i\|^2 + \gamma_j \nu$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned} a_{11}^2 &= |\langle u_0, y_1 \rangle| = |\langle (I + \gamma_2 G)y_2, y_1 \rangle| \leq (\|y_2\|^2 + \gamma_2 \nu)^{1/2} (\|y_1\|^2 + \gamma_2 \nu)^{1/2} = a_{22} a_{12}, \\ a_{22}^2 &= |\langle u_0, y_2 \rangle| = |\langle (I + \gamma_1 G)y_1, y_2 \rangle| \leq (\|y_1\|^2 + \gamma_1 \nu)^{1/2} (\|y_2\|^2 + \gamma_1 \nu)^{1/2} = a_{11} a_{21}. \end{aligned}$$

将这些不等式相加，得到 $a_{11}^2 + a_{22}^2 \leq a_{22} a_{12} + a_{11} a_{21}$，或者等价地，

$$(a_{11} - a_{21})^2 + (a_{22} - a_{12})^2 \leq a_{21}^2 + a_{12}^2 - a_{11}^2 - a_{22}^2 = 0.$$

于是 $a_{11} = a_{21}$ 且 $a_{22} = a_{12}$，即 $\|y_1\| = \|y_2\|$。根据 (4.7)，这意味着 $\gamma_1 = \gamma_2$ 或 $\langle Gy_1, y_2 \rangle = -\nu$。然而，如果 $\langle Gy_1, y_2 \rangle = -\nu$，那么 (4.6) 表明

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \|y_1\|^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\nu,$$

因此，如果 $C = I + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} G$，那么

$$\begin{aligned} \left\langle C^{1/2} y_1, C^{1/2} y_2 \right\rangle &= \langle Cy_1, y_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle - \tfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \nu = \|y_1\|^2 + \tfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \nu \\ &= (\|y_1\|^2 + \tfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \nu)^{1/2} (\|y_2\|^2 + \tfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \nu)^{1/2} \\ &= \|C^{1/2} y_1\| \, \|C^{1/2} y_2\|. \end{aligned}$$

由于 $C$ 是正定的，因此 $y_1$ 和 $y_2$ 共线；由 (4.6) 易知 $y_1 = y_2$，这由 (4.5) 推出 $(\gamma_1 - \gamma_2)Gy_1 = 0$。但是 $y_1 \notin N(G)$，因为 $u_0 \notin N(G)$，因此 $\gamma_1 = \gamma_2$。 □

对于每个 $a \in R(A)+R(B)$ 和每个 $b \in R(B)$，问题 2 的解的存在性意味着算子铅笔 $A+\lambda B$ 的值域满足值域可加性条件。

命题 4.7. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$，假设对任意 $a \in R(A)+R(B)$ 以及任意$b \in R(B)$，均有 $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$。那么，

$$R(A+\lambda B)=R(A)+R(B) \qquad \textit{for every } \lambda \in (\lambda_-,\lambda_+). \tag{4.8}$$

证明。根据命题 2.8，只需证明

$$G(\mathcal{R}) \subseteq (I+\tau G)(\mathcal{R}) \qquad \text{for every } \tau \in (-\kappa,\kappa).$$

固定 $x_0 \in \mathcal{R}$。若 $x_0 \in N(G)$，则对任意 $\tau \in(-\kappa,\kappa)$，都有 $Gx_0=0 \in(I+\tau G)(\mathcal{R})$。现在假设 $x_0 \notin N(G)$，并固定 $\tau_0 \in(-\kappa,\kappa)$。写作 $x_0=x_0^+ + x_0^- + x_0^0$，其中 $x_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$ 且 $x_0^0 \in N(G)$。考虑关于 (2.1) 的 $G$ 的典范分解，以及由下式定义的实常数 $\nu$

$$\nu := \|G_+^{1/2}(I_+ + \tau_0 G_+)^{-1}G_+ x_0^+\|^2 - \|G_-^{1/2}(I_- - \tau_0 G_-)^{-1}G_- x_0^-\|^2,$$

其中算子 $I_+ + \tau_0 G_+$ 和 $I_- - \tau_0 G_-$ 可逆，因为根据 (2.5)， $I+\tau_0 G$ 可逆。另一方面，令

$$z_0 := (I_+ + \tau_0 G_+)^{-1}G_+ x_0^+ + (I_- - \tau_0 G_-)^{-1}G_- x_0^-$$

得到

$$\begin{cases} (I+\tau_0 G)z_0 = Gx_0, \\ \langle\, Gz_0, z_0 \,\rangle = \nu. \end{cases}$$

另一方面，根据引理 4.5，存在满足条件的有序对 $(\gamma,y) \in [-\kappa,\kappa]\times\mathcal{R}$

$$\begin{cases} (I+\gamma G)y = Gx_0, \\ \langle\, Gy, y \,\rangle = \nu. \end{cases} \tag{4.9}$$

因此，有序对 $(\tau_0,z_0)$ 和 $(\gamma,y)$ 都是方程组的解

$$\begin{cases} (I+\tau G)z = Gx_0, \\ \langle\, Gz, z \,\rangle = \nu. \end{cases} \tag{4.10}$$

此外， $Gx_0 \notin N(G)$，因为 $N(G^2)=N(G)$ 且 $x_0 \notin N(G)$。根据命题 4.6，这意味着 $\gamma=\tau_0$，因此

$$Gx_0 = (I+\tau_0 G)y \in (I+\tau_0 G)(\mathcal{R}).$$

由于 $x_0 \in \mathcal{R}$ 和 $\tau_0 \in (-\kappa,\kappa)$ 是任意的，证明完成。 □

下一个命题给出了关于 $\lambda=\lambda_-$ 和 $\lambda=\lambda_+$ 的必要的值域可加性条件。令 $D_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 为 $(A+\lambda_\pm B)^{1/2}=WX$ 的解。

命题 4.8. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$，假设对于每个 $a \in R(A)+R(B)$ 和每个$b \in R(B)$，都有 $\mathcal{Z}(\beta,a,b) \neq \varnothing$。那么，

$$R(A+\lambda_\pm B) = \big(R(A)+R(B)\big) \cap R(WD_\pm D_\pm^*).$$

证明。我们 证明 $(I-\kappa G)(\mathcal{R})=\mathcal{R}\cap R(I-\kappa G)$，那么关于 $\lambda_-$ 的结论可由引理 2 得出 .9. 类似的 论证可用于证明另一个等式。

由命题 4.7， $R(W^2)=R(A)+R(B)$，由命题 2.8， $G(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$。于是，包含关系

$$(I-\kappa G)(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}\cap R(I-\kappa G)$$

是显然的。为证明另一包含关系，取 $x_0 \in \mathcal{R}\cap R(I-\kappa G)$，并将其写为 $x_0=x_0^+ + x_0^- + x_0^0$，其中 $x_0^\pm \in R(I_\pm \mp \kappa G_\pm)$，且 $x_0^0 \in N(G)$。考虑由下式定义的实值函数 $g_+$ 和 $g_-$

$$g_+(\tau) = \|G_+^{1/2}(I_+ + \tau G_+)^{-1}x_0^+\|^2, \quad \tau \in (-\kappa,\kappa],$$

and

$$g_-(\tau) = \|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1}x_0^-\|^2, \quad \tau \in [-\kappa, \kappa),$$

分别。由于 $x_0^+ \in R(I_+ - \kappa G_+)$，$\lim_{\tau\to-\kappa} g_+(\tau) = \|G_+^{1/2}(I_+ - \kappa G_+)^\dagger x_0^+\|^2$，因此 $g_+$ 的延拓是区间 $[-\kappa, \kappa]$上的连续函数。现在，根据自伴算子的泛函演算，$g_+$ 是关于 $\tau$的连续单调递减函数，而 $g_-$ 是关于 $\tau$的连续单调递增函数。因此，选取满足 $g_+(-\kappa) < g_-(-\kappa) + \nu$的 $\nu \in \mathbb{R}$，我们有

$$\max_{\tau\in[-\kappa,\kappa]} g_+(\tau) = g_+(-\kappa) < g_-(-\kappa) + \nu = \min_{\tau\in[-\kappa,\kappa)} g_-(\tau) + \nu. \tag{4.11}$$

由引理 4.5，存在 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{R}$ 满足

$$\begin{cases} (I + \gamma G)y = x_0, \\ \langle\, Gy, y \,\rangle = \nu. \end{cases}$$

首先假设 $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$。那么，

$$y = (I_+ + \gamma G_+)^{-1}x_0^+ + (I_- - \gamma G_-)^{-1}x_0^- + x_0^0,$$

and

$$g_+(\gamma) - g_-(\gamma) = \|G_+^{1/2}(I_+ + \gamma G_+)^{-1}x_0^+\|^2 - \|G_-^{1/2}(I_- - \gamma G_-)^{-1}x_0^-\|^2 = \langle\, Gy, y \,\rangle = \nu.$$

B但由 (4.11) 可知，这会导致矛盾。现在假设 $\gamma = \kappa$。那么 $x_0^- \in R(I_- - \kappa G_-)$，一个 d

$$y = (I_+ + \kappa G_+)^{-1}x_0^+ + (I_- - \kappa G_-)^\dagger x_0^- + x_0^0 + y_-,$$

对于某个 $y_- \in N(I_- - \kappa G_-)$。由于 $\lim_{\tau\to\kappa} g_-(\tau) = \|G_-^{1/2}(I_- - \kappa G_-)^\dagger x_0^-\|^2$，$g_-$的延拓在区间 $[-\kappa, \kappa]$上是连续函数。考虑到 $G_-y_- = \frac{1}{\kappa}y_-$ 和 $(I_- - \kappa G_-)^\dagger x_0^- \perp y_-$，我们有

$$\begin{aligned} \nu = \langle\, Gy, y \,\rangle &= \|G_+^{1/2}(I_+ + \kappa G_+)^{-1}x_0^+\|^2 - \|G_-^{1/2}\big((I_- - \kappa G_-)^\dagger x_0^- + y_-\big)\|^2 \\ &= g_+(\kappa) - g_-(\kappa) - \tfrac{1}{\kappa}\|y_-\|^2 \le g_+(\kappa) - g_-(\kappa), \end{aligned}$$

因此

$$g_+(\kappa) \ge g_-(\kappa) + \nu.$$

但由 (4.11) 可知，这会导致矛盾。因此，$\gamma = -\kappa$ 且 $x_0 = (I - \kappa G)y \in (I - \kappa G)(\mathcal{R})$。由于$x_0 \in \mathcal{R} \cap R($ $I - \kappa G)$是任意的，因此可得

$$\mathcal{R} \cap R(I - \kappa G) \subseteq (I - \kappa G)(\mathcal{R}). \qquad \square$$

考虑子空间 $\mathcal{N}_+ := N(I - \kappa G)$ 和 $\mathcal{N}_- := N(I + \kappa G)$。那么，

$$W\big(N(A + \lambda_+ B)\big) = \mathcal{N}_- \cap \mathcal{R} \qquad \text{and} \qquad W\big(N(A + \lambda_- B)\big) = \mathcal{N}_+ \cap \mathcal{R}. \tag{4.12}$$

现在我们建立系统 (4.4) 对每个 $u_0 \in \mathcal{H}$ 和每个 $\nu \in \mathbb{R}$ 都存在解的充要条件。下一个命题的证明采用了命题 [17, Prop. 4.8]，证明中使用的相同论证，可在附录中找到。

命题 4.9. 对每个 $u_0 \in \mathcal{H}$ 和每个 $\nu \in \mathbb{R}$，都存在 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{H}$ 满足

$$\begin{cases} (I + \gamma G)y = u_0, \\ \langle\, Gy, y \,\rangle = \nu, \end{cases}$$

当且仅当 $\mathcal{N}_- \neq \{\,0\,\}$ 和 $\mathcal{N}_+ \neq \{\,0\,\}$。

以下定理表明，对于给定的 $\beta \in \mathbb{R}$，引理 4.3 以及命题 4.7 和 4.8 中建立的必要条件，也是问题 2 对每个 $a \in R(A) + R(B)$ 和每个$b \in R(B)$ 都存在解的充分条件。注意，如果 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$ 和 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是 $(A + \lambda B)^{1/2} = WX$ 的解，则条件

$$R(A + \lambda B) = \big(R(A) + R(B)\big) \cap R(WDD^*)$$

等价于 $R(A + \lambda B) = R(A) + R(B)$。

定理 4.10. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$ 对于每个 $a \in R(A) + R(B)$ 以及每个 $b \in R(B)$，当且仅当以下条件成立：

*i)* $I_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$ *with* $\lambda_- < \lambda_+$;

ii) $N(A + \lambda_- B) \neq \{0\}$ 和 $N(A + \lambda_+ B) \neq \{0\}$;

iii) 对每个 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$, $R(A + \lambda B) = \big(R(A) + R(B)\big) \cap R(WDD^*)$，其中 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是 $(A + \lambda B)^{1/2} = WX$ 的解。

证明。条件的必要性由引理 4.3 以及命题 4.7 和 4.8 得出。

假设条件 i)、ii) 和 iii) 成立。固定 $\beta \in \mathbb{R}$，并令 $a \in R(A) + R(B)$ 和 $b \in R(B)$。考虑向量 $c \in R(A) + R(B)$ 以及在 (4.3) 中定义的常数 $\nu \in \mathbb{R}$，并设 $u_0 = W^{-1}c$。由于 $R(W^2) = R(A) + R(B)$，我们有 $u_0 \in W^{-1}\big(R(W^2)\big) = \mathcal{R}$。根据引理 4.5，只需证明存在 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{R}$ 满足

$$\begin{cases} (I + \gamma G)y = u_0, \\ \langle\, Gy, y \,\rangle = \nu, \end{cases} \tag{4.13}$$

以证明 $y \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$。由于 ii) 蕴含 $\mathcal{N}_+ \cap \mathcal{R} \neq \{0\}$ 和 $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{R} \neq \{0\}$，存在 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{H}$，使得 $(\gamma, y)$ 满足 (4.13)，见命题 4.9。若 $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$，则 $y$ 是唯一的；又由于 $(I + \gamma G)y = u_0 \in \mathcal{R}$，根据命题 2.8 可得 $y \in \mathcal{R}$，因此 $y \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$。

由 iii) 和引理 2.9，若 $\gamma = \kappa$，则 $u_0 \in \mathcal{R} \cap R(I + \kappa G) = (I + \kappa G)(\mathcal{R})$。因此，存在 $z_0 \in \mathcal{N}_-$ 使得

$$w_0 := (I + \kappa G)^{\dagger} u_0 + z_0 \in \mathcal{R}.$$

若 $\langle\, Gw_0, \ w_0 \,\rangle = \nu$，则有序对 $(\kappa, w_0)$ 满足 (4.13)，且 $w_0 \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$。现在假设 $\langle\, Gw_0, w_0 \,\rangle > \nu$，并选取满足 $\|z\| = 1$ 的 $z \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{R}$。令

$$\alpha = -\operatorname{Re}\langle\, w_0, z \,\rangle + \Big(\big(\operatorname{Re}\langle\, w_0, z \,\rangle\big)^2 + \kappa\big(\langle\, Gw_0, w_0 \,\rangle - \nu\big)\Big)^{1/2},$$

我们得到有序对 $(\kappa, w_0 + \alpha z)$ 满足 (4.13)，且还满足 $w_0 + \alpha z \in \mathcal{R}$。因此，$w_0 + \alpha z \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$。若$\langle\, Gw_0, w_0 \,\rangle < \nu$，由于 $N(A + \lambda_- B) \neq \{0\}$，我们可以对某个满足$\|z\| = 1$的 $z \in \mathcal{N}_+ \cap \mathcal{R}$ 重复相同的过程。

如果我们假设 $\gamma = -\kappa$，同样的论证也成立，从而证明了充分性。 □

在上述证明中，我们表明，在所述条件下，给定 $u_0 \in \mathcal{R}$ 和 $\nu \in \mathbb{R}$，存在一有序对 $(\gamma, y) \in [-\kappa, \kappa] \times \mathcal{R}$，满足 (4.13)。一方面，如果 $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$，那么向量 $y$是唯一的。另一方面，如果 $\gamma = \kappa$，那么存在 $\alpha \geq 0$ 和 $\widetilde{y} \in \mathcal{R}$，使得任意向量

$$y \in \widetilde{y} + \alpha \cdot \mathcal{N}_- \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$$

满足：$(\kappa, y)$ 是 (4.13) 的一个解，其中 $\mathcal{S}$ 表示单位球面 $\mathcal{S} = \{\, x \in \mathcal{H} : \ \|x\| = 1 \,\}$。对于 $\gamma = -\kappa$，也有类似的结论。

## 4.1 最后说明

1. 若某个 $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ 使 $R(A+\lambda_0 B)$ 是闭的，则对于每个 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$， $R(A+\lambda B)$ 都是闭的，参见[18, 推论 3.7]。在这种情况下，

$$R(A+\lambda B) = R(A) + R(B) = \mathcal{H} \qquad \text{for every } \lambda \in (\lambda_-, \lambda_+).$$

此外， $W$ 可逆，显然

$$R(A+\lambda_- B) = R(WD_-D_-^*) = \big(R(A)+R(B)\big) \cap R(WD_-D_-^*)$$

and

$$R(A+\lambda_+ B) = R(WD_+D_+^*) = \big(R(A)+R(B)\big) \cap R(WD_+D_+^*).$$

然后，仿照命题 [17, Prop. 4.3] 证明中所用的论证，我们得到下面的定理。该定理表明，如果将可容许数据点集扩大到 $\mathcal{R} \times R(B)$，那么对于任意 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$， $R(A+\lambda B) = \mathcal{H}$。

定理 4.11. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$，对于每个 $a \in \mathcal{R}$ 以及每个 $b \in R(B)$， $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$ 当且仅当以下条件成立:

i) $I_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$，其中 $\lambda_- < \lambda_+$; ii) $N(A+\lambda_- B) \neq \{0\}$ 且 $N(A+\lambda_+ B) \neq \{0\}$;
iii) 对某个 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$， $R(A+\lambda B) = \mathcal{H}$。

证明。充分性由上述讨论可得。为证明逆命题，假设对于每个 $a \in \mathcal{R}$ 和每个 $b \in R(B)$， $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$。根据定理 4.10，我们只需证明 iii)。根据命题 4.7，对于每个 $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$， $R(A+\lambda B) = R(A) + R(B)$。设 $a \in \mathcal{R}$，由于 $\mathcal{Z}(\beta, a, 0) \neq 0$，根据定理 3.3，存在满足 $g(x) = \beta$ 的 $(\lambda, x) \in [\lambda_-, \lambda_+] \times \mathcal{H}$，并且

$$-a = (A+\lambda B)x \in R(A) + R(B).$$

由于 $a \in \mathcal{R}$ 是任意的，因此可得 $R\big((A+\rho B)^{1/2}\big) = \mathcal{R} \subseteq R(A)+R(B) = R(A+\rho B)$，即 $R(A+\rho B)$ 是闭集。由于 $N(A+\rho B) = N(A) \cap N(B) = \{0\}$，这意味着 $R(A+\rho B) = \mathcal{H}$。 □

2. 为结束本小节，我们讨论 $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$ 的情形。假设 $a \in R(A) + R(B)$ 且 $b \in R(B)$。将 $x \in \mathcal{H}$ 分解为 $x = x_0 + x_1$，其中 $x_0 \in N(A) \cap N(B)$ 且 $x_1 \in \mathcal{H}' := \big(N(A) \cap N(B)\big)^{\perp}$，容易看出

$$f(x) = f(x_0 + x_1) = f(x_0) + f(x_1) = f(x_1) \quad \text{and} \quad g(x) = g(x_0 + x_1) = g(x_0) + g(x_1) = g(x_1),$$

因为 $f(x_0) = g(x_0) = 0$。因此，若 $x \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，则 $x_1 \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，并且

$$x_1 + u \in \mathcal{Z}(\beta, a, b) \qquad \text{for every } u \in N(A) \cap N(B).$$

请注意，若在希尔伯特空间 $\mathcal{H}'$ 中表述问题 2， $x_1$ 也是问题 2 的一个解。因此，

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(\beta, a, b) = \mathcal{Z}_{\mathcal{H}'}(\beta, a, b) + N(A) \cap N(B),$$

其中 $\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(\beta, a, b)$ 和 $\mathcal{Z}_{\mathcal{H}'}(\beta, a, b)$ 分别是 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 中问题 2 的解集。

现在，假设 $a \in \mathcal{H}$ 和 $b \in \mathcal{H}'$，我们证明，若 $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$，则 $a \in \mathcal{H}'$。事实上，$x \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$ 当且仅当 $g(x) = \beta$，并且

$$(A+\lambda B)x = -(a+\lambda b) \qquad \text{for some } \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+].$$

Dec将 $x = x_0 + x_1$ 和 $a = a_0 + a_1$ 与 $x_0, a_0 \in N(A) \cap N(B)$ 以及 $x_1, a_1 \in \mathcal{H}'$ 复合，得到 in

$$(A+\lambda B)x_1 = (A+\lambda B)x = -(a+\lambda b) = -(a_1+\lambda b) - a_0.$$

因此， $a_0 = 0$和 $a \in \mathcal{H}'$，正如我们所述。类似的论证表明，若 $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$对$a \in \mathcal{H}'$和 $b \in \mathcal{H}$成立，则 $b \in \mathcal{H}'$。

最后，我们要指出， $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$对 $a \notin \mathcal{H}'$和 $b \notin \mathcal{H}'$均成立的情形相当罕见。事实上，设 $x \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，并将 $a$、 $b$和 $x$分解为 $a = a_0 + a_1$、 $b = b_0 + b_1$和$x = x_0 + x_1$，其中 $a_0$、 $b_0$、 $x_0 \in N(A) \cap N(B)$且 $a_1$、 $b_1$、 $x_1 \in \mathcal{H}'$。于是，根据命题 3.4，存在唯一的 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ 使得$(A + \lambda B)x = -(a + \lambda b)$，而该条件可写为

$$(A + \lambda B)x_1 = (A + \lambda B)x = -(a + \lambda b) = -(a_1 + \lambda b_1) - (a_0 + \lambda b_0).$$

因此， $a_0 + \lambda b_0 = 0$。由于 $\lambda$的唯一性，这一条件限制很强。

所有这些评论都表明，在问题 2 的研究中，子空间 $N(A) \cap N(B)$并不起重要作用。

# 5 附录：命题 3.4 和 4.9 的证明

为完整起见，我们给出命题 3.4 和 4.9 的证明；这些证明与一些已发表结果的证明类似。

命题 3.4. 给定 $\beta \in \mathbb{R}$，令 $(a, b) \in \mathcal{A}^c$ 使得 $\mathcal{Z}(\beta, a, b) \neq \varnothing$. 那么，存在唯一的$\lambda \in I_{\geq}(A, B)$，使得

$$(A + \lambda B)x = -(a + \lambda b),$$

对每个 $x \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，均成立。

证明. 令 $I_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$. 若 $\lambda_- = \lambda_+$，则结论显然。现在假设 $\lambda_- \neq \lambda_+$. 给定$x_1, x_2 \in \mathcal{Z}(\beta, a, b)$，令 $\lambda_1$, $\lambda_2 \in I_{\geq}(A, B)$ 使得

$$\begin{aligned} (A + \lambda_1 B)x_1 &= -(a + \lambda_1 b), \\ (A + \lambda_2 B)x_2 &= -(a + \lambda_2 b). \end{aligned} \tag{5.1}$$

由于 $g(x_i) = \beta$ 对于 $i = 1, 2$,

$$f(x_i) = f(x_i) + \lambda_i \big(g(x_i) - \beta\big) = \langle (A + \lambda_i B)x_i, x_i \rangle + 2\,\mathrm{Re}\, \langle a + \lambda_i B, x_i \rangle - \lambda_i \beta = \langle a + \lambda_i b, x_i \rangle - \lambda_i \beta. \tag{5.2}$$

于是,

$$\langle a + \lambda_1 b, x_1 \rangle - \lambda_1 \beta = \langle a + \lambda_2 b, x_2 \rangle - \lambda_2 \beta, \tag{5.3}$$

因为 $f(x_1) = f(x_2)$。此外,

$$\begin{aligned} \langle (A + \lambda_1 B)x_1, x_2 \rangle &= -\langle a + \lambda_1 b, x_2 \rangle = -\langle a + \lambda_2 b, x_2 \rangle + (\lambda_2 - \lambda_1)\langle b, x_2 \rangle, \\ \langle (A + \lambda_2 B)x_2, x_1 \rangle &= -\langle a + \lambda_2 b, x_1 \rangle = -\langle a + \lambda_1 b, x_1 \rangle + (\lambda_1 - \lambda_2)\langle b, x_1 \rangle, \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \langle Ax_1, x_2 \rangle + \lambda_1 \langle Bx_1, x_2 \rangle + (\lambda_1 - \lambda_2)\langle b, x_2 \rangle + \lambda_2 \beta &= -\big(\langle a + \lambda_2 b, x_2 \rangle - \lambda_2 \beta\big), \\ \langle Ax_2, x_1 \rangle + \lambda_2 \langle Bx_2, x_1 \rangle + (\lambda_2 - \lambda_1)\langle b, x_1 \rangle + \lambda_1 \beta &= -\big(\langle a + \lambda_1 b, x_1 \rangle - \lambda_1 \beta\big). \end{aligned} \tag{5.4}$$

结合 (5.3) 和 (5.4) 可得

$$\begin{aligned} &\lambda_1\big(\langle Bx_1, x_2 \rangle + \langle b, x_1 \rangle + \langle b, x_2 \rangle - \beta\big) = \\ &= \lambda_2\big(\langle Bx_2, x_1 \rangle + \langle b, x_1 \rangle + \langle b, x_2 \rangle - \beta\big) + \langle Ax_2, x_1 \rangle - \langle Ax_1, x_2 \rangle. \end{aligned} \tag{5.5}$$

这表明 这意味着，如果 $\mathrm{Re}\,\langle Bx_1, x_2 \rangle + \mathrm{Re}\,\langle b, x_1 \rangle + \mathrm{Re}\,\langle b, x_2 \rangle - \beta \neq 0$，那么 $\lambda_1 = \lambda_2$。现在假设 th at

$$\mathrm{Re}\langle Bx_1, x_2 \rangle + \mathrm{Re}\langle b, x_1 \rangle + \mathrm{Re}\langle b, x_2 \rangle - \beta = 0. \tag{5.6}$$

由柯西-施瓦茨不等式

$$\big(\operatorname{Re}\langle\,(A+\lambda_2 B)x_1,x_2\,\rangle\big)^2 \le |\,\langle\,(A+\lambda_2 B)x_1,x_2\,\rangle\,|^2 \le \langle\,(A+\lambda_2 B)x_1,x_1\,\rangle\,\langle\,(A+\lambda_2 B)x_2,x_2\,\rangle\,. \tag{5.7}$$

现在，我们利用假设 (5.6) 推导 (5.7) 左右两边的表达式。首先，$\langle\,a+\lambda_2 b,\ x_2\,\rangle \in \mathbb{R}$，结合 (5.4) 和 (5.6) 中的第一个等式，可得

$$\operatorname{Re}\langle\,(A+\lambda_2 B)x_1,x_2\,\rangle = -\langle\,a+\lambda_2 b,x_2\,\rangle + (\lambda_1-\lambda_2)\,(\operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle-\beta\,). \tag{5.8}$$

其次，由 (5.3) 可得，

$$\begin{aligned}&\langle\,(A+\lambda_2 B)x_1,x_1\,\rangle = \\ &= \Big(-\langle\,a+\lambda_2 b,x_2\,\rangle + (\lambda_1-\lambda_2)\,(\operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle-\beta\,)\Big) - (\lambda_1-\lambda_2)\Big(\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle\Big)\end{aligned} \tag{5.9}$$

最后，考虑到

$$\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle + 2\operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle - \beta = g(x_1)-\beta = 0,$$

可知

$$\begin{aligned}&\langle\,(A+\lambda_2 B)x_2,x_2\,\rangle = \\ &= \Big(-\langle\,a+\lambda_2 b,x_2\,\rangle + (\lambda_1-\lambda_2)\,(\operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle-\beta\,)\Big) + (\lambda_1-\lambda_2)\Big(\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle\Big).\end{aligned} \tag{5.10}$$

然后，将 (5.8)、(5.9) 和 (5.10) 代入 (5.7)，得到

$$\begin{aligned}&\Big(-\langle\,a+\lambda_2 b,x_2\,\rangle + (\lambda_1-\lambda_2)\,(\operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle-\beta\,)\Big)^2 \le \\ &\le \Big(-\langle\,a+\lambda_2 b,x_2\,\rangle + (\lambda_1-\lambda_2)\,(\operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle-\beta\,)\Big)^2 - \Big((\lambda_1-\lambda_2)\Big(\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle\Big)\Big)^2.\end{aligned} \tag{5.11}$$

类似地，考虑不等式

$$\big(\operatorname{Re}\langle\,(A+\lambda_1 B)x_1,x_2\,\rangle\big)^2 \le |\,\langle\,(A+\lambda_1 B)x_1,x_2\,\rangle\,|^2 \le \langle\,(A+\lambda_1 B)x_1,x_1\,\rangle\,\langle\,(A+\lambda_1 B)x_2,x_2\,\rangle\,,$$

按照上述步骤进行，但将 $x_1$ 与 $x_2$、$\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 互换，可得

$$\begin{aligned}&\Big(-\langle\,a+\lambda_1 b,x_1\,\rangle + (\lambda_2-\lambda_1)\,(\operatorname{Re}\langle\,b,x_2\,\rangle-\beta\,)\Big)^2 \le \\ &\le \Big(-\langle\,a+\lambda_1 b,x_1\,\rangle + (\lambda_2-\lambda_1)\,(\operatorname{Re}\langle\,b,x_2\,\rangle-\beta\,)\Big)^2 - \Big((\lambda_2-\lambda_1)\Big(\langle\,Bx_2,x_2\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_2\,\rangle\Big)\Big)^2.\end{aligned} \tag{5.12}$$

因此，由 (5.11) 和 (5.12) 可知，若 $\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle \neq 0$ 或 $\langle\,Bx_2,x_2\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_2\,\rangle \neq 0$，则 $\lambda_1=\lambda_2$。假设

$$\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle = 0 \qquad \text{and} \qquad \langle\,Bx_2,x_2\,\rangle + \operatorname{Re}\langle\,b,x_2\,\rangle = 0.$$

由于 $g(x_1)=\beta$ 且 $g(x_2)=\beta$，这意味着

$$\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle = -\operatorname{Re}\langle\,b,x_1\,\rangle = -\beta \qquad \text{and} \qquad \langle\,Bx_2,x_2\,\rangle = -\operatorname{Re}\langle\,b,x_2\,\rangle = -\beta,$$

进而，由 (5.3) 可知

$$\operatorname{Re}\langle\,a,x_1\,\rangle = \operatorname{Re}\langle\,a,x_2\,\rangle\,.$$

由于 $f(x_1)=f(x_2)$，由最后一个方程可得 $\langle\,Ax_1,x_1\,\rangle = \langle\,Ax_2,x_2\,\rangle$。由 (5.6) 还可得 $\operatorname{Re}\langle\,Bx_1,x_2\,\rangle = -\beta$。最后，

$$\langle\,Ax_1,x_1\,\rangle = \langle\,(A+\lambda_1 B)x_1,x_1\,\rangle - \lambda_1\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle = -\langle\,a+\lambda_1 b,x_1\,\rangle - \lambda_1\langle\,Bx_1,x_1\,\rangle = -\operatorname{Re}\langle\,a,x_1\,\rangle\,,$$

并且根据 (5.8),

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle Ax_1, x_2\rangle &= \operatorname{Re}\langle (A+\lambda_2 B)x_1, x_2\rangle - \lambda_2 \operatorname{Re}\langle Bx_1, x_2\rangle \\ &= -\langle a+\lambda_2 b, x_2\rangle + (\lambda_1-\lambda_2)\,(\operatorname{Re}\langle b, x_1\rangle - \beta) - \lambda_2 \operatorname{Re}\langle Bx_1, x_2\rangle \\ &= -\operatorname{Re}\langle a, x_2\rangle .\end{aligned}$$

因此,

$$\operatorname{Re}\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_1\rangle = \langle Ax_2, x_2\rangle .$$

设 $\rho \in (\lambda_-, \lambda_+)$, 则

$$\begin{aligned}&\langle (A+\rho B)(x_1-x_2), x_1-x_2\rangle = \\ &= \big(\langle Ax_1, x_1\rangle + \langle Ax_2, x_2\rangle - 2\operatorname{Re}\langle Ax_1, x_2\rangle\big) + \rho\big(\langle Bx_1, x_1\rangle + \langle Bx_2, x_2\rangle - 2\operatorname{Re}\langle Bx_1, x_2\rangle\big) \\ &= 0.\end{aligned}$$

于是, 由命题 2.4,

$$x_1 - x_2 \in N\big((A+\rho B)^{1/2}\big) = N(A+\rho B) = N(A)\cap N(B) = \{0\},$$

因此 $x_1 = x_2$。于是,

$$-(a+\lambda_1 b) = (A+\lambda_1 B)x_1 = (A+\lambda_1 B)x_2 = (A+\lambda_2 B)x_2 + (\lambda_1-\lambda_2)Bx_2 = -(a+\lambda_2 b) + (\lambda_1-\lambda_2)Bx_2,$$

从而

$$(\lambda_1-\lambda_2)(Bx_2+b) = 0.$$

由 (5.1), 若 $Bx_2 = -b$ 则 $Ax_2 = -a$ , 这就产生了矛盾, 因为 $(a,b) \in \mathcal{A}^c$。因此, $\lambda_1 = \lambda_2$。 □

定义

$$\mathcal{D}_+ := \mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{N}_+ \qquad \text{and} \qquad \mathcal{D}_- := \mathcal{H}_- \ominus \mathcal{N}_-,$$

$\mathcal{N}_+$ 的正缺陷子空间和 $\mathcal{N}_-$的负缺陷子空间。证明命题 4.9 时, 我们会用到接下来的两个技术引理。它们的证明思路分别与 [17, 引理 4.5] 和 [17, 引理 4.6], 的证明相同。

引理。给定 $u \in \mathcal{H}_\pm$, 将其分解为 $u = v + w$ , 其中 $v \in \mathcal{N}_\pm$ 且 $w \in \mathcal{D}_\pm$。那么, 对每个$\tau \in$ （$-\kappa$, $\kappa$）,

$$\|G_\pm^{1/2}(I_\pm \pm \tau G_\pm)^{-1}u\|^2 = \frac{\kappa}{(\kappa\pm\tau)^2}\|v\|^2 + \|G_\pm^{1/2}(I_\pm \pm \tau G_\pm)^{-1}w\|^2.$$

引理。给定 $u \in \mathcal{H}_\pm$, 若 $\lim_{\tau\to\kappa}\|G_\pm^{1/2}(I_\pm - \tau G_\pm)^{-1}u\| < +\infty$, 则 $u \in R(I_\pm - \kappa G_\pm)$。

命题 4.9。对每个 $u_0 \in \mathcal{H}$ 和每个 $\nu \in \mathbb{R}$, 都存在（$\gamma$, $y$） $\in [-\kappa,\kappa]\times\mathcal{H}$, 满足

$$\begin{cases}(I+\gamma G)y = u_0,\\ \langle Gy, y\rangle = \nu,\end{cases}$$

当且仅当 $\mathcal{N}_- \neq \{0\}$ 和 $\mathcal{N}_+ \neq \{0\}$。

证明。必要性由 [17, 引理 4.7]得出。反过来, 假设 $\mathcal{N}_- \neq \{0\}$ 且 $\mathcal{N}_+ \neq \{0\}$。考虑分解 $u_0 = u_0^+ + u_0^- + u_0^0$, 其中$u_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$ 和 $u_0^0 \in N$（$G$）, 以及由下式定义的实值函数 $f_+$ 和 $f_-$

$$f_+(\tau) = \|G_+^{1/2}(I_+ + \tau G_+)^{-1}u_0^+\|^2, \quad \tau \in (-\kappa,\kappa] \tag{5.13}$$

and

$$f_-(\tau) = \|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1}u_0^-\|^2, \quad \tau \in [-\kappa,\kappa), \tag{5.14}$$

分别。如果存在 $\tau_0 \in (-\kappa, \kappa)$，使得 $f_+(\tau_0) = f_-(\tau_0) + \nu$，那么令 $\gamma = \tau_0$ 和

$$y = (I_+ + \gamma G_+)^{-1} u_0^+ + (I_- - \gamma G_-)^{-1} u_0^- + u_0^0$$

这意味着 $\langle Gy, y \rangle = \nu$ 和 $(I + \gamma G)y = u_0$。

现在假设对于每个 $\tau \in (-\kappa, \kappa)$，都有 $f_+(\tau) > f_-(\tau) + \nu$。那么，

$$\lim_{\tau \to \kappa} \|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1} u_0^-\|^2 = \lim_{\tau \to \kappa} f_-(\tau) \leq f_+(\kappa) - \nu.$$

因此 $u_0^- \in R(I_- - \kappa G_-)$，进而 $u_0 \in R(I + \kappa G)$。由于 $\mathcal{N}_- \neq \{0\}$，我们可以选取满足 $\|z\| = 1$ 的 $z \in \mathcal{N}_-$。考虑到 $G_- z = \frac{1}{\kappa} z$ 和 $(I_- - \kappa G_-)^\dagger u_0^- \perp z$，并令

$$y = (I_+ + \kappa G_+)^{-1} u_0^+ + (I_- - \kappa G_-)^\dagger u_0^- + u_0^0 + \alpha_- z,$$

with

$$\alpha_- := \left( \kappa \Big( \|G_+^{1/2}(I_+ + \kappa G_+)^{-1} u_0^+\|^2 - \|G_-^{1/2}(I_- - \kappa G_-)^\dagger u_0^-\|^2 - \nu \Big) \right)^{1/2},$$

我们有 $\langle Gy, y \rangle = \nu$ 和 $(I + \kappa G)y = u_0$。

如果假设对于每个 $\tau \in (-\kappa, \kappa)$，都有 $f_+(\tau) < f_-(\tau) + \nu$，则类似的论证同样成立。 □

# 参考文献


[1] F. Ahmetoglu, 《希尔伯特空间中按内部为空的锥偏序的二次规划问题计算方法》, 《安卡拉大学理学院A1数学与统计系列通讯》62 (2013), 11–15.[2] T. Ya. Azizov 和 I. S. Iokhvidov, 《不定度量空间中的线性算子》, 约翰·威立父子公司, 1989.[3] E. M. Bednarczuk 和 G. Bruccola, 《希尔伯特空间中一类可能非凸QCQP问题的整体可解性》, arXiv: 2302.07004 (2023).[4] P. Benson、R. L. Smith、I. E. Schochetman 和 J. C. Bean, 《无限维正定二次规划的最优解近似》, J. Optim. Theory Appl. 85 (1995), 235–248.[5] V. Boltyanski、H. Martini 和 V. Soltan, 《几何方法与优化问题》, 施普林格, 1999.[6] S. Boyd 和 L. Vandenberghe, 《凸优化》, 剑桥大学出版社, 2004.[7] S. Canu、C. S. Ong 和 X. Mary, 《非正核样条》, 第5届国际ISAAC大会论文集 (2005), 1–10.[8] S. Canu、C. S. Ong、X. Mary 和 A. Smola, 《基于非正核的学习》, 第21届国际机器学习会议论文集 (2004), 639–646.[9] S. Chen 和 W. Soon-Yi Wu, 《Lp空间中的无限维二次规划算法》, 《计算与应用数学杂志》213 (2008), 408–422.[10] A. De Maio、Y. Huang、D. P. Palomar、S. Zhang 和 A. Farina, 《用于雷达检测中最大似然波束指向估计的分式QCQP》, 《IEEE 信号处理汇刊》59 (2011), 172–185.[11] V. V. Dong 和N. .N. Tam, 《希尔伯特空间中非凸二次规划问题解的存在性》, 《越南数学学报》43 (2018), 155–174.

[12] V. V. Dong, 《希尔伯特空间中二次规划问题的最优性条件》, 《台湾数学杂志》25 (2021), 1073–1088.[13] R. G. Douglas, 《希尔伯特空间中算子的主序、因子分解与值域包含》, 《美国数学会会刊》17 (1996), 413–416.[14] T. Gartner、J. W. Lloyd 和 P. A. Flach, 《结构化数据核》, 国际归纳逻辑编程会议 (2003), 66–83.[15] I. Gohberg、S. Goldberg 和 M. Kaashoek, 《线性算子类》第 I 卷, Birkh¨auser Verlag, 1990.[16] G. H. Golub、P. C. Hansen 和 D. P. O'Leary, 《Tikhonov 正则化与总体最小二乘》, 《SIAM 矩阵分析与应用杂志》21 (1999), 185–194.[17] S. Gonzalez Zerbo、A. Maestripieri 和 F. Mart´ínez Per´ía, 《带二次约束的不定最小二乘》, 《数学分析与应用杂志》514 (2022), 126297.[18] S. Gonzalez Zerbo、A. Maestripieri 和 F. Mart´ínez Per´ía, 《算子铅笔与带二次约束的二次规划问题》, 《线性代数及其应用》665 (2023), 12–35.[19] O. K. Gupta, 《二次规划的应用》, 《信息与优化科学杂志》16 (1995), 177–194.[20] B. Haasdonk 和 D. Keysers, 《支持向量机的切向距离核》, 第16届国际模式识别会议论文集第2卷 (2002), 864–868.[21] Y. Hsia、G. X. Lin 和 R.-L Sheu, 《通过矩阵铅笔重新探讨带一个不等式二次约束的二次规划》, 《太平洋优化杂志》10 (2014), 461–481.[22] H. Hmam, 《带一个二次等式约束的二次优化》, 技术报告 DSTO-TR-2416, 国防科学技术组织电子战与雷达部, 2010.[23] R. J. Kelly 和 W. A. Thompson, 《实希尔伯特空间中的二次规划》, 《工业与应用数学学会杂志》11 (1963), 1063–70.[24] M. G. Krein 和 Ju. L. Smul'jan, 《不定度量空间中的正算子》, 载于: 《泛函分析与几何论文十二篇》, 《美国数学会译丛》85 (1969), 93–113.[25] G. Loosli 和 S. Canu, 《二次规划与机器学习——大规模问题与稀疏性》, 载于《信号与图像处理中的优化》, 约翰·威立父子公司, 2010.[26] D. G. Luenberger, 《向量空间方法与优化》, 约翰·威立父子公司, 1969.[27] R. Abraham、J. Mardsen 和 T. Ratiu, 《流形、张量分析与应用》, Addison Wesley, 1983.[28] B. A. McCarl、H. Moskowitz 和 H. Furtan, 《二次规划的应用》, 《Omega》5 (1977), 43–55.[29] M. Mohri、A. Rostamizadeh 和 A. Talwalkar, 《机器学习基础》, 麻省理工学院出版社, 2012.[30] J. Xu、A. Paiva、I. M. Park 和 J. C. Principe, 《用于信息论学习的再生核希尔伯特空间框架》, 《IEEE 信号处理汇刊》56 (2009), 5891–5902.[31] D. Oglic 和 T. Gaertner, 《再生核克莱因空间中的学习》, 第35届国际机器学习会议论文集第80卷 (2018), 3859–3867.[32] D. Oglic 和 T. Gaertner, 《再生核克莱因空间中的可扩展学习》, 第36届国际机器学习会议论文集第97卷 (2019), 4912–4921.

[33] J. Park 和 S. Boyd, 《非凸二次约束二次规划的一般启发式方法》, arXiv: 1703.07870（2017）。[34] H. Palanthandalam-Madapusi、T. Van Pelt 和 D. Bernstein, 《不定号二次等式约束下二次规划的矩阵铅笔及存在条件》, Comput. Optim. Appl. 45 (2009), 533–549。[35] H. J. Palanthandalam-Madapusi、T. H. Van Pelt 和 D. S. Bernstein, 《参数一致性与二次约束误差变量最小二乘辨识》, Int. J. Control 83 (2010), 862–877。[36] T. H. Pelt 和 D. Bernstein, 《二次约束最小二乘辨识》, Proc. Am. Control Conf. 5 (2001), 3684–3689。[37] I. P´olik 和 T. Terlaky, 《S 引理综述》, SIAM Rev. 49 (2007), 371–418。[38] M. J. D. Powell 和 Y. Yuan, 《一种等式约束优化的信赖域算法》, Math. Program. 49 (1991), 189–211。[39] R. T. Rockafellar, 《凸分析》, 普林斯顿大学出版社, 1970。[40] J. Semple, 《希尔伯特空间中的无限维正定二次规划》, J. Optim. Theory Appl. 88 (1996), 743–749。[41] K. Shimizu、S. Fujimaki 和 Yo Ishizuka, 《希尔伯特空间中的约束优化方法及其在带泛函不等式约束的最优控制问题中的应用》, IEEE Trans. Automat. Contr. 31 (1986), 559–564。[42] M. Signoretto、K.Pelckmans、J. Suykens, 《用于核回归估计中子空间选择的二次约束二次规划》, Proc. 18th Int. Conf. Artif. Neur. Netw. Part I (2008), 175–184。[43] S. Sonnenberg、G. Ratsch、C. Schafer 和 B. Scholkopf, 《大规模多核学习》, J. Mach. Learn. Res. 7 (2006), 1531–1565。[44] R. K. Sundaram, 《优化理论入门》, 剑桥大学出版社, 1996。[45] P. J. Szablowski, 《希尔伯特空间中锥上的二次泛函极小化》, Comput. Math. Appl. 22 (1991), 21–34。[46] Y. Ye 和 S. Zhang, 《关于二次极小化的新结果》, SIAM J. Optim. 14 (2003), 245–267。