由 $\mathcal{PT}$ 对称势控制的二维旋转非对称量子液滴的形成与动力学

Jin Song[1,2], Zhenya Yan[1,2,a)]，以及 Boris A. Malomed[3,4]

[1]中国科学院数学与系统科学研究院 KLMM，北京 100190，中国[2]中国科学院大学数学科学学院，北京 100049，中国[3]特拉维夫大学工程学院电气工程学院物理电子学系，特拉维夫 69978，以色列[4]塔拉帕卡大学高级研究所，邮政信箱 7D，阿里卡 1000000，智利 a) **通讯作者：**zyyan@mmrc.iss.ac.cn

arXiv:2303.05210v1 [quant-ph] 9 Mar 2023

摘要：本文基于含有李-黄-杨修正的修正的格罗斯–皮塔耶夫斯基方程，研究了 $\mathcal{PT}$ 对称势中多种二维旋转量子液滴（QDs）所形成的涡旋孤子。具体而言，在一定参数约束下得到了精确的量子液滴态，为寻找相应的一般族提供了指导。在未破缺的 $\mathcal{PT}$ 对称性参数区域内，获得了源自线性模态的不同量子液滴族；在范数较低和较高时，它们分别呈多极液滴和涡旋液滴形态，并对其稳定性进行了研究。在旋转状态下，量子液滴在超过临界旋转频率后变得不对称，其中大多数是稳定的。通过改变增益-损耗分布的强度，探究了 $\mathcal{PT}$ 对称势对旋转和非旋转量子液滴的影响。总体而言，受困于 $\mathcal{PT}$ 对称势中的旋转量子液滴会呈现不对称性，这是由增益-损耗分布与旋转相互作用所影响的能量流造成的。最后，研究了旋转或非旋转量子液滴之间的相互作用，发现它们在一定条件下会发生弹性碰撞。

作为一种新型液体，量子液滴（QDs）源于双组分玻色-爱因斯坦凝聚体（BECs）中相互吸引与自排斥之间的精妙平衡。自 Petrov 预测量子液滴以来 [1]，它们在超冷原子与超流体研究中持续受到越来越多的关注。李–黄–杨修正可抑制平均场相互作用导致的临界或超临界塌缩，从而使稳定量子液滴得以观测，例如涡旋量子液滴、多个液滴、量子液滴簇和晶体 [9]。另一方面，在玻色-爱因斯坦凝聚体中实现复杂的 $\mathcal{PT}$势是可行的，近期也已提出许多相应的实验设计方案。尤其是对于具有复杂二维排列的各种量子液滴图样，例如涡旋液滴、多个量子液滴以及量子液滴簇，考察 $\mathcal{PT}$ 对称势中增益-损耗分布对其结构的影响至关重要。本文发现，在 $\mathcal{PT}$ 对称势中束缚着丰富多样的旋转量子液滴：范数较低时呈多极液滴形态，范数较高时则呈涡旋液滴形态，并对其稳定性进行了研究。在旋转状态下，当旋转频率超过临界值时，量子液滴会变得不对称，其中大多数仍然稳定。此外，研究发现，束缚在 $\mathcal{PT}$ 对称势中的旋转量子液滴会因增益-损耗分布与旋转相互作用所影响的能量流而呈现不对称性。最后，研究了旋转或非旋转量子液滴之间的相互作用，发现它们在特定条件下会发生弹性碰撞。

1 引言

作为一种新型量子物质，量子液滴（QDs）由 Petrov 和 Astrakharchik [1,2]针对双组分玻色-爱因斯坦凝聚体（BECs）提出，其理论考虑了量子涨落 [3]所诱导的格罗斯–皮塔耶夫斯基（GP）平均场（MF）方程中的自排斥李–黄–杨（LHY）修正。

更早之前，有人提出通过三体相互作用 [4]而非 LHY 效应，制备类似量子液滴的稳定自束缚态。如今，量子液滴的形成与动力学是超流体和超冷气体研究的重点 [5–9]。LHY 修正与剩余平均场相互作用（双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中组分内排斥与组分间吸引之间的微弱失衡）之间的竞争，维持了一种密度无法超过某一上限、因而不可压缩的超流态。这正是这种量子宏观物态被认定为流体、由其构成的局域态被称为液滴 [8]的原因。与经典流体相比，量子液滴在极低温度下具有极低密度，为观测复杂多体效应提供了可能 [10,11]。量子液滴已在单组分偶极玻色气体 [12–14], 、由两种不同原子态构成的玻色-玻色混合物 ^{39}K [15–19], ，以及由 ^{41}K和 ^{87}Rb原子构成的异核混合物 [20]中得到实验实现。除一维（1D）几何中的量子液滴 [2,21–24], 外，人们还详细研究了多维情形，例如涡旋量子液滴、多个液滴、量子液滴簇和晶体 [25–35]。具体而言，文献 [32], 研究了嵌套于扩展玻色-爱因斯坦凝聚体中的一维空穴和扭结，以及二维涡旋的存在与稳定性；文献 [33] 和 [36]则研究了量子涨落作用下双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中的调制不稳定性。一个至关重要的事实是，LHY效应能够抑制平均场理论在存在内禀吸引时所预言的临界或超临界塌缩，从而确保二维和三维几何中的量子液滴保持稳定。

外部势是实验实现量子液滴的必要组成部分。势也可作为塑造量子液滴并控制其动力学的有效手段 [19,37–41]。特别是，文献 [38] 研究了量子液滴在外部谐振子（HO）束缚势中的动力学。研究还预测了多种在非谐势中持续旋转的二维和三维稳定量子液滴 [39]。

此外，复势 $U(\mathbf{r})$ 满足约束

$$U^*(\mathbf{r}) = U(-\mathbf{r}), \tag{1}$$

其中 $*$ 表示复共轭，这使得引入一种标准量子力学的有前景扩展成为可能，即具有宇称-时间（$\mathcal{PT}$）对称性的理论；这一理论由 Bender 和 Boettcher 在 1998 [42] 中提出。满足约束 (1) 的含复势非厄米哈密顿量具有完全实数（具有物理意义）的谱。在这种情况下，该对称性由宇称算符 $\mathcal{P}$ 和时间反演算符 $\mathcal{T}$ 实现，其定义如下:

$$\mathcal{P} : \mathbf{r} \to -\mathbf{r}; \quad \mathcal{T} : i \to -i,\ t \to -t. \tag{2}$$

研究表明，多种具有 $\mathcal{PT}$ 对称性的势（如 Scarf-II势 [43,44],、高斯势 [45,46], 和 HO 势 [47–49]）能够在各种非线性模型中支持稳定的孤子解 [50]。实验上，在光学领域已观测到多种与 $\mathcal{PT}$ 对称性相关的新颖波现象 [51–54],；其中，势的实部和虚部分别由空间对称的调制折射率分布以及空间反对称的局域增益与损耗分布体现。

在其他物理系统中也可以实现满足约束 (1) 的复势 [50], ，包括玻色-爱因斯坦凝聚体 [55]。具体而言，文献 [56], 提出了一种量子力学实现方案：在倾斜光学晶格中的加速玻色-爱因斯坦凝聚体可以表征具有$\mathcal{PT}$-对称性的流。研究表明，通过设定相邻晶格位点之间合适的初始流，可以在嵌入晶格的双模子系统中产生具有 $\mathcal{PT}$-对称性的态 [57]。此外，研究人员还考察了双芯阱中 $\mathcal{PT}$ 对称性的自发破缺，以及光学晶格势阱中一维液滴的动力学 [58–61]。具有 $\mathcal{PT}$-对称性的谐振子-高斯（HOG）势中一维和三维量子液滴的动力学也得到了研究[62]。

对于具有复杂二维排列的各种量子液滴图样，例如涡旋液滴、多个量子液滴和量子液滴簇 [25,31,37], ，研究 $\mathcal{PT}$- 对称势中的增益 - 损耗分布对其结构的影响具有重要意义。在此背景下，我们将广义 $\mathcal{PT}$- 对称 HOG 势引入二维 GP 方程，并研究代表基态和激发态的量子液滴动力学。文中还详细讨论了旋转量子液滴组的族及其稳定性。本文的主要研究结果可概括如下:

• 我们将广义复 $\mathcal{PT}$-对称 HOG 势加入包含 LHY修正的二维 GP 方程中。在系统参数满足特定条件时，可得到精确的量子液滴解，这为构造相应的一般量子液滴族提供了指导。我们获得了源自线性模态的不同族。它们在范数较低时呈现为多极液滴，在范数较高时则呈现为涡旋液滴，其稳定性也得到了详细研究。

• 详细探讨了旋转状态下量子液滴的形成及其稳定性。研究发现，当旋转频率超过临界旋转频率时，量子液滴会呈现非对称形状，同时仍保持稳定。

• 通过调节增益-损耗分布（复势的虚部）强度，讨论了 $\mathcal{PT}$-对称势对旋转量子液滴的影响。旋转图样受到增益-损耗分布不平衡的作用，由此产生非对称能流，进而导致非对称形状。

• 探讨了 $\mathcal{PT}$-对称 HOG 势存在时旋转量子液滴之间的碰撞。研究发现，在某些条件下，碰撞是弹性的。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍包含 LHY修正和$\mathcal{PT}$-对称势的 GP 方程。第 3 节介绍 $\mathcal{PT}$-对称 HOG 势，并分析相应非厄米哈密顿量的实谱。给出非旋转量子液滴的特定二维精确解。获得了源自线性模态的不同量子液滴族，并对其稳定性进行了详细研究。第 4 节根据角速度的不同，构造了具有不同形状的二维旋转多分量量子液滴结构。此外，为了理解 $\mathcal{PT}$-对称势对旋转或非旋转量子液滴的影响，我们在第 5 节调节增益-损耗分布的强度，以研究量子液滴动力学。第 6 节讨论旋转或非旋转量子液滴之间的相互作用。第 7 节总结全文。

2 二维修正 GP 方程：包含旋转、LHY修正和 $\mathcal{PT}$势

用于 $\mathcal{PT}$二维旋转量子液滴的 PT 对称模型。—对于两个组分相互对称、受困于二维 $\mathcal{PT}$对称势中的二元玻色-爱因斯坦凝聚体，包含 LHY修正（由带有额外对数因子的三次非线性表示）的 GP 方程形式为 [1,2,8,15,27]:

$$i\partial_T\Psi = -\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{R}}^2\Psi + \frac{8\pi}{\ln^2(a_{\uparrow\downarrow}/a)}\ln\left(\frac{|\Psi|^2}{\sqrt{e}n_0}\right)|\Psi|^2\Psi + [\mathrm{U}_R(\mathbf{R}) + i\mathrm{U}_I(\mathbf{R})]\Psi, \tag{3}$$

其中，复波函数 $\Psi = \Psi(\mathbf{R},T)$ 表示二元玻色-爱因斯坦凝聚体两个分量(Ψ_1,Ψ_2) 的相同波函数 $\Psi_1 = \Psi_2 \equiv \Psi/\sqrt{2}$,

$$\mathbf{R} = (X,Y) = \mathcal{R}/r_0 \ (\mathcal{R} = (\mathcal{X},\mathcal{Y})), \quad T = \tau/t_0 \tag{4}$$

分别表示二维缩放坐标和时间，r_0 是特征空间尺度，它定义了特征能量和时间尺度,

$$\varepsilon_0 = \hbar^2/mr_0^2, \quad t_0 = \hbar/\varepsilon_0, \tag{5}$$

m 为原子质量， $\nabla_{\mathbf{R}}^2 = \partial^2/\partial\mathrm{X}^2 + \partial^2/\partial\mathrm{Y}^2$ 表示二维拉普拉斯算子，$\mathrm{U}_R(\mathrm{R}) + \mathrm{iU}_I(\mathrm{R}) = \mathcal{U}(\mathcal{R})/\varepsilon_0$ 是一个缩放后的$\mathcal{PT}$-对称势，其中 $\mathrm{U}_R(\mathrm{R})$ 为实值势，$\mathrm{U}_I(\mathrm{R})$ 表示增益-损耗分布。此外，借助外部磁场 B 发挥作用的 Feshbach共振技术，可以调节原子碰撞的态内和态间散射长度 $\mathrm{a}_{\uparrow\uparrow}$、$\mathrm{a}_{\downarrow\downarrow} > 0$、$\mathrm{a} \equiv \sqrt{\mathrm{a}_{\uparrow\uparrow}\mathrm{a}_{\downarrow\downarrow}}$ 和 $\mathrm{a}_{\uparrow\downarrow} < 0$。此外， $\delta\mathrm{a} = \mathrm{a}_{\uparrow\downarrow} + \sqrt{\mathrm{a}_{\uparrow\uparrow}\mathrm{a}_{\downarrow\downarrow}}$ 表示组分内排斥与组分间吸引之间的微小不平衡，其中 $|\delta\mathrm{a}| \ll \mathrm{a}$

以及组分间吸引 [16,27], ， $n_0 = 2\pi \exp(-2\gamma - 3/2)(aa_{\uparrow\downarrow}/a)^{-1} \ln(a_{\uparrow\downarrow}/a)$ 是每个组分的平衡密度（$\gamma \approx 0.5772$ 为欧拉常数）。对于真实的玻色-爱因斯坦凝聚体，我们考虑由横向外势紧密束缚的 ^{39}K 个原子。实验采用足够强的磁场 $B \approx 55.5$ G，通过 Feshbach 共振将$\delta a \approx -3.2a_0 < 0$ 固定，其中 a_0 为玻尔半径 [15–17]。尺度变换$\Psi = \varrho_0\psi$, $R = (\varrho_0/2)^{1/2}r$ 和 $T = \varrho_0 t$，其中 $\varrho_0 = (\sqrt{e}n_0)^{1/2}$，且 $r = (x, y)$，将方程（3）化为归一化形式,

$$i\partial_t\psi = -\nabla_{\mathbf{r}}^2\psi + \sigma \ln(|\psi|^2)|\psi|^2\psi + [V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r})]\psi, \tag{6}$$

其中， $\sigma = 8\pi(\sqrt{e}n_0)^{3/2}/\ln^2(a_{\uparrow\downarrow}/a) > 0$ 表示对数 LHY 非线性贡献的强度。复数 $\mathcal{PT}$-对称势 $U(r) \equiv V(r) + iW(r) = \varrho_0(U_R(R) + iU_I(R))$ 满足约束 (1)，从而确保方程 (6) 在 $\mathcal{PT}$变换 (2) 下保持不变。方程 (6) 可写成哈密顿形式 $i\partial_t\psi = \delta\mathcal{E}(\psi, \psi^*)/\delta\psi^*$，其准能量为

$$\mathcal{E}(\psi, \psi^*) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla_{\mathbf{r}}\psi|^2 + [V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r})]|\psi|^2 + \frac{\sigma}{4}(2\ln(|\psi|^2) - 1)|\psi|^4\right] d^2\mathbf{r}. \tag{7}$$

波函数的准能量和范数,

$$N = \iint_{\mathbb{R}^2} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^2\mathbf{r}, \tag{8}$$

仅当密度场在空间上为偶函数时，或当势的虚部不存在时，它们才是方程 (6) 的动力学不变量： $|\psi(-\mathbf{r}, t)| = |\psi(\mathbf{r}, t)|$。

注释 1 三维 *GP* 方程中的非线性项由常见的平均场三次非线性和四次散焦 *LHY* 项组合而成。为推导二维方程 *(6)*，假设在 z 方向施加强束缚势，其束缚宽度为 $a_\perp$，远小于对应于平衡密度的愈合长度， $\zeta = (32\sqrt{2}/3\pi)(a/|\delta a|)^{3/2}a$)。在这种情况下，维数约化（$3D \to 2D$）将三次-四次非线性转化为三次对数项，如方程 *(6)* 所示。相反，当 $a_\perp \gg \zeta$ 时，有效二维 *GP* 方程保持与三维 *[27]* 相同的三次 - 四次形式。为确保三次对数非线性成立，束缚尺寸必须满足 $a_\perp \ll \zeta \sim 30\ nm$ *[15–17]*, ，而实验中使用的 $a_\perp$ 实际值为 ~ 0。6 μ米。

为求得旋转量子液滴的解，将式（6）改写为旋转坐标形式：$x' = x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t)$, $y' = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t)$，角速度为 ω:

$$i\partial_t\psi = -\nabla^2\psi + i\omega\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\psi + \sigma\ln(|\psi|^2)|\psi|^2\psi + [V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r})]\psi, \tag{9}$$

其中， $\hat{}\mathbf{r} = (y, -x)$， $\cdot$ 表示标量积。式（9）中的旋转项$i\omega\hat{}\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\psi$ 可由复势 $\mathcal{PT}$potential $V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r})$抵消。注意，对于固定的非线性系数 $\sigma > 0$，局域密度 $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ 从小值（< 1）增大到大值（> 1），会导致式（9）非线性项中对数因子的符号改变，即从自吸引（聚焦）转变为排斥（散焦）。

定态解与稳定性分析。—首先，我们关注由式（9）产生的旋转量子液滴，其形式为定态解,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\mu t}, \tag{10}$$

其中， μ 为化学势，而定态波函数 $\phi(\mathbf{r})$ 是局域的，并在 $|\mathbf{r}| \to \infty$处趋于零。由方程 (9) 和 (10) 可知，局域本征模 $\phi(\mathbf{r})$ 满足以下复非线性定态方程:

$$\mu\phi = -\nabla^2\phi + i\omega\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\phi + \sigma\ln(|\phi|^2)|\phi|^2\phi + [V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r})]\phi. \tag{11}$$

下面，我们给出方程（11）在特定条件下存在的精确解析解。对于具有零边界条件的量子液滴，方程（11）的一般解可通过平方算子迭代法 [63], 牛顿共轭梯度法 [64],等技术以数值形式求得，其中边界条件为 $|\mathbf{r}| \to \infty$ 。

以及谱重整化 [65]。本文主要采用牛顿共轭梯度法，因为它的收敛速度比其他现有迭代方法快得多，通常可快几个数量级。

通过对式（9）的定态解施加微小扰动，对旋转量子液滴的稳定性进行数值研究，如下：

$$\psi(\mathbf{r},t)=\{\phi(\mathbf{r})+\nu[F(\mathbf{r})e^{-i\varepsilon t}+G^{*}(\mathbf{r})e^{i\varepsilon^{*}t}]\}e^{-i\mu t}, \tag{12}$$

其中，$\nu \ll 1$、$F(\mathbf{r})$ 和 $G(\mathbf{r})$，以及 ε 分别表示扰动的无穷小振幅、特征函数和不稳定性增长率。将受扰动的解（12）代入式（9），并对 ν 进行线性化，可得到 Bogoliubov-de Gennes 方程：

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ -L_2^{*} & -L_1^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F(\mathbf{r}) \\ G(\mathbf{r}) \end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix} F(\mathbf{r}) \\ G(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中线性算子为

$$L_1=-\nabla_{\mathbf{r}}^{2}+i\omega\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}+(V+iW)+\sigma|\phi|^{2}[2\ln(|\phi|^{2})+1]-\mu,\quad L_2=\sigma\phi^{2}[\ln(|\phi|^{2})+1].$$

若特征值谱 ε 中包含虚部非零的特征值，则相应的定态解是不稳定的。通过使用傅里叶配置法 [66] 数值求解式（13），即可得到特征值谱 ε。随后，在式（9）的框架下对受扰动的演化进行直接数值模拟，以验证预测的（不）稳定性。

3 非旋转量子液滴的二维线性与非线性区域

3.1 $\mathcal{PT}$对称性的相变

在本小节中，我们首先介绍一种广义二维 $\mathcal{PT}$ 对称简谐振子势（$\mathcal{PT}$-HOG）

$$\mathcal{U}(\mathcal{R})=m\Omega^{2}\left\{\left[\mathcal{R}^{2}(\kappa_0+\kappa_1 e^{-\mathcal{R}^{2}/d^{2}})+\kappa_2(e^{-2(\mathcal{X}/d)^{2}}+e^{-2(\mathcal{Y}/d)^{2}})\right]+i\kappa_3\left(\frac{\mathcal{X}}{d}e^{-2(\mathcal{X}/d)^{2}}+\frac{\mathcal{Y}}{d}e^{-2(\mathcal{Y}/d)^{2}}\right)\right\}, \tag{14}$$

其中，Ω 为俘获频率，$d=r_0\sqrt{\varrho_0}/2$ 为振子长度，$\mathcal{R}^{2}=\mathcal{X}^{2}+\mathcal{Y}^{2}$，而 $\kappa_j(j=0,1,2,3)$ 为自由势参数。随后，根据式 (4) 和式 (5) 定义的尺度变换，可得到无量纲的 $\mathcal{PT}$ 对称势，其实部和虚部分别为

$$V(\mathbf{r})=r^{2}\left(1+V_1e^{-r^{2}}\right)+V_0\left(e^{-2x^{2}}+e^{-2y^{2}}\right),\qquad W(\mathbf{r})=W_0\left(xe^{-x^{2}}+ye^{-y^{2}}\right), \tag{15}$$

其中，$\mathrm{r}^{2}=\mathrm{x}^{2}+\mathrm{y}^{2}$, 简谐振子势前的系数通过取 $\kappa_0=\varepsilon_0/(\mathrm{m}\Omega^{2}\mathrm{d}^{2}\varrho_0)$ 设为 1；实参数 $\mathrm{V}_0=\kappa_2\mathrm{m}\Omega^{2}$ 和 $\mathrm{V}_1=\kappa_1\mathrm{m}\Omega^{2}\varrho_0/(\varepsilon_0\mathrm{d}^{2})$ 调节外势 V(r) 的形状；实参数 $\mathrm{W}_0=\kappa_3\mathrm{m}\Omega^{2}$ 表示增益-损耗分布 W(r) 的强度 [，见图 1(a1,a2)]。对于特征横向尺度为 $\mathrm{r}_0\sim 0.5\ \mathrm{m}$ 的情形，能量为 $\varepsilon_0\approx 6.9\times10^{-31}\ \mathrm{J}$。自由参数 $\kappa_j(\mathrm{j}=0,1,2,3)$ 可调节以生成合适的势形状。随后，我们将聚焦于非自旋（$\omega=0$）线性化方程 (11) 框架下的基本问题，即 $\mathcal{PT}$ 对称性破缺现象：

$$\mathcal{H}\Phi(\mathbf{r})=\lambda\Phi(\mathbf{r}),\quad \mathcal{H}=-\nabla_{\mathbf{r}}^{2}+V(\mathbf{r})+iW(\mathbf{r}), \tag{16}$$

其中，λ 和 $\Phi(\mathbf{r})$ 分别为特征值和局域特征函数。线性谱问题（16）可通过傅里叶谱方法 [66]进行数值求解。随后，$\Phi(\mathbf{r})$ 将作为输入，用于对包含旋转和非线性项的完整形式的方程（11）进行数值求解。下一节将给出非线性方程（11）的一个特定精确孤子解，它不同于先前已知的 $\mathcal{PT}$-对称解 [67]。事实上，精确解的存在促使我们研究复势（15）。

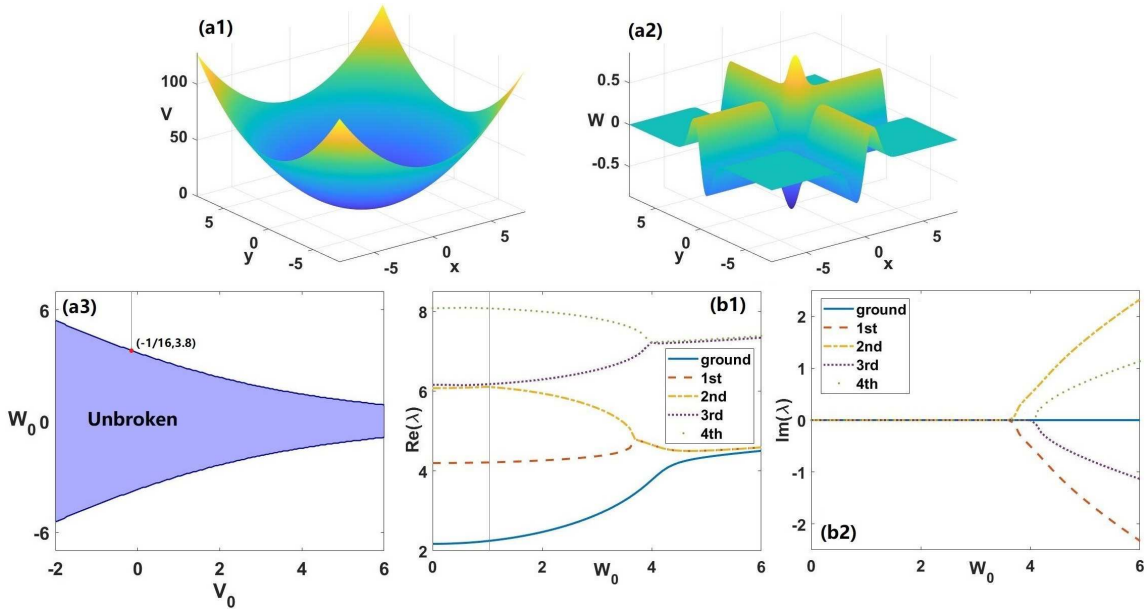

图 1：二维 $\mathcal{PT}$-HOG 势 (15) 的实部和虚部 (a1,a2)，其中 $(V_0,V_1,W_0) = (-1/16, 1, 1)$。(a3) 蓝色（白色）阴影区域表示未破缺（破缺）的 $\mathcal{PT}$对称性区域，该结果由以 $\mathcal{PT}$-HOG 势 (15) 作为 $V_1 = 1$ 时线性谱问题 (16) 的数值解得到。(b1,b2) 最低能量特征值的实部和虚部 λ 随W_0 的变化，其中$V_0 = -1/16$ 和 $V_1 = 1$固定。

图1(a3)绘出了未破缺与破缺 $\mathcal{PT}$对称性之间的边界阈值曲线，该曲线由采用 $\mathcal{PT}$-HOG势（15）对线性谱问题（16）进行数值求解得到。解是在$(V_0,W_0)\in[-2,6]\times[-7,7]$ 区域内，固定$V_1 = 1$后，利用傅里叶谱方法求得的。显然，增大V_0 会使未破缺 $\mathcal{PT}$对称性的区域逐渐缩小。对于固定的V_0, ，总存在一个 $|W_0|$阈值，超过该值便会发生相变，导致复谱出现，即 $\mathcal{PT}$对称性破缺。

此外，图 1(b1,b2) 展示了$V_0 = -1/16$ 和 $V_1 = 1$时若干最低特征值的实部和虚部。结果表明，第一激发态和第二激发态对应的实特征值在临界点发生碰撞，从而导致 $\mathcal{PT}$对称性破缺。当W_0 超过临界值（$W_0 = 3.8$）时，谱中会出现一对复共轭特征值。研究还发现，未破缺对称性区域将以一条极窄的条带延伸至V_0的无限大取值。

3.2 $\mathcal{PT}$对称势中的二维非旋转量子液滴及其稳定性

在本小节中，我们首先给出方程（11）在存在 $\mathcal{PT}$-HOG势（15）时、含有 $\omega = 0$（无旋转）的精确非线性模态。随后，我们通过数值方法求得量子液滴的一系列一般解，其中包括特定的解析解。低范数N 时，这些液滴呈多极形态；大N时则呈涡旋形态。我们对其稳定性进行了详细研究。

3.2.1 二维非旋转量子液滴的精确解

二维定态量子液滴。—化学势为 $\mu = 2$ 且 $\omega = 0$ 的方程（11）具有以下精确解，其相位结构非平凡，而局域密度与二维

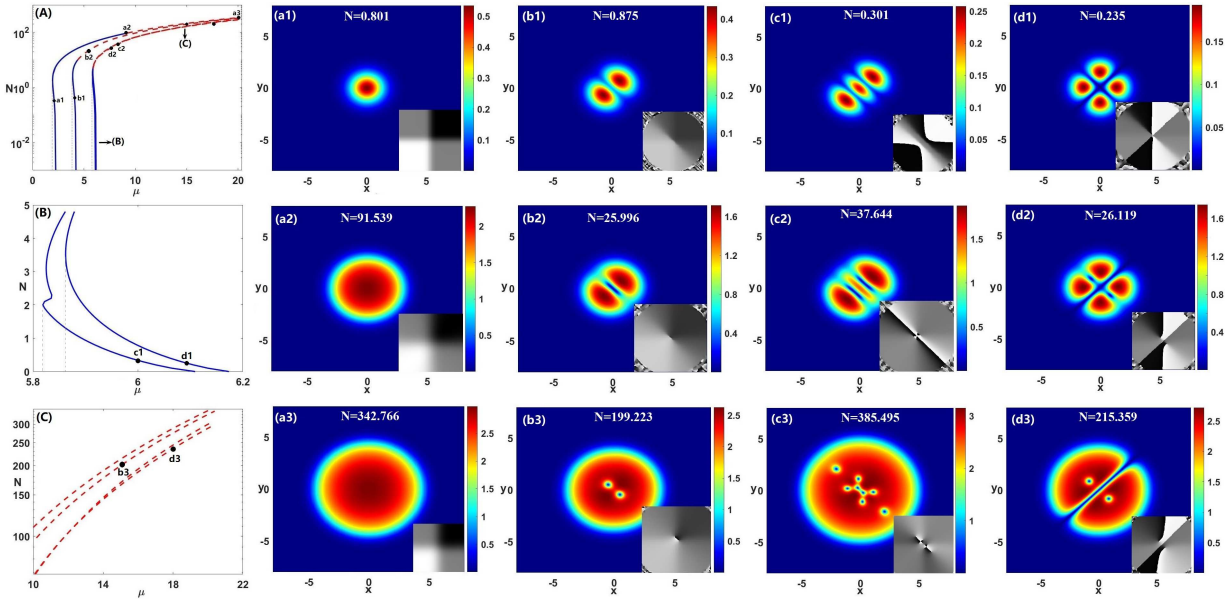

图2：(A) 由完整非线性方程(9)在 $\omega = 0$ 和 $\sigma = 1$ 条件下得到的不同液滴模态族的范数N 随化学势 μ 的变化（虚线：不稳定；实线：稳定）。(B、C) 为(A)中相应区域的放大图。点**a1, a2, a3, b1,b2, b3, c1, c2, c3, d1, d2, d3** 对应于(a1)-(d3)各面板中展示的量子液滴模态示例。单组分量子液滴的密度和相位结构：(a1) $\mu = 2$、(a2) $\mu = 9$和(a3)$\mu = 20$。它们分别对应图2(A)中的点**a1**、**a2**和**a3** 。双组分量子液滴示例：(b1) $\mu = 4$、(b2)$\mu = 5.75$和(b3) $\mu = 15$。它们分别对应图2(A、C)中的点**b1**、**b2**和**b3** 。三组分量子液滴示例：(c1) $\mu = 6$、(c2) $\mu = 8.2$和(c3) $\mu = 25$。它们分别对应图2(A、B)中的点**c1**、**c2**和**c3** 。四组分量子液滴示例：(d1) $\mu = 6.1$、(d2) $\mu = 7.5$和(d3) $\mu = 18$。它们分别对应图2(A、B、C)中的点**d1**、**d2**和**d3** 。各面板中标出了范数N 的值。

简谐振子势下线性薛定谔方程的基态相同（即，$|\phi(\mathbf{r})|^2 = \exp(-r^2)$）：

$$\phi(\mathbf{r}) = \exp\left\{-\frac{r^2}{2} - \frac{i\sqrt{\pi}W_0}{8}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{y}{2}\right)\right]\right\}, \tag{17}$$

其中，标准误差函数定义为 $\mathrm{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$；显然，该解的范数（8）为$N = \pi$。该解并非一般解，因为它仅在实部势（15）的参数$V_{0,1}$与方程（11）中的非线性系数 σ 满足以下约束时才成立：

$$V_0 = -W_0^2/16, \qquad V_1 = \sigma. \tag{18}$$

具体而言，当 $\mathcal{PT}$-HOG 势中不存在虚部，即$W_0 = 0$时，方程（18）表明，复数形式的 $\mathcal{PT}$-HOG 势（15）简化为实数形式，

$$V(\mathbf{r}) = r^2\left[1 + \sigma\exp(-r^2)\right], \tag{19}$$

相应的精确解（17）与上述二维线性薛定谔方程在通常简谐振子势下的基态波函数相同，$\phi(\mathbf{r}) = \exp\left(-r^2/2\right)$。

3.2.2 静态量子液滴的数值解及其稳定性

由于精确解（17）仅在满足约束（18）时才存在，因此有必要通过数值方法寻找一族适用于束缚态的一般解。为此，我们采用牛顿共轭梯度法求解带有 $\omega = 0$ 的方程（11）。

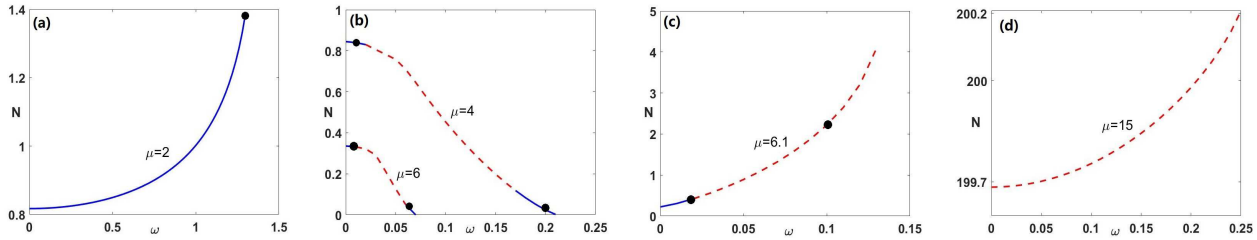

图3：不同 μ 值下液滴的$N(\omega)$ 曲线（虚线：不稳定；实线：稳定）。(a) $\mu = 2$ 时的单组分液滴，属于图2(A)中的下分支。(b) $\mu = 4$ 和 $\mu = 6$ 时的双组分液滴和三组分液滴（它们属于图2(A)中的下分支）。(c) $\mu = 6.1$ 时的四组分液滴，属于图2(A)中的下分支。(d) $\mu = 15$ 时的双组分液滴，属于图2(A)中的上分支。

首先，我们旨在寻找带有 $\sigma = 0$的线性化方程（11）的解，因为非线性态是从线性模态分岔而来的。具体而言，我们给出了参数取值为

$$W_0 = 1, \qquad V_0 = -1/16, \tag{20}$$

对应于 约束条件 (18) 中的第一个关系式，并且可以充分代表一般情形 .

图1(b1)展示了线性化方程 (11) 在$V_0 = -1/16$ 下产生的线性谱；该值按照方程 (20) 固定，同时势的虚部强度不断变化。具体而言，在$W_0 = 1$时（按照方程 (20) 取值），前四个特征值为 $\lambda_0 = 2.2473$、 $\lambda_1 = 4.216$、 $\lambda_2 = 6.1097$、 $\lambda_3 = 6.1739$，谱为纯实数。

单组分结构的液滴</*style*》。— 对称液滴具有最简单的结构，源自上述拓扑荷为 $m = 0$、对应于 $\lambda_0 = 2.2473$ 的线性模态。该解族的范数与化学势 μ 之间的关系由图2(A)中最左侧的曲线表示。可以看出，该解族存在于 $\mu > 1.9485$。在此处，两个不同的半分支相连，即下分支和上分支。我们通过基于方程（13）的特征值问题数值解来研究其稳定性。$N(\mu)$ 曲线中的蓝色实线段和红色虚线段分别表示稳定和不稳定的量子液滴态。

图2(a1)展示了本文所讨论类型的量子液滴的密度和相位结构示例，其中 $\mu = 2$ （稳定解，在图2(A)的下分支上标记为**a1**）；图2(a2)对应 $\mu = 9$ （位于图2(A)上分支、稳定性边界处的解，标记为**a2**）；图2(a3)对应 $\mu = 20$ （图2(A)上分支上的不稳定解，标记为**a3**）。请注意，后两种模态呈平顶形状，内区密度近乎均匀。

具有双组分结构的液滴。—由两个分离片段构成的偶极子 $\mathcal{PT}$-对称量子液滴，从上述线性模态在 $\lambda_1 = 4.216$ 处分岔，该模态代表线性化方程 (11) 的第一激发态。这些模态的相位结构表明，其携带拓扑荷 $m = 1$。相应的量子液滴族由图2(A))中的中间曲线表示，其存在于 $\mu \geq 3.90054$ 处。在此点，与单组分量子液滴族类似，该量子液滴族由两条在 $\mu = 3.90054$ 处连接的半支组成。图2(b1)展示了稳定双组分量子液滴在 $\mu = 4$ 处的数值解所产生的密度和相位结构示例（对应图2(A)中的点 **b1**）。随着范数增大，两个量子液滴分量相互吸引并逐渐合并为涡旋偶极子，如 $\mu = 5.75$ 时的图2(b2)所示。当 N 进一步增大时，两个组分融合成一个由平顶背景承载的涡旋偶极子，其中心存在相位奇点，如 $\mu = 15$ 处的图2(b3)所示。

具有三组分和四组分结构的液滴。—由三个分离片段组成的$\mathcal{PT}$-对称量子液滴，源自上述 $\lambda_2 = 6$处的模态1097，该模态对应于线性化方程(11)的第二激发态。相应的量子液滴族由图2(A)中最右侧的曲线$N(\mu)$ 表示，

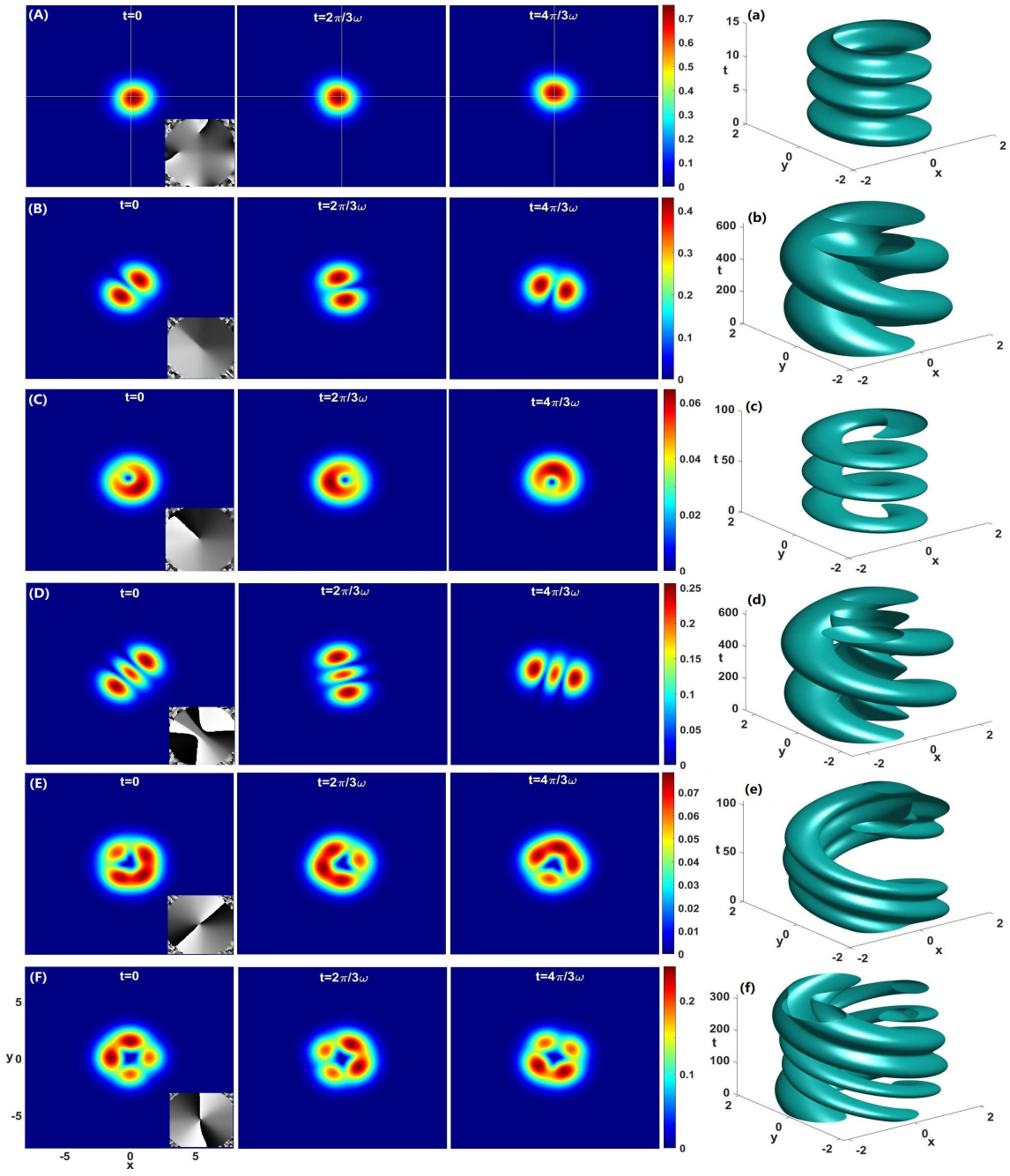

图4：通过密度等值面展示旋转非对称量子液滴在 $|x|, |y| \leq 8$ 区域内的稳定演化。(A) $\mu = 2, \omega = 1.35$ 处的单组分液滴。(B,C) $\mu = 4$ 处的双组分液滴，分别对应 $\omega = 0.01$ 和 0.2。(D,E) $\mu = 6$ 处的三组分液滴，分别对应 $\omega = 0.01$ 和 0.06。(F) $\mu = 6.1, \omega = 0.02$ 处的四组分液滴。(a-f) 相应的等值面演化，其中等高线的值取为$(1/2)\max(|\phi(\mathbf{r})|^2)$。

其存在于 $\mu \geq 5.8187$。图2(c1)展示了$\mu = 6$处稳定双组分量子液滴的数值解所产生的密度和相位结构示例（对应于图2(B)中的点**c1** ），其相位结构表明它携带拓扑荷$m = 4$。随着N 的增加，也会导致

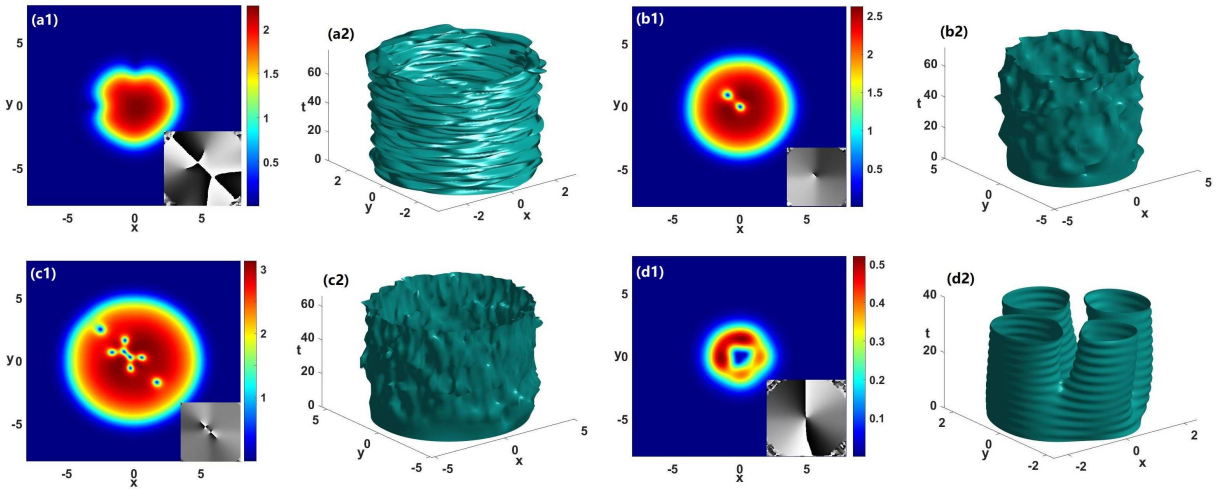

图5：通过密度等值面展示旋转非对称量子液滴的不稳定演化。(a1,a2) $\mu = 9, \omega = 0.873$处的单组分液滴。(b1,b2) $\mu = 15, \omega = 0.25$处的双组分液滴。(c1,c2) $\mu = 25, \omega = 0.1$处的三组分液滴。(d1,d2) $\mu = 6.1, \omega = 0.1$处的四组分液滴。

对于双组分模式，组分会逐渐相互吸引，如图2(c2)中 $\mu = 8.2$ 所示；与此同时，相位结构表明拓扑荷变为 $m = 2$。当 N 进一步增大时，例如图2(c3)中对应于 $\mu = 25$ 的情况，三个组分会融合成一个涡旋八极子。

$\mathcal{PT}$由四个分离片段组成的非对称量子液滴源自上述频率为 λ_3 =6.1739 的模态，该模态对应线性化方程 (11) 的第三激发态。相应的量子液滴族由图2(b3)中的曲线 $N(\mu)$ 表示，曲线上标有点 **d1, d2** 和 **d3**。它存在于 $\mu \geq 5.8622$。尽管这条曲线接近表示双组分量子液滴的曲线，但两条曲线并不相交（见图2(B)）。图2(d1)展示了频率为 $\mu = 6.1$ 时稳定的三组分量子液滴数值解所产生的密度和相位结构（对应图2(B)中的点**d1**），其相位结构表明它携带拓扑荷 $m = 6$。如图2(d2)中频率为 $\mu = 7.5$ 的情形所示，N 增大再次导致组分间相互吸引，此时液滴呈四极子液滴形状。当N进一步增大，例如图2(d3)中对应于 $\mu = 18$ 的情形，四个组分两两融合，形成一个包含两个涡旋且中心具有相位的涡旋偶极子。图中另外两个仍然分离的组分不会随着N继续增大而融合。

考虑其他类型的 $\mathcal{PT}$-对称量子液滴模态可能也有意义，这些模态从线性化方程 (11) 的高阶激发态分岔而来。我们将在其他地方对此进行详细阐述。

4 二维旋转量子液滴及其稳定性

本节讨论由方程（11）产生的量子液滴模态，其中包含带有 $\omega > 0$ 的旋转项。单组分类型的对称形状旋转量子液滴解族，在化学势固定时由$N(\omega)$依赖关系表征。对于 $\mu = 2$，在 $\omega = 0$ 时对应于图2(A)中$N(\mu)$依赖关系的下分支，其$N(\omega)$曲线如图3(a)所示。可以看出，量子液滴的范数随旋转频率 ω 的增加而单调增大。当 $\omega \approx 1.35$ 时，对称量子液滴转变为略微非对称的旋转液滴，源自横向边界和纵向边界的相位奇点逐渐变大，见图4(A)。此外，液滴会偏离中心。进一步增大 ω 会导致旋转液滴在临界值 $\omega \approx 1.352$ 处消失，但只要它们存在，就保持稳定。例如，对于 $\omega = 1.35$，非对称液滴的稳定旋转以及强度等高线图

强度取为$(1/2)\max(|\phi(\mathbf{r})|^2)$的水平集，其结果展示于图4(A,a)。属于图2(A)中$N(\mu)$ 曲线不稳定区段的对称量子液滴，例如具有 $\mu = 9$ 的量子液滴（见图2(a2)），会自发转变为非对称量子液滴，如图5(a1)所示。然而，后一种状态并不稳定，因为其范数过大（$N \approx 91.53$），如图5(a2)所示。

对于结构更复杂、包含多个组分的量子液滴，属于图2(A)中下分支、具有 $\mu = 4$ 和 $\mu = 6$的模态的依赖关系 $N(\omega)$ 如图3(b)所示。当 ω达到临界值时，范数降为零，这表明量子液滴在此处消失。具体而言，在$\omega = 0.01$处，两个组分开始融合且相位发生变化，见图4(B)。在 $\omega = 0.17$处，两个组分完全融合为一个非对称旋转液滴，如图4(C)所示。然而，在$0.01 < \omega \leq 0.17$)的范围内，旋转量子液滴不稳定。类似地，随着 ω增加，具有 $\mu = 6$ 的三组分量子液滴趋于融合。然而，如图4(E)所示，在 $\omega = 0.06$处出现了一种具有四个密度峰的新型量子液滴，它是一种连接不同状态的模态。在 $[0 \leq \omega \leq 0.01]$ 和 $[0.06 \leq \omega \leq 0.07]$ 的范围内，旋转液滴稳定（见图4(D,d,E,e)）。然而，属于图2(A)中上分支的涡旋量子液滴通常不稳定。例如，图3(d)展示了 $\mu = 15$ 对应的$N(\omega)$曲线。在图5(b2)中，旋转使两个涡旋在 $\mu = 15, \omega = 0.25$处以涡旋偶极子的形式移动到左上方。类似地，在图5(c1,c2)中，对于$\omega = 0.1, \mu = 25$ ，涡旋形成一个不稳定的涡旋八极子。

对于对称四组分量子液滴，属于图2(A)中下分支的 $\mu = 6.1$ 对应的$N(\omega)$关系如图3(c)所示。在这种情况下，该关系单调递增，并从稳定转变为不稳定。例如，在 $\omega = 0.02$ 时，四个组分开始两两融合，其中两个组分的密度增大，如图4(F)所示。随着 ω 进一步增大，量子液滴变得不稳定，见图5(d1,d2)。

$\mathcal{PT}$对称势对（非）旋转量子液滴的影响

为探究 $\mathcal{PT}$ 对称势（15）对（非）旋转量子液滴的影响，我们改变增益-损耗分布（势的虚部）的强度W_0, 。

5.1 非旋转情形

对于非旋转情形，在固定其他势参数的情况下，对于含两个分量的量子液滴，我们比较了 $W_0 = 1$ 和 $W_0 = 0.01$ 时范数 N 随化学势 μ 的变化关系，如图6(a1)所示。当 $\mu \prec 5.75$ 时，增益-损耗分布 W(r) 对范数 N 的影响很小（例如，$W_0 = 1$ 时的图2(b1)以及 $\mu = 4 < 5.75$、$W_0 = 0.01$ 时的图6(b1)）。然而，在 $\mu \succeq 5.75$ 时，量子液滴的两个组分在 $W_0 = 1$ 时开始融合（见图2(b2)）；而在 $W_0 = 0.01$ 时，偶极量子液滴的组分仍然彼此分离，且整体仍较宽，见图6(b2, b3)。为阐明 $\mathcal{PT}$ 对称势的作用，我们进一步改变增益-损耗分布的强度 W_0, 。对于含两个分量的量子液滴，$W_0 = 0.01$ 和 $W_0 = 0$ （实势）时范数 N 随化学势 μ 的变化关系如图6(a3)所示。可以看出，$W_0 = 0.01$ 和 0 对应的曲线几乎完全重合。比较 $W_0 = 0.01$ 时的图6(b1-b3)和 $W_0 = 0$ 时的图6(d1-d3)可知，在相同化学势 μ 下，$W_0 = 0.01$ 和 0 时的液滴形态几乎相同。类似地，对于四组分量子液滴，在 N 较小（即 $\mu \prec 7.5$）时，$W_0 = 1$ 和 0.01 对应的曲线几乎完全重合（例如，见图6(a2)，并比较 $W_0 = 1$ 时的图2(d1)与 $\mu = 6.1 < 7.5$、$W_0 = 0.01$ 时的图6(c1)）。然而，在 N 较大（即 $\mu \succeq 7.5$）时，两条曲线开始分离，见图6(a2)。$W_0 = 1$时，四组分量子液滴开始两两融合（见图2(d2, d3)）；而 $W_0 = 0.01$ 时，每个组分都变得更宽，见图6(c2,c3)。

5.2 自旋情形

在旋转状态（$\omega > 0$）下，增益-损耗分布$W(\mathbf{r})$ 会影响液滴的对称性。例如，量子液滴在 $\mu = 4$ 下、$N(\omega)$ 随$W_0 = 1$ 和$W_0 = 0.01$变化的曲线如图 7(a)所示。随着 ω 增大，两个量子液滴族的范数均降至零。如上所示，在$W_0 = 1$ 时，两个量子液滴分量开始

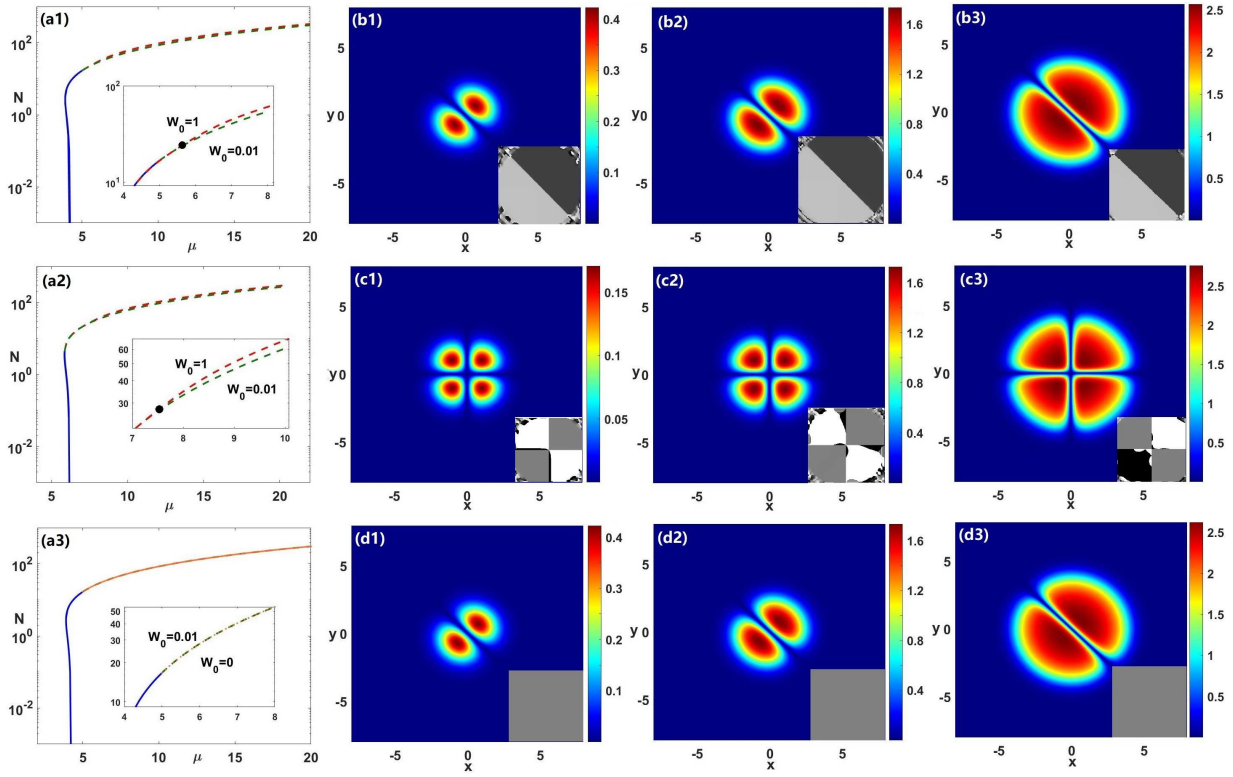

图 6：(a1) 在$W_0 = 1$和$W_0 = 0.01$ 时，双组分非自旋量子液滴（$\omega = 0$）的范数N 随化学势 μ 的变化关系。(a2) 在$W_0 = 1$ 和$W_0 = 0.01$ 时，四组分量子液滴的N 随化学势 μ 的变化关系。(a3) 在$W_0 = 0$ 和$W_0 = 0.01$ 时，双组分量子液滴的范数N 随化学势 μ 的变化关系（虚线：不稳定；实线：稳定）。在$W_0 = 0.01$ 时的偶极液滴：(b1) $\mu = 4$，(b2) $\mu = 5.75$，(b3) $\mu = 15$。在$W_0 = 0.01$ 时的四极液滴：(c1) $\mu = 6.1$，(c2) $\mu = 7.5$，(c3) $\mu = 18$。在$W_0 = 0$（实势）时的偶极液滴：(d1) $\mu = 4$，(d2) $\mu = 5.75$，(d3) $\mu = 15$。

融合，最终形成图 4(B,C)中的非对称液滴。然而，当增益-损耗分布的强度较小时，两个量子液滴分量开始对称地融合，最终形成图 7(b1,c))中的对称涡旋液滴。它们在区域 $0 \leq \omega \leq 0.05$ 和 $0.15 \leq \omega \leq 0.2$ 内稳定。

由于势的虚部的存在，量子液滴在增益（损耗）区域会被放大（吸收）。为勾勒非线性模态的结构，我们使用坡印廷矢量，它决定了功率流从增益到损耗的密度：

$$\vec{S}(x,y) = \frac{i}{2}(\phi\nabla\phi^* - \phi^*\nabla\phi), \tag{21}$$

其中，ϕ 是由方程（11）产生的非线性局域模态。在非自旋状态下，功率始终从增益流向损耗。随着角速度 ω 增加，功率流的方向发生改变，随后形成涡旋，如图8(a1、a2、b1、b2)所示。强烈的增益-损耗分布使量子液滴变得不对称，见图4(B、C)。另一方面，若增益-损耗项较弱且W_0, 较小，则旋转对能量流的影响占主导地位。因此，在这种情况下，能量流有利于形成对称量子液滴，见图8(c1、c2)。

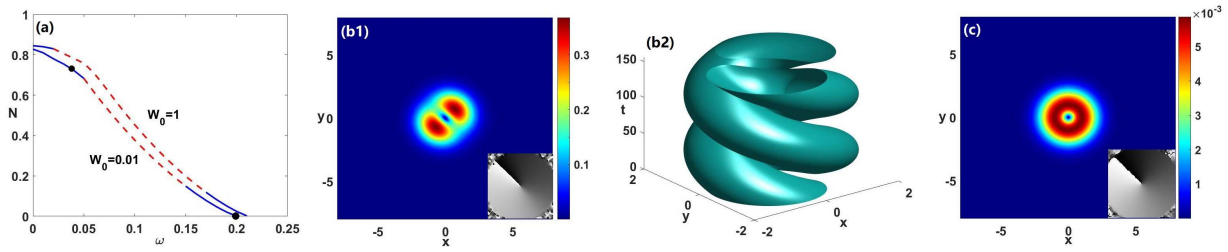

图7：（a）具有 $\mu = 4$ 且 $W_0 = 1$ 或 $W_0 = 0.01$ 的量子液滴的 $N(\omega)$ 曲线（虚线：不稳定；实线：稳定）。(b1,b2) 通过密度等值面展示了 $\omega = 0.04$ 时旋转液滴的演化。(c) $\omega = 0.2$ 时的旋转液滴。

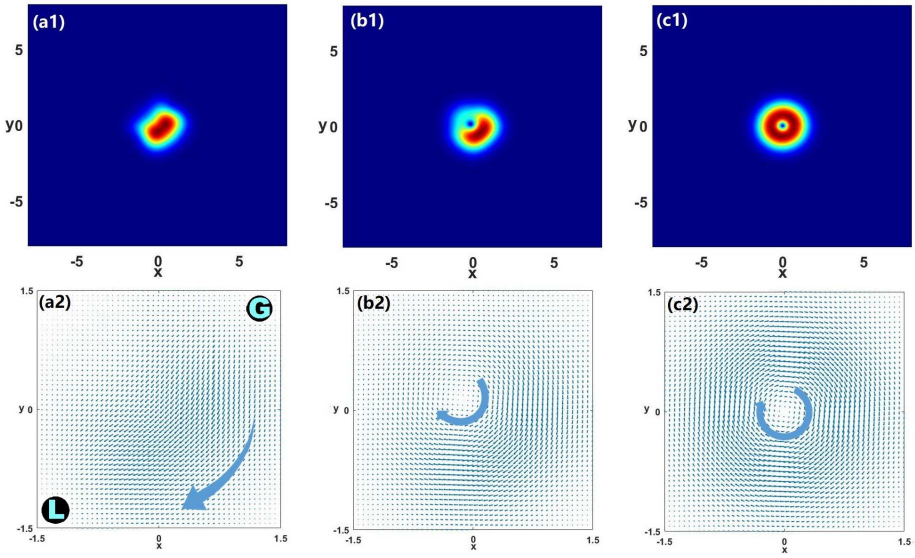

图8：$\mu = 4$ 时坡印廷矢量的绝对值 $|\vec{S}|$ 及功率流：(a1,a2) $W_0 = 1, \omega = 0.01$，其中 G 点和 L 点分别表示增益和损耗集中的区域，如方程（15）所示。(b1,b2) $W_0 = 1, \omega = 0.2$；(c1,c2) $W_0 = 0.01, \omega = 0.04$。

6 旋转或非旋转量子液滴之间的相互作用

对于两个或三个量子液滴之间的碰撞，我们讨论碰撞导致的旋转或非旋转液滴状态变化。相应的初始条件取为相互分离的液滴的叠加：

$$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = A[\phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \phi_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] + B\phi(\mathbf{r}), \tag{22}$$

其中，$\phi_1(\mathbf{r})$ 是由公式（17）给出的精确量子液滴解，而 $\phi(\mathbf{r})$ 可能是定态方程（11）的另一个解。参数 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ 定义了碰撞量子液滴的初始位置，系数 A 和 B决定了输入态的组成。

势（15）的实部将量子液滴拉向中心并导致碰撞。首先，我们考虑一对非旋转液滴（$\omega = 0$）的碰撞，这对应于式（22）中的$A = 1$ 和$B = 0$。图9(a1、a3、a4)展示了弹性碰撞，两个液滴的形状均得以保持。在碰撞点$t = 0.75$处，出现了干涉图样，这是相干物质波相互作用的显著特征，如图9(a2)所示。对于两个旋转量子液滴之间的碰撞，例如 $\omega = 1$，图10(a1)通过取$(1/2)\max(|\phi(\mathbf{r})|^2)$处的密度等值面，展示了两个旋转量子液滴之间的弹性碰撞。图10(a2)还展示了在(x,y) 平面上的投影中，等值面在整个

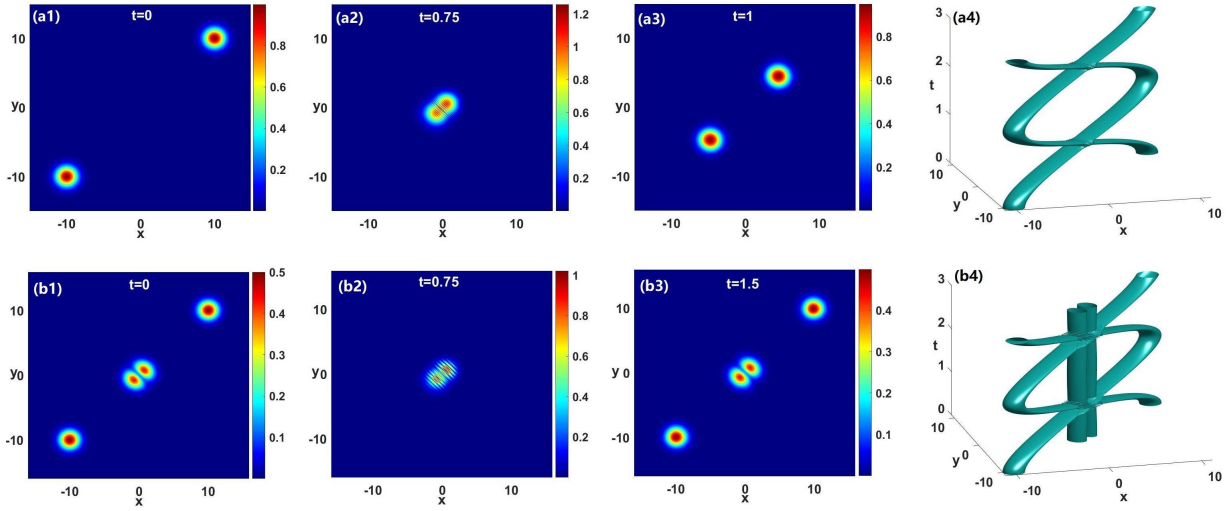

图 9：（a1-a4）两个非旋转液滴（在式（22）中，$A = 1$ 和$B = 0$）在不同时刻的碰撞及相应的等值面演化。（b1-b4）两个非旋转液滴（在式（22）中，$A = 0.5$ 和$B = 1$）在不同时刻的碰撞及相应的等值面演化，其中 $\phi(\mathbf{r})$ 是 $\mu = 4$ 处的偶极液滴。增益-损耗分布的强度为$W_0 = 1$。

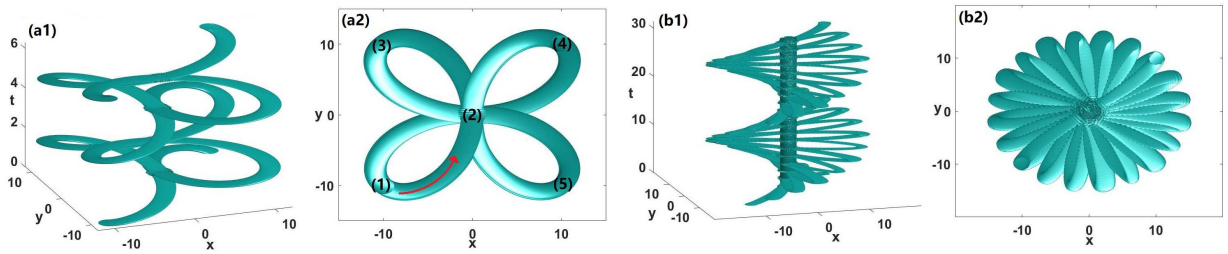

图 10：（a1）两个旋转液滴（$\omega = 1$）碰撞的等值面演化；（a2）其在$(x、y)$ 平面上的投影，对应于图 9(a4) 中的非旋转液滴。（b1）三个旋转液滴（$\omega = 0.2$）碰撞的等值面演化及其在$(x、y)$ 平面上的投影，对应于图 9(b4) 中的非旋转液滴。增益-损耗分布的强度为$W_0 = 1$。

旋转周期 $2\pi/\omega$内的演化。该图表明，$\phi_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$ 沿着轨迹$(1) \to (2) \to (3) \to (2) \to (4) \to (2) \to (5) \to (2) \to (1)$运动，最终回到初始位置。

对于式（22）中对应于 $\mu = 4$ 的三个非旋转液滴的碰撞，当 $A = 0.5$ 且 $B = 1$ 时，其中 $\phi(\mathbf{r})$ 分别代表偶极液滴，碰撞仍然完全是弹性的，且碰撞过程中会出现干涉图样，见图 9(b1)–(b4)。对于三个旋转量子液滴的碰撞，例如 $\omega = 0.2$，图 10(b1) 也通过取在 $(1/2)\max(|\phi(\mathbf{r})|^2)$ 处的密度等值面，展示了三个旋转量子液滴之间的弹性碰撞。其相互作用似乎较为复杂（见图 10(b2)，该图展示了等值面在 (x,y) 平面上的投影）。

这些结果表明，二维 $\mathcal{PT}$ 对称旋转或非旋转量子液滴之间的碰撞，与已知的其他非可积模型（例如一维量子液滴模型 [21,62]）中的情况相似。

7 结论与讨论

我们引入了在 $\mathcal{PT}$ 对称势作用下、包含 LHY 修正的玻色-爱因斯坦凝聚体二维动力学模型。该模型的线性谱在势的虚部强度达到某一临界值之前始终为实数。在 $\mathcal{PT}$ 对称性未破缺的区域内，我们得到了若干源自线性模态的量子液滴（量子液滴）族，包括范数较小的多极模态和范数较大的涡旋态。我们还获得了一个精确解析形式的特定解。我们采用数值方法研究了这些量子液滴态的稳定性，也考察了旋转（自旋）对量子液滴的影响。研究表明，增益-损耗分布不平衡与旋转共同导致非对称能流，从而形成非对称旋转量子液滴。我们还研究了旋转量子液滴之间的碰撞，发现它们趋于发生弹性碰撞。

本文的分析可扩展至将非线性和 $\mathcal{PT}$对称性与分数阶衍射相结合的模型中的孤子，包括旋转孤子，参见文献[68,69]。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（编号：11925108）和以色列科学基金会（编号：1695/2022）的资助。

参考文献

[1] D. S. Petrov，塌缩玻色-玻色混合物的量子力学稳定化，《物理评论快报》115，155302（2015年）。[2] D. S. Petrov 和 G. E. Astrakharchik，超稀低维液体，《物理评论快报》117，100401（2016年）。[3] T. D. Lee、K. Huang 和 C. N. Yang，硬球玻色系统的特征值与特征函数及其低温性质，《物理评论》106，1135（1957年）。[4] A. Bulgac，稀薄量子液滴，《物理评论快报》89，050402（2002年）。[5] L. Chomaz、S. Baier、D. Petter、M. J. Mark、F. Wachtler、L. Santos 和 F. Ferlaino，偶极量子流体中从稀薄玻色-爱因斯坦凝聚体到宏观液滴的量子涨落驱动交叉转变，《物理评论X》6，041039（2016年）。[6] D. Edler、C. Mishra、F. W¨achtler、R. Nath、S. Sinha 和 L. Santos，准一维偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的量子涨落。《物理评论快报》119，050403（2017年）。[7] F. B¨öttcher、J.-N. Schmidt、J. Hertkorn、K. S. H. Ng、S. D. Graham、M. Guo、T. Langen 和 T. Pfau，精细调控相互作用下的新物态：量子液滴和偶极超固体，《物理进展报告》84，012403（2021年）。[8] Z. H. Luo、W. Pang、B. Liu、Y. Y. Li 和 B. A. Malomed，一种新型液态物质：量子液滴，《前沿物理学》16，32201（2021年）。[9] B. A. Malomed，多维孤子 （美国物理联合会出版社：梅尔维尔，纽约，2022年）。[10] V. Cikojev´c、K. Dzelalija、P. Stipanovi´c、L. V. Marki´c 和 J. Boronat，超稀量子液滴，《物理评论B》97，140502(R)（2018年）。[11] G. De Rosi、G. E. Astrakharchik、P. Massignan，弱相互作用玻色-玻色混合物中一维液体的热不稳定性、蒸发和热力学。《物理评论A》103，043316（2021年）。[12] I. Ferrier-Barbut、H. Kadau、M. Schmitt、M. Wenzel 和 T. Pfau，强偶极玻色气体中量子液滴的观测。《物理评论快报》116，215301（2016年）。[13] H. Kadau、M. Schmitt、M. Wentzel、C. Wink、T. Maier、I. Ferrier-Barbut 和 T. Pfau，量子铁磁流体中罗森茨威格不稳定性的观测，《自然》530，194（2016年）。[14] M. Schmitt、M. Wenzel、F. B¨üttcher、I. Ferrier-Barbut 和 T. Pfau，稀薄磁性量子液体的自束缚液滴，《自然》539，259（2016年）。[15] C. Cabrera、L. Tanzi、J. Sanz、B. Naylor、P. Thomas、P. Cheiney 和 L. Tarruell，玻色-爱因斯坦凝聚体混合物中的量子液滴，《科学》359，301（2018年）。

[16] P. Cheiney、C. R. Cabrera、J. Sanz、B. Naylor、L. Tanzi 和 L. Tarruell，玻色-爱因斯坦凝聚体混合物中从亮孤子到量子液滴的转变，《物理评论快报》120，135301（2018年）。[17] G. Semeghini、G. Ferioli、L. Masi、C. Mazzinghi、L. Wolswijk、F. Minardi、M. Modugno、G. Modugno、M. Inguscio 和 M. Fattori，自由空间中原子混合物的自束缚量子液滴?《物理评论快报》120，235301（2018年）。[18] G. Ferioli、G. Semeghini、L. Masi、G. Giusti、G. Modugno、M. Inguscio、A. Gallem´ı、A. Recati 和 M. Fattori，自束缚量子液滴的碰撞，《物理评论快报》122，090401（2019年）。[19] T. G. Skov、M. G. Skou、N. B. Jørgensen 和 J. J. Arlt，李-黄-杨流体的观测，《物理评论快报》126，230404（2021年）。[20] C. D'Errico、A. Burchianti、M. Prevedelli、L. Salasnich、F. Ancilotto、M. Modugno、F. Minardi 和 C. Fort，异核玻色混合物中量子液滴的观测，《物理评论研究》1，033155（2019年）。[21] G. E. Astrakharchik 和 B. A. Malomed，一维量子液滴的动力学，《物理评论A》98，013631（2018年）。[22] M. Tylutki、G. E. Astrakharchik、B. A. Malomed 和 D. S. Petrov，一维量子液滴的集体激发，《物理评论A》101，051601(R)（2020年）。[23] F. K. Abdullaev、A. Gammal、R. K. Kumar 和 L. Tomio，准一维玻色气体混合物中的法拉第波和液滴，《物理学杂志B》52，195301（2019年）。[24] S. R. Otajonov、E. N. Tsoy 和 F. K. Abdullaev，一维量子液滴的静态和动力学性质，《物理快报A辑》383，125980（2019年）。[25] Y. Li、Z. Chen、Z. Luo、C. Huang、H. Tan、W. Pang 和 B. A. Malomed，二维涡旋量子液滴，《物理评论A》98，063602（2018年）。[26] Y. V. Kartashov、B. A. Malomed 和 L. Torner，量子液滴簇的亚稳性，《物理评论快报》122，193902（2019年）。[27] E. Shamriz、Z. Chen 和 B. A. Malomed，李-黄-杨效应对吸引场中准二维量子坍缩的抑制，《物理评论A》101，063628（2020年）。[28] Y. V. Kartashov、B. A. Malomed、L. Tarruell 和 L. Torner，旋涡超流体的三维液滴，《物理评论A》98，013612（2018年）。[29] A. Cidrim、F. E. A. dos Santos、E. A. L. Henn 和 T. Macr´ı，自束缚偶极液滴中的涡旋，《物理评论A》98，023618（2018年）。[30] V. I. Yukalov、A. N. Novikov、V. S. Bagnato，振荡激发下受限玻色-爱因斯坦凝聚体中颗粒结构的形成。《激光物理快报》11，095501（2014年）。[31] L. Dong、D. Liu、Z. Du、K. Shi、W. Qi，二元玻色-爱因斯坦凝聚体中的双稳态多极量子液滴，《物理评论A》105，033321（2022年）。[32] Y. V. Kartashov、V. M. Lashkin、M. Modugno、L. Torner，自旋量诱导的扭结、空穴和量子液滴不稳定性，《新物理学杂志》24，073012（2022年）。[33] S. R. Otajonov、E. N. Tsoy、F. K. Abdullaev，二维玻色-爱因斯坦凝聚体中的调制不稳定性和量子液滴，《物理评论A》106，033309（2022年）。[34] S. M. Roccuzzo、A. Gallem´ı、A. Recati 和 S. Stringari，旋转超固态偶极气体，《物理评论快报》124，045702（2020年）。[35] L. Dong、K. Shi 和 C. Huang，二维量子液滴的内模，《物理评论A》106，053303（2022年）。[36] T. Mithun、A. Maluckov、K. Kasamatsu、B. Malomed 和 A. Khare，组分间不对称性及准一维二元玻色气体中量子液滴的形成，《Symmetry》12，174（2020年）。[37] X. Zhang、X. Xu、Y. Zheng、Z. Chen、B. Liu、C. Huang、B. A. Malomed 和 Y. Li，半离散量子液滴和涡旋，《物理评论快报》123，133901（2019年）。[38] M. R. Pathak、A. Nath，外部谐振束缚下量子液滴的动力学，《科学报告》12，6904（2022年）。[39] L. Dong 和 Y. V. Kartashov，旋转的多维量子液滴，《物理评论快报》126，244101（2021年）。[40] H. Hu 和 X. J. Liu，球形超稀量子液滴的集体激发，《物理评论A》102，053303（2020年）。

[41] Y. Y. Zheng, S. T. Chen, Z. P. Huang, S. X. Dai, B. Liu, Y. Y. Li, and S. R. Wang, 《二维光学晶格中的量子液滴》, Front. Phys. 16, 22501（2021）。[42] C. M. Bender and S. Boettcher, 《具有 $\mathcal{PT}$对称性的非厄米哈密顿量中的实谱》, 《物理评论快报》80, 5243（1998）。[43] Z. Yan, Z. Wen, and V. V. Konotop, 《具有 $\mathcal{PT}$对称势和非均匀非线性的非线性薛定谔方程中的孤子：非线性模态的稳定性与激发》, 《物理评论A辑》92, 023821（2015）。[44] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. E. Ganainy, and D. N. Christodoulides, 《具有 $\mathcal{PT}$类势的一类非线性薛定谔方程的解析解》, J. Phys. A 41, 244019（2008）。[45] S. Hu, X. Ma, D. Lu, Z. Yang, Y. Zheng, and W. Hu, 《复 $\mathcal{PT}$对称高斯势支持的孤子》, 《物理评论A辑》84, 043818（2011）。[46] V. Achilleos, P. Kevrekidis, D. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonzalez, 《 $\mathcal{PT}$对称非线性介质中的暗孤子和涡旋：从自发对称性破缺到非线性 $\mathcal{PT}$相变》, 《物理评论A辑》86, 013808（2012）。[47] C. Dai, X. Wang, and G. Zhou, 《谐振势和宇称-时间对称势中的稳定光弹解》, 《物理评论A辑》89, 013834（2014）。[48] M. Znojil, 《非厄米谐振子中的量子相变》, 《科学报告》10, 1（2020）。[49] D. A. Zezyulin and V. V. Konotop, 《谐振 $\mathcal{PT}$对称势中的非线性模态》, 《物理评论A辑》85, 043840（2012）。[50] V. V. Konotop, J. Yang, and D. A. Zezyulin, 《 $\mathcal{PT}$对称系统中的非线性波》, Rev. Mod. Phys. 88, 035002（2016）。[51] A. Guo, G. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. Siviloglou, and D. N. Christodoulides, 《复光学势中的 $\mathcal{PT}$对称性破缺观测》, 《物理评论快报》103, 093902（2009）。[52] C. E. R¨uter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, and D. Kip, 《光学中的宇称-时间对称性观测》, Nat. Phys. 6, 192-195（2010）。[53] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, 《 $\mathcal{PT}$对称光学晶格中的光束动力学》, 《物理评论快报》100, 103904（2008）。[54] A. L. M. Muniz, M. Wimmer, A. Bisianov, U. Peschel, R. Morandotti, P. S. Jung, and D. N. Christodoulides, 《PT对称光子晶格中的二维孤子》, 《物理评论快报》123, 253903（2019）。[55] H. Cartarius and G. Wunner, 《δ函数双阱势中的 $\mathcal{PT}$对称玻色-爱因斯坦凝聚体模型》, 《物理评论A辑》86, 013612（2012）。[56] M. Kreibich, J. Main, H. Cartarius, and G. Wunner, 《作为玻色-爱因斯坦凝聚体中 $\mathcal{PT}$对称性实现方式的带缺陷倾斜光学晶格》, 《物理评论A辑》93, 023624（2016）。[57] F. Kogel, S. Kotzur, D. Dizdarevic, J. Main, and G. Wunner, 《静态光学晶格势中 $\mathcal{PT}$对称态及 $\mathcal{PT}$对称性破缺态的实现》, 《物理评论A辑》99, 063610（2019）。[58] C. Hang, D. A. Zezyulin, G. Huang, V. V. Konotop, and B. A. Malomed, 《可调非线性双芯 $\mathcal{PT}$对称波导》, Opt. Lett. 39, 5387-5390（2014）。[59] Z. Zhou, X. Yu, Y. Zou, and H. Zhong, 《一维光学晶格中量子液滴的动力学》, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 78, 104881（2019）。[60] B. Liu, H. Zhang, R. Zhong, X. Zhang, X. Qin, C. Huang, Y. Li, and B. A. Malomed, 《双芯阱中量子液滴的对称性破缺》, 《物理评论A辑》99, 053602（2019）。[61] Z. Zhou, B. Zhu, H. Wang, H. Zhong, 《 $\mathcal{PT}$对称双芯耦合器中量子液滴的稳定性与碰撞》, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 91, 105424（2020）。[62] J. Song and Z. Yan, 《具有两种竞争非线性的宇称-时间对称谐振-高斯势中一维和三维量子液滴的动力学》, Physica D 442, 133527（2022）。

[63] J. Yang and T. I. Lakoba, 《适用于一般非线性波动方程中孤立波的普适收敛平方算子迭代方法》, Stud. Appl. Math. 118, 153-197（2007）。[64] J. Yang, 《孤立波计算的牛顿共轭梯度方法》, J. Comput. Phys. 228, 7007-7024（2009）。[65] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, 《计算非线性系统自局域解的谱重整化方法》, Opt. Lett. 30, 2140-2142（2005）。[66] J. Yang, 《可积与不可积系统中的非线性波》（SIAM，2010）。[67] Y. Chen and Z. Yan, 《具有无界增益与损耗分布的$\mathcal{PT}$对称谐振-高斯势中的多维稳定基态孤子和激发态》, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 57, 3446（2018）。[68] Y. Q. Zhang, H. Zhong, M. R. Beli´c, Y. Zhu, W. P. Zhong, Y. P. Zhang, D. N. Christodoulides, and M. Xiao, 《分数阶薛定谔方程中的$\mathcal{PT}$对称性》, Laser & Photon. Rev. 10, 526-531（2016）。[69] X. K. Yao and X. M. Liu, 《具有宇称-时间对称晶格势的分数阶薛定谔方程中的孤子》, Photonic Research 6, 875-887（2018）。