arXiv:2303.05211v1 [math.CA] 9 Mar 2023

Hermite 算子 Bochner-Riesz 算子交换子的加权 L^2 估计

PENG CHEN 和 XIXI LIN

摘要。设 H 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Hermite 算子 $-\Delta+|x|^2$。我们证明了极大交换子算子 $\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}_{R}(H)](f)|$ 的加权 L^2 估计，其中 $[b, S^{\lambda}_{R}(H)](f)=bS^{\lambda}_{R}(H)f-S^{\lambda}_{R}(H)(bf)$ 是 BMO 函数 b 与 Hermite 算子 H 的 Bochner-Riesz 平均 $S^{\lambda}_{R}(H)$ 的交换子。作为应用，我们得到了当 λ 足够大且 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时，$[b, S^{\lambda}_{R}(H)](f)$ 几乎处处收敛。

1. 引言

令 H 表示 Hermite 算子

$$-\Delta+|x|^2=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+|x|^2,\quad x=(x_1,\cdots,x_n),\quad n\geq 1. \tag{1.1}$$

算子 H 关于 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度是非负且自伴的。算子 H 的谱为集合 $2\mathbb{N}_0+n$。这里 $\mathbb{N}_0$ 表示非负整数集。对于每个非负整数 k，$\mathbb{R}$ 上的 Hermite 多项式 $H_k(t)$ 定义为 $H_k(t)=(-1)^k e^{t^2}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t^2})$，而 Hermite 函数 $h_k(t):=(2^k k!\sqrt{\pi})^{-1/2}H_k(t)e^{-t^2/2}$，$k=0,1,2,\ldots\ldots$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基。对于任意多重指标 $\mu\in\mathbb{N}_0^n$，n 维 Hermite 函数由一维 Hermite 函数的张量积给出：

$$\Phi_\mu(x)=\prod_{i=1}^{n}h_{\mu_i}(x_i),\quad \mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n). \tag{1.2}$$

因此，函数 Φ_μ 是 Hermite 算子的特征函数，其特征值为 $(2|\mu|+n)$，并且 $\{\Phi_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}_0^n}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中构成完备标准正交系。因此，对于每个 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，我们都有 Hermite 展开

$$f(x)=\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0^n}\langle f,\Phi_\mu\rangle\Phi_\mu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k f(x), \tag{1.3}$$

2000 年数学主题分类：42B15、42B25、47F05。关键词：加权 L^2 估计、交换子、Bochner-Riesz 算子、Hermite 算子。通讯作者：Xixi Lin。

其中 P_k 表示 Hermite 投影算子，其定义为

$$P_k f(x) = \sum_{2|\mu|+n=k} \langle f, \Phi_\mu \rangle \Phi_\mu(x). \tag{1.4}$$

对于 $R > 0$，H 的阶数为 $\lambda \geq 0$ 的 Bochner-Riesz 平均定义为

$$S_R^\lambda(H) f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2k+n}{R^2}\right)_+^\lambda P_k f(x). \tag{1.5}$$

假设 $\lambda \geq 0$ 是必要的，这样 $S^\lambda_R(H)$ 才能对所有 $R > 0$ 有定义。注意，当 $R^2 = 2k + n$ 且 $\lambda < 0$ 时，$S^\lambda_R(H) f$ 无法定义。

在空间 $\mathbb{R}$，Thangavelu [28] 证明，对于 $1 \leq p \leq \infty$ 且满足 $\lambda > 1/6$，$S^\lambda_R(H)$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上一致有界；若 $0 < \lambda < 1/6$，则 $S^\lambda_R(H)$ 一致有界当且仅当 $4/(6\lambda+3) < p < 4/(1-6\lambda)$。在空间 $\mathbb{R}^n$ 中，对于维数 $n \geq 2$，若 $\lambda > (n-1)/2$，Thangavelu [29] 证明了 $S^\lambda_R(H)$ 对 $1 \leq p \leq \infty$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界。设 $n \geq 2$, $0 \leq \lambda \leq (n-1)/2$ 且 $p \in [1,\infty] \setminus \{2\}$，据推测（见 [30,第 259] 页），$S^\lambda_R(H)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上关于 R 一致有界当且仅当

$$\lambda > \lambda(p) = \max\left\{ n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

Thangavelu 证明，当 $\lambda < \lambda(p)$ 时，$S^\lambda R(H)$ 在 L^p 上不有界。Karadzhov [19]通过最优的 L^2–L^p 谱投影估计，证明了当 p 属于 $[1, 2n/(n+2)] \cup [2n/(n-2)$ 时，$S^\lambda R(H)$ 在 L^p 上有界，且 $\infty]$ 当 $\lambda > \lambda(p)$ 时。最近，Lee 和 Ryu [22] 通过证明 $\sup_{R>0} \|S^\lambda_R(H)\|_{L^p \to L^p} \leq C$ 仅当 $\lambda \geq -1/(3p) + n/3(1/2 - 1/p) > \lambda(p)$ 时成立，推翻了上述猜想，其中 $p \in (2(n+1)/n, 2(2n-1)/(2n-3))$，且 $n \geq 2$。关于极大算子的估计，已知（见 [5]），当 $n \geq 2$ 时，只要 $p \geq 2n/(n-2)$ 且 $\lambda > \lambda(p)$，极大算子 $\sup_{R>0} |S^\lambda R(H) f|$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界。此外，第一作者与 Duong、He、Lee 和 Yan [4] 证明了：若 $\lambda > \max\{(\alpha-1)/4, 0\}$，则 $\sup_{R>0} |S^\lambda R(H) f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$ 上有界；由此可知，只要 $\lambda > \lambda(p)/2$ 且 $p \in [2,\infty)$，对所有 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$S^\lambda R(H) f$ 都几乎处处收敛。

考虑交换子，给定算子 T 和局部可积函数 b，T 与 b 的交换子定义如下

$$[b, T] f(x) := bTf(x) - T(bf)(x).$$

众所周知，Coifman、Rochberg 和 Weiss [9] 刻画了 Riesz 变换的交换子 [b, T] 的有界性，其中 $b \in$ 属于有界平均振荡空间。此后，这项工作引出了大量研究：Uchiyama [32]将结果推广到齐次型空间；Ferguson 和 Lacey [12] 以及 Lacey、Petermichl、Pipher 和 Wick [20]将其推广到多参数情形；Holmes、Lacey 和 Wick [14]研究了双权情形；Hyt¨onen [15]研究了 L^p 到 L^q 的有界性及其与 Jacobian 算子的应用；Coifman、Lions、Meyer 和 Semmes [8] 以及 Lacey、Petermichl、Pipher 和 Wick [21]研究了散度-旋度引理；Uchiyama [31] 以及

Nazarov、Pisier、Treil 和 Volberg [23]；与经典 Bochner-Riesz 算子的交换子´由 Alvarez、Bagby、Kurtz 和 P´erez [1] 以及 Hu 和 Lu [16, 18]。

在 [6], 中，本文作者与 Yan 研究了 BMO 函数 b 与 Bochner-Riesz 平均 $S^{\lambda}_{R}(H)$ 的交换子$[b, S^{\lambda}_{R}(H)](f)$ 的 L^{p} 有界性，其中 Bochner-Riesz 平均 $S^{\lambda}_{R}(H)$ 定义为

$$[b, S^{\lambda}_{R}(H)](f) = bS^{\lambda}_{R}(H)f - S^{\lambda}_{R}(H)(bf).$$

他们证明，若 $n \geq 2, 1 \leq p \leq 2n/(n+2)$ 且 $\lambda > \lambda(p)$，则对所有 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 及所有 $q \in (p, p')$,

$$\sup_{R>0} \left\| [b, S^{\lambda}_{R}(H)] \right\|_{q \to q} \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

本文旨在沿着这一思路，建立 $S^{\lambda}_{R}(H)$ 与 BMO 函数 b 的交换子的加权 L^2 估计。我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$。对于 $0 \leq \alpha < n$，若 $\lambda > \max\{(\alpha-1)/4, 0\}$，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{R>0} |[b, S^{\lambda}_{R}(H)]f(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} \mathrm{d}x \leq C(n, \alpha, \lambda)\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} \mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

作为定理 1.1 的推论，我们得到以下结果。

推论 1.2. 设 $2 \leq p < \infty$ 且 $\lambda > \lambda(p)/2$。那么对于任意 $b \in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^n)$ 以及 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{R \to \infty} [b, S^{\lambda}_{R}(H)]f(x) = 0$$

几乎处处成立。

我们提及，$\mathbb{R}^n$ 上的经典 Bochner-Riesz 平均定义为

$$\widehat{S^{\lambda}_{R} f}(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)^{\lambda}_{+} \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Hu 和 Lu [17] 证明了当 $\lambda > 0$ 时，极大交换子算子 $\sup_{R>0} |[b, S^{\lambda}_{R}]f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界。此外，他们还证明了如下加权估计：只要 $0 < \alpha < n$ 且$\lambda > \max\{(\alpha-1)/2, 0\}$ in [18]，极大交换子算子 $\sup_{R>0} |[b, S^{\lambda}_{R}]f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{-\alpha})$ 上有界。

定理 1.1 的证明依赖于平方函数$G_{b,\delta}$的加权 L^2 估计，该平方函数定义为

$$G_{b,\delta}(f)(x) := \left(\int_0^{\infty} \left| \left[b, \phi\left(\delta^{-1}\left(1 - \frac{H}{t^2}\right)\right)\right] f(x) \right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ 的支集为 $\{x : 1/8 \leq |x| \leq 1/2\}$ and $|\phi| \leq 1$。（见下文命题3.1）。事实上，我们将证明，对于任意 $0 < \upsilon \leq 1/2$，都存在一个常数 $C_{\alpha,\upsilon} > 0$，它与 δ 无关，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_{b,\delta}(f)(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} \mathrm{d}x \leq C_{\alpha,\upsilon}\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} \mathrm{d}x, \tag{1.7}$$

其中

$$B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta)=\begin{cases}\delta^{1-\upsilon}, & \text{if } 0<\alpha<1, n=1; \alpha=0, n\geq 1;\\ \delta^{\frac{3-\alpha}{2}-\upsilon}, & \text{if } 1<\alpha<n, n\geq 2.\end{cases} \tag{1.8}$$

为证明（1.7），我们将使用 [4] 提出的两个非平凡结论的推广。第一个结论是，对于任意 $\alpha\geq 0$,

$$\|(1+|x|)^{2\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq C\|(I+H)^{\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.9}$$

对任意 f $\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 都成立。第二个结论是关于 Hermite 算子的一类迹引理，即对于 $\alpha>1$，存在常数 C >0 使得

$$\|\chi_{[k,k+1)}(H)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}\leq Ck^{-1/4},\quad k\in\mathbb{N}^+. \tag{1.10}$$

值得指出的是，当 $0<\alpha<1$ 时，（1.10）不适用。为证明 $0<\alpha<1$ 的平方函数估计（1.7），我们使用加权 Plancherel 型估计（见下文的估计（2.3），证明可参见 [4, 引理 2。6] ）。

本文结构安排如下。第 2 节介绍 Hermite 算子的若干预备结果，以及谱乘子与 BMO 函数的交换子的若干估计，这些结果为定理 1.1 的证明提供了基本估计。我们在第 3 节建立平方函数G_b 的加权估计（1.7），δ 定理 1.1 的证明将在第 4 节给出，并使用平方函数G_b 的估计（1.7），δ。作为定理 1.1的推论，我们在第 4 节末尾证明推论 1.2 。

2. 预备结果

我们首先回顾 Hermite 算子 H 的一些性质。Hermite 算子 H 满足有限传播速度性质，即

$$\operatorname{supp} K_{\cos(t\sqrt{H})}(x,y)\subseteq \mathfrak{D}_t:=\{(x,y):|x-y|\leq t\}. \tag{FS}$$

例如，参见[25, 定理 2]。由傅里叶反演，对于任意偶函数F,

$$F(\sqrt{H})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{F}(t)\cos(t\sqrt{H})\mathrm{d}t.$$

b 根据[7, 引理 I.1], 可知，若 suppF $\subseteq$ [–t，则 t],

$$K_{F(\sqrt{H})}(x,y)\subseteq\mathfrak{D}_t, \tag{2.1}$$

这将在后文中使用。

对于任意支集位于 $[-1,1]$ 且 $2 \le p < \infty$ 的函数 F，我们定义

$$\|F\|_{N,p} := \left(\frac{1}{N} \sum_{i=-N+1}^{N} \sup_{\lambda \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N})} |F(\lambda)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad N \in \mathbb{N}^+.$$

以下是 Hermite 算子的迹引理。

引理 2.1. 对于 $\alpha > 1$，存在常数 $C > 0$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}^+$,

$$\|\chi_{[k,k+1)}(H)\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})} \le Ck^{-1/4}. \tag{2.2}$$

因此，对于任意支集包含于 [N/4,N], $N \in \mathbb{N}^+$ 的函数 F 以及任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 C 和 C_ε，使得

(2.3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(\sqrt{H}) f(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} dx \le \begin{cases} CN \|F(N\cdot)\|_{N^2,2}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, & \text{if } \alpha > 1; \\ C_\varepsilon N^{\frac{\alpha}{1+\varepsilon}} \|F(N\cdot)\|_{N^2,2(1+\varepsilon)/\alpha}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, & \text{if } 0 < \alpha \le 1. \end{cases}$$

证明。关于（2.2）和（2.3）的证明，请读者参阅 [4, 引理 1.5、2.4 和 2.6]。我们想指出，对于，估计式（2.3）等价于估计式（2.2）。对于 $0 < \alpha \le 1$，估计式（2.3）是将 $\alpha > 1$ 的估计式（2.3）与平凡事实 $\|F(\sqrt{H}) f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|F(N\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$进行双线性插值得到的。 □

引理 2.2. 设 $\alpha \ge 0$。则估计

$$\|(1+|x|)^{\alpha/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C \|(I+H)^{\alpha/4} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

对任意 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 均成立。这里，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中施瓦茨函数的类。

证明。证明可参见[4, 引理 1。4]。 □

引理 2.3. 设 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$。记 M_b 为哈代-利特尔伍德极大算子的交换子，其定义为

$$M_b(f)(x) := \sup_{r>0} r^{-n} \int_{|x-y|<r} |(b(x)-b(y)) f(y)| dy.$$

若 $1 < p < \infty$ 且 $w \in A_p$，则 M_b 在 $L^p(\mathbb{R}^n, w)$ 上有界，其界为 $C(n,p)\|b\|_{BMO}$。

证明。证明可参见 [18, 引理 1] 和 [13]。 □

引理 2.4. 设 $M_b(f)$ 如上定义，且 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$。那么对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{t>0} |[b, \varphi(t^{-2}H)] f(x)| \le C_\varepsilon \|\varphi\|_{W^2_{n+1/2+\varepsilon}} M_b(f)(x). \tag{2.4}$$

此外，对于任意的 $1 < p < \infty$ 和 $w \in A_p$,

$$\| \sup_{t>0} |[b, \varphi(t^{-2}H)] f| \|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)} \le C_\varepsilon \|\varphi\|_{W^2_{n+1/2+\varepsilon}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}. \tag{2.5}$$

证明。令 $G(t^{-2}H) = \varphi(t^{-2}H)e^{t^{-2}H}$，则由傅里叶变换可得

$$\varphi(t^{-2}H) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{G}(\tau)e^{-t^{-2}(1-i\tau)H}d\tau,$$

其核为

$$K_{\varphi(t^{-2}H)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{G}(\tau)p_{t^{-2}(1-i\tau)}(x,y)d\tau,$$

其中 $p_t(x, y)$ 是半群 e^{-tH} 的热核。于是

$$\begin{aligned} |[b,\varphi(t^{-2}H)]f(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} K_{\varphi(t^{-2}H)}(x,y)(b(x)-b(y))f(y)dy| \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |\widehat{G}(\tau)| \int_{\mathbb{R}^n} |p_{t^{-2}(1-i\tau)}(x,y)(b(x)-b(y))f(y)|dyd\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$e^{-t^{-2}H}$ 的核具有高斯上界。令 $z = t^{-2}(1 - i\tau)$. 根据 Phrag- men–Lindel¨ef 定理，e^{-zH} 的核满足以下估计（参见 [24, 定理 7。2]），

$$|p_z(x,y)| \le C|z|^{-n/2}(1+|\tau|^2)^{n/4}\exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{|z|(1+|\tau|^2)^{1/2}}\right). \tag{2.7}$$

令 $r = t^{-1}(1+|\tau|^2)^{1/2}$，$U_0(B) = B(x, r)$，$U_k(B) = 2^kB - 2^{k-1}B$ 当 $k \ge 1$。由估计式（2.7），

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |p_z(x,y)(b(x)-b(y))f(y)|dy &\le C\sum_{k\ge 0}\frac{\exp(-c2^{2k})}{(1+|\tau|^2)^{-n/2}r^n}\int_{U_k(B)}|b(x)-b(y)||f(y)|dy \\ &\le C\sum_{k\ge 0}\frac{2^{kn}\exp(-c2^{2k})}{(1+|\tau|^2)^{-n/2}|2^kB|}\int_{2^kB}|b(x)-b(y)||f(y)|dy \\ &\le C\sum_{k\ge 0}\frac{2^{kn}\exp(-c2^{2k})}{(1+|\tau|^2)^{-n/2}}M_b(f)(x) \\ &\le C(1+|\tau|^2)^{n/2}M_b(f)(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

注意到 $\varphi \in \mathbb{R}$ 具有紧支撑，$\|\varphi\|_{W^2_{n+1/2+\varepsilon}} \approx \|G\|_{W^2_{n+1/2+\varepsilon}}$。结合估计式（2.6）和（2.8），可得

$$|[b,\varphi(t^{-2}H)]f(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |\widehat{G}(\tau)|(1+|\tau|^2)^{n/2}M_b(f)(x)d\tau \le C_\varepsilon\|\varphi\|_{W^2_{n+1/2+\varepsilon}}M_b(f)(x). \tag{2.9}$$

最后，$L^p(\mathbb{R}^n, w)$ 的 $\sup_{t>0}|[b, \varphi(t^{-2}H)]f|$ 由估计式（2.9）和引理 2.3可得。

□

引理 2.5. 设 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$，$s > n/2$，且 $r_0 = \max\{1,n/s\}$。那么，对于所有满足 $\sup_{R>0}\|\eta F(R\cdot)\|_{W^\infty_s} < \infty$ 的博雷尔函数 F，其中 $\eta \in C^\infty_c(0,\infty)$ 是一个固定函数，且

不恒等于零，交换子 $[b, F(\sqrt{H})]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n, w)$ 上有界，其中 $r_0 < p < \infty$，且 $w \in A_{p/r_0}$。此外，

$$\|[b, F(\sqrt{H})]\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)\to L^p(\mathbb{R}^n,w)} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}(\sup_{R>0}\|\eta F(R\cdot)\|_{W_s^\infty} + |F(0)|).$$

证明。Hermite 算子具有高斯上界，因此满足[2, 定理 1。1], 由此可得本引理。另见 [11, 定理 3。2]。

□

引理 2.6。设非零函数 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$的支集为 $\{u: 1 \le |u| \le 3\}$。对于$-n < \alpha < n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\varphi(2^{-k}\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx \le C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx, \tag{2.10}$$

且对于任意 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|[b,\varphi(2^{-k}\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx. \tag{2.11}$$

证明。关于（2.10）的证明，请参见 [4, 命题 2。7]。为完整起见，我们给出估计式（2.11）的证明，尽管这个证明相当标准。事实上，设r_k（t）为拉德马赫函数，且 φ_k（λ）$= \varphi$（$2^{-k}\lambda$）。定义函数

$$F(t,\lambda) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_k(t)\varphi_k(\lambda).$$

根据拉德马赫函数的性质，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2 \le C\int_0^1|\sum_{k\in\mathbb{Z}}r_k(t)[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2dt = C\int_0^1|[b,F(t,\sqrt{H})]f(x)|^2dt.$$

对 x 乘以权重 $(1+|x|)^{-\alpha}$ 后积分，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx \le C\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}|[b,F(t,\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dxdt.$$

令 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$。容易得到 $\sup_{R>0}\|\eta F(t,R\cdot)\|_{W_s^\infty(\mathbb{R})} < \infty$，当 $s > n/2$ 时成立。由引理 2.5 以及 $(1+|x|)^{-\alpha} \in A_2$（当 $-n < \alpha < n$ 时），可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|[b,F(t,\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx &\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2\sup_{R>0}\|\eta F(t,R\cdot)\|_{W_s^\infty(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx\\ &\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx,\end{aligned}$$

其中 C 关于 $t \in [0,1]$ 一致。

□

3. 平方函数的加权估计

本节将证明平方函数 $G_{b,\delta}$ 的如下加权 L^2 估计，该函数定义为

$$G_{b,\delta}(f)(x) := \left(\int_0^\infty \left| \left[b, \phi\left(\delta^{-1}\left(1 - \frac{H}{t^2}\right)\right)\right] f(x)\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，支集为 $\{x : 1/8 \le |x| \le 1/2\}$ 且 $|\phi| \le 1$。

命题 3.1. 设 $0 \le \alpha < n$，$0 < \delta < 1/2$。假设 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$。那么对于任意 $0 < \upsilon \le 1/2$，存在常数 $C_{\alpha,\upsilon} > 0$，其与 δ 无关，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_{b,\delta}(f)(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} \mathrm{d}x \le C_{\alpha,\upsilon} \|b\|_{\mathrm{BMO}}^2 B_{\alpha,n}^{\upsilon}(\delta) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} \mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

其中

$$B_{\alpha,n}^{\upsilon}(\delta) = \begin{cases} \delta^{1-\upsilon}, & \text{if } 0 < \alpha < 1, n = 1; \alpha = 0,\ n \ge 1; \\ \delta^{\frac{3-\alpha}{2}-\upsilon}, & \text{if } 1 < \alpha < n,\ n \ge 2. \end{cases}$$

我们选取一个偶函数 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，其支集包含于 $\{u : 1/2 \le |u| \le 2\}$，满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta(2^{-j}u) = 1, \forall u > 0$。给定 $0 < \delta < 1/2$，令 $j_0 = [-\log_2 \delta] - 1$。设 $\eta_j(u) = \eta(2^{-j}u)$，其中 $j > j_0$，且 $\eta_{j_0}(u) = 1 - \sum_{j \ge j_0+1} \eta(2^{-j}u)$，则有 $\sum_{j \ge j_0} \eta_j(u) \equiv 1, \forall u > 0$。记 $\phi_\delta(s)$ 为 $\phi(\delta^{-1}(1-s^2))$。对于 $j \ge j_0$, ，定义

$$\phi_{\delta,j}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \eta_j(u) \widehat{\phi_\delta}(u) e^{isu} \mathrm{d}u. \tag{3.2}$$

由二进分解可得

$$\phi_\delta(t^{-1}s) = \sum_{j \ge j_0} \phi_{\delta,j}(t^{-1}s). \tag{3.3}$$

下述估计在全文中很有用，对任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $j \ge j_0$,

$$|\phi_{\delta,j}(s)| \le \begin{cases} C_N 2^{(j_0-j)N}, & \text{if } |s| \in [1-2\delta, 1+2\delta]; \\ C_N 2^{j-j_0}(1+2^j|s-1|)^{-N}, & \text{otherwise .} \end{cases} \tag{3.4}$$

参见 [4, 第 23 页（3.16）] 中的证明。

为证明命题3.1，我们需要以下引理。

引理 3.2. 令 $0 \le \alpha < n$、$k \ge 0$ 和 $j \ge j_0$。我们定义一个与 $\phi_{\delta,j}$ 相关的算子：

$$T_{j,k}^{\delta}(f) := \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} |\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H}) f|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}.$$

那么，对于任意 $0<\varepsilon\le 1/2$ 和 $N\in\mathbb{N}$，存在常数 $C_{\varepsilon,N}$，使得

$$\left\|T^{\delta}_{j,k}(f)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}\le C_{\varepsilon,N}2^{(j_0-j)N}A^{\varepsilon}_n(\delta,\alpha)^{1/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})},$$

其中

$$A^{\varepsilon}_n(\delta,\alpha):=\begin{cases}\delta, & \text{if } \alpha=0, n\ge 1;\\ \delta^{1-\varepsilon}, & \text{if } 0<\alpha<1, n=1;\\ \delta^{\frac{3-\alpha}{2}}, & \text{if } 1<\alpha<n, n\ge 2.\end{cases}\tag{3.5}$$

引理 3.3. 设 $T^{\delta}{}_{j,k}$ 由引理 *3.2* 定义，且 $k\ge 0, 0\le\alpha<n$，$j\ge j_0$。那么对于任意 $0<\varepsilon\le 1/2$ 和 $N\in\mathbb{N}$，存在常数 $C_{\varepsilon,N}$ 使得

$$\|T^{\delta}_{j,k}(f)\|_{L^r(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}\le C_{\varepsilon,N}2^{(j_0-j)N}2^{(1-\theta)kn}A^{\varepsilon}_n(\delta,\alpha)^{\theta/2}\|f\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha(r'-1)})},$$

其中 $\theta=2/r, 2<r<\infty$。

引理 3.2 和 3.3 的证明将在后文给出。接下来，我们利用引理 3.2 和3.3 证明命题3.1。

命题*3.1*的证明。 Hermite 算子的特征值大于 1，且 $\operatorname{supp}\phi\subseteq\{x:1/8\le|x|\le 1/2\}$ 意味着

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_{1/2}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

取一个函数 φ，其支集为 $\{s:1\le|s|\le 3\}$，且 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-k}s)=1,\forall s>0$。令 $\varphi_k(s)=\varphi(2^{-k}s)$。对于任意 $t\in[1/2,\infty)$，存在一个统一上界 C，使得 $\#\{k\in\mathbb{Z}:\phi_\delta(t^{-1}s)\varphi_k(s),0,s>0\}\le C$，其中 # 表示计数测度。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{1/2}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{1/2}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=C\sum_{k\ge 0}\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t},\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们利用了 $\phi_\delta(t^{-1}s)$ 和 $\varphi_k(s)$ 的支集性质。

注意

$$[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})\varphi_k(\sqrt{H})]f=[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})]\varphi_k(\sqrt{H})f+\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f.$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\le C\left(\sum_{k\ge0}I_1(k)+\sum_{k\ge0}I_2(k)\right),\tag{3.6}$$

其中

$$I_1(k) := \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

$$I_2(k) := \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})]\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

对于第一项 $I_1(k)$，由等式（3.3）和闵可夫斯基不等式可得

$$I_1(k) \le \left(\sum_{j\ge j_0}\left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}\right)^2.$$

由引理3.2，可得

$$\begin{aligned} I_1(k) &\le C_{\varepsilon,N}\left(\sum_{j\ge j_0} 2^{(j_0-j)N}\right)^2 A_n^\varepsilon(\delta,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} |[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x \\ &\le C_\varepsilon A_n^\varepsilon(\delta,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} |[b,\varphi_k(\sqrt{H})]f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

然后对 k 求和，并使用引理 2.6 中的估计（2.11 可得

$$\sum_{k\ge 0} I_1(k) \le C_\varepsilon A_n^\varepsilon(\delta,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

对于第二项 $I_2(k)$，由等式（3.3）和闵可夫斯基不等式可得

$$I_2(k) \le \left(\sum_{j\ge j_0}\left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |[b,\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})]\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}\right)^2.$$

固定 j、k。我们将 $\mathbb{R}^n$ 分解为边长为 2^{j-k+2} 的互不相交的立方体。对于给定的 $\mathrm{m}=(\mathrm{m}_1,\cdots,\mathrm{m}_n)\in\mathbb{Z}^n$，定义一个与之对应的立方体：

$$Q_{\mathbf{m}} = \left[2^{j-k+2}(\mathbf{m}_1-1/2), 2^{j-k+2}(\mathbf{m}_1-1/2)\right)\times\cdots\times\left[2^{j-k+2}(\mathbf{m}_n-1/2), 2^{j-k+2}(\mathbf{m}_n-1/2)\right).$$

显然，$Q_{\mathbf{m}}$ 是一个立方体，其中心为 $(\mathrm{m}_1,\cdots,\mathrm{m}_n)$，边长为 2^{j-k+2}。$\{Q_{\mathbf{m}}\}$ 两两不相交，且 $\mathbb{R}^n = \mathrm{S}_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} Q_{\mathbf{m}}$。对每个 $\mathrm{m}\in\mathbb{Z}^n$，我们定义 $Q_{\mathbf{m}}$ 如下：

$$\widetilde{Q}_{\mathbf{m}} := \bigcup_{\mathbf{m}'\in\mathbb{Z}^n:\mathrm{dist}(Q_{\mathbf{m}},Q_{\mathbf{m}'})\le\sqrt{n}2^{j-k+3}} Q_{\mathbf{m}'}.$$

若 $\mathrm{t}\in[2^{k-1},2^{k+2}]$，$\mathrm{supp}\,\widehat{\phi_{\delta,\ j}}(\mathrm{t}^{-1}\cdot)\subseteq[-2^{j-k+2},2_{j-k^{+2}}]$。由有限传播速度（FS），$\mathrm{K}_{\phi_{\delta,\ j}(t^{-1}\sqrt{H})}\subseteq\mathrm{D}_{2^{j-k+2}}$。由此可知，对任意 $\mathrm{t}\in[2^{k-1},2^{k+2}]$

$$\left|[b,\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})]g\right| = \left|\sum_{\mathbf{m},\mathbf{m}'\in\mathbb{Z}^n:\mathrm{dist}(Q_{\mathbf{m}},Q_{\mathbf{m}'})\le\sqrt{n}2^{j-k+3}} \chi_{Q_{\mathbf{m}}}[b,\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})]\chi_{Q_{\mathbf{m}'}}g\right|$$

$$\leq \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} \left|\chi_{Q_{\mathbf{m}}}[b,\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})]\chi_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}g\right|, \tag{3.8}$$

其中，按惯例，$\chi_{Q_{\mathbf{m}}}$ 是 $Q_{\mathbf{m}}$ 的特征函数。
令 $b_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} = |Q_{\mathbf{m}}|^{-1}\int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} b(y)dy$。显然，

$$[b,\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})]g = (b-b_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}})\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})g - \phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})(b-b_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}})g. \tag{3.9}$$

由（3.8）、（3.9）以及 $Q_{\mathbf{m}}$ 的不相交性可知

$$\begin{aligned}
&\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n} |[b,\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})]\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{Q_{\mathbf{m}}}[b,\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})]\chi_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&\leq C\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}\left(E^1_{j,k,\mathbf{m}}+E^2_{j,k,\mathbf{m}}\right),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
E^1_{j,k,\mathbf{m}} &:= \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{Q_{\mathbf{m}}}(b-b_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}})\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})\chi_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t},\\
E^2_{j,k,\mathbf{m}} &:= \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{Q_{\mathbf{m}}}\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})(b-b_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}})\chi_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}.
\end{aligned}$$

我们选取 r 和 q 使得 $1/2 = 1/q + 1/r$ 且 $\alpha r/2 < n$ 以便使用引理 3.3。由 Hölder¨不等式可得

$$E^1_{j,k,\mathbf{m}} \leq \|b-b_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}\|^2_{L^q(\widetilde{Q}_{\mathbf{m}})}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|T^\delta_{j,k}(\chi_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}\varphi_k(\sqrt{H})f)(x)|^r(1+|x|)^{-\alpha r/2}\mathrm{d}x\right)^{2/r}. \tag{3.10}$$

由引理3.3 以及 H¨older 不等式再次可得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n}|T^\delta_{j,k}(\chi_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}\varphi_k(\sqrt{H})f)(x)|^r(1+|x|)^{-\alpha r/2}\mathrm{d}x\right)^{2/r}\\
&\leq C_{\varepsilon,N}2^{2(j_0-j)N}A^\varepsilon_n(\delta,r\alpha/2)^{2/r}2^{2kn(1-\frac{2}{r})}\left(\int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}|\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^{r'}(1+|x|)^{-\alpha r'/2}\mathrm{d}x\right)^{2/r'}\\
&\leq C_{\varepsilon,N}2^{2(j_0-j)N}A^\varepsilon_n(\delta,r\alpha/2)^{2/r}2^{2kn(1-\frac{2}{r})}|\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}|^{\frac{2}{q}}\int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}|\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

由 John-Nirenberg 不等式可知

$$\|b-b_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}}\|^2_{L^q(\widetilde{Q}_{\mathbf{m}})} \leq C_q\|b\|^2_{\mathrm{BMO}}|\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}|^{\frac{2}{q}}. \tag{3.12}$$

回顾一下， $2^{j_0} \approx \delta^{-1}$ 且 $\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}$ 包含在边长为 $5\cdot 2^{j-k+2}$ 的立方体中。结合估计式（3.10）、（3.11）和（3.12），以及 $2/q = 1-2/r$，可得

$$E^1_{j,k,\mathbf{m}} \le C_{\varepsilon,r,N}\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} 2^{2(j_0-j)(N-n(1-\frac{2}{r}))}\delta^{-2n(1-\frac{2}{r})} A^{\varepsilon}_n(\delta, r\alpha/2)^{\frac{2}{r}} \int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} |\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x.$$

同样，由 H¨older 不等式、引理 3.3 和 John-Nirenberg 不等式可得

$$E^2_{j,k,\mathbf{m}} \le C_{\varepsilon,r,N}\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} 2^{2(j_0-j)(N-n(1-\frac{2}{r}))}\delta^{-2n(1-\frac{2}{r})} A^{\varepsilon}_n(\delta, r\alpha/2)^{\frac{2}{r}} \int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} |\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x.$$

情形 1. $n \ge 2$且 $1 < \alpha < n$。

对于任意 $0 < \upsilon \le 1/2$ 和 $1 < \alpha < n$，我们选取 r 使得

$$2 < r < \min\left\{\frac{2n}{\alpha}, \frac{2(2n+3/2)}{2n+3/2-\upsilon}\right\}.$$

由 (3.5) 中 $A^{\varepsilon}_n(\delta, r\alpha/2)$ 的定义，通过计算可得

$$A^{\varepsilon}_n(\delta, r\alpha/2)^{2/r}\delta^{-2n(1-2/r)} = \delta^{(3-\alpha)/2-(1-2/r)(2n+3/2)} < \delta^{(3-\alpha)/2-\upsilon},$$

那么存在常数 $C_1 = C_{\alpha,\upsilon,N}$ 使得

$$E^1_{j,k,\mathbf{m}} + E^2_{j,k,\mathbf{m}} \le C_1\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} 2^{2(j_0-j)(N-n(1-\frac{2}{r}))}\delta^{\frac{3-\alpha}{2}-\upsilon} \int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} |\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

情况 2。$n = 1$且 $0 < \alpha < 1$。

对于任意小的 $0 < \varepsilon \le 1/4$ 和 $0 < \upsilon' \le 1/4$，我们选择 r 使得 $2 < r < \min\{2/\alpha, 2(3-\varepsilon)/(3-\varepsilon-\upsilon')\}$。经计算，

$$A^{\varepsilon}_1(\delta, r\alpha/2)^{2/r}\delta^{-2(1-2/r)} = \delta^{1-\varepsilon-(1-2/r)(3-\varepsilon)} < \delta^{1-\varepsilon-\upsilon'} \le \delta^{1-\upsilon},$$

其中 $0 < \upsilon \le 1/2$。于是存在常数 $C_2 = C_{\alpha,\upsilon,N}$ 使得

$$E^1_{j,k,\mathbf{m}} + E^2_{j,k,\mathbf{m}} \le C_2\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} 2^{2(j_0-j)(N-n(1-\frac{2}{r}))}\delta^{1-\upsilon} \int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} |\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

情况 3。$n \ge 1$ 且 $\alpha = 0$。

对于任意小的 $0 < \upsilon \le 1/2$，我们只需选取 r 使得 $2 < r < 2(2n+1)/(2n+1-\upsilon)$。于是存在常数 $C_3 = C_{0,\upsilon,N}$ 使得

$$E^1_{j,k,\mathbf{m}} + E^2_{j,k,\mathbf{m}} \le C_3\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} 2^{2(j_0-j)(N-n(1-\frac{2}{r}))}\delta^{1-\upsilon} \int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} |\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

接下来，我们对 j 和 m 求和，将各项 $E^1{}_{j,k,\mathbf{m}}+E^2{}_{j,k,\mathbf{m}}$ 相加。综合估计式（3.13）、（3.14）和（3.15），取 N 使得 $N > n(1-2/r)$，并利用 $\mathbb{R}^n = \cup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} Q_{\mathbf{m}}$ 和 $\{Q_{\mathbf{m}}\}$ 有有限重叠这一事实，可得存在常数 $C_{\alpha,\upsilon}$，使得

$$I_2(k) \le C_4\left(\sum_{j\ge j_0} 2^{(j_0-j)(N-n(1-2/r))}\right)^2 B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta)\|b\|^2_{\mathrm{BMO}} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}\int_{\widetilde{Q}_{\mathbf{m}}} |\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x$$

$$\leq C_{\alpha,\upsilon}B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta)\|b\|^2_{\mathrm{BMO}}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x, \tag{3.16}$$

其中 $B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta)$ 在（1.8）中定义，且 $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$。
最后，将估计 $I_2(k)$ 中各项对 k 求和，并在估计式（3.16）中使用引理 2.10 中的估计 2.6，可得

$$\sum_{k\geq 0}I_2(k) \leq C_{\alpha,\upsilon}B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta)\|b\|^2_{\mathrm{BMO}}\sum_{k\geq 0}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_k(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x$$

$$\leq C_{\alpha,\upsilon}B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta)\|b\|^2_{\mathrm{BMO}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x, \tag{3.17}$$

其中 $\mathrm{n} = 1, 0 \leq \alpha < 1; \mathrm{n} \geq 2, 1 < \alpha < \mathrm{n}$ 或 $\alpha = 0$。
综合估计式（3.6）、（3.7）和（3.17），并注意到 $\mathrm{A}^{\upsilon}_{n}(\delta,\alpha) < \mathrm{B}^{\upsilon}_{\alpha,\ n}(\delta)$，可得对任意 $0 < \upsilon \leq 1/2$,

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|[b,\phi_\delta(t^{-1}\sqrt{H})]f|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq C_{\alpha,\upsilon}B^{\upsilon}_{\alpha,n}(\delta)\|b\|^2_{\mathrm{BMO}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x.$$

因此，在引理3.1 和 3.2 以及 3.3 得到证明后，即可得到命题 □

最后，我们来证明引理3.2 和 3.3。

引理的证明 *3.2*。 我们将分两种情况讨论此引理： $\alpha = 0$ 和 $0 < \alpha < n$。

情况 1。 $\alpha = 0$。

取一个函数 $\psi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R})$，其支集为 $\{\mathrm{s}: 1 \leq |\mathrm{s}| \leq 4\}$，使得 $\mathrm{P}_{\mathrm{l}\in\mathbb{Z}}\psi(2^{-\ell}\mathrm{s}) = 1$对所有 $\mathrm{s} > 0$成立。对于任意 $\delta > 0$，令 $\psi_{\delta,\ell}(\mathrm{s}) = \psi(2^{-\ell}\delta^{-1}(1-\mathrm{s}))$ 对所有 $\mathrm{l} \geq 1$ 成立，并令 $\psi_{\delta,0}(\mathrm{s}) = \psi_0(\delta^{-1}(1-\mathrm{s}))$，其中 $\psi_0(\mathrm{s}) = 1 - \mathrm{P}_{\mathrm{l}\geq 1}\psi(2^{-\ell}\mathrm{s})$。那么对于 $\mathrm{k} \geq 0$ 和 $\mathrm{j} \geq \mathrm{j}_0$,

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})f(x)|^2\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \left(\sum_{\ell\geq 0}P_{k,j,\ell}(f)^{1/2}\right)^2, \tag{3.18}$$

其中

$$P_{k,j,\ell}(f) = \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})f(x)|^2\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

令 $\mathrm{i} = 0, 1, \cdots, \mathrm{i}_0 = [8\delta^{-1}] + 1$, I_i 定义为

$$I_i = [2^{k-1} + i2^{k-1}\delta, 2^{k-1} + (i+1)2^{k-1}\delta].$$

我们将 $[2^{k-1}, 2^{k+2}]$ 分解为一些区间 $\{\mathrm{I}_i\}$，其中 $[2^{k-1}, 2^{k+2}] \subseteq \mathrm{S}_{i_0\ i=0}\ \mathrm{I}_i$。我们看到，$\mathrm{I}_i$ 的 dt/t 测度小于 δ。我们还定义了一个与 I_i 相关联的函数 ζ_i：

$$\zeta_i(s) = \zeta\left(i + \frac{2^{k-1} - s}{2^{k-1}\delta}\right),$$

其中 $\zeta \in C_c^\infty([-1,1])$，且 $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \zeta(\cdot - i) = 1$。由于 $\psi_{\delta,\ell}(t^{-1}s)\zeta_{i'}(s) = 0$ 对每个 $t \in I_i$ 都成立（若 $i' \notin [i - 2^{\ell+6},\ i + 2^{\ell+6}]$），因此对任意 $t \in I_i$,

$$|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})f|^2 = \Big|\sum_{i'=i-2^{\ell+6}}^{i+2^{\ell+6}} (\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\Big|^2$$

$$\le C2^{\ell}\sum_{i'=i-2^{\ell+6}}^{i+2^{\ell+6}} \Big|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\Big|^2. \tag{3.19}$$

Then

$$P_{k,j,\ell}(f) \le C2^{\ell}\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{i'=i-2^{\ell+6}}^{i+2^{\ell+6}} \int_{I_i}\int_{\mathbb{R}^n} |(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})\zeta_{i'}(\sqrt{H})f(x)|^2 dx\frac{dt}{t}. \tag{3.20}$$

由估计式（3.4）及 $\operatorname{supp}\psi_{\delta,\ell} \subseteq [1-2^{\ell+2}\delta, 1-2^{\ell}\delta]\cup[1+2^{\ell}\delta, 1+2^{\ell+2}\delta]$，函数 $\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell}$ 满足

$$\|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C2^{(j_0-j)N}2^{-\ell N} \quad \text{for } \ell \ge 0,\ j \ge j_0, \tag{3.21}$$

结合谱乘子的 L^2 有界性，可得

$$\|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\le C_N 2^{-\ell N}2^{(j_0-j)N}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.22}$$

将估计式（3.22）代入估计式（3.20），并利用闵可夫斯基不等式，可得

$$P_{k,j,\ell}(f) \le C_N 2^{-(2N-1)\ell}2^{2(j_0-j)N}\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{i'=i-2^{\ell+6}}^{i+2^{\ell+6}}\int_{I_i}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\frac{dt}{t}$$

$$= C_N 2^{-(2N-1)\ell}2^{2(j_0-j)N}\sum_{i'=-2^{\ell+6}}^{i_0+2^{\ell+6}}\sum_{\{i\in\mathbb{N}\cap[0,i_0],\ |i-i'|\le 2^{\ell+6}\}}\int_{I_i}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\frac{dt}{t}. \tag{3.23}$$

将 $[2^{k-2}, 2^{k+1}]$ 分解为 $\{I_i\}^{i_0}{}_{i=0}$，使得区间 I_i 的 dt/t 测度一致小于 δ，事实上，

$$\int_{2^{k-1}(1+i\delta)}^{2^{k-1}(1+(i+1)\delta)} 1\,\frac{dt}{t} = \ln\left(1+\frac{\delta}{1+i\delta}\right) \le \ln(1+\delta) \le \delta.$$

由此可得

$$\sum_{\{i\in\mathbb{N}\cap[0,i_0],\ |i-i'|\le 2^{\ell+6}\}}\int_{I_i}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\frac{dt}{t} \le \delta\sum_{\{i\in\mathbb{N}\cap[0,i_0],\ |i-i'|\le 2^{\ell+6}\}}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

$$\le C2^{\ell}\delta\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \tag{3.24}$$

结合估计式（3.23）、（3.24），并利用 Hermite 算子的 L^2-平方函数估计可得

$$P_{k,j,\ell}(f) \le C_N 2^{-(2N-2)\ell} 2^{2(j_0-j)N}\delta \sum_{i'\in\mathbb{Z}} \|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\le C_N 2^{-(2N-2)\ell} 2^{2(j_0-j)N}\delta \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.25}$$

结合估计 (3.18) 和 (3.25)，并对 l 上的各项 $P_{k,\ j,\ \ell}(f)$ 求和，得到

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})f(x)|^2 \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t} \le C_N 2^{2(j_0-j)N}\delta\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

情形 2. $0 < \alpha < n$。我们将该估计分为两种情形讨论： $2^k \ge 2\delta^{-1/2}$ 和 $1 \le 2^k < 2\delta^{-1/2}$。

若 $k \ge -\log_2 \delta^{1/2}+1$，我们用 [4,(3.38) 和 (3.39)]，并以 f 代替 $\varphi_k(\sqrt{H})\overline{f}$，从而得到

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t} \le C_N 2^{2(j_0-j)N}A_n^{\varepsilon}(\delta,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

若将 $\varphi_k(\sqrt{H})$ f in [4,(3.38) 和 (3.39)] 替换为 f，该过程仍然成立。该过程依赖于迹引理、加权 Plancherel 型估计 (2.3)，以及基于有限传播速度的局部化策略。实际上，估计 (2.3) 给出了谱乘子从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$ 的有界性。为了回到 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$，当物理空间接近 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^{j-k+2}\}$ 时，我们在积分中加入权重 $(1+|x|)^{-\alpha}$，这会在 $j > k$ 时带来因子 $2^{(j-k+1)\alpha}$。当 $2^k \ge 2\delta^{-1/2}$ 时，该因子有利；但当 $1 \le 2^k < 2\delta^{-1/2}$ 时则无济于事。为克服这一问题，我们依据引理 2.2，转而考虑算子：$R\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} |\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}f(x)|^2 dt/t$，并估计其从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$ 的有界性。

若 $0 \le k < -\log_2 \delta^{1/2}+1$，我们断言，对于任意 $0 < \varepsilon \le 1/2$，都存在常数 $C_{\varepsilon,\ N}$ 使得

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t} \le C_{\varepsilon,N}2^{2(j_0-j)N}A_n^{\varepsilon}(\delta,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

利用估计式（3.27）和引理 2.2，我们有

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t} \le C_{\varepsilon,N}2^{2(j_0-j)N}A_n^{\varepsilon}(\delta,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}|(I+H)^{-\alpha/4}f(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\le C_{\varepsilon,N}2^{2(j_0-j)N}A_n^{\varepsilon}(\delta,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x,$$

结合估计式（3.26），即可证明引理 3.2。

现在我们来验证这一断言。与估计式（3.18）的讨论类似，我们可得

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\le\left(\sum_{\ell\ge0}Q_{j,k,\ell}(f)^{1/2}\right)^2, \tag{3.28}$$

其中

$$Q_{j,k,\ell}(f)=\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

仿照估计式（3.19）和（3.20），我们得到

$$Q_{j,k,\ell}(f)\le C2^{\ell}\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{i'=i-2^{\ell+6}}^{i+2^{\ell+6}}\int_{I_i}\int_{\mathbb{R}^n}|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}\zeta_{i'}(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

函数 $\psi_{\delta,\ell}(t^{-1}s)$ 的支集包含于 $[t(1-2^{\ell+2}\delta),\ t(1+2^{\ell+2}\delta)]$。令 $R=1+[t(1+2^{\ell+2}\delta)]$。当 $n\ge2$，利用估计式（2.3），其中 $1<\alpha<n$，则有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}\zeta_{i'}(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\\ &\le R\|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}Rs)(I+|Rs|^2)^{\alpha/4}\|^2_{R^2,2}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

我们看到

$$\begin{aligned}&\|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}Rs)(I+|Rs|^2)^{\alpha/4}\|^2_{R^2,2}\\ &\le\|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}Rs)(I+|Rs|^2)^{\alpha/4}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\chi_{[tR^{-1}(1-2^{\ell+2}\delta),tR^{-1}(1+2^{\ell+2}\delta)]}\|^2_{R^2,2}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

由估计式（3.21）和 $\psi_{\delta,\ell}$ 的支集性质可知

$$\|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}Rs)(1+|Rs|^2)^{\alpha/4}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\le C_N2^{-2\ell N}2^{2(j_0-j)N}R^{\alpha}. \tag{3.31}$$

区间 $[tR^{-1}(1-2^{\ell+2}\delta),\ tR^{-1}(1+2^{\ell+2}\delta)]$ 的长度为 $8tR^{-1}2^{\ell}\delta$，因此

$$\#\Big\{i\in\mathbb{Z}:\Big[\frac{i-1}{R^2},\frac{i}{R^2}\Big]\cap\Big[tR^{-1}(1-2^{\ell+2}\delta),tR^{-1}(1+2^{\ell+2}\delta)\Big]\ne\emptyset\Big\}\le1+8Rt2^{\ell}\delta,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\Big\|\chi_{[tR^{-1}(1-2^{\ell+2}\delta),tR^{-1}(1+2^{\ell+2}\delta)]}\Big\|^2_{R^2,2}&=\frac{1}{R^2}\sum_{i=-R^2+1}^{R^2}\sup_{s\in[\frac{i-1}{R^2},\frac{i}{R^2})}\Big|\chi_{[tR^{-1}(1-2^{\ell+2}\delta),tR^{-1}(1+2^{\ell+2}\delta)]}(s)\Big|^2\\ &\le R^{-2}\min\{R^2,(1+8Rt2^{\ell}\delta)\}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

结合估计式 (3.30)-(3.32) 可得

$$(3.29)\text{ 的右端 }\le C_N2^{-2\ell N}2^{2(j_0-j)N}R^{\alpha-1}\min\{R^2,(1+Rt2^{\ell}\delta)\}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}。$$

若 $2^{\ell}\delta\le1$，注意到 $1/2\le t\approx2^k\le C\delta^{-1/2}$，不难看出 $R\approx t\approx2^k\le C\delta^{-1/2}$，

$$R^{\alpha-1}\min\{R^2,(1+Rt2^{\ell}\delta)\}\le R^{\alpha-1}(1+R^22^{\ell}\delta)\le C2^{k(\alpha-1)}(1+2^{\ell+2k}\delta)\le C2^{\ell}\delta^{(1-\alpha)/2}.$$

若 $2^\ell\delta \geq 1$，注意到 $1/2 \leq t \approx 2^k \leq C\delta^{-1/2}$，不难看出 $R \leq Ct2^\ell\delta$，那么

$$R^{\alpha-1}\min\{R^2,(1+Rt2^\ell\delta)\} \leq CR^{\alpha+1} \leq C(t2^\ell\delta)^{\alpha+1} \leq C(2^{\ell+k}\delta)^{\alpha+1} \leq 2^{(\alpha+1)\ell}\delta^{(\alpha+1)/2}.$$

因此，若 $2^k \leq C\delta^{-1/2}$,

$$R^{\alpha-1}\min\{R^2,(1+Rt2^\ell\delta)\} \leq C2^{(\alpha+1)\ell}\delta^{(1-\alpha)/2}. \tag{3.33}$$

因此，对于任意 $N > (\alpha+3)/2$

$$\text{RHS of (3.29)} \leq C_N 2^{-\ell(2N-\alpha-1)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{(1-\alpha)/2}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

结合 I_i 的 dt/t 测度一致有界于 δ这一点，利用 Fubini 定理以及 Hermite 算子的平方函数的 L^2 估计，可得

$$\begin{aligned}
Q_{j,k,\ell}(f) &\leq C_N 2^{-\ell(2N-\alpha-2)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{(1-\alpha)/2}\sum_{i=0}^{i_0}\sum_{i'=i-2^{\ell+6}}^{i+2^{\ell+6}}\int_{I_i}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\frac{dt}{t}\\
&= C_N 2^{-\ell(2N-\alpha-2)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{(1-\alpha)/2}\sum_{i'=-2^{\ell+6}}^{i_0+2^{\ell+6}}\sum_{\{i\in\mathbb{N}\cap[0,i_0],\ |i-i'|\leq 2^{\ell+6}\}}\int_{I_i}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\frac{dt}{t}\\
&\leq C_N 2^{-\ell(2N-\alpha-2)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{(1-\alpha)/2}2^\ell\delta\sum_{i'\in\mathbb{Z}}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C_N 2^{-\ell(2N-\alpha-3)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{(3-\alpha)/2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

将估计式（3.34）代入估计式（3.28），并对 l 求和，得到

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx\frac{dt}{t} \leq C_N 2^{2(j_0-j)N}\delta^{(3-\alpha)/2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.35}$$

当 $n = 1$ 时，可用与前面相同的方法证明此情形，区别在于我们在估计式（$0 < \alpha < 1$ 2.3）中使用 的情形。与对（3.32）的讨论类似，我们有

$$\left\|\chi_{[tR^{-1}(1-2^{\ell+2}\delta),tR^{-1}(1+2^{\ell+2}\delta)]}\right\|^2_{R^2,\frac{2(1+\varepsilon)}{\alpha}} \leq \left(R^{-2}\min\{R^2,(1+8Rt2^\ell\delta)\}\right)^{\frac{\alpha}{1+\varepsilon}}. \tag{3.36}$$

由情形 $n = 1$, $0 < \alpha < 1$ 的估计式（2.3）以及估计式（3.31）和（3.36），可知对任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 C_ε 和 $C_{\varepsilon,N}$，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}\zeta_{i'}(\sqrt{H})f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}dx\\
&\leq C_\varepsilon R^{\frac{\alpha}{1+\varepsilon}}\|(\phi_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}Rs)(I+|Rs|^2)^{\alpha/4}\|^2_{R^2,\frac{2(1+\varepsilon)}{\alpha}}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C_{\varepsilon,N}2^{-2\ell N}2^{2(j_0-j)N}\left(R^\varepsilon\min\{R^2,(1+Rt2^\ell\delta)\}\right)^{\frac{\alpha}{1+\varepsilon}}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

与（3.33）的讨论类似，若 $2^k \le C\delta^{-1/2}$，则有

$$R^\varepsilon \min\{R^2, (1+Rt2^\ell\delta)\} \le 2^{(2+\varepsilon)\ell}\delta^{-\varepsilon/2}. \tag{3.38}$$

将估计式（3.38）代入估计式（3.37）可得

$$\begin{aligned}\text{RHS of (3.37)} &\le C_{\varepsilon,N}2^{-\ell\left(2N-\alpha\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C_{\varepsilon,N}2^{-2\ell(N-\alpha)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{-\varepsilon}\|\zeta_{i'}(\sqrt{H})f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

与估计式（3.34）和（3.35）同理，可得

$$Q_{j,k,\ell}(f) \le C_{\varepsilon,N}2^{-\ell(2N-2\alpha-2)}2^{2(j_0-j)N}\delta^{1-\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

and

$$\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})(I+H)^{\alpha/4}f(x)|^2(1+|x|)^{-\alpha}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t} \le C_{\varepsilon,N}2^{2(j_0-j)N}\delta^{1-\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

结合估计式（3.35）即得（3.27），因此该断言成立。引理3.2 的证明至此完成。□

引理*3.3*的证明。 本引理的证明受到 [18] 的启发。为方便起见，对于从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子 T，记 $\|T\|_{p\to q}$ 为其算子范数，其中 $1 \le p, q \le \infty$ 为给定值。首先将证明 $T^{\delta}{}_{j,k}$ 是从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子。为此，我们需要估计 $\|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})\|_{1\to\infty}$

$$\begin{aligned}\|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})\|_{1\to\infty} &\le \|\phi^{1/2}_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})\|_{1\to 2}\|\phi^{1/2}_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})\|_{2\to\infty}\\ &\le \|\phi^{1/2}_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})\|^2_{2\to\infty} \le \left(\sum_{\ell\ge 0}\|(\phi^{1/2}_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})\|_{2\to\infty}\right)^2.\end{aligned}$$

根据 [10, 引理 2.2] 和估计式（3.21），可得

$$\begin{aligned}\|(\phi^{1/2}_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})\|_{2\to\infty} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|K_{(\phi^{1/2}_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})}(x,y)|^2\mathrm{d}y\right)^{1/2}\\ &\le t^{n/2}\|\phi^{1/2}_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C_N t^{n/2}2^{-\ell N/2}2^{(j_0-j)N/2}.\end{aligned}$$

将各项 $\|(\phi^{\frac{1}{2}}_{\delta,j}\psi_{\delta,\ell})(t^{-1}\sqrt{H})\|_{2\to\infty}$ 对 ℓ 求和，得到

$$\|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})\|_{1\to\infty} \le C_N t^n 2^{(j_0-j)N}.$$

最后，对于任意的 $N \in \mathbb{N}$ 和 $j \ge j_0$，

$$\|T^\delta_{j,k}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}}\|\phi_{\delta,j}(t^{-1}\sqrt{H})f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2} \le C_N 2^{kn}2^{(j_0-j)N}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.39}$$

$T^{\delta}_{j,\,k}$ 是一个次线性算子。利用插值（参见 [27, 定理 2。11] 或 [3, 第 120] 页），结合估计式（3.39）和引理 3.2，我们得到

$$\|T^{\delta}_{j,k}(f)\|_{L^r(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})} \le C_{\varepsilon,N}2^{(j_0-j)N}2^{(1-\theta)kn}A^{\varepsilon}_n(\delta,\alpha)^{\theta/2}\|f\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha(r'-1)})},$$

其中 $n = 1, 0 \le \alpha < 1$; $n \ge 2, 1 < \alpha < n$ 或 $\alpha = 0$; $1/r = \theta/2$ 且 $2 < r < \infty$. □

4. 证明定理 1.1

现在我们开始证明定理 1.1。

证明。注意，对于任意 $\lambda > 0$ 和 $\rho < \lambda$

$$\left(1-\frac{m^2}{R^2}\right)^{\lambda}_{+} = \widetilde{C}_{\lambda,\rho}R^{-2\lambda}\int_0^R (R^2-t^2)^{\lambda-\rho-1}t^{2\rho+1}\left(1-\frac{m^2}{t^2}\right)^{\rho}_{+}\mathrm{d}t.$$

对于 $\rho < \lambda - 1/2$ 和 $\rho > -1/2$，我们应用 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}|[b,S^{\lambda}_R(H)]f| &= \widetilde{C}_{\lambda,\rho}R^{-2\lambda}\Big|\int_0^R (R^2-t^2)^{\lambda-\rho-1}t^{2\rho+1}[b,S^{\rho}_t(H)]f\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\le C_{\lambda,\rho}\left(\frac{1}{R}\int_0^R |[b,S^{\rho}_t(H)]f|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

注意，对于某个 $\phi \in C^{\infty}_c([1/8, 1/2])$，有 $x^{\rho}_{+} = P_{k\in\mathbb{Z}}\,2^{-k\rho}\phi(2^k x)$。令 $\phi_k(s) = \phi(2^k(1-s^2))$、$k \ge 1$ 以及 $\phi_0(s) = P_{k\le 0}\,2^{-k\rho}\phi(2^k(1-s))$，其中 $s > 0$。于是

$$[b,S^{\rho}_t(H)]f = [b,\phi_0(t^{-2}H)]f + \sum_{k\ge 1}2^{-k\rho}[b,\phi_k(t^{-1}\sqrt{H})]f. \qquad (4.2)$$

由估计式（4.1）和等式（4.2）可得

$$\sup_{R>0}|[b,S^{\lambda}_R(H)]f| \le C_{\lambda,\rho}\left(\sup_{t>0}|[b,\phi_0(t^{-2}H)]f| + \sum_{k\ge 1}2^{-k\rho}\left(\int_0^{\infty}|[b,\phi_k(t^{-1}\sqrt{H})]f|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}\right).$$

注意，$\phi_0 \in C^{\infty}_c$的支集为 $\{s: 0 \le |s| \le 1\}$。由引理2.4，对任意 $0 \le \alpha < n$

$$\left\|\sup_{t>0}\left|[b,\phi_0(t^{-2}H)]f\right|\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}. \qquad (4.3)$$

令 $\rho = \lambda - 1/2 - \eta$，其中 $\eta > 0$。若 $\alpha = 0$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$，由命题 3.1，对任意 $0 < \upsilon \le 1/2$，存在常数 $C_{0,\,\upsilon} > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k\ge 1}2^{-k\rho}\left(\int_0^{\infty}|[b,\phi_k(t^{-1}\sqrt{H})]f|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac12}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \sum_{k\ge 1}2^{-k\rho}\left\|\left(\int_0^{\infty}|[b,\phi_k(t^{-1}\sqrt{H})]f|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac12}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C_{0,\upsilon}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\sum_{k\ge 1}2^{-k(\lambda-\eta-\upsilon)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

那么，式（4.4）的右端由 $C_{0,\,\upsilon}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R},\,(1+|x|)^{-\alpha})}$ 控制，只要 η, υ 足够小。由估计式（4.3）和（4.4），可得对任意 $n \in \mathbb{N}^+$，$\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}_R(H)]f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界。

类似地，若 $n = 1$ 且 $0 < \alpha < 1$，由命题 3.1，对任意 $0 < \upsilon \le 1/2$，存在常数 $C_{\alpha,\upsilon} > 0$ 使得

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_{k\ge 1} 2^{-k\rho} \left(\int_0^\infty |[b, \phi_k(t^{-1}\sqrt{H})]f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^2(\mathbb{R},(1+|x|)^{-\alpha})} \\ &\le C_{\alpha,\upsilon} \|b\|_{\mathrm{BMO}} \sum_{k\ge 1} 2^{-k(\lambda-\eta-\upsilon)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R},(1+|x|)^{-\alpha})}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

那么，(4.5) 的右端由 $C_{\alpha,\upsilon}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R},(1+|x|)^{-\alpha})}$ 控制，前提是 η, υ 足够小。由估计式 (4.3) 和 (4.5)，可得 $\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}_R(H)]f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}, (1+|x|)^{-\alpha})$ 上有界，其中 $0 < \alpha < 1$。

若 $n \ge 2$ 且 $1 < \alpha < n$，由命题3.1，对任意 $0 < \upsilon \le 1/2$，存在常数 $C_{\alpha,\upsilon} > 0$，使得

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_{k\ge 1} 2^{-k\rho} \left(\int_0^\infty |[b, \phi_k(t^{-1}\sqrt{H})]f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})} \\ &\le C_{\alpha,\upsilon} \|b\|_{\mathrm{BMO}} \sum_{k\ge 1} 2^{-k(\lambda-\frac{\alpha-1}{4}-\eta-\upsilon)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

那么，(4.5) 的右端由 $C_{\alpha,\upsilon}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}$ 控制，前提是 η, υ 足够小。由估计式 (4.3) 和 (4.6)，可得 $\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}R(H)]f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$ 上有界，其中 $1 < \alpha < n$ 且 $\lambda > (\alpha-1)/4$，只要 $\lambda > (\alpha-1)/4$。结合 $\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}R(H)]f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界这一结论，我们现在使用复插值方法，得到 $\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}R(H)]f|$ 在加权空间 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$ 上有界，其中 $0 < \alpha \le 1$，且 $n \ge 2$。首先，我们通过 Kolmogorov-Seliverstov-Plessner 线性化（见 [26, p.280]）处理 $\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}R(H)]f|$。事实上，我们定义 $\mathcal{K}$： $\mathbb{R}^n$ 上一个非负可测函数，且只取有限个不同的值。令 $\mathcal{R}(x) \in \mathcal{K}$。现断言

$$\sup_{\mathcal{R}(x)\in\mathcal{K}} \|[b, S^{\lambda}_{\mathcal{R}(x)}(H)]f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})} = \|\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}_R(H)]f|\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}.$$

显然，

$$|[b, S^{\lambda}_{\mathcal{R}(x)}(H)]f(x)| \le \sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}_R(H)]f(x)|.$$

反向不等式可由以下事实得出：我们总能选取一列函数 $\mathcal{R}_j(x) \in \mathcal{K}$，使得

$$\lim_{j\to+\infty} |[b, S^{\lambda}_{\mathcal{R}_j(x)}(H)]f(x)| = \sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}_R(H)]f(x)|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

根据勒贝格控制收敛定理，

$$\|\sup_{R>0}|[b, S^{\lambda}_R(H)]f|\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})} = \lim_{j\to+\infty} \|[b, S^{\lambda}_{\mathcal{R}_j(x)}(H)]f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}$$

$$\leq \sup_{\mathcal{R}(x)\in\mathcal{K}} \| [b, S^{\lambda}_{\mathcal{R}(x)}(H)]f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})}.$$

因此，次线性算子 $\sup_{R>0} |[b, S^{\lambda}_{R}(H)]f|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$ 上的有界性等价于

$$\|[b, S^{\lambda}_{\mathcal{R}(x)}(H)]f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-\alpha})},$$

其中常数 C 与 $\mathcal{R}(x)$ 无关。然后，利用复插值定理（见[27, 定理 2.11]），可推出 $[b, S^{\lambda}_{\mathcal{R}(x)}(H)]$ 在 $\lambda > 0$ 时的加权 L^2 估计。由此可得，当 $\lambda > 0$ 时，$\sup_{R>0} \|[b, S^{\lambda}_{R}(H)]\|$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$ 上有界，其中 $0 < \alpha \leq 1$。定理 1.1 的证明完毕。□

最后，我们给出推论 1.2 的证明。

证明。对于任意 $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，若 $\operatorname{supp} f \subseteq B$，其中 $B \subseteq \mathbb{R}^n$ 是某个球，则 $(b - b_B) f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，且对任意 $\lambda > 0$，$[b, S^{\lambda}_{R}(H)]f$ 都有定义。由 Bochner-Riesz 算子 $S^{\lambda}_{R}(H)$ 的几乎处处收敛性（见 [4, 定理 1.1]），我们有

$$\lim_{R\to\infty} [b, S^{\lambda}_{R}(H)]f(x) = \lim_{R\to\infty} b(x)S^{\lambda}_{R}(H)(f)(x) - S^{\lambda}_{R}(H)(bf)(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

设 $0 \leq \alpha < n$。定理 1.1 意味着，对于任意满足 $\lambda > \max\{(\alpha - 1)/4, 0\}$ 的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$，$[b, S^{\lambda}_{R}(H)]f$ 几乎处处收敛。

对于给定的 $p \geq 2$ 和 $\lambda > \lambda(p)/2$，我们可以选取 α 使得 $n(1-2/p) < \alpha < 4\lambda+1$ 且 $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-\alpha})$。因此，对于所有 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$[b, S^{\lambda}_{R}(H)]f$ 几乎处处收敛。□

致谢：作者感谢 L. Yan 提供的宝贵意见和建议。P. Chen 和 X. Lin 得到了国家重点研发计划 2022年YFA1005702 的资助。P. Chen 得到了中国国家自然科学基金 12171489、广东省自然科学基金 2022年A1515011157 的资助。

参考文献

[1] J. Alvarez, R.J. Bagby, D.S. Kurtz 和 C. P´erez, 《线性算子交换子的加权估计》。Studia Math. 104 (1993), no. 2, 195–209. 3[2] T.A. Bui, 《无高斯估计的谱乘子的加权范数不等式》。Tokyo J. Math. 37 (2014), no. 2, 373–384. 7[3] J. Bergh 和 J. L¨ofstr¨om, 《插值空间：导论》。施普林格出版社，纽约，1976年。MR 58: 2349. 19[4] P. Chen, X.T. Duong, D. He, S. Lee 和 L.X. Yan, 《Hermite 算子 Bochner-Riesz 平均的几乎处处收敛》。《数学进展》(2021), Paper No.108042, 42 pp. 2, 4, 5, 7, 8, 15, 21

[5] P. Chen, S. Lee, A. Sikora 和 L.X. Yan, 《椭圆算子极大 Bochner-Riesz 平均的界》。《美国数学会会刊》373 (2020年), no. 6, 3793–3828. 2[6] P. Chen, X. Lin 和 L.X. Yan, 《Hermite 算子的 Bochner-Riesz 算子的交换子》。arXiv:2207.11631. 3[7] P. Chen, E.M. Ouhabaz, A. Sikora 和 L.X. Yan, 《Bochner-Riesz 平均的限制估计、锐利谱乘子与端点估计》。《数学分析杂志》129 (2016年), 219–283. 4[8] R.R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, 《补偿紧性与 Hardy 空间》。《纯粹与应用数学杂志》 (9) 72 (1993年), no. 3, 247–286. 2[9] R.R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, 《多变量 Hardy 空间的因子分解定理》。《数学年刊》 (2) 103 (1976年), no. 3, 611–635. 2[10] X.T. Duong, E.M. Ouhabaz 和 A. Sikora, 《Plancherel 型估计与锐利谱乘子》。《泛函分析杂志》196 (2002年), 443–485. 18[11] X.T. Duong, A. Sikora 和 L.X. Yan, 《加权范数不等式、高斯界与锐利谱乘子》。《泛函分析杂志》260 (2011年), no. 4, 1106–1131. 7[12] S.H. Ferguson 和 M.T. Lacey, 《以交换子刻画乘积 BMO》。《数学学报》189 (2002年), no. 2, 143–160. 2[13] J. Garcia-Cuerva, E. Harboure, C. Segovia和 J.L. Torre, 《强奇异积分交换子的加权范数不等式》。《印第安纳大学数学杂志》40 (1991年), 1397–1420. 5[14] I. Holmes, M.T. Lacey, B.D. Wick, 《双权框架下的交换子》。《数学年刊》367 (2017年), no. 1-2, 51–80. 2[15] T.P. Hyt¨onen, 《交换子的 L^p-到-L^q 有界性及其在雅可比算子中的应用》。《纯粹与应用数学杂志》 (9) 156 (2021年), 351–391. 2[16] G.E. Hu 和 S.Z. Lu, 《Bochner-Riesz 算子的交换子》。《东北数学杂志》48 (1996年), no. 2, 259–266. 3[17] G.E. Hu 和 S.Z. Lu, 《与 Bochner-Riesz 算子相关的极大算子》。《北京数学》2:1 (1996年), no. 2, 96–106. 3[18] G.E. Hu 和 S.Z. Lu, 《Bochner-Riesz 算子交换子的加权 L^2 估计》。《美国数学会会刊》125 (1997年), 2867–2873. 3, 5, 18[19] G.E. Karadzhov, 《L^p 空间中多重 Hermite 级数的 Riesz 可和性》。《保加利亚科学院通讯》47 (1994年), no. 2, 5–8. 2[20] M.T. Lacey, S. Petermichl, J.C. Pipher, B.D. Wick, 《多参数 Riesz 交换子》。《美国数学杂志》131 (2009年), no. 3, 731–769. 2[21] M.T. Lacey, S. Petermichl, J.C. Pipher, B.D. Wick, 《多参数 Div-Curl 引理》。《伦敦数学会通报》44 (2012年), no. 6, 1123–1131. 2[22] S. Lee 和 J. Ryu, 《Hermite 与特殊 Hermite 展开的 Bochner-Riesz 平均》。《数学进展》400 (2022年), Paper No. 108260, 52 pp. 2

[23] F. Nazarov、G. Pisier、S. Treil、A. Volberg，向量 Carleson 嵌入定理及向量副乘积的尖锐估计。《纯粹与应用数学杂志》542（2002年），147–171。3[24] E.M. Ouhabaz，《区域上的热方程分析》，伦敦数学学会专著丛书，第 31 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2005年。6[25] A. Sikora，Riesz 变换、高斯界与波动方程方法。《数学杂志》247（2004年），第3期，643–662。4[26] E.M. Stein 和 G. Weiss，《欧几里得空间上的傅里叶分析导论》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1971年。20[27] E.M. Stein 和 G. Weiss，测度改变下的算子插值。《美国数学会会刊》87（1958年），159–172。19, 21[28] S. Thangavelu，Hermite 展开的可和性 I。《美国数学会会刊》314（1989年），第1期，119–142。2[29] S. Thangavelu，Hermite 展开的可和性 II。《美国数学会会刊》314（1989年），第1期，143–170。2[30] S. Thangavelu，重新探讨 Hermite 展开与特殊 Hermite 展开。《杜克数学杂志》94（1998年），第2期，257–278。2[31] A. Uchiyama，关于 Hankel 型算子的紧性。《东北数学杂志》（第2辑）30（1）（1978年），163–171。2[32] A. Uchiyama，齐次型空间上 H^p 的因子分解。《太平洋数学杂志》92（2）（1981年），453–468。2 Peng Chen，中山大学数学系，广州，510275，中国电子邮件地址：chenpeng3@mail.sysu.edu.cn

XIXI LIN，中山大学数学系，中国广州 510275。电子邮箱：
linxx58@mail2.sysu.edu.cn