《地球物理与天体物理流体动力学》第00卷，
第00期，20xx年00月，1–29

arXiv:2303.05212v1 [physics.flu-dyn] 9 Mar 2023

Zon磁流体力学 Kolmogorov 流中的地转不稳定性 w

Azza M. Algatheem*，Andrew D. Gilbert 和 Andrew S. Hillier 埃克塞特大学数学与统计学系，英国埃克塞特 EX4 4QF

(*March 10, 2023*年)

本文研究无限（x，y）平面中柯尔莫哥洛夫流 $\boldsymbol{u}=(0,\sin x)$ 的经典稳定性问题。引入强度为 B_0 的平均磁场，并针对沿 y 方向波数为 k 的模态研究磁流体力学线性稳定性问题，有时还考虑沿 x 方向布洛赫波数为 ℓ 的情况。该问题的关键参数为雷诺数 ν^{-1}、磁普朗特数 P，以及对应于磁马赫数倒数的无量纲磁场强度 B_0。在最一般的表述中，平均磁场的方向也可任意取向于（x，y）平面，并可加入沿平均x方向的流场 U_0。

本文首先考察具有沿 y 方向平均磁场的柯尔莫哥洛夫流，为方便起见称其为“垂直”磁场。取 $\ell=0$ 时，随着磁场强度 B_0 增大，经典流体动力学不稳定性受到抑制。当磁普朗特数 P 小于 1 时，会出现一支强磁场不稳定性；A.E. Fraser、I.G. Cresser 和 P. Garaud 最近发现了这一现象（*J. Fluid Mech.* **949**，A43，2022年）。基于特征值微扰理论、在极限 $k\to 0$ 下得到的解析结果支持弱磁场和强磁场不稳定性的数值结果，并揭示了它们的起源：大尺度弱阻尼模态与具有 x 波数 $n=0$ 的模态耦合，后者对应更小尺度，且具有 $n=\pm 1$。

本文随后考察“水平”或沿 x方向的平均磁场情形。此时，未扰动状态由稳态的波状磁力线构成，这些磁力线受底层柯尔莫哥洛夫流扭曲；驱动体力则与黏度和洛伦兹力共同保持平衡。随着磁场从零逐渐增强，纯流体动力学不稳定性再次受到抑制；但磁场更强时，会出现新的不稳定性分支。允许布洛赫波数 ℓ 非零可引发更多不稳定性；在某些情况下，当系统在流体动力学上稳定时，任意弱的磁场也能通过大尺度 x 和 y上的不稳定性产生增长模态。本文结合特征值微扰理论，给出了极限 k，$\ell\to 0$ 下的数值结果。该理论为增长率和阈值提供了解析近似，且与计算结果吻合良好。

1. 引言

柯尔莫哥洛夫流是一种由单一波数驱动的周期性流场。由于其形式简单，且广泛应用于研究各种地球物理和天体物理系统，因此它是经典的研究对象。其对线性扰动的稳定性是一个经典问题，最早由 Kolmogorov 提出，并由 Meshalkin 和 Sinai（1961）研究。这些作者利用连分数展开，确定了增长率 $p(k)$的性质，其中 k 是 y方向上的波数，并得出了临界雷诺数 $\mathrm{Re}_c=\sqrt{2}$。接近不稳定性的起始时，

*通讯作者。电子邮箱：aa965@exeter.ac.uk

当 Re 略大于 $\sqrt{2}$时，失稳的是 y 中的大尺度模态；更准确地说，对于 Re $=\sqrt{2}(1+3k^2+\cdots)$，最不稳定模态的波数为 $k \ll 1$。这一性质使得人们能够建立振幅方程，以描述流场在较大的空间和时间尺度上的演化；相关方程由 Nepomniashchii（1976）和 Sivashinsky（1985）推导得出。She（1987）的数值模拟表明，对于仅在 y方向上允许存在的大尺度，流场会通过涡旋配对的逆级联，从最不稳定尺度演化到更大的尺度。对于同时在 x和 y方向上具有大尺度的情形，Sivashinsky（1985）发现流场会演化为具有混沌时间波动的大尺度流；Lucas 和 Kerswell（2014，2015）对此作了进一步研究。

Kolmogorov提出的稳定性问题是稳定性理论中如此基础的构成模块，因此已有多项研究将更多物理现象纳入其中，对其进行了拓展。Frisch 等人(1996)引入了一个 β效应，用以表示背景行星涡量分布的梯度；该梯度沿 x 方向（这里仍遵循我们的约定，而非原论文的约定），因此不会与横向的基本态Kolmogorov流 $\boldsymbol{u}_0$直接相互作用。这些作者推导了临近起始点时， y中大尺度的振幅方程，并将其称为 β–Cahn–Hilliard方程。对于 $\beta=0$，该方程可简化为Sivashinsky（1985年）的偏微分方程；模拟结果显示，结构向 y 大尺度的逆级联会被 β效应阻止。这些作者将Kolmogorov流的基本不稳定性归因于负涡黏度。换言之，大尺度的 y相关模态具有增长率 $p=-\nu_E k^2+\cdots$，其中涡黏度 ν_E 在阈值$\mathrm{Re}_c=\sqrt{2}$以下为正、以上则变为负，从而使流场在大尺度上失稳；增长最快的模态则由该级数中的后续项决定（Dubrulle 和 Frisch，1991年）。

从这些稳定性问题的地球物理学动机来看，背景涡度梯度相对于 Kolmogorov 流场的任意取向（由 β 参数化）都值得研究。Manfroi 和 Young（2002年）在研究线性稳定性与非线性演化时，允许流场与梯度之间的夹角 α 任意变化，并采用了推广 Sivashinsky（1985年）和 Frisch 等人（1996年）所提出振幅方程的方程组。他们发现，当允许不稳定模态在 x 和 y 中取任意大的尺度时，线性问题中的临界雷诺数对角度 α 的依赖十分微妙。另一个可能纳入考量、且具有地球物理意义的效应是层结。Balmforth 和 Young（2002年）研究了 (x, z) 平面内的正弦流场，其中重力沿 $-z$ 方向，流场沿 x 方向，且沿 z 呈正弦变化。这些作者确定了线性不稳定性的行为如何随雷诺数、理查森数和普朗特数变化，并推导出推广 Sivashinsky（1985年）所提出振幅方程的一个振幅方程。模拟表明，在很大范围的参数条件下，层结的存在会抑制 She（1987年）所述的逆级联。

与本文相关的是，在天体物理应用中，引入磁场并研究耦合的磁流体动力学系统是很自然的；作为一般性动机，我们注意到，例如，在太阳 tachocline 中，磁场、剪切与对流之间的相互作用仍缺乏深入理解（Hughes 等2007）。Boffetta 等（2000）研究了这样一种情形：正弦磁场（由感应方程中的源项维持）存在于静止流体中。该磁性柯尔莫哥洛夫系统会出现不稳定性，振幅方程则给出了向大尺度的逆级联。Fraser 等近期的论文（2022）研究了一个与柯尔莫哥洛夫流对齐的均匀背景磁场 $\boldsymbol{B}_0=(0,\ B_0)$；它不影响基本态流动，但磁力线弹性会通过洛伦兹力影响扰动，具体取决于 y。这些作者观察到，正如直觉所料，磁场会抑制 Meshalkin 和 Sinai（1961）最先讨论的不稳定性；但他们还发现了两类新的不稳定模态，它们仅在存在磁场时才会出现

。其中一类在磁普朗特数为 $P < 1$ 时存在；只要雷诺数高于一个取决于 P 的阈值，即使磁场强度任意大，该类模态也会存在。研究者通过数值方法对其进行了研究，并利用 $k \ll 1$ 的渐近近似求得增长率；这些作者将这些模态称为 Alfv´én Dubrulle–Frisch 模态，因为这种不稳定性可与涡黏度符号的改变联系起来（Dubrulle 和 Frisch 1991）。

柯尔莫哥洛夫流不稳定性的研究与受迫流体系统中纬向流的形成有关，这种现象称为“带状流不稳定性”（Galperin 等 2006年）。如今，许多模拟、观测和实验都已发现这一急流形成过程；代表性研究见 Vallis 和 Maltrud（1993年）、Read等 （2007年）、Farrell 和 Ioannou（2008年）、Scott 和 Dritschel（2012年）、Srinivasan 和 Young（2012年）、Bouchet 等 （2013年）以及 Parker 和 Krommes（2014年）。与我们的工作相关的是，Tobias 等（2007年）在存在 β效应的平面流体系统中，引入了沿 x方向的磁场；其中存在涡度梯度 y。该系统由具有给定特征空间尺度的体力驱动。这些作者观察到，在磁场为零时，x方向上会形成急流；但即使磁场强度 B_0相当弱，急流也会受到抑制。对于固定的无量纲 β、强迫和黏度 $\nu = 10^{-4}$，他们通过一系列改变磁场强度 B_0 和磁扩散率 η的数值模拟研究了这一过程，并发现了 $B_0^2 \sim \eta$ 的阈值标度律证据（Tobias 等 2011年）。Constantinou 和 Parker（2018年）分析了罗斯贝波/阿尔芬波的 Kelvin–Orr 剪切波动力学，以及雷诺应力与麦克斯韦应力之间的相互作用，为这一急流形成阈值 $B_0^2 \sim \eta$ 提供了证据。Durston 和 Gilbert（2016年）着重研究了存在波动时大尺度纬向流与纬向磁场之间的耦合，计算了有效黏度、有效磁扩散率，以及电流梯度能够驱动纬向涡度的有效交叉输运项；这一输运效应及其他输运效应也见 Chechkin（1999年）、Kim（2007年）和 Leprovost 与 Kim（2009年）的讨论。Parker 和 Constantinou（2019年）将急流的出现与否解释为正的磁涡黏度项和负的纯流体动力学涡黏度之间相互竞争的结果。需要指出的是，尽管这些关于带状流不稳定性的研究在定性特征上与柯尔莫哥洛夫流不稳定性有许多共同之处，但两者存在关键差异，因此难以直接比较，甚至难以比较标度律。原因在于，本段提到的研究采用具有给定空间尺度、但随时间随机变化的强迫，并在改变黏度、磁扩散率、磁场或 β 等其他参数时保持强迫不变。就无量纲参数而言，这些系统的输入参数是格拉晓夫数（由强迫强度、长度尺度和黏度构成）（Durston 和 Gilbert，2016年）；雷诺数则是诊断参数，在不同状态下可能有很大变化，具体取决于纳维–斯托克斯方程中强迫项、惯性项、黏性项和洛伦兹力之间的主导平衡。然而，在研究柯尔莫哥洛夫流的稳定性时，基本态保持不变，同时调整强迫以维持该状态：因此，输入参数改为雷诺数。

本文回到经典的稳态平面柯尔莫哥洛夫流设置$\boldsymbol{u}_0 = (0,\ \sin x)$，并考察 x和 y方向上的磁场对其稳定性的影响。为方便起见，我们将与流场平行、沿 y方向的磁场称为“垂直磁场”，将与可能形成急流的方向一致、沿 x方向的磁场称为“水平磁场”（尽管我们的研究不涉及重力或层结）。在§2中，我们建立求解垂直磁场下线性扰动的方程；在第3节中，我们给出数值与解析结果，展示增长率、阈值和不稳定模态结构。本节与Fraser等人近期发表的论文（2022年，本论文准备期间发表）有一些共同内容；不过，我们认为列出数值结果有助于与随后讨论的水平磁场情形进行比较，并且还给出了新的

解析结果。§3.1讨论“弱垂直磁场分支”。Fraser等人（2022年）重点研究了§3.2中的“强垂直磁场分支”，我们则给出了另一种基于矩阵的推导，得到他们所求的渐近增长率。第4节建立水平磁场下的方程，并在§5中给出的极限 $k \to 0$ 下，通过解析近似支持数值结果；同时还讨论非零布洛赫波数 ℓ的情形。§6则给出总结性讨论。更多解析与数值结果将见于Algatheem（2023）。为使论文正文保持简洁，我们将解析理论放在附录中展开，并按复杂程度递增的顺序组织，而非按照结果的使用顺序。所用方法是针对矩阵特征值和特征向量的微扰理论；这自然等价于其他作者采用的方法，但我们发现，该方法能够系统地处理日益复杂的问题，并有助于理解流场模态与磁场模态之间的耦合如何引发不稳定性。

2. 控制方程：垂直磁场

我们的出发点是不可压缩、恒定密度磁流体力学的方程组，其形式如下：

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{b} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{2.1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \eta\nabla^2\boldsymbol{b}, \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{b} = 0, \quad \boldsymbol{j} = \nabla\times\boldsymbol{b}. \tag{2.3}$$

这里，磁场以速度单位表示，而 $\boldsymbol{f}$ 是外加的旋转体力，用于维持系统的给定基本态。用有量纲单位表示时，该基本态为柯尔莫哥洛夫流，即在（x，y）平面内沿单一方向的流场，定义为：

$$\boldsymbol{u}_0 = \mathcal{U}(0, \sin(x/\mathcal{L})). \tag{2.4}$$

我们以长度 $\mathcal{L}$ 和速度 $\mathcal{U}$ 为基准进行无量纲化，得到与上述方程（2.1–2.3）相同的方程，但此时 ν 被定义为雷诺数的倒数，其中 $\mathrm{Re} = \nu^{-1}$；η 则为磁雷诺数的倒数，其中 $\mathrm{Rm} = \eta^{-1}$。无量纲柯尔莫哥洛夫流于是为：

$$\boldsymbol{u}_0 = (0, \sin x). \tag{2.5}$$

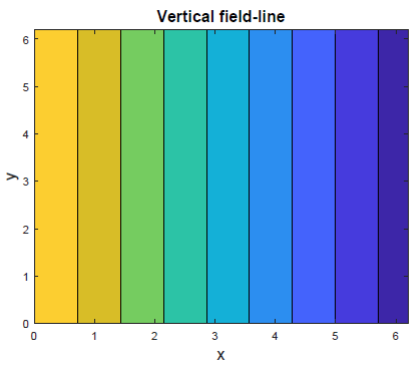
注意，在可能的情况下，我们省略向量的 z 分量。我们需要的一个关键量是磁普朗特数

$$P = \mathrm{Rm}/\mathrm{Re} = \nu/\eta. \tag{2.6}$$

我们将考虑位于 $(x,\ y)$ 平面内且与 z 无关的流场 $\boldsymbol{u}$ 和磁场 $\boldsymbol{b}$。为此，我们使用流函数 ψ 和矢势 a，定义如下：

$$\boldsymbol{u} = (\psi_y, -\psi_x), \quad \boldsymbol{b} = (a_y, -a_x). \tag{2.7}$$

控制方程随后可写成一个标量涡量的演化形式



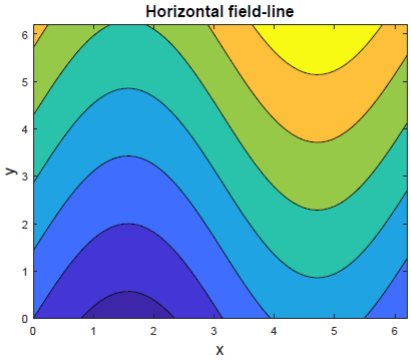


图1. (a) 垂直磁场（见§§2、3）和 (b) 水平磁场（见§§4、5）对应的磁场基本态，其中 $B_0 = 0.7$, $\eta = 0.5$ a_0 $\boldsymbol{b}_0 = \begin{matrix} \partial_y a_0 & -\partial_x a_0 \end{matrix}$ 。在每种情况下，磁力线均以相应矢势的等值线表示，(.)。

ω，以及 a:

$$\partial_t \omega + \mathscr{J}(\omega, \psi) = \mathscr{J}(j, a) + \nu \nabla^2 \omega + g, \tag{2.8}$$

$$\partial_t a + \mathscr{J}(a, \psi) = \eta \nabla^2 a, \tag{2.9}$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi, \quad j = -\nabla^2 a. \tag{2.10}$$

这里， $\mathscr{J}$ 是平面上两个函数的雅可比行列式， g 是体力 $\boldsymbol{f}$的旋度的 z分量。

我们首先研究存在强度为 B_0 的垂直磁场（即沿 y方向的磁场）时柯尔莫哥洛夫流的稳定性（Fraser 等，2022年）。为了采用尽可能一般的设置，我们还加入了强度为 U_0的均匀水平流（即沿 x方向的流场）。因此，我们将方程的以下稳态解作为基本态，

$$\boldsymbol{u}_0 = (U_0, \sin x), \quad \boldsymbol{b}_0 = (0, B_0), \quad \boldsymbol{f} = (0, \nu \sin x + U_0 \cos x), \tag{2.11}$$

或者在我们基于标量的表述中

$$\psi_0 = U_0 y + \cos x, \quad \omega_0 = \cos x, \quad a_0 = -B_0 x, \quad j_0 = 0, \quad g = \nu \cos x - U_0 \sin x. \tag{2.12}$$

基本态磁场如图1(a)所示。稳定性问题由四个量 $\{\nu, B_0, P, U_0\}$ 参数化。注意，尽管参数 U_0 所指定的平均水平流可以通过伽利略变换消去，但这样一来，柯尔莫哥洛夫流就会变成行波。因此，鉴于我们始终采用式（2.5）中的定常柯尔莫哥洛夫流， U_0 的影响无法通过这种方式消除。

为研究这一基本态的稳定性，我们进行线性化，将

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \cdots, \quad \omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots, \quad a = a_0 + a_1 + \cdots, \quad j = j_0 + j_1 + \cdots, \tag{2.13}$$

并省略下标 1，我们得到线性系统

$$\partial_t \omega + U_0\, \omega_x + \sin x\, (\omega_y - \psi_y) = B_0\, j_y + \nu \nabla^2 \omega, \tag{2.14}$$

$$\partial_t a + U_0\, a_x + \sin x\, a_y = B_0\, \psi_y + \eta \nabla^2 a, \tag{2.15}$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi, \quad j = -\nabla^2 a. \tag{2.16}$$

现在，我们将场展开为 x 中的傅里叶模态：

$$(\psi, \omega, a, j) = e^{pt+i\ell x+iky} \sum_n (F_n, G_n, H_n, J_n)\, e^{inx} + \text{c.c.} \tag{2.17}$$

这里， p 是该模态的复增长率， k 是在 y方向上的波数，$k > 0$ 不失一般性地，且 ℓ 是在 x 方向上的布洛赫或弗洛凯波数，满足 $-1/2 < \ell \le 1/2$。

将这些级数代入线性方程（2.14–2.16）可得到一个无限方程组。对于 $\ell = 0$，它们可写成以下形式：

$$\begin{aligned} pG_n = &-[\nu(n^2+k^2) + inU_0]G_n + \frac{k}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2+k^2} - 1\right) G_{n-1} \\ &- \frac{k}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2+k^2} - 1\right) G_{n+1} + ikB_0(n^2+k^2)H_n, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$pH_n = -[\eta(n^2+k^2) + inU_0]H_n - \frac{k}{2} H_{n-1} + \frac{k}{2} H_{n+1} + \frac{ikB_0}{n^2+k^2} G_n, \tag{2.19}$$

对于 $\ell \neq 0$，我们只需将其出现处的 $n \to n + \ell$ 替换掉（下标中的除外）。这将得到一个特征值问题，其特征值构成离散集合，通常依赖于$p(k,\ \ell,\ \nu,\ B_0,\ P,\ U_0)$；而在替换$(k,\ \ell) \to (-k,\ -\ell)$后，增长率的实部保持不变。

为获得数值解，我们将 $-N \le n \le N$ 限制为某个整数 N （典型值为 16、32），并求解一个写成五对角形式的离散矩阵问题

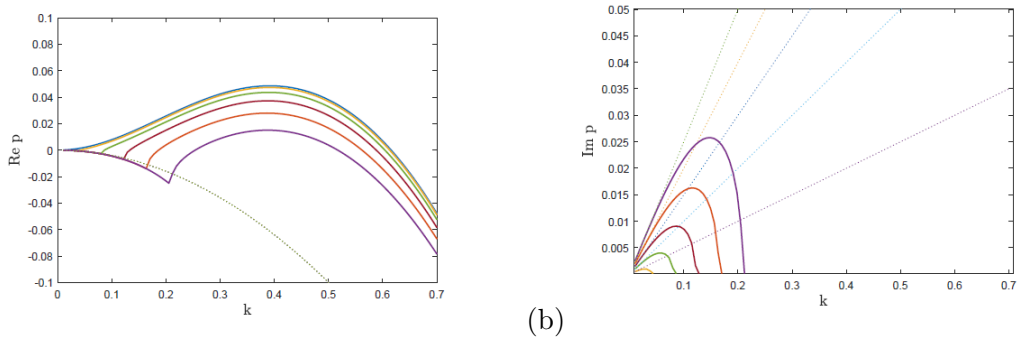
$$p \begin{pmatrix} \vdots \\ G_n \\ H_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \\ \hline \ddots & \otimes & 0 & \otimes & \otimes & \otimes & 0 & \otimes & \ddots \\ \ddots & 0 & \otimes & \otimes & \otimes & 0 & \otimes & \otimes & \ddots \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \end{array}\right) \begin{pmatrix} \vdots \\ G_n \\ H_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

其中， $\otimes$ 表示唯一的非零元素。在指定截断值 N 下，在 MATLAB 中构建 $(4N+2)\times(4N+2)$ 矩阵，并计算实部最大的特征值 p。对于给定的参数集 $\{\nu, B_0, P, U_0\}$，最大实增长率定义为

$$\operatorname{Re} p_{\max}(\nu, B_0, P, U_0) = \max_{k,\ell} \operatorname{Re} p(k, \ell, \nu, B_0, P, U_0), \tag{2.21}$$

其中，最大值是在 k 和 ℓ 值构成的网格上取的。

接下来，我们首先取 $U_0 = 0, \ell = 0$，仅改变垂直波数k。然后在有限范围的 k 值上进行最大化，通常是在范围 $0 \le k \le 1$内取 100 个值；任何复特征值都会成共轭复数对出现。我们将相应的最大化波数记为$k_{\max}(\nu,\ B_0,\ P)$，并附上适当的（零或正）虚部，得到 $p_{\max}(\nu,\ B_0,\ P)$，作为（最大）复数不稳定性增长率。此时，绘制 $\operatorname{Re} p_{\max}$、$\operatorname{Im} p_{\max}$ 和 $k_{\max}$通常很有启发性。



(a) (b)

图 2. 垂直磁场下的不稳定性增长率 p 随波数 k 的变化（其中 U_0、 $\ell = 0$），对应于 $\nu = \eta = 0.4$（$P = 1$），以及 $B_0 = 0$（蓝色）、 $B_0 = 0.05$（橙色）、 $B_0 = 0.10$（绿色）、 $B_0 = 0.15$（深红色）、 $B_0 = 0.20$（红色）和 $B_0 = 0.25$（紫色）。面板 (a) 和 (b) 分别显示 Re p 和 Im p，点线表示式 (3.22) 中的阿尔芬波分支。

3. 数值与解析结果：垂直磁场

我们使用上文所述的数值代码计算特征值，以便探究它们对参数的依赖关系。我们首先研究增大垂直磁场强度 B_0 对经典柯尔莫哥洛夫流体动力学不稳定性的影响。

3.1. 弱垂直磁场分支

图 2(a) 显示了 p（k， ν， B_0， P）对应的增长率实部，对于 $\nu = \eta = 0.4$，因此 $P = 1$，并以 k 为横轴绘制，磁场强度 B_0 取给定值。这里， B_0 从零开始，每次递增 0.05；沿着曲线族向下看即可观察到这一变化。最上方的曲线对应纯流体力学情形。随着 B_0 增大，我们注意到两种效应：首先，峰值降低，换言之，磁场会抑制不稳定性，这与 Fraser 等人（2022年）的发现一致。其次，在大尺度（即 k 较小）时，会出现一个新的衰减模态分支，其增长率在很大程度上不受磁场强度影响。图 2(b) 显示了增长率 p 的虚部。对于纯流体力学情形，该虚部为零；在这一分支中，它仍保持为零，因为该分支受到磁场抑制。低 k 时出现的新分支具有非零虚部；随着 B_0 增大并沿曲线向上看，该虚部变得更加显著。进一步研究表明，这个新分支实际上是垂直磁场上的阻尼阿尔芬波。当背景流为零时 $\boldsymbol{u}_0$，垂直磁场支持阿尔芬波，其

$$p = \pm ik\sqrt{B_0^2 - \tfrac{1}{4}(\nu-\eta)^2k^2} - \tfrac{1}{2}(\nu+\eta)k^2, \tag{3.22}$$

实部和虚部以点线形式显示在图 2 中。由于背景柯尔莫哥洛夫流会改变 Alfv´en 波，两者并不完全吻合，但这显然就是这些弱阻尼模态的来源。

图3展示了一个典型的不稳定模态，其参数值对应于图 2(a)中最下面一条曲线的峰值，也就是所用的最强磁场。我们观察到图(a)中的扰动流函数 ψ 呈现出清晰的纬向喷流，图(b)中则显示了相应的磁矢势变化；Fraser 等人（2022年）将其称为弯曲型开尔文–亥姆霍兹模态。由于我们观察到的这些不稳定性是从流体力学问题中随着 ψ 从较小值增加而得到的，

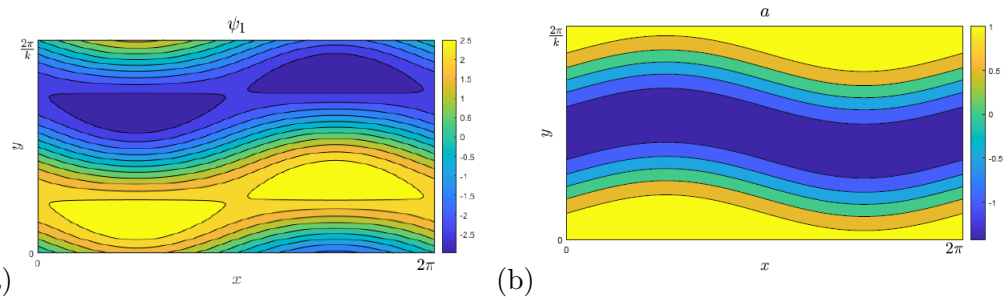


图3。典型不稳定模态的结构，其中 $B_0 = 0.25$, $\nu = \eta = 0.4$, $k = 0.4$；(a) 显示流函数 ψ和 (b) 矢势 a。

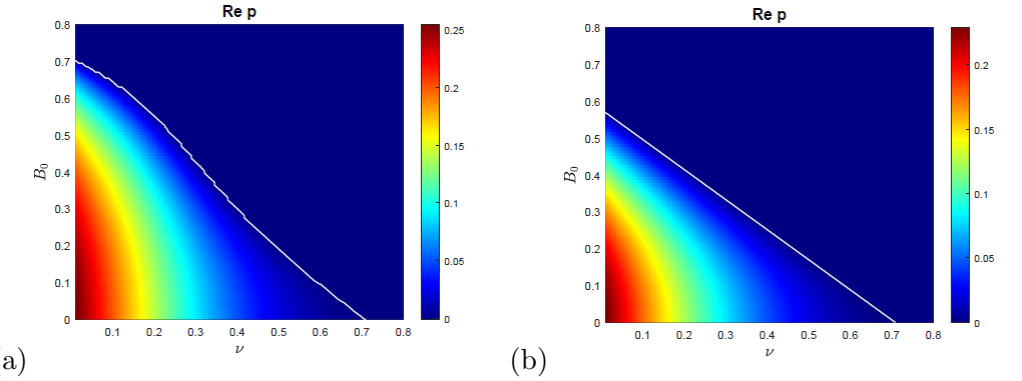


图4。垂直磁场下的不稳定性增长率 $\mathrm{Re}\, p_{\max}$ 在（ν, B_0）平面上的分布，其中 $P = 1$, $\ell = 0$, $U_0 = 0$。图(a)显示增长率的数值计算结果，不稳定性阈值 $\mathrm{Re}\, p_{\max} = 0$ 以白色曲线表示；图(b)显示由（3.24）得到的解析最大增长率，以及由（3.25）得到的阈值。

我们将其称为弱垂直磁场分支，以区别于稍后遇到的强磁场分支。

通过绘制 $p(k, \nu, B_0, P)$，我们已经看到了磁场如何抑制流体动力学不稳定性的一个具体例子。现在，我们展示对每组参数都在 k 上取最大值后的结果。图4(a)以彩色图形式展示了（ν, B_0）平面上 $\mathrm{Re}\, p_{\max}(\nu, B_0, P)$ 的数值结果，其中 $P = 1$。白色曲线表示不稳定性阈值（实际上设定为 $\mathrm{Re}\, p_{\max}$ 取一个较小的正值）。水平轴 $B_0 = 0$ 对应流体力学情形，此时白色曲线与其交于 $\nu_c = 1/\sqrt{2}$。不稳定性出现在白色曲线下方的区域。我们可以看到，随着 B_0 增大，不稳定性受到抑制，直至 $B_0 \simeq 0.7$，此时不稳定性被完全消除。我们未展示 $\mathrm{Im}\, p_{\max}$，因为它在不稳定区域内为零。

我们可以运用微扰理论（例如，Frisch 等人 1996年、Manfroi 和 Young（2002）），计算适用于 $k \to 0$ 的近似增长率。详情见附录 C。其中一个关键结果是公式（C.19），

$$p(k, \nu, B_0, P) = -\frac{\sqrt{2}\, P}{1 + P^2} B_0^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \nu\right) k^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} k^4 + \cdots, \tag{3.23}$$

给出增长率，并清楚地表明磁场的作用是抑制流体动力学 $B_0 = 0$不稳定性（如图 2(a)所示）。对于不稳定模态，必须满足 $\nu < 1/\sqrt{2}$；在这种情况下，对 k 的取值进行最大化，可得

$$p_{\max}(\nu, B_0, P) = -\frac{\sqrt{2}\, P}{1 + P^2} B_0^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \nu\right)^2, \quad k_{\max}^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \nu\right). \tag{3.24}$$

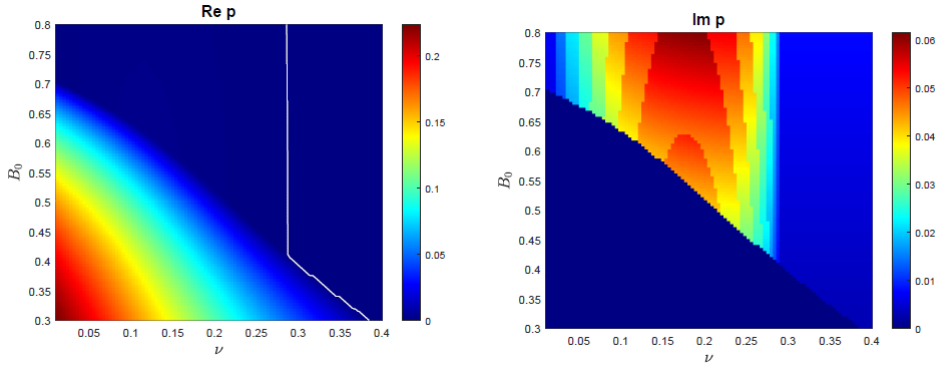


图5. 图中显示了垂直磁场下，(ν， B_0)平面内的(a)不稳定性增长率 Re $p_{\max}$和(b)频率 Im $p_{\max}$，其中$P = \frac{1}{2}$。所示结果由计算获得，图(a)中的白色曲线表示增长率为零。

令 $p_{\max} = 0$ 给出（ν, B_0）平面中的不稳定性阈值，该阈值是一条直线：

$$B_0(\nu, P) = \sqrt{\frac{1+P^2}{3P}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \nu\right). \tag{3.25}$$

图4(b)显示了理论增长率以及用白色（直）线标出的阈值，与完整数值结果吻合良好。微扰理论是在流体动力学不稳定性起始点 $\nu_c = 1/\sqrt{2}$, $B_0 = 0$ 附近建立的。因此，在该点附近，理论与数值结果吻合尤为良好；在其他位置，理论结果仅在定性上正确。例如，能够抑制所有 ν 下不稳定性的理论值 B_0 为

$$B_0 \simeq B_* = \sqrt{\frac{1+P^2}{6P}}, \tag{3.26}$$

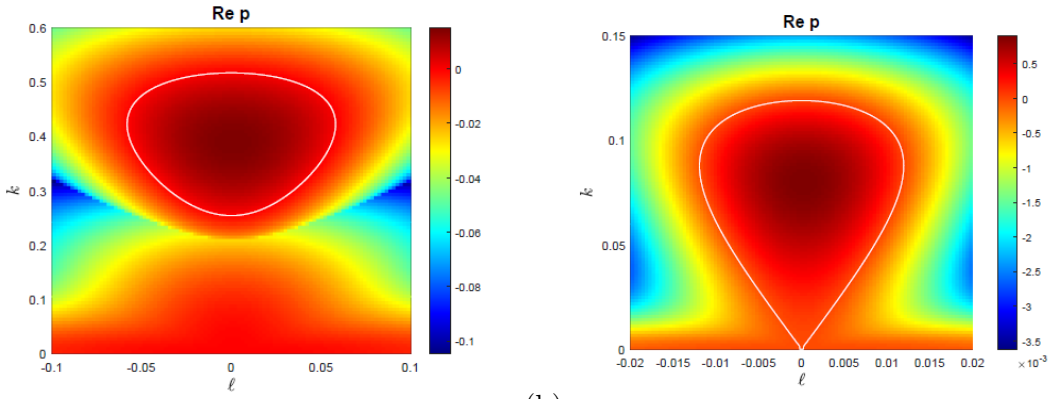
图(b)中，当 $P = 1$ 时， $B_* \simeq 0.58$ 的值略低于图(a)数值结果中观察到的实际值 $B_* \simeq 0.7$。

3.2. 强垂直磁场分支

虽然磁场会抑制磁普朗特数为$P = 1$时的不稳定性，但这并非全部情况；对 $P < 1$ 的研究显示，存在一个强垂直磁场分支，正如 Fraser等人 （2022年）所发现的那样。图5展示了（a）增长率的实部和（b）虚部 $p_{\max}$（ν， B_0， P）在 $P = 1/2$时的情况，即 $\eta = 2\nu$。阈值 Re $p_{\max} = 0$ 在两幅图中均以白色曲线表示。从图5(a)面板底部向上看（ B_0增加），可以看到，面板4(a)中表示弱磁场分支的弯曲白线转为近乎垂直的直线，划分出一个新的分支；图5(b)中可见，该分支具有非零频率 Im $p_{\max}$。

附录 B 对这一强垂直磁场分支进行了分析，采用的标度满足 $B_0 = O(k^{-1})$，当 $k \to 0$ 时成立。随后，摄动理论涉及一个主阶无阻尼 Alfv´en 波，其频率为 $p_0 = ikB_0 = O(1)$。该波与流场的耦合会导致潜在的不稳定性，其增长率由式 (B.9) 给出：

$$\mathrm{Re}\, p = \frac{\frac{1}{4}\nu\eta(\eta-\nu)k^2}{\nu^2\eta^2 + k^2B_0^2(\nu+\eta)^2} - \tfrac{1}{2}(\nu+\eta)k^2 + \cdots. \tag{3.27}$$



(a) (b)

图6. 垂直磁场下的不稳定性增长率 p 随 (ℓ, k) 的变化，其中 (a) $\nu = \eta = 0.4$ $(P = 1)$ 且 $B_0 = 0.25$，(b) $\nu = 0.2$, $\eta = 0.4$ $(P = 0.5)$ 且 $B_0 = 0.7$。

通过近似四次色散关系，Fraser等 (2022年) 得到了一个等价表达式。显然，不稳定性要求 $\eta > \nu$，换言之，$P < 1$；大尺度 Alfv´en 波的不稳定性似乎呈现双扩散形式。正如附录中所讨论的，Fraser 等 (2022年) 的稳定性阈值 (B.9) 也可由该方程得到：

$$\nu < \nu_* = \sqrt{\frac{P}{2}\frac{1-P}{1+P}}\,. \tag{3.28}$$

例如，若 $P = 1/2$，则 $\nu_* = 1/\sqrt{12} \simeq \overline{0.28}$，这与图5中的垂直白线非常吻合。因此，只要黏度低于这一依赖普朗特数的阈值，不稳定性就会在磁场强度任意大的情况下持续存在；换言之，只要雷诺数 Re $= \nu^{-1} > \nu_*^{-1}$ 即可。

以上所有结果均针对布洛赫波数 $\ell = 0$。引入 ℓ 会增加一个自由度，并带来出现新不稳定性的可能性。然而，在垂直磁场情形下，从零开始增大 $|\ell|$ 只会产生稳定作用（Fraser 等2022）。例如，图6展示了弱场和强场情形下 (a) 和 (b) 两个面板中 (ℓ, k) 平面上的增长率。纵轴表示 $\ell = 0$，可以看到每种情形下都有一个不稳定模态岛。然而，在纵轴两侧，增长率都会降低，而且允许 $\ell \neq 0$ 几乎没有影响。因此，对于垂直磁场情形，我们不再进一步考虑 ℓ；不过需要指出的是，附录 B 中的理论可以扩展以纳入 $\ell \neq 0$，详情见 Algatheem （2023）。

4. 控制方程：水平磁场，含 $U_0 = 0$

本节研究存在水平磁场B_0时柯尔莫哥洛夫流的稳定性。为降低问题的复杂性，我们将讨论限定在水平平均流为零的情形 $U_0 = 0$。因此，我们采用以下基本态，它是方程（2.1–2.3）的一个稳态解：

$$\boldsymbol{u}_0 = (0, \sin x), \quad \boldsymbol{b}_0 = (B_0, \eta^{-1} B_0 \cos x), \quad \boldsymbol{f} = (0, (\nu + \eta^{-1} B_0^2) \sin x), \tag{4.29}$$

或用标量形式表示

$$\psi_0 = \cos x, \quad \omega_0 = \cos x, \quad a_0 = B_0 y - \eta^{-1} B_0 \sin x, \quad j_0 = -\eta^{-1} B_0 \sin x, \quad g = (\nu + \eta^{-1} B_0^2) \cos x. \tag{4.30}$$

基本态磁场如图1(b)所示，水平磁力线受背景柯尔莫哥洛夫流的作用而发生畸变，并在 η趋于零的极限下变得越来越伸展。请注意，为呼应引言中的一条评论，维持柯尔莫哥洛夫流所需的体力会随场强 B_0 以及磁雷诺数 $\mathrm{Rm} = \eta^{-1}$的增大而增强；这不同于许多带状流不稳定性的大尺度模拟，在这些模拟中，随机强迫的幅度保持不变，而其他参数则会变化。

稳定性问题由 $\{\nu, B_0, P, U_0 = 0\}$参数化。相应的线性系统为

$$\partial_t \omega + \sin x\,(\omega_y - \psi_y) = B_0\, j_x + \eta^{-1} B_0 \cos x\,(j_y - a_y) + \nu \nabla^2 \omega, \tag{4.31}$$

$$\partial_t a + \sin x\, a_y = B_0\, \psi_x + \eta^{-1} B_0 \cos x\, \psi_y + \eta \nabla^2 a, \tag{4.32}$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi, \quad j = -\nabla^2 a, \tag{4.33}$$

其中，这些场表示对基本态的扰动。傅里叶模态在 x 下的方程为

$$\begin{aligned} pG_n = {} & -\nu(n^2+k^2)G_n + \frac{k}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2+k^2} - 1\right) G_{n-1} - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2+k^2} - 1\right) G_{n+1} \\ & + inB_0(n^2+k^2)H_n + \frac{ikB_0}{2\eta}\big[(n-1)^2+k^2-1\big] H_{n-1} + \frac{ikB_0}{2\eta}\big[(n+1)^2+k^2-1\big] H_{n+1}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} pH_n = {} & -\eta(n^2+k^2)H_n - \frac{k}{2} H_{n-1} + \frac{k}{2} H_{n+1} \\ & + \frac{inB_0}{n^2+k^2} G_n + \frac{ikB_0}{2\eta} \frac{1}{(n-1)^2+k^2} G_{n-1} + \frac{ikB_0}{2\eta} \frac{1}{(n+1)^2+k^2} G_{n+1}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

对于 $\ell = 0$，并且与其他地方一样，对于 $\ell \neq 0$，我们用 $n + \ell$ 替换 n。随后可对这个由线性方程构成的无限系统进行截断，并将其建立为矩阵特征值问题，这与垂直磁场情况下的式 (2.20) 类似；此时矩阵呈七对角形式。

5. 数值结果与解析结果：水平磁场

我们使用 MATLAB 得到增长率 $p(k,\ \ell,\ \nu,\ B_0,\ P)$（此处 $U_0 = 0$），并首先关注 $\ell = 0$ 的情形。

5.1. 布洛赫波数 $\ell = 0$ 下的不稳定性

当布洛赫波数 ℓ 为零时，不稳定性在 x 方向上的周期为 2π，在 y 方向上的周期为$2\pi/k$。图 7 展示了增长率 $p(k,\ \nu,\ B_0,\ P)$ 随 k 变化的曲线；$\nu = \eta = 0.1$ ($P = 1$)，而 B_0 递增，具体如图注所示。观察图(a)中 p 的实部，可以发现磁场起初会抑制不稳定性，曲线从蓝色的 ℓ 曲线变为较低的红色 2π 曲线。

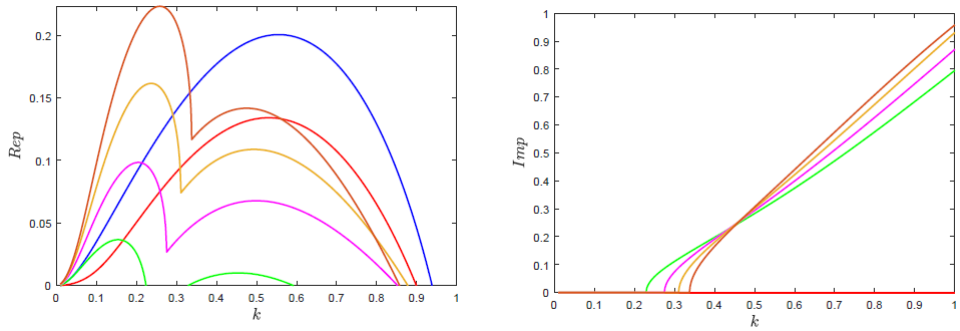
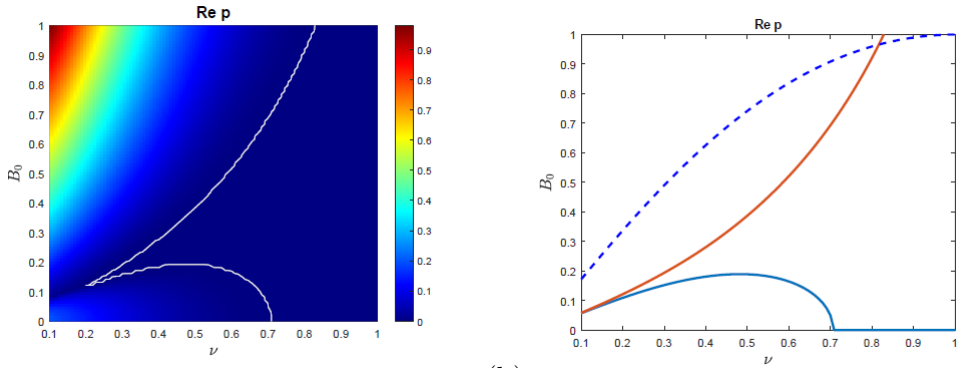


图 7. 水平磁场下的不稳定性增长率 p随 k（以及 $\ell = 0$）变化的曲线，适用于 $\nu = \eta = 0.1$（$P = 1$），其中 $B_0 = 0$（蓝色）、0.05（红色）、0.1（绿色）、0.15（紫色）、0.20（橙色）和 0.25（深橙色）。图(a)和图(b)分别显示 Re p 和 Im p。



(a) (b)

图8. 水平磁场下的不稳定性增长率 Re p 在 (ν, B_0) 平面上的分布，适用于 $P = 1$、$\ell = 0$、$U_0 = 0$。图(a)显示增长率的数值计算结果，阈值以白色曲线表示；图(b)显示流动分支（蓝色）基于 (5.37) 得到的解析阈值，以及磁场分支（深橙色）基于 (5.41) 得到的解析阈值。图(b)中的虚线是阈值 (5.47)，对应于后文讨论的 $\ell \neq 0$ 不稳定性。

然而，继续增大 B_0 后，绿色的 $B_0 = 0.1$ 曲线显示增长率出现两个峰值；随着 B_0 增大，这两个峰值随后也会升高，如图注所示。对于这些较强的磁场，第二个峰值低于第一个，并且与增长率的非零虚部 Im p 相关，如图(b)所示；而第一个峰值对应的主导不稳定性满足 Im $p = 0$。事实上，在我们对水平磁场下不稳定性的所有研究中，对于 $U_0 = 0$ 和 $\ell = 0$，我们发现主导不稳定性始终是直接的或非振荡的，即 Im $p = 0$。

为了更全面地展示水平磁场情况下的这些结果，我们现在将$p_{\max}(\nu,\ B_0,\ P)$作为（ν, B_0）平面上的彩色图，并在图8(a)中取 $P = 1$，白线表示不稳定性阈值 Re $p = 0$。对于较弱的磁场，我们观察到纯流体动力学不稳定性受到抑制，这与图4中的垂直磁场情况相同。然而，随着 B_0 增大，图8(a)面板左下方会出现另一不稳定性分支，其增长率不断上升，尤其是在黏度 ν较小时。这一新的不稳定性分支或许并不令人意外（Durston 和 Gilbert（2016）），因为式（4.29）中的基本态水平磁场（如图1(b)所示）具有波状结构；对于 $P = 1$，随着 $\eta = \nu$ 减小，该结构会变得愈发错综复杂。 P取其他值时，所得图形的结构也类似。

为获得解析结果并加深理解，我们在附录 A 中讨论水平场系统的微扰理论，取极限 $k \to 0$，同时保留 B_0 及其他参数

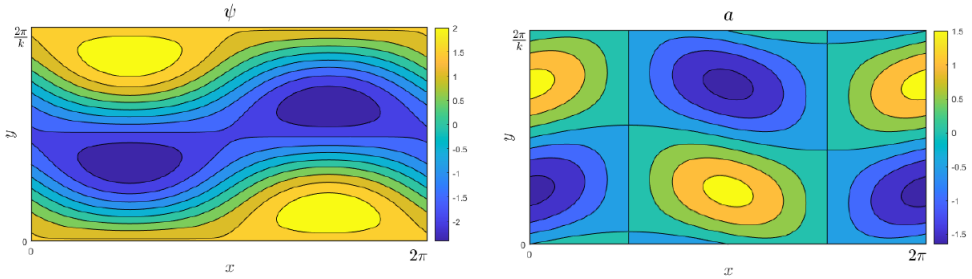


图 9. 一个典型的不稳定模态，具有 $B_0 = 0.05$, $\nu = \eta = 0.1$, $k = 0.5$，来自流场或 G_0 分支；(a) 显示流函数 ψ，(b) 显示矢势 a。

为数量级为 1。由此得到的主阶方程涉及 G_0、$G_{\pm1}$、H_0 和 $H_{\pm1}$，并分解为两个相互独立的 3×3 矩阵系统，对应于图8(a)中显而易见的两个不稳定性分支。我们将依次讨论它们。

第一个系统涉及 G_0，而不涉及 H_0，换句话说，它由大尺度流主导，而非大尺度场。我们将其称为水平磁场不稳定性的 G_0 或 流动分支 。分析得出方程 (A.31)，现将其列于此处：

$$p = \left[\frac{1}{2\nu}\,\frac{\nu^2 - B_0^2 P^2 (2+P)}{\nu^2 + B_0^2 P} - \nu\right] k^2 + \cdots . \tag{5.36}$$

这给出了作为参数函数的领先增长率，乘以 k^2；它表示大尺度模态所感受到的涡黏度 ν_E，而当该量变为负值时，系统便出现不稳定性。虽然无法对 k 最大化此表达式以完整分析不稳定性，但它确实给出了不稳定性阈值 $\mathrm{Re}\, p = 0$；令$[\cdots] = 0$，可得

$$B_0^2 = \frac{\nu}{P}\,\frac{1 - 2\nu^2}{2\nu + 2P + P^2}\,. \tag{5.37}$$

该公式绘制为图 8(a) 中的蓝色曲线，与图 8(a) 下支的数值结果吻合良好。对于 $B_0 = 0$，我们恢复了流体力学结果 $\nu_c = 1/\sqrt{2}$；这一分析说明，由 G_0 中的大尺度流主导的这种流体动力学不稳定性，如何因与磁场的相互作用而受到抑制。若将 (5.37) 中的 B_0^2 视为 ν 的函数并取其最大值，我们发现最大值出现在

$$2\nu^2 = -Q + \sqrt{Q^2 + Q}, \quad Q = 2P + P^2, \tag{5.38}$$

将其代入 B_0^2 后，可得到一个繁杂的表达式，对应阈值 B_*；超过该阈值，水平磁场便会抑制柯尔莫哥洛夫不稳定性。此处不列出该表达式，相关讨论见第 6 节。

另请注意，由 (5.37) 可得，

$$B_0 \simeq \frac{\nu}{P\sqrt{2+P}}\,, \quad \nu \to 0, \tag{5.39}$$

因此，不稳定性从图中原点 $\nu = 0$、$B_0 = 0$ 以此斜率出现。不稳定性的一个典型例子见图 9：图(a)中的流函数显示，这是一种带状流不稳定性，会产生水平急流；图(b)中的磁场则发生了相应变化。

微扰理论得出的第二个系统涉及 H_0 而非 G_0：它由大尺度磁场主导，因此我们将其称为 H_0 或磁场分支的

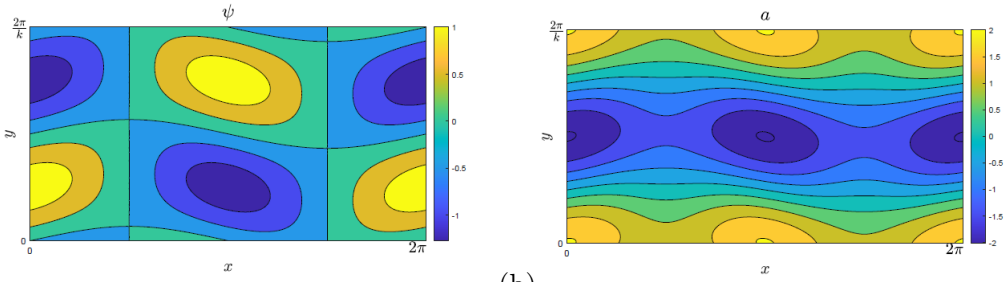


图10。 A ty典型的不稳定模态，具有 $B_0 = 0.25$、 $\nu = \eta = 0.1$、 $k = 0.25$。来自场或 H_0 分支；(a) 显示 e 流函数 ψ 和(b)矢势 a。

水平场不稳定性。微扰理论的结果为（A.37），现重述如下：

$$p = \left[\frac{P}{2\nu}\,\frac{-\nu^2 + 3B_0^2 P}{\nu^2 + B_0^2 P} - \frac{\nu}{P}\right] k^2 + \cdots . \tag{5.40}$$

不稳定性的起始同样可以解释为某个输运量变为负值；这里指的是涡磁扩散率 η_E （参见 Chechkin（1999））。注意，这种不稳定性是直接增长的不稳定性，并不会连接到垂直磁场的强磁场分支（后者是一种过稳定波）。

不稳定性阈值为 $[\cdots] = 0$，或

$$B_0^2 = \frac{\nu^2}{P}\,\frac{P^2 + 2\nu^2}{3P^2 - 2\nu^2}\,. \tag{5.41}$$

这条曲线以红色绘于图 8(b) 中，再次显示出与图(a)中磁场分支的数值结果吻合良好。注意，对于固定的 P、 $B_0 \to \infty$，当 $\nu \to \nu_*$ 时，有

$$\nu_* = P\sqrt{3/2}, \tag{5.42}$$

因此，黏度大于该值就足以抑制磁场分支不稳定性，无论磁场有多强。对于较弱的磁场和较小的黏度，阈值（5.41）为

$$B_0 \simeq \frac{\nu}{\sqrt{3P}}\,, \quad \nu \to 0, \tag{5.43}$$

因此，对于 $P = 1$，两个阈值（5.39）和（5.43）都从原点以相同斜率开始，尽管对于一般的 P，二者并不相同。图10给出了一个典型的不稳定性示例。此时扰动流不具有纬向喷流结构，而是在图(a)中呈现出闭合涡旋。然而，图(b)显示磁场呈带状结构（表明 H_0 起主导作用），并显示背景平均场有分隔成强、弱水平磁场带的趋势。

5.2. 布洛赫波数 $\ell \neq 0$ 的不稳定性

最后，我们考虑非零 ℓ情况下的水平磁场。这使得不稳定性能够在 y方向上取尺度 $2\pi/k$，并在 x方向上取尺度 $2\pi/\ell$，如 $\ell \to 0$。结果表明，在水平磁场情况下，即使系统在 $\ell = 0$时稳定， $\ell \neq 0$ 时仍可能出现不稳定性（这与垂直磁场的情况不同）。

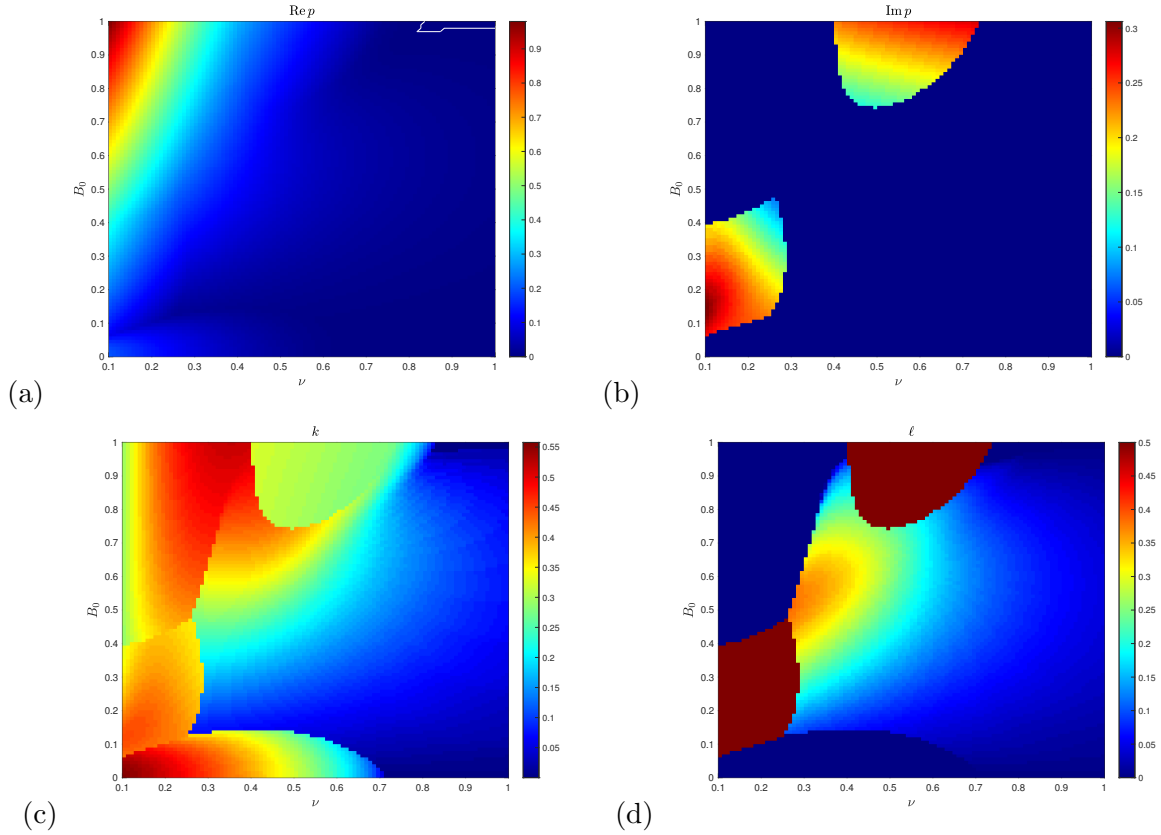


图11. (a) 水平磁场对应的不稳定性增长率 Re p，以及 (b) 虚部 Im p，绘于 (ν, B_0) 中，其中 $P = 1$、$U_0 = 0$ 和 $\ell \neq 0$。面板 (c, d) 分别显示 k 和 ℓ 的最大化取值。

图11(a)呈现出与图8(a)相似的整体结构，不过请注意，白色曲线几乎完全消失了。随着 B_0增大，纯流体动力学不稳定性受到抑制，即 G_0 或流动分支；这在图(a)中已不太明显，但在图(c)中可以清楚看到该分支，图(c)展示了 $k_{\max}$，而此处图(d)中为 $\ell_{\max} = 0$。随后，在较大的 B_0下，图(a)中清晰地出现了 H_0 或磁场分支的不稳定性。然而，现在观察图(b)和图(d)，磁场分支中存在增长率虚部非零的区域，其中 ℓ 从零开始增大，还有 ℓ 在 $\ell = 0.5$ 处保持恒定的区域，这表明存在具有 x 方向 4π 周期性的不稳定性（Algatheem 2023对此作了进一步研究）。回到图11(a)，与图8(a)相比，白色曲线消失的原因在于出现了一种新的不稳定性，它依赖于 $\ell \neq 0$；这意味着图8(a)中 $\ell = 0$ 的稳定区域几乎全部在图11(a)中变得不稳定。相应的增长率相当小，因此在这些图中不易直接察觉。

因此，我们转而采用附录 D 中推导的 $\ell \neq 0$ 理论，该理论给出的增长率（D.13）为

$$p = \pm B_0 \ell \left[\frac{k^2}{\ell^2 + k^2} \frac{P[\nu^2(P+2) - P^2 B_0^2]}{\nu^2(\nu^2 + PB_0^2)} - 1 \right]^{1/2} + \cdots . \tag{5.44}$$

这一近似揭示了一种不稳定性，其存在关键取决于布洛赫波数 $\ell \neq 0$ 不为零，且 ℓ 和 k 都很小。固定参数 ν、P 和 B_0 后，我们可以将增长率 p 视为 $(\ell,\ k)$ 平面上的函数。令平方根内的量为零以求出阈值，可知不稳定区域由

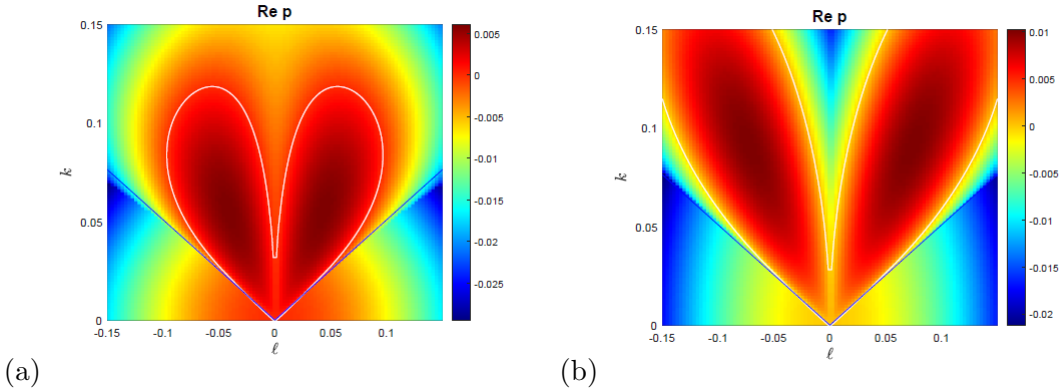


图12. 水平磁场下的不稳定性增长率 p 关于 $(\ell,\ k)$ 的函数，其中 $\nu=\eta=0.75$ $(P=1)$ 满足 $B_0=0.2$；(a) 为数值增长率，(b) 为根据 (5.46) 计算的近似增长率。

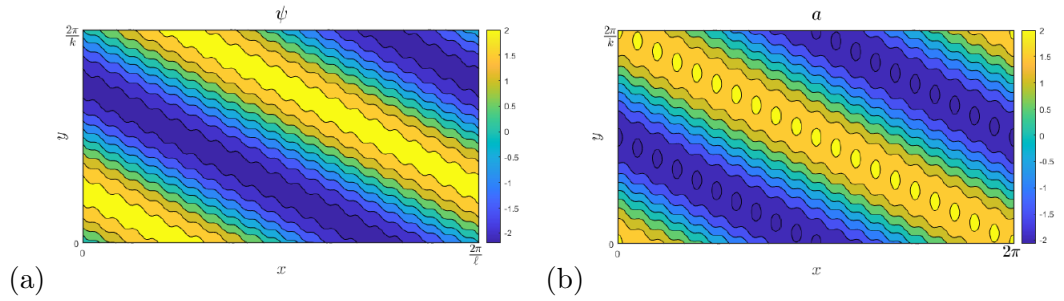


图13. 一个典型的不稳定模态，其中 $\ell=0.05$, $k=0.05$, $\nu=\eta=0.75$, $B_0=0.2$；(a) 显示流函数 ψ，(b) 显示矢势 a。

以下一对直线所界定

$$\frac{k^2}{\ell^2}=\frac{\nu^2(\nu^2+PB_0^2)}{\nu^2(P^2+2P-\nu^2)-PB_0^2(\nu^2+P^2)}\,. \tag{5.45}$$

增长率 p 反映了当我们从零开始增大 k 和 ℓ 时的不稳定性增长率；但要找出它最终如何下降，就需要将微扰理论推进到下一阶，这既不切实际，也不太可能提供有用信息。为了定性了解增长率，我们将加上下一阶必然存在的扩散抑制项 $-\frac{1}{2}(\nu+\eta)k^2$，并考察

$$p=\pm B_0\ell\left[\frac{k^2}{\ell^2+k^2}\,\frac{P[\nu^2(P+2)-P^2B_0^2]}{\nu^2(\nu^2+PB_0^2)}-1\right]^{1/2}-\tfrac{1}{2}\nu(1+P^{-1})(k^2+\ell^2)+O(k^2,\ell^2). \tag{5.46}$$

为了解其作用，图12(a)展示了在（$\ell,\ k$）平面上绘制的增长率，其中 $B_0=0.2$和 $\nu=\eta=0.75$取值对应于 $\ell=0$的稳定性。此时出现了一个呈“蝴蝶”形的不稳定区域，其边界由白色曲线 $\mathrm{Re}\,p=0$勾勒。蓝色直线由（5.45）给出，并在原点与白线相切，证实了该理论。图(b)中，我们展示了（5.46）中“修正后”增长率的类似图像。图(a)和图(b)中的结果在原点附近吻合极佳，但再往外，吻合程度就仅具定性，而且相当粗略，这正如我们所预期的。作为不稳定构型的一个示例，图13展示了图12中增长最快的模态对应的流场和场。我们观察到一种大尺度喷流状结构，但其方向与 y方向成斜角；非零布洛赫波数 ℓ使这种情况成为可能。

回到更宏观的视角，要使（$\nu,\ B_0$）平面上的一般点出现不稳定性，我们

需要使 (5.44) 根号内的量 $[\cdots]$ 在某些 k 和 ℓ 取值下为正。等价地，这要求 (5.45) 中的直线具有有限斜率。可以验证，这给出了不稳定性阈值：

$$B_0^2 = \frac{\nu^2(P^2+2P-\nu^2)}{P(\nu^2+P^2)}\,. \tag{5.47}$$

场的取值小于此值时会产生不稳定性，因此该公式给出了这一类不稳定性在（ν， B_0）平面上的阈值曲线。图 8(b) 中以虚线表示了此阈值。因此我们从该图中可以看到，若允许 $\ell \neq 0$ ，所示参数范围内几乎全部都会出现不稳定性，只有右上方一小块弯曲的三角形区域除外；这与图11(a)中数值计算得到的白色曲线一致。这种一致性并不完美，因为右上角的增长率会变小，随着阈值逼近，（ℓ， k）平面上的不稳定区域也会逐渐缩小，因此若不做进一步研究，白色曲线的精确位置就难以确定。

注意，对于 $P=1$，由 (5.47) 可知，不稳定性在 $\nu=\sqrt{3}$ 处截止；一般而言，不稳定性要求

$$\nu < \nu_* = \sqrt{P(2+P)}. \tag{5.48}$$

数值实验表明，当 ν 小于该值时，随着 B_0 趋近于零或趋近于（5.47）中给出的值，(ℓ， k) 平面上的不稳定区域会变得微乎其微。此处发现的 $\ell \neq 0$ 不稳定性的最大磁场强度，可通过对B_0 关于 ν取最大值来确定：最大值出现在

$$\nu^2 = -P^2 + \sqrt{2P^3(1+P)}, \tag{5.49}$$

我们将在最后的讨论部分（§6）继续探讨这一点。

6. 讨论

本研究探讨了存在磁场时经典柯尔莫哥洛夫流的不稳定性，其中磁场可以是垂直磁场、与流场平行的磁场，或与可能形成急流的方向平行的水平磁场。对于垂直磁场的情况，我们得到了最大增长率（3.24）和磁场阈值（3.25）的新解析结果，表明垂直磁场会抑制 Meshalkin 和 Sinai（1961）发现的原始不稳定性。具体而言，我们得到了（3.26）中的一个值 B_*，作为抑制柯尔莫哥洛夫不稳定性所需磁场强度的估计。该值对应的阈值

$$B_*^2 \sim P^{-1} = \frac{\eta}{\nu} \quad (P \ll 1), \qquad B_*^2 \sim P = \frac{\nu}{\eta} \quad (P \gg 1). \tag{6.50}$$

对于强磁场分支，我们验证了 Fraser 等人（2022年）的数值结果，并对其增长率公式（3.27）和阈值（3.28）给出了另一种推导。我们注意到，这些作者还发现了第三个不稳定性分支，并将其称为“胀缩型 Kelvin–Helmholtz”模态；在我们所采用的雷诺数下，我们并未观察到这一分支。

水平磁场这一情形与多项关于急流形成的研究密切相关，其中磁场与潜在急流方向一致（Tobias 等2007年，Durston 和 Gilbert（2016年），Constantinou

和 Parker（2018年）），呈现出更复杂的结构；鉴于基本态中的磁场具有波动特性（见图 1(b)），这并不令人意外。我们再次观察到，随着磁场强度增大，纯流体动力学不稳定性——即流场分支 G_0 ——受到抑制；当 B_* 时，完全抑制的阈值为 $B_0 = B_*$，其中 B_* 可由将 (5.38) 中的 ν^2 代入 (5.37) 得到。当 P 较大时，有 $\nu^2 \simeq 1/4$；而当 P 较小时，$\nu^2 \simeq \sqrt{P/2}$。因此，抑制所需的 B_* 值为：

$$B_*^2 \sim P^{-1} = \frac{\eta}{\nu} \quad (P \ll 1), \qquad B_*^2 \sim P^{-3} = \frac{\eta^3}{\nu^3} \quad (P \gg 1). \tag{6.51}$$

有趣的是，这与 Tobias等人 (2007年) 的研究有可比之处，他们在模拟中固定了 $\nu = 10^{-4}$，并且$10^{-1} \le \eta \le 10^{-6}$。对于所用的较大 η 值，$P \ll 1$，因此如上所示存在一个阈值 $B_*^2 \sim \eta$，并且在这些全数值模拟中也发现了这一阈值。另外请注意，在此阈值下，式 (4.29) 中的强迫幅值大小是固定的，因此至少粗略而言，我们的研究中固定柯尔莫哥洛夫流的做法，与他们的论文中固定强迫幅值的做法相对应。不过需要指出的是，这些作者采用了非零的 β，而我们采用的是 ℓ 零值，因此还需进一步研究，才能进行可靠的比较。

水平磁场问题的一个特点是，随着磁场强度增大，会出现另一个不稳定性分支，即磁场分支或 H_0 分支；Durston 和 Gilbert（2016年）也观察到了这一现象。文中给出了每个分支的不稳定性阈值解析公式。只要雷诺数高于某个阈值，该磁场分支就会存在：$\mathrm{Re} > \nu_*^{-1}$，其中ν_* 由式 (5.42) 给出。除 y方向上的波数 k 外，若允许 x方向上存在布洛赫波数 $\ell \neq 0$，则会出现一个新的不稳定性分支。具体而言，无论磁场多么微弱，只要雷诺数 $\mathrm{Re} = \nu^{-1} > \nu_*^{-1}$，且 ν_* 由式 (5.48) 给出，磁场就能使柯尔莫哥洛夫流失稳。例如，在 $P = 1$ 时，纯流体动力学不稳定性在 $\mathrm{Re} > \sqrt{2}$ 时存在；但只要 $\mathrm{Re} > 1/\sqrt{3}$，任意微弱但非零的水平磁场都会导致磁流体动力学不稳定性。磁场足够强时，这种不稳定性又会受到抑制。利用式 (5.49)（小 P时取$\nu^2 \simeq \sqrt{2}P^3$，大 P时取 $\nu \simeq (\sqrt{2}-1)P^2$），可得阈值

$$B_*^2 \sim 1 \quad (P \ll 1), \qquad B_*^2 \sim P = \frac{\nu}{\eta} \quad (P \gg 1). \tag{6.52}$$

请注意，极限的顺序可能很重要：在本文的讨论中，我们固定 P 的任意取值，然后令 k 和 ℓ 趋于零。也可以考虑其他极限，并通过在计算中采用适当的标度进行探索。

我们的研究以附录中阐述的矩阵特征值微扰理论为基础，这是解决这类问题的一种灵活工具。我们发现，相较于采用多重尺度表述或对多项式的根应用微扰理论，这种方法能让问题更加清晰，尽管这些方法归根结底是等价的。请注意，虽然我们和其他作者发现的许多不稳定性都可以描述为在大尺度下涉及负涡黏度项 $-\nu_E k^2$或负涡磁扩散率项 $-\eta_E k^2$，但在水平磁场的情况下，增长率 $p(k,\ \ell)$对式（5.44）中的 k 和 ℓ 呈现复杂的依赖关系。尽管这种 $\ell \neq 0$ 不稳定性会出现在任意大的尺度上，但不能将其归类为涉及简单负涡输运效应的情况。这是因为我们对极限 $k \to 0$、$\ell \to 0$ 问题中的重特征值应用了微扰理论。展望未来，值得进一步研究作为磁流体动力学系统的柯尔莫哥洛夫流，特别是其不稳定性和逆级联的非线性演化（Fraser 等2022年，Algatheem 2023），以及磁场与 β效应和罗斯贝波的相互作用。

附录 A：水平磁场，含 $U_0 = 0, \ell = 0$

首先，我们概述本附录及其他附录中对增长率进行近似分析的一般原理。每种情况下，我们都有一个耦合线性方程的无限系统，例如水平磁场情形下含有 $U_0 = 0$ 和 $\ell = 0$的方程（4.34、4.35）。在大尺度模态的极限$k \to 0$ 下，我们可以将增长率的计算化简为求一个有限矩阵的特征值。需要注意的关键一点是， $n = 0$ 模态 G_0 和 H_0 与其他所有模态不同，因为它们阻尼较弱；由于 $k \ll 1$的分子扩散，它们的阻尼为 $p_{\rm visc} = -\nu k^2$ 或 $p_{\rm diff} = -\eta k^2$ 。另一方面，其他含有 $|n| > 0$ 的模态阻尼相对较强，其阻尼为 $p_{\rm visc} = -\nu(n^2 + k^2)$或 $p_{\rm diff} = -\eta(n^2 + k^2)$。因此，我们需要保留 $n = 0$模态，因为它们最容易在系统中失稳。它们如何失稳? 这是通过从 $n = 0$ 到低 $n \neq 0$ 模态、再返回 $n = 0$的耦合实现的；通过这些耦合，不稳定模态可以从基本态柯尔莫哥洛夫流 $\boldsymbol{u}_0 = (0, \sin x)$中汲取能量。因此，我们通常预期效应只会在微扰理论的二阶或更高阶出现，而这将涉及 $n = -1$仅取0、1时的 G_n 和 H_n 。这样，我们便可截断该系统，再对有限矩阵的特征值应用微扰理论，并以 $k \ll 1$ 作为展开参数。

因此，我们着手研究傅里叶空间中的水平系统方程（4.34、4.35）。这些方程被截断，仅保留模态 $G_0, G_{\pm1}, H_0$ 和 $H_{\pm1}$，其中

$$pG_0 = -\nu k^2 G_0 - \frac{k}{2}\frac{k^2}{1+k^2}\,G_{-1} + \frac{k}{2}\frac{k^2}{1+k^2}\,G_1 + \frac{ikB_0}{2\eta}\,k^2 H_{-1} + \frac{ikB_0}{2\eta}\,k^2 H_1, \tag{A.1}$$

$$pH_0 = -\eta k^2 H_0 - \frac{k}{2}\,H_{-1} + \frac{k}{2}\,H_1 + \frac{ikB_0}{2\eta}\frac{1}{1+k^2}\,G_{-1} + \frac{ikB_0}{2\eta}\frac{1}{1+k^2}\,G_1, \tag{A.2}$$

$$pG_{\pm1} = -\nu(1+k^2)G_{\pm1} \pm \frac{k}{2}\,\frac{1-k^2}{k^2}\,G_0 \pm iB_0(1+k^2)H_{\pm1} + \frac{ikB_0}{2\eta}(-1+k^2)H_0, \tag{A.3}$$

$$pH_{\pm1} = -\eta(1+k^2)H_{\pm1} \mp \frac{k}{2}\,H_0 \pm iB_0\,\frac{1}{1+k^2}\,G_{\pm1} + \frac{ikB_0}{2\eta}\frac{1}{k^2}\,G_0. \tag{A.4}$$

现在，我们用 G_0, H_0 和这些场来表示这些方程

$$G_\pm = \tfrac{1}{2}(G_1 \pm G_{-1}), \quad H_\pm = \tfrac{1}{2}(H_1 \pm H_{-1}); \tag{A.5}$$

我们对 $G_0 = G_0' k^2$ 进行重新标度，并为方便起见设 $\tilde{B}_0 = B_0/\eta$。由此得到的方程分解为两个互不耦合的系统。第一个系统仅涉及大尺度上的 G_0' ，

$$pG_0' = -\nu k^2 G_0' + k(1+k^2)^{-1}G_- + ik\tilde{B}_0 H_+, \tag{A.6}$$

$$pG_- = -\nu(1+k^2)G_- + \tfrac{1}{2}k(1-k^2)G_0' + iB_0(1+k^2)H_+, \tag{A.7}$$

$$pH_+ = -\eta(1+k^2)H_+ + iB_0(1+k^2)^{-1}G_- + \tfrac{1}{2}ik\tilde{B}_0 G_0', \tag{A.8}$$

而第二种仅涉及大尺度上的 H_0 ，

$$pH_0 = -\eta k^2 H_0 + kH_- + ik\tilde{B}_0\,(1+k^2)^{-1}\,G_+, \tag{A.9}$$

$$pH_- = -\eta(1+k^2)H_- - \tfrac{1}{2}kH_0 + iB_0(1+k^2)^{-1}G_+, \tag{A.10}$$

$$pG_+ = -\nu(1+k^2)G_+ + iB_0(1+k^2)H_- + \tfrac{1}{2}ik\tilde{B}_0(-1+k^2)H_0, \tag{A.11}$$

我们依次处理这两个分支，使用特征值微扰理论。

A.1. 方法概述

将问题简化为计算 p两组关于 $k \ll 1$的方程组的特征值后（一组对应 (A.6–A.8)，另一组对应 (A.9–A.10)），我们概述本文所有近似中通用的方法。在每种情况下，我们都将控制特征值问题写成矩阵形式（见下文 (A.24, A.32)），其中矩阵 M 取决于 k， $\boldsymbol{v}$ 是特征向量， p 是特征值:

$$M\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}. \tag{A.12}$$

我们可以对矩阵 M 中的一些量重新缩放（用撇号表示这些量），然后将 M 按 k 的幂次展开，得到

$$M = M_0 + kM_1 + k^2 M_2 + \cdots, \tag{A.13}$$

同理，对于 $\boldsymbol{v}$ 和 p。在 $k \to 0$ 的极限下，我们求解

$$(M_0 + kM_1 + \cdots)(\boldsymbol{v}_0 + k\boldsymbol{v}_1 + \cdots) = (p_0 + kp_1 + \cdots)(\boldsymbol{v}_0 + k\boldsymbol{v}_1 + \cdots), \tag{A.14}$$

按 k的阶逐阶展开。这里我们以一种便于处理的形式列出前几阶:

$$p_0\boldsymbol{v}_0 = M_0\boldsymbol{v}_0, \tag{A.15}$$
$$p_1\boldsymbol{v}_0 = (M_0 - p_0)\boldsymbol{v}_1 + M_1\boldsymbol{v}_0, \tag{A.16}$$
$$p_2\boldsymbol{v}_0 = (M_0 - p_0)\boldsymbol{v}_2 + M_2\boldsymbol{v}_0 + M_1\boldsymbol{v}_1 - p_1\boldsymbol{v}_1, \tag{A.17}$$
$$p_3\boldsymbol{v}_0 = (M_0 - p_0)\boldsymbol{v}_3 + M_3\boldsymbol{v}_0 + M_2\boldsymbol{v}_1 + M_1\boldsymbol{v}_2 - p_2\boldsymbol{v}_1 - p_1\boldsymbol{v}_2, \tag{A.18}$$
$$p_4\boldsymbol{v}_0 = (M_0 - p_0)\boldsymbol{v}_4 + M_4\boldsymbol{v}_0 + M_3\boldsymbol{v}_1 + M_2\boldsymbol{v}_2 + M_1\boldsymbol{v}_3 - p_3\boldsymbol{v}_1 - p_2\boldsymbol{v}_2 - p_1\boldsymbol{v}_3. \tag{A.19}$$

首先，我们选取一个特征值 p_0 以及与之对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_0$，它们属于 M_0；在 M_0层面，该模态不受阻尼，因此 p_0 的实部为零。假设这是一个简单特征值（非重特征值），那么还存在唯一的左特征向量 $\boldsymbol{w}_0$，满足 $\boldsymbol{w}_0(M_0 - p_0) = 0$。至此，式 (A.15) 已经处理完毕。我们注意到，对剩余方程左乘 $\boldsymbol{w}_0$，可以依次得到特征值，因此

$$p_1\, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0 M_1\boldsymbol{v}_0, \tag{A.20}$$
$$p_2\, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0(M_2\boldsymbol{v}_0 + M_1\boldsymbol{v}_1 - p_1\boldsymbol{v}_1), \tag{A.21}$$
$$p_3\, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0(M_3\boldsymbol{v}_0 + M_2\boldsymbol{v}_1 + M_1\boldsymbol{v}_2 - p_2\boldsymbol{v}_1 - p_1\boldsymbol{v}_2), \tag{A.22}$$
$$p_4\, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0(M_4\boldsymbol{v}_0 + M_3\boldsymbol{v}_1 + M_2\boldsymbol{v}_2 + M_1\boldsymbol{v}_3 - p_3\boldsymbol{v}_1 - p_2\boldsymbol{v}_2 - p_1\boldsymbol{v}_3). \tag{A.23}$$

这样，一旦选定要从 (A.15) 扰动的特征值 p_0，并结合 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{w}_0$，就可以从 (A.20) 求得 p_1。接下来需要从 (A.16) 求得 $\boldsymbol{v}_1$。虽然 $M_0 - p_0$ 不可逆，但在确定 p_1 的值后， $\boldsymbol{v}_1$ 有解。该解并不唯一，但正如我们将看到的，这并不重要。随后，我们可以从 (A.21) 求得 p_2，依此类推。下面的部分计算将推导到 p_4 阶。

A.2. 流场或 G_0 分支

介绍了总体方法后，我们回到第一个系统 (A.6–A.8)。该系统涉及 G_0 中的主导大尺度流，且没有大尺度场，其中

$$M = \begin{pmatrix} -\nu k^2 & k(1+k^2)^{-1} & ik\tilde{B}_0 \\ \frac{1}{2}k(1-k^2) & -\nu(1+k^2) & iB_0(1+k^2) \\ \frac{1}{2}ik\tilde{B}_0 & iB_0(1+k^2)^{-1} & -\eta(1+k^2) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} G_0' \\ G_- \\ H_+ \end{pmatrix}. \tag{A.24}$$

对于此分支，我们展开 M，得到:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & iB_0 \\ 0 & iB_0 & -\eta \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i\tilde{B}_0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}i\tilde{B}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & iB_0 \\ 0 & -iB_0 & -\eta \end{pmatrix}. \tag{A.25}$$

请注意， M_0 的非平凡 2×2 块的逆为

$$\begin{pmatrix} -\nu & iB_0 \\ iB_0 & -\eta \end{pmatrix}^{-1} = \Delta \begin{pmatrix} -\eta & -iB_0 \\ -iB_0 & -\nu \end{pmatrix}, \quad \Delta^{-1} = \nu\eta + B_0^2, \tag{A.26}$$

其中， Δ 是相应行列式的逆。

现在我们可以按 k 的阶次逐阶求解。在主阶 (A.15)，我们取

$$p_0 = 0, \quad \boldsymbol{v}_0 = (1,0,0)^T, \quad \boldsymbol{w}_0 = (1,0,0). \tag{A.27}$$

在下一阶，我们使用 (A.20)，得到

$$M_1\boldsymbol{v}_0 = (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i\tilde{B}_0)^T, \quad p_1 = 0. \tag{A.28}$$

由此，我们现在对 $\boldsymbol{v}_1$ 求解 (A.16)，得到

$$\boldsymbol{v}_1 = \tfrac{1}{2}\Delta(0, \eta - \tilde{B}_0B_0, iB_0 + i\nu\tilde{B}_0)^T. \tag{A.29}$$

这里我们使用了 2×2 块的逆矩阵 (A.26)，以求得 M_0 的解。我们可以再加上 $\boldsymbol{v}_1$的任意倍数，但这只会改变计算中特征向量 $\boldsymbol{v}_0$ 的（无关紧要的）归一化——任意解都可以接受。

最后，在 $O(k^2)$ 阶，我们由 (A.21) 得到 p_2 的值；再回想 $\tilde{B}_0 = B_0/\eta$，可得

$$p = p_2k^2 + \cdots = \left[\tfrac{1}{2}\Delta(\eta - 2B_0^2/\eta - B_0^2\nu/\eta^2) - \nu\right]k^2 + \cdots, \tag{A.30}$$

其中普朗特数为 $P = \nu/\eta$，即

$$p = \left(\frac{1}{2\nu}\,\frac{\nu^2 - B_0^2P^2(2+P)}{\nu^2 + B_0^2P} - \nu\right)k^2 + \cdots. \tag{A.31}$$

我们从论文正文中的式 (5.36) 继续讨论。

A.3. 场或 H_0 分支

在第二个系统 (A.9–A.10) 中，存在大尺度场 H_0，但不存在大尺度流。我们将该系统写作 $M\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}$，其中

$$M = \begin{pmatrix} -\eta k^2 & k & ik\tilde{B}_0(1+k^2)^{-1} \\ -\frac{1}{2}k & -\eta(1+k^2) & iB_0(1+k^2)^{-1} \\ \frac{1}{2}ik\tilde{B}_0(-1+k^2) & iB_0(1+k^2) & -\nu(1+k^2) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_- \\ G_+ \end{pmatrix}. \tag{A.32}$$

M 的矩阵级数现在为

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & iB_0 \\ 0 & iB_0 & -\nu \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i\tilde{B}_0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}i\tilde{B}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & -iB_0 \\ 0 & iB_0 & -\nu \end{pmatrix}. \tag{A.33}$$

我们有，M_0 的 2×2块的逆矩阵如 (A.26) 所示，其中 ν 和 η 互换，且 Δ相同。计算过程与之前相同。在特征值问题 (A.14) 的主阶，我们采用与 (A.27) 中给出的相同解。在一阶时，我们有

$$M_1\boldsymbol{v}_0 = (0, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}i\tilde{B}_0)^T. \tag{A.34}$$

这给出 $p_1 = 0$，我们求解 (A.16) 以得到 $\boldsymbol{v}_1$：

$$\boldsymbol{v}_1 = \tfrac{1}{2}\Delta(0, -\nu + \tilde{B}_0B_0, -2iB_0)^T. \tag{A.35}$$

在下一阶，(A.21) 给出 p_2，因此

$$p = p_2k^2 + \cdots = \left[\tfrac{1}{2}\Delta(-\nu + 3B_0^2/\eta) - \eta\right]k^2 + \cdots, \tag{A.36}$$

或者，令 $P = \nu/\eta$,

$$p = \left(\frac{P}{2\nu}\,\frac{-\nu^2 + 3B_0^2P}{\nu^2 + B_0^2P} - \frac{\nu}{P}\right)k^2 + \cdots. \tag{A.37}$$

进一步分析从方程 (5.40) 开始。

附录 B：垂直强磁场，取 $U_0 = 0$、 $\ell = 0$

在本附录中，我们转而讨论垂直磁场系统。这里有两种类型的不稳定性，我们将在本附录及下一附录中分别进行两种分析。本附录中的计算旨在捕捉图5中 $\eta > \nu$所示强磁场分支的性质，与 Fraser 等人（2022年）所述的分析等价。从数学上说，我们需要考察当 $k \to 0$ 时 $B_0 \to \infty$ 的极限，并发现通过 $B_0 = O(k^{-1})$ 将二者联系起来最有助于分析。我们将取布洛赫波数 $\ell = 0$，并设平均流为零 $U_0 = 0$。

如果将截断到 G_0、 H_0、 $G_{\pm1}$ 和 $H_{\pm1}$的垂直磁场方程写出，并改用式（A.5）中定义的 $G_\pm$ 和 $H_\pm$ 表示，那么可得到以下形式的方程（未作任何进一步近似）： $M\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}$ 其中

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} -\nu k^2 & ikB_0 & k(1+k^2)^{-1} & 0 \\ ikB_0 & -\eta k^2 & 0 & k \\ \hline \frac{1}{2}k(1-k^2) & 0 & -\nu(1+k^2) & ikB_0(1+k^2) \\ 0 & -\frac{1}{2}k & ikB_0(1+k^2)^{-1} & -\eta(1+k^2) \end{array}\right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} G_0' \\ H_0 \\ G_- \\ H_- \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

其中$G_0 = k^2 G_0'$ 与通常一样。场 G_+ 和 H_+ 彼此解耦（因为我们有 $U_0 = 0$），因此不再进一步考虑。在按 k的幂次展开 M 之前，对于强垂直磁场，我们将$B_0 = k^{-1} B_0'$ 按比例缩放，并在极限 $k \to 0$下保持 B_0' 固定。然后展开 M，得到矩阵

$$M_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & iB_0' & 0 & 0 \\ iB_0' & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\nu & iB_0' \\ 0 & 0 & iB_0' & -\eta \end{array}\right), \quad M_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right), \quad M_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\nu & iB_0' \\ 0 & 0 & -iB_0' & -\eta \end{array}\right). \tag{B.2}$$

对于近似增长率 p，我们使用展开式 (A.14)，并逐阶求解。在主阶 (A.15)，我们关注 M_0 的特征值 $p_0 = \pm iB_0'$，它们对应于大尺度、无阻尼的 Alfv´en 波。不失一般性，我们将只关注上号，并取

$$p_0 = iB_0', \quad \boldsymbol{v}_0 = (1,1,0,0)^T, \quad \boldsymbol{w}_0 = (1,1,0,0). \tag{B.3}$$

与通常情况一样，这里 $\boldsymbol{w}_0$ 是左特征向量，具有 $\boldsymbol{w}_0(M_0 - p_0) = 0$ 和 $\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{v}_0 = 2$。

转到一阶，由 (A.20) 可迅速得到

$$M_1\boldsymbol{v}_0 = (0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})^T, \quad p_1 = 0. \tag{B.4}$$

现在需要求解 (A.16) 以求得 $\boldsymbol{v}_1$。显然，要找到一个解，只需对 $M_0 - p_0$ 的右下 2×2 块求逆，计算

$$\begin{pmatrix} -\nu - iB_0' & iB_0' \\ iB_0' & -\eta - iB_0' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\Delta \begin{pmatrix} \eta \\ -\nu \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

其中逆行列式 Δ 现在定义为

$$\Delta^{-1} = \eta\nu + iB_0'(\eta + \nu). \tag{B.6}$$

Thus

$$\boldsymbol{v}_1 = \tfrac{1}{2}\Delta(0,0,\eta,-\nu)^T. \tag{B.7}$$

由此可以直接从 (A.21) 计算出 p_2

$$p_2 = \tfrac{1}{4}\Delta(\eta - \nu) - \tfrac{1}{2}(\nu + \eta). \tag{B.8}$$

取 p_2的实部，然后代回 $B_0' = kB_0$和 $p = p_0 + kp_1 + k^2 p_2 + \cdots$，得到增长率

$$\operatorname{Re} p = \frac{\frac{1}{4}\nu\eta(\eta - \nu)k^2}{\nu^2\eta^2 + k^2 B_0^2(\nu + \eta)^2} - \tfrac{1}{2}(\nu + \eta)k^2 + \cdots. \tag{B.9}$$

论文正文将此作为 (3.27) 进行讨论。

附录 C：垂直弱场，其中 $U_0 \neq 0$、 $\ell = 0$

现在，我们继续分析 $\ell = 0$ 和 $U_0 \neq 0$下的垂直场不稳定性。我们在前一附录中研究了 $B_0 = O(k^{-1})$ 对应的强磁场分支。在本附录中，我们将采用 $B_0 = O(k^2)$：这对应于图4所示的垂直场不稳定性分支，

并使我们能够解答磁场如何抑制纯流体动力学不稳定性的起始，并将 ν 的临界值降至 $\nu_c = 2^{-1/2}$以下这一问题。我们将看到，即使 B_0 达到 1 的量级，而 $k \to 0$，我们的结果在定性上仍然成立。尽管如此，为与前一附录中的强磁场分支相区分，将其称为“弱磁场分支”仍较为方便。

我们从存在垂直磁场时用于研究不稳定性的矩阵系统 (B.1) 开始：$M\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}$。然而，在将 M_0 按 k 的幂次展开之前，我们先对 $B_0 = k^2 B_0'$ 重新缩放，并设定$\nu = \nu_0 + k^2\nu_2 + \cdots$、$\eta = \eta_0 + k^2\eta_2 + \cdots$。这里，我们将围绕纯流体动力学问题的临界点 $\nu_c(U_0)$ 建立微扰理论，其中 $\nu_c(0) = 2^{-1/2}$。按 k 的幂次展开可得

$$M_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_0 & -iU_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iU_0 & -\nu_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_0 & -iU_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -iU_0 & -\eta_0 \end{array}\right), \qquad M_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{C.1}$$

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\nu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_0-\nu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_0-\nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_0-\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_0-\eta_2 \end{array}\right), \quad M_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & iB_0' & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & iB_0' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iB_0' \\ \hline iB_0' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iB_0' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iB_0' & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{C.2}$$

$$M_4 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\nu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_2-\nu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_2-\nu_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_2-\eta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_2-\eta_4 \end{array}\right). \tag{C.3}$$

令下式为

$$\Delta^{-1} = \nu_0^2 + U_0^2, \quad \delta^{-1} = \eta_0^2 + U_0^2. \tag{C.4}$$

与流体力学情形一致，我们将围绕零特征值 $p_0 = 0$ 展开系统，该系统的流场由 G_0 中给出。然而，需要注意的是， p_0 是一个二重特征值，因此我们有两个左特征向量和两个右特征向量，分别用 $\dagger$ 和 $\ddagger$ 区分：

$$\boldsymbol{v}_{0\dagger}^T = \boldsymbol{w}_{0\dagger} = (1,0,0,0,0,0), \quad \boldsymbol{v}_{0\ddagger}^T = \boldsymbol{w}_{0\ddagger} = (0,0,0,1,0,0). \tag{C.5}$$

对于一般矩阵 M ，在微扰理论中，我们需要将 $\boldsymbol{v}_0$ 取为 $\boldsymbol{v}_{0\dagger}$ 和 $\boldsymbol{v}_{0\ddagger}$的一般线性组合，并在后续展开中进一步确定。不过，为避免不必要的代数运算，我们直接采用所需的解，即取

$$p_0 = 0, \quad \boldsymbol{v}_0 \equiv \boldsymbol{v}_{0\dagger}, \tag{C.6}$$

对于流动主导特征函数。随着展开的深入，我们将验证这种做法是否成立。

考察一阶方程 (A.16)，我们将 $\boldsymbol{w}_{0\dagger}$ 和 $\boldsymbol{w}_{0\ddagger}$ 作用于左边，

这只会得到 $p_1 = 0$，因此我们有

$$p_1 = 0, \quad M_0 \boldsymbol{v}_1 = (0, -\tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \tag{C.7}$$

然而，在求解 $\boldsymbol{v}_1$ 时，我们不仅可以在解中加入 $\boldsymbol{v}_0$ 的倍数（这不会对计算产生影响），还可以加入纯磁性特征向量 $\boldsymbol{v}_{0\ddagger}$ 的倍数。因此，我们将 $\boldsymbol{v}_1$ 求解为以下形式

$$\boldsymbol{v}_1 = (0, \tfrac{1}{2}\nu_0\Delta, -\tfrac{1}{2}iU_0\Delta, b, 0, 0)^T, \tag{C.8}$$

其中 b 是一个待确定的未知常数。

在下一阶，我们将选择 $p_2 = 0$，以便将各种效应推迟到关于 k 的幂次级数的更高阶中：只要确定 $\Delta = 2$ 即可实现这一点。因此，在二阶时我们令

$$p_2 = 0, \quad \Delta = 2, \tag{C.9}$$

并注意，这便确定了

$$\nu_0 \equiv \nu_c(U_0) = (\tfrac{1}{2} - U_0^2)^{1/2}. \tag{C.10}$$

这是纯流体力学情形下的起始临界值，此时存在平均流，但磁场为零。足够强的平均流 $|U_0| > 2^{-1/2}$ 足以抑制任何不稳定性，因此从现在起我们取 $U_0^2 < \frac{1}{2}$，使得 ν_0 为实数且为正。

接下来我们需要求解 (A.17)，这相当于

$$M_0 \boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 0, 0, \tfrac{1}{2}b, 0)^T, \tag{C.11}$$

一个合适的解为

$$\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 0, 0, -\tfrac{1}{2}\eta_0 b\delta, \tfrac{1}{2}iU_0 b\delta)^T. \tag{C.12}$$

事实证明，若在此阶的 $\boldsymbol{v}_2$ 解中加入 $\boldsymbol{v}_{0\ddagger}$ 的一个未知倍数，后续计算并不会因此获得更多信息，所以我们不这样做。

在三阶，使用 $\boldsymbol{w}_{0\dagger}$ 和 $\boldsymbol{w}_{0\ddagger}$ 对 (A.18) 进行处理，得到

$$p_3 = 0, \quad b = \eta_0^{-1}(1 + \tfrac{1}{2}\delta)^{-1} iB_0', \tag{C.13}$$

然后我们求解

$$M_0 \boldsymbol{v}_3 = (0, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\nu_0 + \nu_2)\nu_0\Delta, -\tfrac{1}{2}(\nu_0 + \nu_2)iU_0\Delta, 0, 0, 0)^T, \tag{C.14}$$

其中 $\boldsymbol{v}_3$ 与

$$\boldsymbol{v}_3 = (0, -\tfrac{1}{2}\nu_0\Delta - \tfrac{1}{2}(\nu_0 + \nu_2)(\nu_0^2 - U_0^2)\Delta^2, \tfrac{1}{2}iU_0\Delta + (\nu_0 + \nu_2)iU_0\nu_0\Delta^2, 0, 0, 0)^T, \tag{C.15}$$

最后，将$\boldsymbol{w}_{0\dagger}$ 和$\boldsymbol{w}_{0\ddagger}$ 代入 (A.19)，即可得到所需的增长率

$$p_4 = -\nu_2 - \nu_0\Delta + iB_0' b - \tfrac{1}{2}(\nu_0 + \nu_2)(\nu_0^2 - U_0^2)\Delta^2 \tag{C.16}$$

现在令 $p = p_4 k^4 + \cdots$，并代入由 (C.13) 得到的 b $\Delta = 2$ $B_0' = k^{-2}B_0$ $\eta_0 = \nu_0/P$，同时用 $\nu_0 = \nu_c$ 和 $\nu_2 = k^{-2}(\nu - \nu_c) + \cdots$ 表示 U_0，得到

$$p = -\frac{P}{\nu_c(1 + \frac{1}{2}\delta)} B_0^2 + 4\nu_c^2(\nu_c - \nu)k^2 - \nu_c(1 + 4\nu_c^2)k^4 + \cdots, \tag{C.17}$$

with

$$\nu_c = \sqrt{\tfrac{1}{2} - U_0^2}, \quad \delta = \frac{P^2}{\nu_c^2(1 - P^2) + \frac{1}{2}P^2}. \tag{C.18}$$

这是增长率 $p(k,\ \nu,\ B_0,\ P,\ U_0)$ 的通用公式，其中包含平均流 U_0，且 $U_0^2 < \frac{1}{2}$（因此 ν_c 被定义为正数）。

在零平均流的情况下，$U_0 = 0$，我们有 $\nu_c = 2^{-1/2}$、$\delta = 2P^2$，这可简化为

$$p = -\frac{\sqrt{2}\,P}{1+P^2}\,B_0^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \nu\right)k^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\,k^4 + \cdots . \tag{C.19}$$

我们继续讨论论文正文中的内容；参见方程 (3.24, 3.25)。请注意，这里推导到四阶表明，可能还需要模态 $G_{\pm 2}$ 和 $H_{\pm 2}$ 才能正确计算 p_4；我们对此进行了检验，发现就涉及的 k 幂次而言，耦合过弱，无法对所取阶数下的增长率产生贡献。

附录 D：水平磁场，其中 $U_0 = 0$、$\ell \neq 0$

最后的计算引入了布洛赫波数 ℓ。对于垂直磁场的情形，这可以做到（Algatheem 2023）；但在该情形下，从零开始增大 ℓ 似乎只会抑制 $\ell = 0$ 不稳定性，因此我们不再进一步考虑。我们转而研究水平磁场，此时存在 $\ell \neq 0$ 可以增强不稳定性。为使问题易于处理，我们取 $U_0 = 0$。我们省略直接但繁琐的细节，实际上只推导到微扰理论的一阶。

我们的出发点是方程 (4.34, 4.35)，其中用 $n + \ell$ 替换 n，并且只考虑模态 $G_0, G_{\pm 1}, H_0, H_{\pm 1}$。与原来的水平磁场问题（附录 A）一样，我们令

$$G_0 = k^2 G_0', \quad \tilde{B}_0 = B_0/\eta. \tag{D.1}$$

一旦问题中包含 $\ell \neq 0$，我们就必须考虑当 $k \to 0$ 时，ℓ 如何标度。事实证明，要获得有用的结果，合适的标度为

$$\ell = k\ell' = O(k), \tag{D.2}$$

因此，当 $k \to 0$ 时，我们保持 ℓ' 和 G_0' 不变。现在，我们按照通常的步骤进行这些代换，用 $G_0, G_\pm, H_0, H_\pm$ 表示方程，并将系统写成 $M\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}$，其中

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} G_0' \\ G_- \\ H_+ \\ H_0 \\ H_- \\ G_+ \end{pmatrix}, \tag{D.3}$$

以及 $M = M_0 + kM_1 + \cdots$ 与

$$\boldsymbol{M}_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\ell' i\tilde{B}_0 & 2\ell' \\ 0 & -\nu & iB_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iB_0 & -\eta & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & iB_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & iB_0 & -\nu \end{array}\right), \tag{D.4}$$

and

$$\boldsymbol{M}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-3\ell'^2 & i\tilde{B}_0(1+\ell'^2) & iB_0\ell'(1+\ell'^2) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\ell'^2)^{-1} & 0 & 0 & 0 & iB_0 3\ell' & -2\ell'\nu \\ \frac{1}{2}i\tilde{B}_0(1+\ell'^2)^{-1} & 0 & 0 & 0 & -2\ell'\eta & -iB_0\ell' \\ \hline iB_0\ell'(1+\ell'^2)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & i\tilde{B}_0 \\ 0 & -iB_0\ell' & -2\ell'\eta & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2\ell'\nu & iB_0 3\ell' & -\frac{1}{2}i\tilde{B}_0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad \text{(D.5)}$$

设定为

$$\Delta^{-1} = \nu\eta + B_0^2. \quad \text{(D.6)}$$

现在我们可以计算 p 了。矩阵 M_0 由于 ℓ 的标度，已不再具有先前展开中出现的吸引性块结构。不过， M_0 具有一个二重零特征值 $p_0 = 0$ ，其右特征向量为

$$\boldsymbol{v}_{\dagger 0} = (1,0,0,0,0,0)^T, \quad \boldsymbol{v}_{\ddagger 0} = (0,0,0,1,0,0)^T, \quad \text{(D.7)}$$

左特征向量为

$$\boldsymbol{w}_{0\dagger} = (1,0,0,0,2\ell'\Delta\eta^{-1}iB_0(\nu+\eta), 2\ell'\Delta\eta^{-1}(\eta^2 - B_0^2)), \quad \boldsymbol{w}_{0\ddagger} = (0,0,0,1,0,0). \quad \text{(D.8)}$$

在前面讨论二重零特征值的情形（附录 C）时，我们预先设定了 $\boldsymbol{v}_0$ 的结构（由流体动力场 G_0 主导）。这里我们无法这样做，因此设

$$\boldsymbol{v}_0 = b\boldsymbol{v}_{0\dagger} + c\boldsymbol{v}_{0\ddagger}, \quad \text{(D.9)}$$

对于某些常数 b 和 c。

现在，考察一阶方程 (A.16)，即 $p_1\boldsymbol{v}_0 = (M_0 - p_0)\boldsymbol{v}_1 + M_1\boldsymbol{v}_0$ 其中$p_0 = 0$，我们可以在左侧分别乘以两个向量 $\boldsymbol{w}_{0\dagger}$ 和 $\boldsymbol{w}_{\ddagger}$ ，从而得到两个方程，

$$p_1 b = \boldsymbol{w}_{0\dagger} M_1 \boldsymbol{v}_0 = iB_0\ell'[1 + \ell'^2 + \Delta\eta^{-2}(B_0^2 - \nu\eta - 2\eta^2)]c, \quad \text{(D.10)}$$

$$p_1 c = \boldsymbol{w}_{0\ddagger} M_1 \boldsymbol{v}_0 = iB_0\ell'(1+\ell'^2)^{-1} b. \quad \text{(D.11)}$$

综合起来，可得

$$p_1^2 = -B_0^2\ell'^2[1 + (1+\ell'^2)^{-1}\Delta\eta^{-2}(B_0^2 - \nu\eta - 2\eta^2)], \quad \text{(D.12)}$$

因此，代回 $\ell' = \ell/k$ 和 Δ 后，我们得到增长率为

$$p = \pm B_0\ell\left[\frac{k^2}{\ell^2+k^2}\,\frac{\nu\eta + 2\eta^2 - B_0^2}{\eta^2(\nu\eta + B_0^2)} - 1\right]^{1/2} + \cdots. \quad \text{(D.13)}$$

我们仅通过考察一阶矩阵 M_1便得到了这个方程，但它揭示了一种不稳定性，而这种不稳定性关键取决于布洛赫波数 $\ell \neq 0$非零。我们从 (5.44) 开始，在论文正文中继续讨论。

致谢

ADG 感谢英国工程与自然科学研究委员会研究资助 EP/T023139/1 的支持，AH 感谢英国科学技术设施委员会研究资助 ST/V000659/1 的支持。AMA 感谢获得一项

由沙特阿拉伯政府颁发的博士生奖学金。为实现开放获取，作者已将知识共享署名（CC BY）许可应用于由此产生的任何作者接受稿版本。

数据获取声明

本研究未创建或分析任何数据。

参考文献

Algatheem, A.M.，《受迫磁流体流中的急流与不稳定性》，准备中。博士学位论文，埃克塞特大学，未发表论文，2023年。Balmforth, N.J. 和 Young, Y.N.，《分层柯尔莫哥洛夫流》。 *Journal of Fluid Mechanics*，2002年，450，131–167。Boffetta, G.、Celani, A. 和 Prandi, R.，《二维磁流体力学中的大尺度不稳定性》。 *Physical Review E*，2000年，61，4329。Bouchet, F.、Nardini, C. 和 Tangarife, T.，《随机正压方程与二维纳维–斯托克斯方程中喷流动力学的动力学理论》。 *Journal of Statistical Physics*，2013年，153，572–625。Chechkin, A.，《二维中的负磁黏性》。 *Journal of Experimental and Theoretical Physics*，1999年，89，677–688。Constantinou, N.C. 和 Parker, J.B.，《β平面上的纬向流磁抑制》。 *The AstrophysicalJournal*，2018年，863，46。Dubrulle, B. 和 Frisch, U.，《宇称不变流的涡黏度》。 *Physical Review A*，1991年，43，5355。Durston, S. 和 Gilbert, A.D.，《受驱动的二维磁流体流中的输运与不稳定性》。 *Journal of Fluid Mechanics*，2016年，799，541–578。Farrell, B.F. 和 Ioannou, P.J.，《斜压湍流导致的喷流形成》。 *Journal of the Atmospheric Sciences*，2008年，65，3353–3375。Fraser, A.、Cresswell, I. 和 Garaud, P.，《流向磁场作用下正弦剪切流中的非理想不稳定性》。 *Journal of Fluid Mechanics*，2022年，949，A43。Frisch, U.、Legras, B. 和 Villone, B.，《β平面上的大尺度柯尔莫哥洛夫流与共振波相互作用》。 *Physica D: Nonlinear Phenomena*，1996年，94，36–56。Galperin, B.、Sukoriansky, S.、Dikovskaya, N.、Read, P.、Yamazaki, Y. 和 Wordsworth, R.，《旋转流中具有 β效应的各向异性湍流与纬向喷流》。 *Nonlinear Processes in Geophysics*，2006年，13，83–98。Hughes, D.W.、Rosner, R. 和 Weiss, N.O.， *The solar tachocline*，2007年（剑桥大学出版社）。Kim, E.j.，《磁剪切在流剪切抑制中的作用》。 *Physics of Plasmas*，2007年，14，084504。Leprovost, N. 和 Kim, E.j.，《非均匀磁场下剪切磁流体湍流中的湍流输运与发电机效应》。 *Physical Review E*，2009年，80，026302。Lucas, D. 和 Kerswell, R.，《大区域二维柯尔莫哥洛夫流中的时空动力学》。*Journal of Fluid Mechanics*，2014年，750，518–554。Lucas, D. 和 Kerswell, R.R.，《时空混沌二维柯尔莫哥洛夫流的复现流分析》。 *Physics of Fluids*，2015年，27，045106。Manfroi, A. 和 Young, W.，《 β平面柯尔莫哥洛夫流的稳定性》。 *Physica D: Nonlinear Phenomena*，2002年，162，208–232。Meshalkin, L. 和 Sinai, I.G.，《不可压黏性流体平面运动方程组定常解的稳定性研究》。 *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*，1961年，25，1700–1705。Nepomniashchii, A.，《无界空间中黏性流体次级流的稳定性：PMM 第40卷第5期，1976年，第886–891页》。 *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*，1976年，40，836–841。Parker, J.B. 和 Constantinou, N.C.，《二维磁流体力学中平均剪切流的磁涡黏性》。 *Physical Review Fluids*，2019年，4，083701。Parker, J.B. 和 Krommes, J.A.，《统计均匀性对称性破缺引发的纬向流生成》。 *New Journal of Physics*，2014年，16，035006。Read, P.L.、Yamazaki, Y.H.、Lewis, S.R.、Williams, P.D.、Wordsworth, R.、Miki-Yamazaki, K.、Sommeria, J. 和 Didelle, H.，《实验室中对流驱动带状喷流的动力学》。 *Journal of the AtmosphericSciences*，2007年，64，4031–4052。Scott, R.K. 和 Dritschel, D.G.，《地转湍流中的纬向喷流结构》。 *Journal of Fluid Me-chanics*，2012年，711，576–598。She, Z.S.，《柯尔莫哥洛夫流中的亚稳态与涡旋配对》。 *Physics Letters A*，1987年，124，161–164。

Sivashinsky, G.I.，《周期流中的弱湍流》。 *Physica D: Nonlinear Phenomena*，1985年，**17**，243–255。Srinivasan, K. 和 Young, W.，《带状流不稳定性》。 *Journal of the Atmospheric Sciences*，2012年，**69**，1633–1656。Tobias, S.、Dagon, K. 和 Marston, J.，《通过直接统计模拟研究天体物理流体动力学》。 *The Astrophysical Journal* 2011 **727** 127

，，，。

Tobias, S.M.、Diamond, P.H. 和 Hughes, D.W.，《太阳 tachocline 中的 β平面磁流体湍流》。 *The Astrophysical Journal*，2007年，**667**，L113。Vallis, G.K. 和 Maltrud, M.E.，《β平面上及地形上的平均流与喷流生成》。*Journal of Physical Oceanography*，1993年，**23**，1346–1362。