arXiv:2303.05217v1 [math.CA] 9 Mar 2023

稳定、可稳定化及已稳定化均值的渐近展开及其应用

LENKA MIHOKOVI ´C

Abstract. 本文给出了对称齐次稳定（平衡）、可稳定化及已稳定化均值的完整渐近展开。结合已知的参数平均渐近展开，本文说明了如何利用所得系数，在所考虑的参数平均类中识别稳定均值；如何证明某些均值不可稳定化或不可稳定化为已稳定化均值；以及如何求得最优参数，使给定均值能够由某一对参数平均稳定化。

1. Introduction

考虑二元平均 M，即函数 $M\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，满足

$$\min(s,t)\le M(s,t)\le\max(s,t). \tag{1.1}$$

若均值 M 满足以下条件，则称其为对称均值

$$M(s,t)=M(t,s),\ s,t>0,$$

且为齐次（1 次）当

$$M(\lambda s,\lambda t)=\lambda M(s,t),\ \lambda,s,t,>0.$$

设 M、 N、 K 为三个齐次对称二元均值，并设

$$\mathcal{R}(K,N,M)(s,t)=K\Big(N\big(s,M(s,t)\big),N\big(M(s,t),t\big)\Big).$$

$\mathcal{R}$ 也称为 K、 M 和 N 的合成均值映射。观察以下函数方程

$$M(s,t)=\mathcal{R}(M,M,M)(s,t)=M\Big(M\big(s,M(s,t)\big),M\big(M(s,t),t\big)\Big), \tag{1.2}$$

许多作者已在各种情形下研究过该方程。

G. Aumann（[2]）研究了多元平均值的构造及相应的迭代算法，更确切地说，是在已知 n 元平均值的情况下，将平均值扩展至 $n+1$ 个变量。他将这种平均值称为上平均。在研究相反的过程，即约化过程（[3]）时，他引入了下平均。对于这两个过程何时互为逆过程的疑问， $n=2$ 复合函数方程（1.2）由此出现。G. Aumann 证明，在 $\mathbb{C}^2$ 上的解析平均类中，这个函数方程是解析拟算术平均的特征方程。L. R. Berrone（[4]）介绍了 Aumann 两篇论文中的关键结果，并指出在

2020 *Mathematics Subject Classification.* 26E60；41A60；39B22。*Key words and phrases.* 渐近展开、稳定均值、可稳定化平均、稳定化均值。

实变量平均类中，复方法并不等价；他还分析了涉及一般权重算子的 Aumann 函数方程的推广形式。T. Kiss（[18]）将方程（1.2）称为平衡性质，并在一个二元平均类中求解了该方程，且未作可微性假设；该类包含 Matkowski 均值类。

本文采用 M. Ra¨ıssouli 引入的定义；他依据方程 (1.2)，还引入了可稳定化均值和稳定化均值的概念。

定义 1.1 ([23]). 若对称平均 M 满足以下条件，则称其为:

(1) 稳定（平衡）的，如果 $\mathcal{R}(M,M,M) = M$. (2) (K,N)-可稳定化的，如果两个非平凡稳定均值 K 和 N 满足以下关系:

$$M(s,t) = \mathcal{R}(K,M,N)(s,t) = K\Big(M\big(s,N(s,t)\big),M\big(N(s,t),t\big)\Big). \tag{1.3}$$

(3) (K,N)-稳定化的，如果两个非平凡稳定均值 K 和 N 满足以下关系:

$$M(s,t) = \mathcal{R}(K,N,M)(s,t) = K\Big(N\big(s,M(s,t)\big),N\big(M(s,t),t\big)\Big). \tag{1.4}$$

显然，算术 A 平均数是稳定的；更一般地，（二项式）幂平均数 B_p 也是稳定的。众所周知，对数平均和反双曲平均数并不稳定。可稳定化均值或已稳定化均值本身不一定稳定。此外，几何平均 G 同时是（A,H）-已稳定化和（H,A）-已稳定化的，而海伦平均 He 是（A,G）-已稳定化的。对于所有实数 p，幂二项式平均 B_p都是稳定的；幂对数平均L_p（也称广义对数平均）是（B_p,A）-可稳定化的；幂差平均 D_p，即 Stolarsky 均值$E_{p,p+1}$，是（A,B_p）-可稳定化的；幂指数平均 I_p，即 Stolarsky 均值 $E_{p,p}$，是（G,B_p）-可稳定化的；第二幂对数平均 l_p，即 Stolarsky 均值$E_{p,0}$，是（B_p,G）-可稳定化的（[23]）。对于任意实数 p 和 q，Stolarsky 均值$E_{p,q}$ 是（B_{q-p},B_p）-可稳定化的（[25]）。这些均值的精确定义将在第5节给出。

给定的一个平均数可以相对于两对不同的平均值可稳定化。例如，对数平均 L 同时是 (A,G)-可稳定化的，也是 (H,A)-可稳定化的。另一方面，给定两个稳定均值 M_1 和 M_2，满足 $M_1 \le M_2$ 和 M_1 是严格的交叉平均，则存在唯一一个 (M_1,M_2)-可稳定化均值 M，使得 $M_1 \le M \le M_2$ ([26])。

稳定性和可稳定化性有多种应用。作为可稳定性概念的扩展，A. Gasmi 和 M. Ra¨ıssouli ([15]) 为二元平均引入了广义可稳定化性。关于已得到广泛研究的平均不等式，M. Ra¨ıssouli ([24]) 提出了一种便于获得精化的方法。他展示了如何从可稳定化均值的任意下界和上界出发，以递归方式得到无穷多个下界和上界。

对于两个非平凡的稳定可比平均数，可以在 (1.3) 中使用适当的不等号来引入（严格）次稳定性和超稳定性的概念。

定义 1.2（[27]）。设 K、N 是两个非平凡的稳定可比平均数。平均数 M 称为

(1) 若满足 $\mathcal{R}(K,M,N) \le M$and $K \le M \le N$，则为 (K,N)-次稳定可化；
(2) 若满足 $M \le \mathcal{R}(K,M,N)$ and $K \le M \le N$，则为 (K,N)-超稳定可化。

例如，几何平均 G 是 (G, A)-超稳定可化的（但不是严格的）；算术平均数 A 是 (G, A)- 次稳定可化的；对数平均 L 是严格 (G, A)- 超稳定可化的，且严格 (A, H)- 次稳定可化的；反双曲平均数 I 是严格 (A, G)-次稳定可化的 ([27])。第一个塞弗特平均数是严格 (G, A)-超稳定可化的 ([1])。

在上述论文中提出了一些开放问题，我们从中挑出以下几个。

(1) 求出所有满足以下条件的数对 (p, q)：吉尼平均数 $G_{p,\ q}$ 和 Stolarsky 均值 $E_{p,\ q}$ 是稳定的（[23]）。(2) 证明或证伪第一个塞弗特平均数 P 不可稳定化（[23]）。(3) 求出使第一个塞弗特平均数 P 严格为（B_p, B_q）-次稳定可化的最佳实数 $p > 0$ 和 $q > 0$ （[27]）。(4) 对某些实数 $p > 0, q > 0$ （[27]），第二个塞弗特平均数 T 和 Neuman-S´andor 平均数 NS 是否严格为（B_p, B_q）-次稳定可化?

本文旨在将此前发展的渐近展开技术应用于方程 (1.2)、(1.3) 和 (1.4)，以获得稳定、可稳定化和已稳定化均值的渐近展开。

若对每个 $N \in \mathbb{N}_0$，形式级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ 都满足以下条件，则称其为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时关于渐近序列 $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的渐近展开

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_N(x)).$$

通过使变量趋近某个固定点或无穷远处的点，可以将函数近似到给定精度。该级数中少量项即可确保良好的近似。泰勒级数也可以视为 $x \to 0$ 时的渐近展开。渐近级数可能收敛，也可能发散。对于给定的渐近序列，渐近表示是唯一的。反过来，渐近级数表示一类渐近相等的函数。渐近展开理论的理论背景可见 [14]。

对于二元对称齐次稳定平均数，我们求得形式如下的渐近幂级数展开中的系数 a_n

$$M(x-t, x+t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} x^{-2n+1}, \text{ as } x \to \infty, \tag{1.5}$$

它将由递归关系给出。我们将证明，渐近表示 (1.5) 足以得到一般形式

$$M(x+s, x+t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s,t) x^{-n+1}, \text{ as } x \to \infty, \tag{1.6}$$

其中 $a_n \equiv a_{2n}(-t, t)$.

基于渐近展开，更准确地说，基于第一个非零系数的正性，可以引入渐近不等式的概念。回顾其定义。

定义1.3（[30]）。设 $F(s,t)$是任意满足以下条件的齐次二元函数

$$F(x+s, x+t) = c_k(t,s) x^{-k+1} + \mathcal{O}(x^{-k}).$$

若对于所有 s 和 t， $c_k(s,t) > 0$ ，则称 F 渐近大于零，记作

$$F \succ 0.$$

渐近不等式被视为可比较平均数之间的一种必要关系。也就是说，若 $F \geq 0$, 则 $F \succ 0$；这一点已在同一篇论文中得到证明。此外，正如 [8]中所解释的，对于渐近不等式，只需考察 $s = -t$ 的情形。渐近不等式曾用于求出包含 Seiffert（[30]）均值和 Neuman-S´andor（[13]）均值的平均数凸组合中的最优参数，也用于求出使某些参数平均之间的不等式成立的最优参数（[11]）。本文将利用渐近不等式处理幂均值的次可稳定化情形。

本文结构如下。第2节陈述关于渐近展开运算的一些基本结果，并给出后续将用到的辅助结果。第3节在所涉及的三个平均数均存在渐近展开的前提下，求出合成平均映射的渐近展开。随后利用这一结果，求出稳定均值、可稳定化均值和已稳定化均值的渐近展开。第4节给出以下必要条件：平均数 N同时为(K, M)-可稳定化和(M, K)-可稳定化；平均数 M同时为(K, N)-已稳定化和(N, K)-已稳定化；以及平均数 M同时为(K, N)-可稳定化和(K, N)-已稳定化。结合 [11] 和 [30], 中推导出的参数平均的已知渐近展开，第5节将说明如何利用所得系数解决以下问题：在所研究的参数平均类别中识别稳定均值；证明某个平均数不可稳定化或不可已稳定化；以及求出使给定平均数可由一对参数平均稳定化的最优参数。递归公式是借助计算机代数系统 Mathematica 求得的。第6节总结所有结果，强调本文对所引论文中未决问题的贡献，并提出由本文引出的新猜想。

2. Preliminaries

假设此处涉及的所有平均值都具有以下类型的渐近展开： $x \to \infty$

$$M(x-t, x+t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^M t^{2n} x^{-2n+1}, \tag{2.1}$$

$$N(x-t, x+t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^N t^{2n} x^{-2n+1}, \tag{2.2}$$

$$K(x-t, x+t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^K t^{2n} x^{-2n+1}. \tag{2.3}$$

渐近幂级数的运算方式非常直观。线性组合的渐近展开，就是逐项进行相同线性组合所得的展开。两个渐近幂级数乘积中的系数由卷积定义。此外，两个渐近幂级数也可以相除，结果可写成渐近级数的形式，如 [11, 引理 1.1.]所述。复合的渐近展开，其系数可通过

形式代换和项的重新排列得到（[14, 第 20] 页）。在一些合理的假设下，渐近幂级数可以逐项求导和积分（[14, 第 21] 页）。接下来我们陈述关于变换的基本结果，该结果涉及渐近级数的幂。新级数的系数取决于幂 r 和初始序列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$，这里记作 $P[n, r, \mathbf{a}]$。我们假设所有序列均从 0 开始编号。

引理 2.1（[7, 17]）。设

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$$

给定一个关于 $g(x)$、具有 $a_0 \neq 0$ 的渐近展开（针对 $x \to \infty$）。那么，对所有实数 r，均有

$$[g(x)]^r \sim \sum_{n=0}^{\infty} P[n, r, \mathbf{a}] x^{-n},$$

其中 $P[0, r, \mathbf{a}] = a_0^r$，并且

$$P[n, r, \mathbf{a}] = \frac{1}{n a_0} \sum_{k=1}^{n} [k(1+r) - n] a_k P[n-k, r, \mathbf{a}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

注 2.2。考虑将 $P[n, r, \mathbf{a}]$ 视为赋给序列 $\mathbf{a}$ 的级数中 r 次幂里 x^{-n} 对应的系数，或许会有所帮助，尤其是当 r 为非负整数时；由此很容易得出以下有用关系。

(1) $P[n, 0, \mathbf{a}] = \delta_n$, $n \in \mathbb{N}_0$，其中 δ_n 表示单参数克罗内克δ函数。(2) $P[n, 1, \mathbf{a}] = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$。(3) $P[0, r, \mathbf{a}] = a_0^r$, $r \in \mathbb{R}$。

以下辅助序列将用于表示主要结果。令

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &:= (1, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \ldots) \\ \mathbf{h} &:= (2, -1, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \ldots). \end{aligned} \tag{2.4}$$

此外

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} &:= (1, -a_1, 0, -a_2, 0, -a_3, \ldots) \\ \tilde{\mathbf{h}} &:= (2, 1, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \ldots). \end{aligned}$$

我们将 $D(m, n, k)$ 和 $S(m, n, k)$ 记为稍后在定理 3.1 的证明中的内层求和里出现的项:

$$\begin{aligned} D(m,n,k) = {} & P[k, 2n, \tilde{\mathbf{g}}] P[m-2n-k, -2n+1, \tilde{\mathbf{h}}] \\ & - P[k, 2n, \mathbf{g}] P[m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}], \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} S(m,n,k) = {} & P[k, 2n, \tilde{\mathbf{g}}] P[m-2n-k, -2n+1, \tilde{\mathbf{h}}] \\ & + P[k, 2n, \mathbf{g}] P[m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由于序列 $\mathbf{g}$ 与 $\tilde{\mathbf{g}}$ 以及 $\mathbf{h}$ 与 $\tilde{\mathbf{h}}$ 之间的~关系，某些系数 $D(m, n, k)$ 和 $S(m, n, k)$ 等于零。

引理 2.3. 对于 $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-2n\}$，有

$$D(m,n,k) = \begin{cases} 0, & m \text{ even}, \\ -2P[k, 2n, \mathbf{g}] P[m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}], & m \text{ odd}, \end{cases} \tag{2.7}$$

and

$$S(m,n,k)=\begin{cases}2P[k,2n,\mathbf{g}]P[m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}], & m\ even,\\ 0, & m\ odd.\end{cases}\tag{2.8}$$

证明. 定义（生成）函数

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_kx^{-k},\qquad \tilde{G}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{g}_kx^{-k},$$

其 r 次幂可表示为

$$[G(x)]^r=\sum_{j=0}^{\infty}P[j,r,\mathbf{g}]x^{-j},\qquad [\tilde{G}(x)]^r=\sum_{j=0}^{\infty}P[j,r,\tilde{\mathbf{g}}]x^{-j}.$$

˜利用底层级数 A_1（序列 $\mathbf{a}=(a_1,0,a_2,0,\ldots)$ 的生成函数），可以建立函数 G 和 G 的幂展开中各系数之间的联系：

$$A_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^{-2k}.$$

成立

$$[G(x)]^r=(1+x^{-1}A_1(x))^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^{-k}A_1(x)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^{-k}\sum_{l=0}^{\infty}P[l,k,\overline{\mathbf{a}}]x^{-2l}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\binom{r}{j-2l}P[l,j-2l,\overline{\mathbf{a}}]x^{-j}$$

and

$$[\tilde{G}(x)]^r=(1-x^{-1}A_1(x))^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}(-1)^kx^{-k}A_1(x)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}(-1)^kx^{-k}\sum_{l=0}^{\infty}P[l,k,\overline{\mathbf{a}}]x^{-2l}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\binom{r}{j-2l}P[l,j-2l,\overline{\mathbf{a}}]x^{-j}$$

由此可得

$$P[j,r,\mathbf{g}]=(-1)^jP[j,r,\tilde{\mathbf{g}}].\tag{2.9}$$

此外，设

$$H(x)=\sum_{k=0}^{\infty}h_kx^{-k},\qquad \tilde{H}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{h}_kx^{-k},$$

并且

$$[H(x)]^r=\sum_{j=0}^{\infty}P[j,r,\mathbf{h}]x^{-j},\qquad [\tilde{H}(x)]^r=\sum_{j=0}^{\infty}P[j,r,\tilde{\mathbf{h}}]x^{-j}.$$

如果 A_2 表示序列 $\tilde{\mathbf{a}}=(2,0,a_1,0,a_2,\ldots)$ 的生成函数：

$$A_2(x)=2+\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{-2k},$$

˜那么，函数 r的 H 次幂 H 可以写成

$$
\begin{aligned}
&[H(x)]^r = (A_2(x) - x^{-1})^r = A_2(x)^r(1 - x^{-1}A_2(x)^{-1})^r \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} (-1)^k x^{-k} A_2(x)^{r-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} (-1)^k x^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} P[l, r-k, \tilde{\mathbf{a}}] x^{-2l} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{r}{j-2l} P[l, r+2l-j, \tilde{\mathbf{a}}] x^{-j}
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
[\tilde{H}(x)]^r &= A_2(x)^r(1 + x^{-1}A_2(x)^{-1})^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{-k} A_2(x)^{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} P[l, r-k, \tilde{\mathbf{a}}] x^{-2l} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{r}{j-2l} P[l, r+2l-j, \tilde{\mathbf{a}}] x^{-j}
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
P[j, r, \mathbf{h}] = (-1)^j P[j, r, \tilde{\mathbf{h}}]. \tag{2.10}
$$

将关系式 (2.9) 和 (2.10) 与 D 和 S 的定义（(2.5) 和 (2.6)）结合，可得关系式 (2.7) 和 (2.8)。□

3. Main results

在稳定、可稳定化和已稳定这三种概念中，出现了类似的复合。以下定理给出了 K、 M 和 N的合成均值映射的渐近展开:

$$R(x-t,x+t) \coloneqq \mathcal{R}(K,N,M)(x-t,x+t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m^R t^{2m} x^{-2m+1}. \tag{3.1}$$

随后，将此复合与 $R=K=N=M$ 一起使用，可得到稳定均值 M 的渐近展开；与 $R=N$ 一起使用，可得到 (K,M)-可稳定化均值 N 的渐近展开；与 $R=M$ 一起使用，可得到 (K,N)-已稳定化均值 M 的渐近展开。

定理 3.1. 设齐次对称均值 M、 N 和 K 具有渐近展开 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)。则渐近展开 (3.1) 中的系数 $(a_m^R)_{m\in\mathbb{N}_0}$ 由下列公式给出:

$$a_m^R = \sum_{n=0}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}], \quad m\in\mathbb{N}_0, \tag{3.2}$$

其中 $\mathsf{d}=(d_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$, $\mathsf{s}=(s_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$, 其中

$$d_m = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m+1-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m+1-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M], \quad m\in\mathbb{N}_0, \tag{3.3}$$

$$s_m = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M], \quad m\in\mathbb{N}_0, \tag{3.4}$$

并且 g^M 和 h^M 的定义同 (2.4)，其中 $a_m = a_m^M$。

证明。首先，我们从复合式 $N\big(x-t,M(x-t,x+t)\big)$ 出发。我们将参数 $x-t$ 和 $M=M(x-t,x+t)$ 写成项 $\frac{1}{2}(M-x+t)$ 和 $\frac{1}{2}(M+x-t)$ 的差与和的形式。然后应用展开式 (2.2)，将 M 替换为其渐近展开式 (2.1)，使用引理 2.1 并重新整理求和，得到如下结果:

$$\begin{aligned}
&N\big(x-t,M(x-t,x+t)\big) \\
&= N\left(\tfrac{1}{2}(M+x-t)-\tfrac{1}{2}(M-x+t),\tfrac{1}{2}(M+x-t)+\tfrac{1}{2}(M-x+t)\right) \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^N \left(\tfrac{1}{2}(M-x+t)\right)^{2n}\left(\tfrac{1}{2}(M+x-t)\right)^{-2n+1} \\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^N \left(1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k^M t^{2k-1}x^{-2k+1}\right)^{2n}\left(2-\frac{t}{x}+\sum_{j=1}^{\infty} a_j^M t^{2j}x^{-2j}\right)^{-2n+1} t^{2n}x^{-2n+1} \\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^N \sum_{k=0}^{\infty} P[k,2n,\mathbf{g}^M]t^k x^{-k}\sum_{j=0}^{\infty} P[j,-2n+1,\mathbf{h}^M]t^j x^{-j} t^{2n}x^{-2n+1} \\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} a_n^N \sum_{k=0}^{m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]t^m x^{-m+1}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

采用类似的步骤，可得

$$
\begin{aligned}
N\big(M(x-t,x+t),x+t\big) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^N \left(\tfrac{1}{2}(x+t-M)\right)^{2n} \left(\tfrac{1}{2}(x+t+M)\right)^{-2n+1} \quad (3.6)\\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^N \left(1-\sum_{k=1}^{\infty} a_k^M t^{2k-1}x^{-2k+1}\right)^{2n} \left(2+\frac{t}{x}+\sum_{j=1}^{\infty} a_j^M t^{2j}x^{-2j}\right)^{-2n+1} t^{2n}x^{-2n+1}\\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^N \sum_{k=0}^{\infty} P[k,2n,\tilde{\mathbf{g}}^M]t^k x^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} P[j,-2n+1,\tilde{\mathbf{h}}^M]t^j x^{-j} t^{2n}x^{-2n+1}\\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor} a_n^N \sum_{k=0}^{m-2n} P[k,2n,\tilde{\mathbf{g}}^M]P[m-2n-k,-2n+1,\tilde{\mathbf{h}}^M]t^m x^{-m+1}.
\end{aligned}
$$

现在，(3.1) 中的左侧可写为

$$
K(X-T,X+T)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^K T^{2n}X^{-2n+1}, \tag{3.7}
$$

其中 X和 T满足：它们的差等于 $N(x-t,M)$，它们的和等于 $N(M,x+t)$，且 $M=M(x-t,x+t)$。我们还可以进一步分析 T和 X。利用 (3.5)、(3.6)、(2.5)、(2.7) 和 (3.3)，可得如下结果

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\left(N(M(x-t,x+t),x+t)-N(x-t,M(x-t,x+t))\right) \quad (3.8)\\
&\sim \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor} a_n^N \sum_{k=0}^{m-2n} \big(P[k,2n,\tilde{\mathbf{g}}^M]P[m-2n-k,-2n+1,\tilde{\mathbf{h}}^M]\\
&\qquad\qquad - P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]\big)t^m x^{-m+1}\\
&\sim \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor} a_n^N \sum_{k=0}^{m-2n} D(m,n,k)t^m x^{-m+1}\\
&\sim \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m+1-2n} D(2m+1,n,k)t^{2m+1}x^{-2m}\\
&\sim -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m+1-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m+1-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]t^{2m+1}x^{-2m}\\
&\sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m t^{2m+1}x^{-2m}
\end{aligned}
$$

类似地，利用 (3.5)、(3.6)、(2.6)、(2.8) 和 (3.4)，我们得到如下结果

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}\left(N(M(x-t,x+t),x+t)+N(x-t,M(x-t,x+t))\right) \quad (3.9)\\
&\sim \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor} a_n^N \sum_{k=0}^{m-2n} \big(P[k,2n,\tilde{\mathbf{g}}^M]P[m-2n-k,-2n+1,\tilde{\mathbf{h}}^M]\\
&\qquad\qquad + P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]\big)t^m x^{-m+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sim \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_n^N \sum_{k=0}^{m-2n} S(m,n,k)t^m x^{-m+1} \\
&\sim \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} S(2m,n,k)t^{2m} x^{-2m+1} \\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]t^{2m} x^{-2m+1} \\
&\sim \sum_{m=0}^{\infty} s_m t^{2m} x^{-2m+1}.
\end{aligned}
$$

最后，由 (3.1)，将 K (2.3)、T (3.8) 和 X (3.9) 的展开代入 (3.7)，再应用引理 2.1 并重新排列求和项，我们得到：

$$
\begin{aligned}
R &= K(X-T, X+T) \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^K \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^{2k+1} x^{-2k}\right)^{2n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j t^{2j} x^{-2j+1}\right)^{-2n+1} \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^K \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^{2k} x^{-2k}\right)^{2n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j t^{2j} x^{-2j}\right)^{-2n+1} t^{2n} x^{-2n+1} \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^K \sum_{k=0}^{\infty} P[k,2n,\mathbf{d}] t^{2k} x^{-2k} \sum_{j=0}^{\infty} P[j,-2n+1,\mathbf{s}] t^{2j} x^{-2j} t^{2n} x^{-2n+1} \\
&\sim \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}] P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}] t^{2m} x^{-2m+1}.
\end{aligned}
$$

□

注 3.2. 复合平均数 $K(N_1, N_2)$ 的渐近展开已由 Buri´c 和 Elezovi´c ([6]) 针对两类渐近幂级数推导：定理 2.1 中的一般情形 ($\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n x^{-n+1}$)，以及定理 2.2 中的对称情形 ($\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^{2n} x^{-2n+1}$)。在我们的情形中，平均数 $N_1(s,t) = N(s, M(s,t))$ 和 $N_2(s,t) = N(M(s,t)\ t)$ 并非对称，因此需要进行非对称处理。不过，由于平均数 N_1 和 N_2 的特殊性质，它们的差是反对称的，和是对称的，因此最终当平均数 K、N 和 M 对称时，复合 $K(N_1, N_2)$ 也是对称的。仅通过应用上述论文中的定理 2.1，很难推导出 $K(N_1, N_2)$ 渐近展开的对称形式，因此我们需要从头进行类似的推导，以获得所需结果。

根据定理 3.1，前几个系数 a_m^R 如下：

$$\begin{aligned}
a_0^R &= 1,\\
a_1^R &= \frac{1}{4}(a_1^K + 2a_1^M + a_1^N),\\
a_2^R &= \frac{1}{16}(a_2^K + 8a_2^M + a_1^N + 2a_1^M(1+2a_1^M)a_1^N\\
&\quad - a_1^K(3a_1^N + a_1^M(2+8a_1^N)) + a_2^N),\\
a_3^R &= \frac{1}{64}(a_3^K + 32a_3^M + (1-2a_1^M(1+2a_1^M)^2 + 8a_2^M + 32a_1^M a_2^M)a_1^N\\
&\quad - a_2^K(7a_1^N + 2a_1^M(3+8a_1^N)) + a_1^K(a_1^N(-3+4a_1^N) - 8a_2^M(1+4a_1^N)\\
&\quad + 4(a_1^M)^2(1+a_1^N)(1+4a_1^N) + 2a_1^M(a_1^N(3+8a_1^N) - 8a_2^N) - 7a_2^N)\\
&\quad + 6a_2^N + 6a_1^M(3+4a_1^M)a_2^N + a_3^N).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.1. 稳定均值。为了得到稳定均值 M 的渐近展开，我们需要将定理 3.1 与 $R = N = K = M$ 结合使用。其思路是用低阶项表示系数$a_m = a_m^M$，即写成递归关系的形式。

定理 3.3. 设齐次对称稳定均值 M 具有渐近展开式 (1.5)，其中 $a_m = a_m^M$。那么 $a_0 = 1$、$a_1 \in \mathbb{R}$，且对于 $m \geq 2$，系数a_m 由以下递归公式给出：

$$\begin{aligned}
a_m = \frac{2^{2m-1}}{2^{2m-2}-1}\Bigg(&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}]\\
&+ \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}]\Bigg), \quad m \geq 2,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中，g 和 h 在 (2.4) 中定义，d 和 s 由 (3.3) 和 (3.4) 定义。

证明。证明基于定义关系式 (1.2)，其中变量为 $x-t$ 和 $x+t$：

$$M(x-t,x+t) = M\big(M(x-t,M(x-t,x+t)),M(M(x-t,x+t),x+t)\big). \tag{3.12}$$

证明分为三个部分。左侧的渐近展开具有形式 (1.5)，而右侧渐近展开中的系数将作为定理 3.1 的推论得到。随后将确定具有最高指标的项 a_m。再令相应的系数相等，由此推导出递归公式 (3.11)。

I (3.12) 右侧的渐近展开。由定理 3.1，取 $a_m = a_m^M = a_m^N = a_m^K$，可得

$$a_m^R = \sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}], \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{3.13}$$

其中

$$d_m = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{k=0}^{2m+1-2n} P[k,2n,\mathbf{g}]P[2m+1-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}], \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{3.14}$$

and

$$s_m = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k, 2n, \mathbf{g}]P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}], \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{3.15}$$

II 提取高指标项 a_m。在证明的这一步中，我们将找出序列 a 中包含在 a_m^R 内的高指标项。简单计算可得 $a_0^R = 1$ 和 $a_1^R = a_1$，这也可从系数列表 (3.10) 中看出。对于 $m \geq 2$，我们可以将 (3.13) 右侧的和拆分为三部分：$n = 0$、$n \in \{1, \ldots, m-1\}$ 和 $n = m$：

$$\begin{aligned} a_m^R = {} & a_0 \sum_{k=0}^{m} P[k, 0, \mathbf{d}]P[m-k, 1, \mathbf{s}] \\ & + \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{m-n} P[k, 2n, \mathbf{d}]P[m-n-k, -2n+1, \mathbf{s}] \\ & + a_m P[0, 2m, \mathbf{d}]P[0, -2m+1, \mathbf{s}]. \end{aligned}$$

根据注 2.2，$P[k, 0, \mathbf{d}] = \delta_k$、$P[m, 1, \mathbf{s}] = s_m$、$P[0, 2m, \mathbf{d}] = d_0^{2m}$和 $P[0, -2m+1, \mathbf{s}] = s_0^{-2m+1}$，因此

$$a_m^R = a_0 s_m + \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{m-n} P[k, 2n, \mathbf{d}]P[m-n-k, -2n+1, \mathbf{s}] + a_m d_0^{2m} s_0^{-2m+1}.$$

使用 s_m 的公式 (3.15)，并分别将 a_0、d_0 和 s_0 替换为 1、$_1$ $_2$ 和 1，我们得到

$$\begin{aligned} a_m^R = {} & \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k, 2n, \mathbf{g}]P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}] \\ & + \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{m-n} P[k, 2n, \mathbf{d}]P[m-n-k, -2n+1, \mathbf{s}] + 2^{-2m} a_m. \end{aligned}$$

我们将第一个求和拆分为三部分：$n = 0$、$n \in \{1, \ldots, m-1\}$ 和 $n = m$，其中对于 $n = 0$，我们有

$$\frac{1}{2} a_0 \sum_{k=0}^{2m} P[k, 0, \mathbf{g}]P[2m-k, 1, \mathbf{h}] = \frac{1}{2} a_0 \sum_{k=0}^{2m} h_{2m}\delta_k = \frac{1}{2} a_0 \sum_{k=0}^{2m} a_m \delta_k = \frac{1}{2} a_m,$$

对于 $n = m$，我们有

$$\frac{1}{2} a_m P[0, 2m, \mathbf{g}]P[0, -2m+1, \mathbf{h}] = \frac{1}{2} a_m g_0^{2m} h_0^{-2m+1} = a_m 2^{-2m}.$$

现在我们继续分析包含这些信息且将项按a_m 分组后的 a_m^R：

$$\begin{aligned} a_m^R = {} & (2^{-1} + 2^{-2m+1}) a_m \\ & + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k, 2n, \mathbf{g}]P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}] \\ & + \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{m-n} P[k, 2n, \mathbf{d}]P[m-n-k, -2n+1, \mathbf{s}]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

令 $i_{max}(\cdot)$表示满足 a_i 出现在括号内某项中的最高指标 i 。也就是说，

$$i_{max}(g_k) = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor, \qquad i_{max}(h_k) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor.$$

在 (3.16) 中，根据引理 2.1， $P[k, 2n, \mathbf{g}]$ 仅取决于有限序列 $(g_0, \ldots, g_k)$，因此

$$i_{max}(P[k, 2n, \mathbf{g}]) = \max_{j \in \{0,\ldots,k\}} (i_{max}(g_j)) = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor.$$

此外，根据同一公式， $P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}]$ 仅取决于有限序列 $(h_0, \ldots, h_{2m-2n-k})$，因此

$$i_{max}(P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}]) = \max_{j \in \{0,\ldots,2m-2n-k\}} (i_{max}(h_j)) = \lfloor m-n-\frac{k}{2} \rfloor.$$

(3.16) 第二行求和中出现的最大下标是

$$\begin{aligned} & i_{max}\left(\sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k, 2n, \mathbf{g}] P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}] \right) \\ & \quad \le \max_{\substack{n \in \{1,\ldots,m-1\} \\ k \in \{0,\ldots,2m-2n\}}} (m-1, i_{max}(P[k, 2n, \mathbf{g}]), i_{max}(P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}]) \\ & \quad = \max_{\substack{n \in \{1,\ldots,m-1\} \\ k \in \{0,\ldots,2m-2n\}}} \left(m-1, \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor, \lfloor m-n-\frac{k}{2} \rfloor \right) = m-1. \end{aligned}$$

关于 (3.16) 的第三行，我们首先观察到 d_m。由公式 (3.14) 可得

$$\begin{aligned} -2d_m &= a_0 \sum_{k=0}^{2m+1} P[k, 0, \mathbf{g}] P[2m+1-k, 1, \mathbf{h}] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{k=0}^{2m+1-2n} P[k, 2n, \mathbf{g}] P[2m+1-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}] \\ &= h_{2m+1} + \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{k=0}^{2m+1-2n} P[k, 2n, \mathbf{g}] P[2m+1-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}], \end{aligned}$$

因此

$$i_{max}(d_m) \le \max(i_{max}(h_{2m+1}), m, i_{max}(g_{2m-1}), i_{max}(h_{2m-1})) = m.$$

由前面的讨论还可知

$$i_{max}(s_m) = m.$$

结合推导出的关系，最终得到

$$\begin{aligned} & i_{max}\left(\sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{m-n} P[k, 2n, \mathbf{d}] P[m-n-k, -2n+1, \mathbf{s}] \right) \\ & \qquad \le \max_{\substack{n \in \{1,\ldots,m-1\} \\ k \in \{0,\ldots,m-n\}}} (m-1, i_{max}(d_k), i_{max}(s_{m-n-k})) \\ & \qquad \le \max_{\substack{n \in \{1,\ldots,m-1\} \\ k \in \{0,\ldots,m-n\}}} (m-1, k, m-n-k) \end{aligned}$$

$$= m - 1.$$

III 对（3.12）等式左侧和右侧的系数进行比较。对于稳定均值 M，（3.12）左侧和右侧的展开必须相等，即 $a_m = a_m^R$ 对于 $m \in \mathbb{N}_0$。系数 $a_0^R = 1$，这与性质（1.1）一致。接下来，我们得到自由系数 a_1。此外，（3.16）中 a_m^R 与 a_m 之间关于 $m \geq 2$ 的联系也是线性的，因此对（3.16）中的这些系数进行比较，最终得到关系（3.11），从而完成证明。□

为方便起见，我们先给出前几个系数 a_m^R:

$$\begin{aligned}
a_0^R &= 1,\\
a_1^R &= a_1,\\
a_2^R &= \tfrac{1}{16}a_1(1+a_1)(1-4a_1) + \tfrac{5}{8}a_2,\\
a_3^R &= \tfrac{1}{64}((1+a_1)(a_1(1+2a_1(-3+6a_1+8a_1^2)-8a_2)+6a_2)) + \tfrac{17}{32}a_3,\\
a_4^R &= \tfrac{1}{256}(-56a_1^5 - 48a_1^6 + 33a_2^2 + 24a_1^4(1+10a_2)\\
&\quad + a_1^3(22+300a_2) + 15(a_2+a_3) + 3a_1^2(-3+8a_2+4a_3)\\
&\quad + a_1(1+3a_2(-7+32a_2)+18a_3)) + \tfrac{65}{128}a_4.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

对于稳定均值，系数 a_m^R 必须等于 a_m。利用 (3.11)，我们得到稳定均值的渐近展开。经过连续代入，所有后续系数都可以表示为变量 a_1的多项式。变量 ($x-t, x+t$)上的二元对称齐次稳定均值的五项渐近展开形式如下:

$$\begin{aligned}
M(x-t,x+t) &= x + a_1t^2x^{-1} + \tfrac{1}{6}a_1(1+a_1)(1-4a_1)t^4x^{-3}\\
&\quad + \tfrac{1}{90}a_1(1+a_1)(6-31a_1+36a_1^2+64a_1^3)t^6x^{-5}\\
&\quad + \tfrac{1}{2520}a_1(1+a_1)\big(90-531a_1+937a_1^2+568a_1^3-3088a_1^4-2176a_1^5\big)t^8x^{-7}\\
&\quad + \mathcal{O}(x^{-9}).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

命题 3.4. 二元齐次对称平均 M 具有渐近展开式 (1.5)，其渐近展开式为 (1.6)，其中 $s \neq \pm t$

$$a_m(s,t) = 2^{-m}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_n \binom{1-2n}{m-2n} (t-s)^{2n} (t+s)^{m-2n}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

证明. 设 $\alpha = \frac{t+s}{2}$ 和 $\beta = \frac{t-s}{2}$。那么

$$\begin{aligned}
M(x+s,x+t) &= M(x+\alpha-\beta, x+\alpha+\beta)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta^{2n}(x+\alpha)^{-2n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta^{2n}x^{-2n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2n+1}{k}\alpha^k x^{-k}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_n\binom{1-2n}{m-2n}\beta^{2n}\alpha^{m-2n}x^{-m+1}
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

将命题 3.4 与渐近展开 (3.18) 结合起来，我们得到以下结果。

推论 3.5. 对于二元齐次对称稳定均值 M，其渐近展开 (1.5) 成立

$$\begin{aligned}M(x+s,x+t) &= x+\tfrac{1}{2}(s+t)+\tfrac{1}{4}(s-t)^2a_1x^{-1}-\tfrac{1}{8}(s-t)^2(s+t)a_1x^{-2}\\ &+\tfrac{1}{16}\left(a_1\left(s^2-t^2\right)^2-\tfrac{1}{6}a_1(a_1+1)(4a_1-1)(s-t)^4\right)x^{-3}\\ &+\tfrac{1}{64}a_1(s-t)^2(s+t)\left((a_1+1)(4a_1-1)(s-t)^2-2(s+t)^2\right)x^{-4}\\ &+\tfrac{1}{64}\Big((s-t)^2(s+t)^4a_1-(s-t)^4(s+t)^2a_1(1+a_1)(-1+4a_1)\\ &\quad+\tfrac{1}{90}(s-t)^6a_1(1+a_1)(6+a_1(-31+4a_1(9+16a_1)))\Big)x^{-5}+\mathcal{O}(x^{-6}).\end{aligned}$$

3.2. 可稳定化均值。

定理 3.6. 设齐次对称二元平均值 M、N 和 K 具有渐近展开 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)。假设 K 和 M 是稳定均值。那么，(K,M)-可稳定化均值 N的渐近展开 (2.2) 中的系数 $(a_m^N)_{m\in\mathbb{N}_0}$ 为：

$$\begin{aligned}a_0^N &= 1,\\ a_m^N &= \frac{2^{2m}}{2^{2m}-1}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1}a_n^N\sum_{k=0}^{2m-2n}P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]\\ &\quad+\sum_{n=1}^{m}a_n^K\sum_{k=0}^{m-n}P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}]\Bigg],\qquad m\in\mathbb{N},\end{aligned}\tag{3.19}$$

其中，$\mathbf{g}^M$ 和 $\mathbf{h}^M$ 在 (2.4) 中定义，$a_m=a_m^M$ 以及 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{s}$ 由 (3.3) 和 (3.4) 定义。

证明。由定理 3.1，取 $R=N$，从而有 $a_m^R=a_m^N$、$m\in\mathbb{N}_0$，得到

$$a_m^N=\sum_{n=0}^{m}a_n^K\sum_{k=0}^{m-n}P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}],\quad m\in\mathbb{N}_0.\tag{3.20}$$

对于方程 (3.20) 中的 $m=0$，我们得到 $a_0^N=1$，正如预期的那样。现在令 $m>0$。首先，我们将总和拆分为两部分，分别对应 $n=0$ 和 $n\in\{1,\dots,m\}$：

$$a_m^N=a_0^K\sum_{k=0}^{m}P[k,0,\mathbf{d}]P[m-k,1,\mathbf{s}]+\sum_{n=1}^{m}a_n^K\sum_{k=0}^{m-n}P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}].$$

根据注 2.2，第一部分可化简，因此我们有

$$a_m^N=s_m+\sum_{n=1}^{m}a_n^K\sum_{k=0}^{m-n}P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}].$$

现在我们对 s_m 使用公式 (3.4)

$$a_m^N=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}a_n^N\sum_{k=0}^{2m-2n}P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]$$

$$+\sum_{n=1}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}],$$

然后将求和拆分为两部分，分别对应 $n=m$ 和 $n\in\{0,\dots,m-1\}$，并应用注 2.2 中的结论。也就是说，

$$\begin{aligned}a_m^N &= \frac{1}{2}a_m^N P[0,2m,\mathbf{g}^M]P[0,-2m+1,\mathbf{h}^M]\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]\\ &\quad+\sum_{n=1}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}],\end{aligned}$$

其与 $g_0=1$ 和 $h_0=2$ 结合后可写为

$$\begin{aligned}a_m^N &= 2^{-2m}a_m^N+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]\\ &\quad+\sum_{n=1}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}]\end{aligned}$$

其中由 (3.19) 可轻易推出。 □

利用定理 3.6 中的公式 (3.19)，我们可得到一个平均数 N 的系数，使得对于给定的平均值 K 和 M，(1.3) 成立。以下列出前几个这样的系数:

$$\begin{aligned}a_0^N &= 1,\\ a_1^N &= \frac{1}{3}\big(a_1^K+2a_1^M\big),\\ a_2^N &= \frac{1}{45}\big(-2a_1^K(6a_1^M+5)a_1^M-(a_1^K)^2(8a_1^M+3)+a_1^K+3a_2^K\\ &\qquad+8(a_1^M)^3+4(a_1^M)^2+2a_1^M+24a_2^M\big)\\ a_3^N &= \frac{1}{2835}\big((a_1^K)^3\big(8a_1^M(26a_1^M+23)+41\big)\\ &\qquad+2(a_1^K)^2\big(a_1^M(4a_1^M(40a_1^M+81)+61)-5(48a_2^M+7)\big)\\ &\qquad-a_1^K\big(18a_2^K(16a_1^M+7)+408a_2^M+16a_1^M(2a_1^M(a_1^M(3a_1^M-7)-1)\\ &\qquad+54a_2^M+11)-21\big)-6a_2^K\big(a_1^M(68a_1^M+71)-3\big)+45a_3^K\\ &\qquad+6a_1^M\big(32(a_1^M)^4-12(a_1^M)^2+16(16a_1^M+7)a_2^M+7\big)+144(a_2^M+10a_3^M)\big).\end{aligned}$$

若要求平均值 N是（K,M）-可稳定化的，则必须考虑 K和 M的稳定性。当平均值 K和 M稳定时，系数 a_m^K和 a_m^M,$m\geq 2$可分别表示为变量 a_1^K和 a_1^M的多项式。将系数 a_m^K 和 a_m^M 代入展开式 (3.18)，可得到系数 a_m^N，其中

K 和 M 稳定:

$$\begin{aligned}
a_0^N &= 1,\\
a_1^N &= \frac{1}{3}\left(a_1^K + 2a_1^M\right),\\
a_2^N &= \frac{1}{90}\big(-(a_1^K)^2(16a_1^M+9) + a_1^K(3-4a_1^M(6a_1^M+5))\\
&\qquad -4(a_1^K)^3 - 4a_1^M(4a_1^M(a_1^M+1)-3)\big)\\
a_3^N &= \frac{1}{5670}\big(64(a_1^K)^5 + 4(a_1^K)^4(67+96a_1^M)\\
&\qquad + 12a_1^M(-1+2a_1^M)(3+2a_1^M)(-9+8a_1^M(1+a_1^M))\\
&\qquad + 3(a_1^K)^3(63+8a_1^M(51+40a_1^M))\\
&\qquad + (a_1^K)^2(-225+2a_1^M(207+4a_1^M(273+160a_1^M)))\\
&\qquad + 2a_1^K(27+a_1^M(-315+8a_1^M(3+4a_1^M(29+15a_1^M))))\big).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3. 稳定化均值。

定理 3.7. 设齐次对称二元均值 M、 N 和 K 具有渐近展开 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)。假设 K 和 N 是稳定平均数。那么，(K,N)-稳定化平均数 M的渐近展开 (2.1) 中的系数 $(a_m^M)_{m\in\mathbb{N}_0}$ 为:

$$\begin{aligned}
a_0^M &= 1,\\
a_m^M &= \sum_{n=1}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]\\
&\qquad + 2\sum_{n=1}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}], \quad m\in\mathbb{N},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中，$\mathbf{g}^M$ 和 $\mathbf{h}^M$ 由 (2.4) 给出，其中 $a_m = a_m^M$，而 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{s}$ 由 (3.3) 和 (3.4) 定义。

证明。利用定理 3.1 中的公式 (3.2)，令 $R = M$，从而 $a_m^R = a_m^M$、$m\in\mathbb{N}_0$，我们得到

$$a_m^M = \sum_{n=0}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}].$$

对于 $m=0$，我们得到 $a_0^M = 1$，正如预期。现在令 $m>0$。在右侧，对于 $n=0$，我们有 $a_0^K\sum_{k=0}^{m}P[k,0,\mathbf{d}]P[m-k,1,\mathbf{s}]$，其中 $a_0^K=1$、 $P[k,0,\mathbf{d}]=\delta_k$，以及 $P[m,1,\mathbf{s}]=s_m$。因此，这个和可以写成

$$a_m^M = s_m + \sum_{n=1}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k,2n,\mathbf{d}]P[m-n-k,-2n+1,\mathbf{s}].$$

根据定义 (3.4) 替换 s_m，并将其拆分为两部分，分别对应$n=0$ 和 $n\geq 1$，我们得到

$$a_m^M = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k,2n,\mathbf{g}^M]P[2m-2n-k,-2n+1,\mathbf{h}^M]$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{n=1}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k, 2n, \mathbf{d}] P[m-n-k, -2n+1, \mathbf{s}] \\
&= \frac{1}{2} a_m^M + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} a_n^N \sum_{k=0}^{2m-2n} P[k, 2n, \mathbf{g}^M] P[2m-2n-k, -2n+1, \mathbf{h}^M] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{m} a_n^K \sum_{k=0}^{m-n} P[k, 2n, \mathbf{d}] P[m-n-k, -2n+1, \mathbf{s}]
\end{aligned}
$$

然后减去 $\frac{1}{2} a_m^M$ 并乘以 2，即得到所需结果 (3.22)。□

利用定理 3.7 中的公式 (3.22)，我们得到平均数 M 的渐近展开中的系数，使得对于给定的平均值 K 和 N，等式 (1.4) 成立。以下是其中最前面的几个系数：

$$
\begin{aligned}
a_0^M &= 1, \\
a_1^M &= \frac{1}{2}\big(a_1^K + a_1^N\big), \\
a_2^M &= \frac{1}{8}\big(a_2^K + a_1^N + (a_1^N)^2 + (a_1^N)^3 - a_1^K a_1^N (3 + 2a_1^N) - (a_1^K)^2 (1 + 3a_1^N) + a_2^N\big), \\
a_3^M &= \frac{1}{32}\big(a_3^K + (a_1^K)^3 (1 + 2a_1^N)(2 + 5a_1^N) + (a_1^K)^2 (a_1^N (5 + 6a_1^N (3 + a_1^N)) - 2a_2^N) \\
&\quad - a_1^K (2a_2^K (2 + 5a_1^N) + a_1^N (5 + a_1^N (2 + a_1^N + 2(a_1^N)^2) - 2a_2^N) - a_2^N) + 6a_2^N \\
&\quad + a_1^N (1 - 3a_2^K (3 + 2a_1^N) + 10a_2^N + a_1^N (a_1^N + 2(a_1^N)^2 (1 + a_1^N) + 8a_2^N)) + a_3^N\big).
\end{aligned}
$$

为了使 M 成为 (K, N)-已稳定化，平均值 K 和 N 需要稳定，因此它们的系数遵循稳定均值系数规则 (3.18)，并可通过 a_1^K 和 a_1^N 表示。以下是 (K, N)-已稳定化均值 M 的渐近展开中的前几个系数：

$$
\begin{aligned}
a_0^M &= 1, \\
a_1^M &= \frac{1}{2}\big(a_1^K + a_1^N\big), \\
a_2^M &= \frac{1}{48}\big(-4(a_1^K)^3 - 9(a_1^K)^2 (1 + 2a_1^N) \\
&\qquad + a_1^K (1 - 6a_1^N (3 + 2a_1^N)) + a_1^N (7 + a_1^N (3 + 2a_1^N))\big), \\
a_3^M &= \frac{1}{2880}\big(64(a_1^K)^5 + 20(a_1^K)^4 (17 + 30a_1^N) \\
&\qquad + 5(a_1^K)^3 (73 + 36a_1^N (10 + 7a_1^N)) \\
&\qquad + 5(a_1^K)^2 (-17 + 3a_1^N (45 + 44a_1^N (3 + a_1^N))) \\
&\qquad - 3a_1^K (-2 + 5a_1^N (38 + a_1^N (19 + 4a_1^N (4 + 5a_1^N)))) \\
&\qquad - a_1^N (-186 + a_1^N (145 + a_1^N (595 + 4a_1^N (170 + 59a_1^N))))\big).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

4. Simultaneously stabilizable and stabilized

本节将展示如何利用第3节中的定理，在以下几个有趣的情形中推导出一些必要条件。

4.1. 同时 (K, M)-可稳定化和 (M, K)-可稳定化。设 K 和 M 是两个稳定均值。若 N 是 (K, M)-可稳定化且 (M, K)-可稳定化，则

$$\frac{1}{3}(a_1^K + 2a_1^M) = a_1^N = \frac{1}{3}(a_1^M + 2a_1^K)$$

由此可得 $a_1^N = a_1^M = a_1^K$，并且由于稳定均值的渐近展开完全由下标为 1 的系数决定，因此对所有 $m \in \mathbb{N}_0$，都有 $a_m^M = a_m^K$。根据列表 (3.21) 计算后续系数可得

$$\begin{aligned} a_2^N &= \frac{1}{6}a_1^N(1 + a_1^N)(1 - 4a_1^N), \\ a_3^N &= \frac{1}{90}a_1^N(1 + a_1^N)(6 - 31a_1^N + 36(a_1^N)^2 + 64(a_1^N)^3), \end{aligned}$$

这些系数具有稳定均值系数 (3.18) 的形式，表明 N 也应当是稳定的。

4.2. 同时被 (K, N) 稳定化和被 (N, K) 稳定化。设 K 和 N 是两个稳定均值。假设平均数 M 同时被 (K, N) 稳定化和被 (N, K) 稳定化。观察系数列表 (3.23)。系数 a_1^M 关于 K 和 N 对称。对于 $m = 2$，必须满足以下等式

$$\begin{aligned} a_2^M &= \frac{1}{48}(-4(a_1^K)^3 - 9(a_1^K)^2(1 + 2a_1^N) + a_1^K(1 - 6a_1^N(3 + 2a_1^N)) \\ &\quad + a_1^N(7 + a_1^N(3 + 2a_1^N))) \\ &= \frac{1}{48}(-4(a_1^N)^3 - 9(a_1^N)^2(1 + 2a_1^K) + a_1^N(1 - 6a_1^K(3 + 2a_1^K)) \\ &\quad + a_1^K(7 + a_1^K(3 + 2a_1^K))) \end{aligned}$$

由此可得

$$-\frac{1}{8}(a_1^K - a_1^N)(1 + a_1^K + a_1^N)^2 = 0.$$

有两种可能：$a_1^K = a_1^N$ 和 $a_1^K + a_1^N = -1$。如果第一种成立，那么

$$\begin{aligned} a_1^M &= a_1^N = a_1^K, \\ a_2^M &= \frac{1}{6}a_1^M(1 + a_1^M)(1 - 4a_1^M), \end{aligned}$$

这表明 M 应当是稳定的，因此（渐近地）等于 K 和 N。如果第二个条件成立，简单计算可得

$$a_2^M = -\frac{1}{2},\ a_2^M = -\frac{1}{8},\ a_3^M = -\frac{1}{16},\ a_4^M = -\frac{5}{128},\ a_5^M = -\frac{7}{256}.$$

这些系数对应于几何平均数渐近展开中的首批系数，相关结果可见 [12]。这种对应关系表明，几何平均数是唯一同时被 (K, N)-稳定化且被 (N, K)-稳定化的

对于不同的稳定均值 K 和 N。在这种情况下，会出现一个有趣的方程。若 G 被 (K, N)-稳定化，利用 N和 K的齐次性

$$\begin{aligned} G(s,t) &= K\big(N(s,\sqrt{st}), N(\sqrt{st},t)\big) = K\big(\sqrt{s}N(\sqrt{s},\sqrt{t}), \sqrt{t}N(\sqrt{s},\sqrt{t})\big) \\ &= N(\sqrt{s},\sqrt{t})K(\sqrt{s},\sqrt{t}) \end{aligned}$$

这意味着 G 也同时是 (N, K)-稳定化的。此外，对于 $s, t > 0$，用 s^2 和t^2 代替 s 和 t，我们得到

$$st = G(s^2, t^2) = N(s,t)K(s,t)$$

两边取平方根，可得以下方程

$$G = G(N, K)$$

这也称为高斯函数方程，它定义了通过高斯迭代过程（[5, 第 VI 章.3]）得到的复合平均，表明几何平均 G 也是 N和 K的复合平均，即 $G = N \otimes K$。

4.3. 同时是 (K, N)-可稳定化和 (K, N)-稳定化。将 M 和 N互换以修改公式 (1.3)，由列表 (3.21) 可读出 (K, N)-可稳定化均值 M的前几个系数；与列表 (3.23) 中的系数比较后，我们得到均值 M为 (K, N)-可稳定化且为 (K, N)-稳定化的必要条件。对于 $m = 1$，我们有

$$\frac{1}{3}\left(a_1^K + 2a_1^N\right) = a_1^M = \frac{1}{2}\left(a_1^K + a_1^N\right)$$

因此 $a_1^K = a_1^N = a_1^M$。由于 K 和 N 是稳定均值，且它们的渐近展开完全由 a_1^K和 a_1^N确定，所以对所有 $m \in \mathbb{N}_0$都有 $a_m^K = a_m^N$。然后，或者利用 M是 (K, N)-可稳定化，或者利用 M是 (K, N)-稳定化，在将 a_1^K和 a_1^N替换为 a_1^M后，我们得到以下系数:

$$\begin{aligned} a_2^M &= \frac{1}{6}a_1^M(1 + a_1^M)(1 - 4a_1^M), \\ a_3^M &= \frac{1}{90}a_1^M(1 + a_1^M)(6 - 31a_1^M + 36(a_1^M)^2 + 64(a_1^M)^3), \end{aligned}$$

这些是稳定均值系数，表明 M 也应当是稳定的，并且（渐近地）等于 K 和 N。

5. Examples and applications

根据定理 3.3 的结果，我们可以轻易看出，某个平均数要稳定所需的必要条件。这在 Stolarsky 平均数和吉尼平均数等引言中提到的参数平均情形下尤其有用。在论文 [11] 中，我们推导了一些单参数和双参数平均数类的渐近展开，这些展开将用于解决 Ra¨ıssouli 的公开问题，并展示主定理的应用。关于数学平均的更多内容可见 [5]。

5.1. 幂均值。 r次幂均值对所有 $s,t>0$ 定义如下:

$$B_r(s,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{s^r+t^r}{2}\right)^{1/r}, & r\neq 0,\\ \sqrt{st}, & r=0.\end{cases}$$

例如，这种平均数的特例包括算术平均数 $A=B_1$、平方平均数 $Q=B_2$ 和调和平均数 $H=B_{-1}$。几何平均 $G=B_0$ 是 B_r 在 $r\to 0$时的极限情形。简单计算可知，幂均值 M_r 对每个 r都是稳定的。

在论文 [11], 中，利用 $\alpha=0$ 和 $\beta=t$，我们得到r次幂均值的渐近展开:

$$B_r(x-t,x+t)\sim x+\tfrac{1}{2}(r-1)t^2x^{-1}-\tfrac{1}{24}(r-1)(r+1)(2r-3)t^4x^{-3}+\mathcal{O}(x^{-5}).\quad(5.1)$$

文献 [9]研究了 n变量幂均值的渐近行为。由于幂均值是稳定的，这些系数满足递归公式 (3.11)。

5.2. 基尼平均数。基尼平均数对所有 $s,t>0$ 均有定义，定义如下

$$G_{p,r}(s,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{s^p+t^p}{s^r+t^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}, & p\neq r,\\ \exp\left(\dfrac{s^p\log s+t^p\log t}{s^p+t^p}\right), & p=r\neq 0,\\ \sqrt{st}, & p=r=0.\end{cases}$$

参数为 p 和 r。这些平均数最早由 Gini（[16]）提出。幂均值属于幂均值类，因为 $G_{0,\ r}=B_r$ ；此外，莱默平均数 $G_{r+1,\ r}$ 是基尼平均数的特例。

在论文 [11], 中，借助 $\alpha=0$ 和 $\beta=t$，我们得到了基尼平均数的渐近展开:

$$\begin{aligned}G_{p,r}(x-t,x+t)\sim x+\tfrac{1}{2}(p+r-1)t^2x^{-1}+\tfrac{1}{24}\big[&(-3-2p^3+p^2(3-2r)\\&+2r+(3-2r)r^2+p(2-2(-3+r)r))\big]t^4x^{-3}+\mathcal{O}(x^{-5}).\end{aligned}$$

将基尼平均数渐近展开中已知的系数与稳定均值 (3.18) 的系数相等，可知

$$\begin{aligned}a_1&=\tfrac{1}{2}(p+r-1)\\ \tfrac{1}{6}a_1(1+a_1)(1-4a_1)&=\tfrac{1}{24}\big[(-3-2p^3+p^2(3-2r)+2r\\&\qquad+(3-2r)r^2+p(2-2(-3+r)r))\big]\end{aligned}$$

这等价于

$$pr(p+r)=0.$$

由于 $G_{0,\ r}=B_r$, $G_{p,\ 0}=B_p$ 以及 $G_{p,\ -p}=B_0=G$，我们可以得出结论：唯一的稳定基尼平均数是幂均值。

5.3. Stolarsky 均值。Stolarsky 均值也称为广义均值或差分均值，是 Stolarsky 于 [28] 提出的一类双参数平均值。Leach 和 Sholander 在 [20, 19] 研究了它们的性质，随后 P´ales [22] 等人也进行了进一步研究。

阶数为 p,r 的 Stolarsky 均值对所有 $s,t>0$ 定义为

$$E_{p,r}(s,t)=\begin{cases}\left[\frac{r(t^p-s^p)}{p(t^r-s^r)}\right]^{1/(p-r)}, & p\neq r,\ p,r\neq 0,\\ \frac{1}{e^{1/r}}\left(\frac{t^{t^r}}{s^{s^r}}\right)^{1/(t^r-s^r)}, & r=p\neq 0,\\ \left[\frac{t^r-s^r}{r(\log t-\log s)}\right]^{1/r}, & p=0,\ r\neq 0,\\ \sqrt{st}, & p=r=0.\end{cases}$$

通过取极限可得到特殊情形。它关于 t 和 s 对称，也关于 p 和 r 对称。$E_{p,r}(s,t)$ 随着 s 或 t 的增大而增大，也随着 r 或 s ([20]) 的增大而增大。

根据论文 [11]，（作者为 $\alpha=0$ 和 $\beta=t$），我们有:

$$E_{p,r}(x-t,x+t)\sim x+\tfrac{1}{6}(p+r-3)t^2x^{-1}+\tfrac{1}{360}\big[-45-2p^3+p^2(5-2r)\\ +r(10+(5-2r)r)-2p(-5+(-5+r)r)\big]t^4x^{-3}+\mathcal{O}(x^{-5}).$$

比较 Stolarsky 平均数与稳定均值的相应系数，可得

$$a_1=\tfrac{1}{6}(p+r-3)$$
$$\tfrac{1}{6}a_1(1+a_1)(1-4a_1)=\tfrac{1}{360}\big[-45-2p^3+p^2(5-2r)\\ +r(10+(5-2r)r)-2p(-5+(-5+r)r)\big]$$

这可化简为

$$(p-2r)(2r-q)(p+r)=0.$$

由于 $E_{2r,r}=B_r$, $E_{p,2p}=B_p$ 和 $E_{p,-p}=B_0=G$，我们可以得出结论：唯一稳定的 Stolarsky 均值仍然是幂均值。

5.4. 广义对数平均。设 r 为实数。广义对数平均（[29]）定义在 $s,t>0$ （$s\neq t$）上如下:

$$L_r(s,t)=\begin{cases}\left(\frac{t^{r+1}-s^{r+1}}{(r+1)(t-s)}\right)^{1/r}, & r\neq -1,0,\\ \frac{t-s}{\log t-\log s}, & r=-1,\\ \frac{1}{e}\left(\frac{t^t}{s^s}\right)^{1/(t-s)}, & r=0.\end{cases}$$

其中 L_{-1} 为对数平均， L_0 为反双曲平均数。它在$r>1$ 时是 Schur 凸的，在 $r<1$ （[10]）时是 Schur 凹的。

广义对数平均（[11]）的渐近展开的开头部分为

$$L_r(x-t,x+t)\sim x+\tfrac{1}{6}(r-1)t^2x^{-1}-\tfrac{1}{360}(r-1)(2r^2+5r-13)t^4x^{-3}+\mathcal{O}(x^{-5}).$$

为了 L_r 稳定，其系数必须与稳定均值系数（3.18）一致，也就是说，必须满足以下条件

$$a_1=\tfrac{1}{6}(r-1),$$
$$\tfrac{1}{6}a_1(1+a_1)(1-4a_1)=-\tfrac{1}{360}(r-1)(2r^2+5r-13),$$

由此得到三次方程，其解为 $r=1$、 $r=-\frac{1}{2}$ 和 $r=-2$。在这三种情况下，我们分别得到一种幂均值，即 $L_1=A$、 $L_{-\frac{1}{2}}=B_{\frac{1}{2}}$ 和 $L_{-2}=G$ ，它们都稳定。

注 5.1。在吉尼平均、Stolarsky 平均和广义对数平均这几类中，只有幂均值是稳定的。

5.5. 幂均值的稳定性与可稳定化性。求（K, M）-可稳定化均值 N 的系数，其中 $K = B_p$和 $M = B_q$。将可稳定化均值（3.21）的系数与（5.1）中的系数合并，得到与一对幂均值（B_p, B_q）可稳定化的平均数 N 的展开系数：

$$\begin{aligned} a_0^N &= 1, \\ a_1^N &= \frac{1}{6}(p+2q-3), \\ a_2^N &= \frac{1}{360}(-45-2p^3+p^2(5-8q)+2p(5+2(5-3q)q) \\ &\quad +4q(5+(5-2q)q)). \end{aligned} \tag{5.2}$$

观察系数列表（3.23），其中 $K = B_p$ $N = B_q$，其系数可由（5.1）得到。于是我们得到由一对幂均值（B_p, B_q）稳定化的平均数 M 的系数：

$$\begin{aligned} a_0^M &= 1, \\ a_1^M &= \frac{1}{4}(p+q-2), \\ a_2^M &= \frac{1}{192}(-24-2p^3+p^2(6-9q)+q(2+q)(4+q)+p(8-6(-2+q)q)). \end{aligned}$$

5.6. Seiffert 和 Neuman-S´andor 平均数。设 $s, t > 0$。第一和第二 Seiffert 平均数（[5]）定义为

$$P(s,t) = \frac{t-s}{2\arcsin\frac{t-s}{t+s}}, \qquad T(s,t) = \frac{t-s}{2\arctan\frac{t-s}{t+s}},$$

而诺伊曼-塞弗特平均数（[21]）定义为

$$NS(s,t) = \frac{t-s}{2\operatorname{arcsinh}\frac{t-s}{t+s}}.$$

塞弗特平均的渐近展开可见于 [30], ，其中 $\alpha = 0$ 和$\beta = t$:

$$\begin{aligned} P(x-t,x+t) &\sim x - \frac{1}{6}tx^{-1} - \frac{17}{360}t^4x^{-3} - \frac{367}{15120}t^6x^{-5} + \mathcal{O}(x^{-7}), \\ T(x-t,x+t) &\sim x + \frac{1}{3}tx^{-1} - \frac{4}{45}t^4x^{-3} + \frac{44}{945}t^6x^{-5} + \mathcal{O}(x^{-7}), \end{aligned} \tag{5.3}$$

而诺伊曼-塞弗特平均数的渐近展开见于 [13]:

$$NS(x-t,x+t) \sim x + \frac{1}{6}tx^{-1} - \frac{17}{360}t^4x^{-3} + \frac{367}{15120}t^6x^{-5} + \mathcal{O}(x^{-7}). \tag{5.4}$$

假设 P 是 (K, M)-可稳定化均值。那么，将系数 (5.3) 与列表 (3.21) 中的系数进行比较，可得

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}(a_1^K + 2a_1^M),$$

并结合 $a_1^K = -\frac{1}{2} - 2a_1^M$，比较第二个系数可得

$$-\frac{17}{360} = -\frac{1}{360}(13 + 32(a_1^M)^2)$$

或者等价地 $a_1^M = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$. 比较第三个系数时，这两个值中的每一个都会导致矛盾。

用同样的方法可得，第二塞弗特平均数和 Neuman-S´andor 平均数也不可稳定化。

5.7. 幂均值的渐近不等式与次可稳定化性。考察第一个塞弗特平均数 P 与合成平均映射 $\mathcal{R}(K, N, M)$ 在 $K = B_p$ 与 $M = B_q$ 下的差异。由于对于（K, M）-可稳定化均值 N， a_m^R 等于 a_m^N，我们可以比较第一个塞弗特平均数的渐近展开与具有第5.5小节中系数的平均数的渐近展开。根据 (5.3) 和 (5.2)，其渐近展开为

$$\begin{aligned} P(x-t, x+t) - \mathcal{R}(B_p, P, B_q)(x-t, x+t) &= P(x-t, x+t) - R(x-t, x+t) \\ \sim -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(p + 2q - 3)\right) t^2 x^{-1} &- \left(\frac{17}{360} + \frac{1}{360}(-45 - 2p^3 + p^2(5 - 8q)\right. \\ &\left. + 2p(5 + 2(5 - 3q)q) + 4q(5 + (5 - 2q)q))\right) t^4 x^{-3} + \mathcal{O}(x^{-5}). \end{aligned}$$

当第一个括号中的系数等于零时，即 $p = 2 - 2q$ 时，可得到最佳近似。对于 q 与 p 之间的这种关系，差值的渐近展开为

$$\begin{aligned} P(x-t, x+t) - \mathcal{R}(B_p, P, B_q)(x-t, x+t) & \\ \sim \frac{1}{90}(1 - 4q + 2q^2) t^4 x^{-3} & \\ + \frac{1}{11340}\left(99 - 2q(q-2)(-83 + 12(-2+q)q)\right) t^6 x^{-5} + \mathcal{O}(x^{-7}). & \end{aligned}$$

同样，通过令第一个系数等于零，可得到二次方程的两个解：$q_{1,\ 2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$。对于这两个解中的任意一个，差值的渐近展开为

$$P(x-t, x+t) - \mathcal{R}(B_p, P, B_q)(x-t, x+t) \sim \frac{1}{1134} t^6 x^{-5} + \mathcal{O}(x^{-7}),$$

因此，差值渐近地大于 0：

$$P - \mathcal{R}(B_p, P, B_q) \succ 0,$$

这意味着不等式 $P > \mathcal{R}(B_p, P, B_q)$ 的必要条件得以满足。若 P 对于 $p, q = (\pm\sqrt{2}, 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2})$ 是 (B_p, B_q)-次稳定可化的，则这些参数是最优的。数值实验以及对差值图像 $P(s, 1-s) - \mathcal{R}(B_p, P, B_q)(s, 1-s)$ 的绘制， $s \in [0, 1]$，表明对于这些 p 和 q，平均数 P 应为 (B_p, B_q)-次稳定可化的。

观察 Neuman-S´andor 平均数 NS 与合成平均映射 $\mathcal{R}(K, NS, M)$ 在 $K = B_p$ 和 $M = B_q$ 下的差异。与之前类似，利用 (5.4) 和 (5.2)，其渐近展开为

$$NS(x-t, x+t) - \mathcal{R}(B_p, NS, B_q)(x-t, x+t)$$

$$\sim \frac{1}{6}(4-2p-2q)t^2x^{-1} - \frac{1}{360}\big(28-10p+2p^3+4pq(-5+3q) + p^2(-5+8q)+4q(-5+q(-5+2q))\big)t^4x^{-3}+\mathcal{O}(x^{-5}).$$

当第一组括号中的系数等于零时，即 $p=4-2q$，可得到最佳近似。对于 q 和 p 之间的这种关系，差值的渐近展开为

$$NS(x-t,x+t)-\mathcal{R}(B_p,NS,B_q)(x-t,x+t)\sim \frac{1}{90}(9-16q+4q^2)t^4x^{-3} + \frac{1}{11340}\big(-123-4(-4+q)q(67+12(-4+q)q)\big)t^6x^{-5}+\mathcal{O}(x^{-7}).$$

再次令下一个系数等于零，可得二次方程的两个解：$q_{1,\ 2}=2\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$。对于这两个解中的任意一个，以下结论成立

$$NS(x-t,x+t)-\mathcal{R}(B_p,NS,B_q)(x-t,x+t)\sim \frac{79}{3780}t^6x^{-5}+\mathcal{O}(x^{-7}),$$

这意味着其渐近上大于 0：

$$NS-\mathcal{R}(B_p,NS,B_q)\succ 0.$$

不等式 $NS>\mathcal{R}(B_p,P,B_q)$ 的必要条件得以满足。如果 NS 对于 $(p,q)=(\pm\sqrt{7},\ 2\mp\frac{\sqrt{7}}{2})$ 是 (B_p,B_q)-次稳定可化的，那么这些参数就是可能达到的最优值。数值实验以及绘制直线 $(s,1-s)$，$s\in[0,1]$ 上差值 $NS-\mathcal{R}(B_p,NS,B_q)$ 的图像表明，对于这些 p 和 q，NS 应当是 (B_p,B_q)-次稳定可化的。

对第二塞弗特平均数 T 采用类似的方法，即令两个系数为零，并不能得到始终大于 0 的差值。如果只令一个系数为零，或者等价地，令 $p=5-2q$，那么下一个系数为 $a_2=\frac{1}{90}(5q^2-25q+22)$。寻找最优参数的问题可归结为寻找使表达式 a_2 最小的 q，其中 $|10q-25|\geq\sqrt{185}$，并且不等式 $T-\mathcal{R}(B_p,T,B_q)>0$ 仍然成立。

6. 结论

本文推导了所得平均映射的完整渐近展开，并由此得到了稳定（平衡）平均数的渐近展开。此外，我们还得到了可稳定化均值和稳定化均值的渐近展开。所有渐近展开均以其系数的递归关系形式给出。除了第3节所述的定理形式外，所给出的渐近展开还可用于求出稳定化问题中涉及的三种平均值中的任意一种未知量。通过各种类型的实例，展示了主要结果的重要性。

根据第4节中的渐近等式，我们可以陈述如下结论。

猜想6.1. (1) 如果平均数 N 同时是 (K,M) 和 (M,K)-可稳定化的，那么 $N=K=M$。(2) 如果平均数 M 同时是 (K,N) 和 (N,K)-稳定化的，那么 $M=K=N$ 或 $M=G=K\otimes N$。(3) 如果平均数 M 同时是 (K,N)-可稳定化的，且是 (K,N)-稳定化的，那么 $M=K=N$。

注意，我们已在 1. 中证明了 K 与 M 渐近相等，并在 2. 和 3. 中证明了 K 与 N 渐近相等。

关于引言中的问题，根据第5节的推理，我们可以陈述如下结论。

(1) 所有使基尼平均数稳定的参数对 (p,q) 为 $\{(0,q)$、$(p,0)$、$(p,-p)\}$.所有使 Stolarsky 均值稳定的参数对 (p,q) 为 $\{(2q,q)$、$(p,2p)$、$(p,-p)\}$.此外，使广义对数均值稳定的所有参数 r 为 $\{-2,-\frac{1}{2},1\}$.(2) 第一塞弗特平均数 P 不可稳定化，第二塞弗特平均数 T 和 Neuman-S´andor 平均数 NS也不可稳定化。(3) 若 P对于 $(p,q)=(\pm\sqrt{2},1\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$ 是 (B_p,B_q)-次稳定可化的，那么这些参数就是最优的。(4) 若 NS对于 $(p,q)=(\pm\sqrt{7},2\mp\frac{\sqrt{7}}{2})$ 是 (B_p,B_q)-次稳定可化的，那么这些参数就是最优的。

本文提出的方法可用于获取其他由函数方程定义的类似问题中所涉及平均值的有价值信息，尤其是在难以找到显式解时。

References

[1] M. C. Anisiu, V. Anisiu, *The first Seiffert mean is strictly* (G,A)*-super-stabilizable*, 不等式应用杂志, 2014(185), 2014. [2] G. Aumann, *Aufbau von mittelwerten mehrerer argumente I* **109**, 235 253, , 数学年刊, – . 1934
[3] G. Aumann, *Aufbau von mittelwerten mehrerer argumente II* **111**, 713 730, , 数学年刊, – . 1935
[4] L. R. Berrone, *The Aumann functional equation for general weighting procedures*. 等式数学, 89, 1051–1073, 2015.[5] P. S. Bullen, “均值及其不等式手册”, 克吕维尔学术出版社集团, 多德雷赫特, 2003.[6] T. Buri´ ´ *Computation and analysis of the asymptotic expansions of the compund* c, N. Elezovic, , *means* **303** 48 54, 2017
应用数学与计算, (C), – . [7] C.-P. Chen, N. Elezovi´ ´ *Asymptotic formulae associated with the wallis power* c, L. Vuk˘sic, , *function and digamma function* **2** 2 151 166, 2013
经典分析杂志, ( ), – . [8] N. Elezovi´c, *Asymptotic inequalities and comparison of classical means*, 数学不等式杂志, 9(1), 177–196, 2015. [9] N. Elezovi´c, L. Mihokovi´c, *Asymptotic behavior of power means*, Math. Inequal. Appl., 19(4), 1399–1412, 2016. [10] N. Elezovi´c, J. Pe˘cari´c, *A note on the schur-convex functions*, 落基山数学杂志 , 30(3), 853–856, 2000. [11] N. Elezovi´ ´ *Asymptotic expansions and comparison of bivariate parameter* c, L. Vuk˘sic, , *meansn* **17** 4 1225 1244, 2014
Math. Inequal. Appl., ( ), – . [12] N. Elezovi´ ´ *Asymptotic expansions of bivariate classical means and related in-* c, L. Vuk˘sic, , *equalities* **8** 4 707 724, 2014
数学不等式杂志, ( ), – . [13] N. Elezovi´c, L. Vuk˘si´c, *Neuman-Sándor mean, asymptotic expansions and related inequalities*, 数学不等式杂志, 9(4), 1337–1348, 2015. [14] A. Erd´elyi, “渐近展开”, 多佛出版社, 纽约, 1956. [15] A. Gasmi, M. Ra¨ıssouli, *Generalized stabilizability for bivariate means*, 不等式应用杂志, 2013(233), 2013. [16] C. Gini, *Di una formula comprensiva delle medie*, Metron, 13, 3–22, 1938. [17] H. W. Gould, *Coefficient identities for powers of taylor and dirichlet series*, 美国数学月刊, 81(1), 3–14, 1974. [18] T. Kiss, *On the balancing property of Matkowski means*, 等式数学, 95, 75–89, 2021. [19] E. B. Leach, M. C. Sholander, *Extended mean values II* **92** 1 207 223, , J. Math. Anal. Appl., ( ), 1983
Anal. Appl., ( ), – .

[20] E. B. Leach, M.C. Sholander,
Extended mean values **85** 2 84 90, 美国数学
1978
月刊, ( ), – .[21] E. Neuman, J. S ´andor, *On the schwab-borchardt mean*, Math. Pannon., 14(2), 253–266, 2003. [22] Zs. P ´ales, *Inequalities for differences of powers*, J. Math. Anal. Appl., 131(1), 271–281, 1988. [23] M. Ra¨ıssouli, *Stability and stabilizability for means*, 《应用数学》, 11(2011), 159– 174, 2011.[24] M. Ra¨ıssouli, *Refinements for mean-inequalities via the stabilizability concept*, 不等式应用杂志, 2012(55), 2012. [25] M. Ra
¨ *Stabilizability of the stolarsky mean and its approximation in terms of the* ıssouli, ,
power binomial mean **6** 18 871 881, 2012
Int. Journal of Math. Analysis, ( ), – . [26] M. Ra¨ıssouli,
Positive answer for a conjecture about stabilizable means. 不等式应用杂志, 2013(467), 2013. [27] M. Ra¨ıssouli, J. S ´andor, *Sub-stabilizability and super-stabilizability for bivariate means*, 不等式应用杂志, 2014(28), 2014. [28] K. B. Stolarsky, *Generalizations of the logarithmic mean*, Math. Mag., 48, 87–92, 1975. [29] K. B. Stolarsky, *The power and generalized logarithmic means*, 美国数学月刊, 87(7), 545—548, 1980.[30] L. Vuk ˇsi ´c, *Seiffert means, asymptotic expansions and related inequalities*, Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan., 19, 129–142, 2015.*Email address*: lenka.mihokovic@fer.hr

Lenka Mihoković, University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing, Department of Applied Mathematics, Unska 3, 10000 Zagreb, Croatia