arXiv:2303.05241v2 [math.AG] 4 Dec 2024

# 8次曲面的伽罗瓦覆盖的基本群

Meirav Amram、Cheng Gong、Praveen Kumar Roy、Uriel Sinichkin 和 Uzi Vishne

Abstract. 我们计算了一个8次曲面的伽罗瓦覆盖的基本群，该曲面具有4次奇点，其退化与球面同胚。我们证明该群是一个阶为 $2^{23}$的元阿贝尔群。通过迭代结合计算方法与群论方法，将此前已分类的局部群 amalgamate 在一起，从而完成计算。对于三个简化曲面，伽罗瓦覆盖的基本群均为平凡群；这些例子表明，问题可能会因退化曲面的同伦性质而变得复杂。

## 1. Introduction

代数曲面的分类是代数几何中的一个经典问题。分支曲线补集的基本群以及曲面的伽罗瓦覆盖的基本群，都是曲面的重要不变量。退化是曲面分类中的关键工具，它能给出这些群的生成元与关系表示。近期关于退化及其结构的一些研究见 [10, 11, 13]。

设曲面 $X$ 嵌入在 $\mathbb{CP}^N$ 中，其中 $N$，并作到 $\mathbb{CP}^2$ 的一般投影，其分支曲线为 $S$，则基本群 $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - S)$ 是 $X$的退化类的不变量。该群的 Van Kampen 表示中的标准生成元记为 $\gamma_1$、$\gamma_{1'}$、.....、$\gamma_q$、$\gamma_{q'}$，其中 $q$是退化对象中直线的条数。存在一个从商群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 到对称群 $S_n$的自然映射，其中 $n = \deg X$ 是投影的次数，而 $\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 是由 $\gamma_1^2$、$\gamma_{1'}^2$、.....、$\gamma_q^2$、$\gamma_{q'}^2$生成的正规子群。伽罗瓦覆盖 $X_{\mathrm{Gal}}$ 的基本群是该映射 [14], 的核，因此我们有一个短正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X_{\mathrm{Gal}}) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{CP}^2 - S)/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle \longrightarrow S_n \longrightarrow 1.$$

群 $G$ 的表示相当复杂，确定该群的基本性质往往是一项颇具挑战的任务。在许多情况下都进行了相关计算，例如，对 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ [15]、Veronese曲面 [17, 18], 、Hirzebruch曲面 $F_k$（$a, b$）而言，

关键词和短语：基本群、退化、伽罗瓦覆盖、曲面分类。MSC2010：主要分类：14D06、14H30、14J10。

$a$ 以及 $b$ 互素的 [16], $\mathbb{CP}^1 \times T$ [2, 9]，其中 $T$ 是复环面、托里克簇 [7], 以及具有 $E_k$ [4]型 Zappatic 奇点的曲面。在最复杂的案例之一中，即曲面 $T \times T$ [8]的情形下，Van Kampen 表示包含 54 个生成元和近 2000 个关系。

对于曲面 $X$ 的退化，我们将其关联到一个影，它是一个二维单纯复形。退化的每个不可约分支对应一个 2-胞腔（即一个三角形），这些分支都是 $\mathbb{CP}^2$的副本。如果对应的平面分别相交于一条直线或一个点，则两个三角形共享一个 1-胞腔（边）或一个 0-胞腔（顶点）。特别地，影中的三角形数量就是 $X$的次数。仅属于一个三角形的边是冗余的。交于一个顶点的非冗余边的数量，等于该点处奇点的重数（或次数）。如果影可以嵌入欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$，则称其为平面影。经验表明，当影为平面影时，基本群的计算通常更容易。

迄今研究的大多数例子都具有平面影 [4, 7, 16, 17, 18]。关于具有平面影的次数为 5 和 6 的曲面的较新研究见 [5, 3]。最近，第一位署名作者研究了次数为 4 和 6、具有非平面影的曲面，参见 [1]。曲面 $\mathbb{CP}^1 \times T$ 的影（其中 $T$ 是环面）在 [2], 中进行了研究，它与圆柱面同胚。

本文聚焦于次数为 8 的曲面，其阴影与球面同胚$S^2$，且阴影中的每个顶点的次数均为 4。这样的阴影可以描述为沿着全部四条边粘合的两个三角剖分正方形的并集，见图 1；因此，我们将该阴影记作 $X^4$。不出所料， $\pi_1(X^4_{\mathrm{Gal}})$ 的计算相当复杂。因此，我们采用以下方法：引入中间阴影，每一步都将一对粘合的边“切开”。这样一来，便有四个阴影，

$$X^1 \to X^2 \to X^3 \to X^4,$$

其中每个箭头都表示通过识别两条边得到的覆盖映射，分别见图 2、3 和 4。以这种方式计算这四个基本群，会形成一系列复杂度逐步增加的问题，每个问题都需要新的思路才能解决。对于 $i$ =1、2、3，我们能够使用 `Magma` 来简化 $\pi_1(X^i_{\mathrm{Gal}})$ 的表示，结果每种情况下都得到一个平凡群。高重数奇点使计算变得复杂，因此对于 $X^4$ ，我们需要结合 [6] 和 [19]的方法。

对于每个图 $T$，都有一个 Coxeter 群 $C(T)$ 以及一个自然的商群 $C_Y(T)$。这与此处相关，因为在迄今为止计算的所有情形中，曲面的基本群都是 $C_Y(T)$ 的商群，其中 $T$ 是阴影的对偶图。直观上，我们希望在 $C_Y(T)$ 中进行所有计算，因为这个群已被充分理解。然而， $C_Y(T)$ 的所有定义关系并非都预先给定。我们通过一项多层计算的技术创新解决这一问题。我们对给定的表示运行 `Magma` 。当无法证明基本群确实是 $C_Y(T)$ 的商群时，我们证明某个子群是 $C_Y(T')$ 的商群，其中对应于一个子图 $T'$；利用这一点得到更多关系，再次运行 `Magma` ，并重复这一过程。下面对 $X^3$ 的计算最能说明这一点。

随着我们从 $X^1$ 到 $X^2$ 、再到 $X^3$ ，最终到达 $X^4$，情况变得愈加复杂。对于 $X^1$ ，传统技术已足够。对于 $X^2$ ，我们使用了 `Magma` 以及来自 [19]的方法。对于$X^3$ ，我们使用了上文所述的多层计算。对于 $X^4$ ，我们还需要结合 [6], 中的思想，该方法计算 $C_Y$ （$T$）的 Artin 覆盖。

本文其余部分安排如下。第2节中，我们给出 $X^i$、 $i=1$、2、3、4的构造，回顾范坎彭定理以获得基本群的表示，并介绍论文[6] 和 [19]中关于 Coxeter 群和对偶图的一些必要细节。在定理3.1、3.2、3.3和3.4（第3节）中，我们确定了与 $X^i$、$i=1$、2、3、4相关的群 $\pi_1$（$X_{\mathrm{Gal}}$）。

## 2. Preliminaries and methods

本节将详细描述影 $X^1$、 $X^2$、 $X^3$和 $X^4$ ，并运用标准方法给出它们的基本群 $\pi_1(X^i_{\mathrm{Gal}})$的表示。我们建议参阅 [10,11, 13] ，了解退化的相关信息；参阅 [3] ，深入了解分支曲线补空间的基本群以及伽罗瓦覆盖的基本群。

2.1. 射影退化。我们先定义退化。令 $\Delta$ 表示单位圆盘，并令 $X$、$Y$为射影代数曲面。令 $p\colon Y\to\mathbb{CP}^2$ 和 $p'\colon X\to\mathbb{CP}^2$ 为一般投影。若存在平坦族 $\pi\colon V\to\Delta$以及嵌入 $F\colon V\to\Delta\times\mathbb{CP}^2$，使得 $F$与第一投影复合后为 $\pi$，且：则称 $p'$ 是 $p$ 的射影退化。

(a) $\pi^{-1}(0)\simeq X$；(b) 存在一个 $t_0\neq 0$ ，位于 $\Delta$ 中，使得 $\pi^{-1}(t_0)\simeq Y$；

(c) 族 $V - \pi^{-1}(0) \to \Delta - 0$ 是光滑的；(d) 限制到 $\pi^{-1}(0)$，在将 $\pi^{-1}(0)$ 与 $X$ 识别后，$F = 0 \times p'$；(e) 限制到 $\pi^{-1}(t_0)$，在将 $\pi^{-1}(t_0)$ 与 $Y$ 识别后，$F = t_0 \times p$。

在上述过程中，我们构造了 $X$ 到平面的并的平坦退化。我们考虑只有两个平面沿一条直线相交的退化，且每个平面都与 $\mathbb{CP}^2$ 同胚。

2.2. 退化的构造与图示。这里我们描述四个影 $X^i$、$i = 1$、2、3、4；如上所述，它们的次数均为 8，且奇点的次数至多为（在 $X^4$ 中则恰好为）4。

构造 1（影 $X^4$）。通过用三个经过球心且彼此正交的平面切割欧几里得球面，可以得到球面的一个次数为 8 的三角剖分，见图 1。该三角剖分有 6 个顶点，记作 $V_1$、.....、$V_6$，以及 12 条边；重复的边 5、6、8、9 两两粘合。我们为顶点和边编号，以供后续参考。

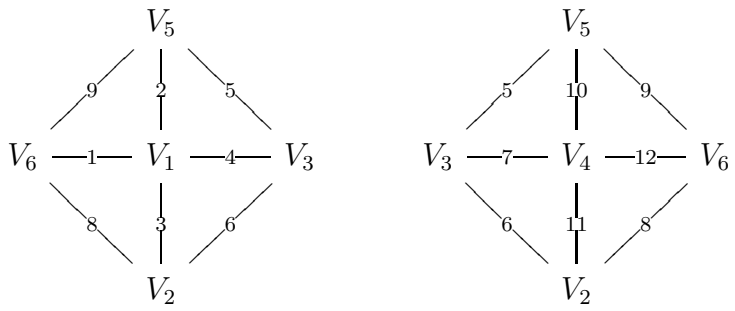



FIGURE 1. 具有四对粘合边的4次退化给出 $X^4$

值得注意的是，根据 [11, 推论 12，2], 每个4次退化都可以变形为一个椭圆曲线上的锥面 $E_0$，其中 $E_0$ 是 $\mathbb{P}^3$中的一条4次曲线。 $E_4$ 型 Zappatic 奇点是由4条直线相交得到的。有关此类曲面的更多详情，请参见 [4]。

现在考虑图 1 的两个连通分支，不进行粘合。我们将通过粘合一对、两对，最终三对边来构造 $X^1$、 $X^2$和 $X^3$ 。

构造 2（阴影 $X^1$）。阴影 $X^1$ 见图 2。它有 8 个顶点和 15 条边，其中只有 9 条边是非冗余边（冗余边，即属于单个

三角形的边，不予编号，因为它们不会出现在计算中。边 5 在图中出现了两次，这两个副本当然是粘合在一起的。

注意， $V_1$ 和 $V_2$ 的次数为 4； $V_3$ 和 $V_4$ 的次数为 3；其余顶点的次数为 1。

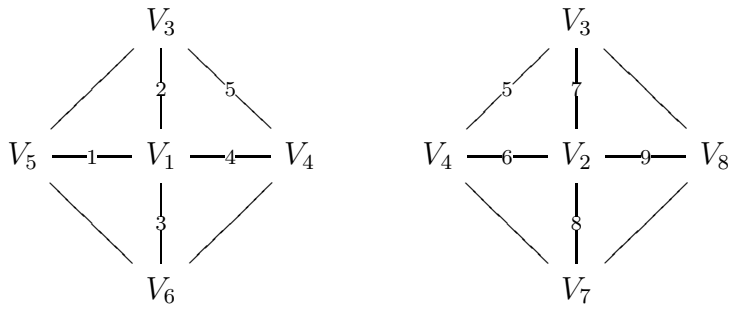



FIGURE 2. 带有一条已识别边的 4 次退化给出 $X^1$

现在，我们在 $X^1$ 中将连接顶点 $V_4$ 和 $V_6$ 的边与连接顶点 $V_4$ 和 $V_7$的边粘合起来，从而得到 $X^2$ （顶点和边的编号会发生变化）。

构造 3（退化 $X^2$）。退化 $X^2$ 见图 3。这个阴影有 7 个顶点和 10 条非冗余边。边 5 和边 6 各出现两次，这两份正在被粘合。 $V_1$、 $V_2$和 $V_3$ 的次数为 4； $V_4$ 和 $V_5$ 的次数为 3； $V_6$和 $V_7$ 的次数为 1。

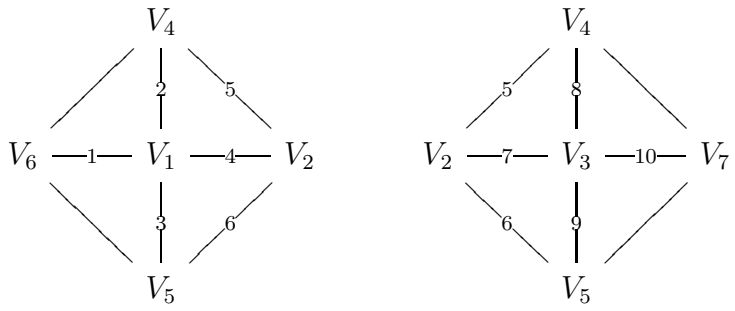



FIGURE 3. 具有两条粘合边的4次退化给出 $X^2$

现在将连接 $V_5$ 和 $V_6$ 的边与连接 $V_5$ 和 $V_7$ 的边（按 $X^2$ 的编号）粘合起来，得到 $X^3$。

构造 4（阴影 $X^3$）。现在有 6 个顶点和 11 条非冗余边，见图 4。$V_1$、$V_2$、$V_3$ 和 $V_4$ 的度为 4；$V_5$ 和 $V_6$ 的度为 3。

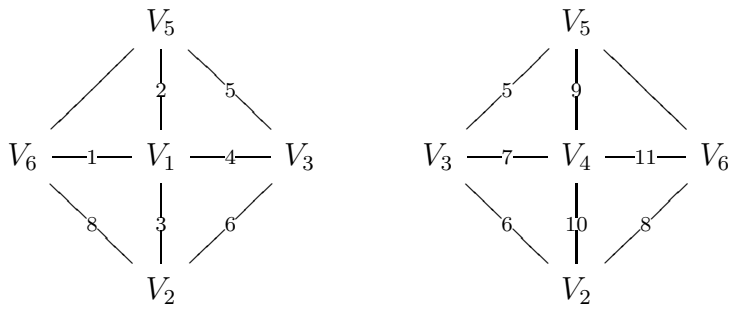



FIGURE 4. 带有三条粘合边的4次退化给出 $X^3$

还可以将 $X^1$、$X^2$和 $X^3$ 描绘为平面阴影，不进行粘合，如图 5 所示。对于每个阴影，我们沿用上文给出的顶点和边的编号。要从 $X^3$ 得到$X^4$，必须粘合连接 $V_5$ 和 $V_6$ 的两条边（一条来自三角形 $V_5V_6V_4$，另一条来自 $V_5V_6V_1$），而所得阴影不再是平面图。

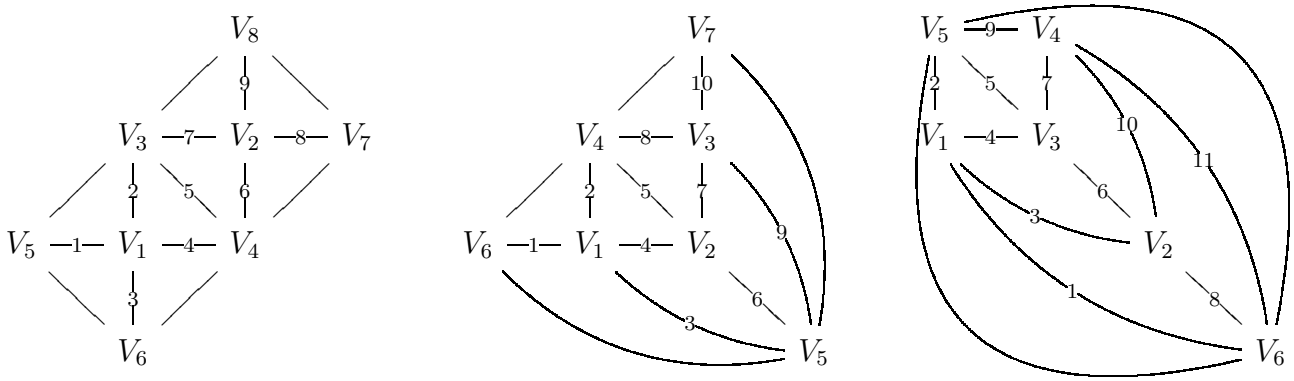



FIGURE 5. 阴影 $X^1$、$X^2$ 和 $X^3$的替代表述。

2.3. 基本群。现在我们说明如何根据图示计算 $X^i$、$i = 1$、2、3、4 的基本群。设 $X$ 是一个嵌入在某个射影空间中的次数为 $n$ 的代数曲面，其一般投影 $f : X \to \mathbb{CP}^2$ 的次数为 $n$。设

$$X_{\mathrm{Gal}} = \overline{(X \times_{\mathbb{CP}^2} \ldots \times_{\mathbb{CP}^2} X) - \triangle},$$

为 $X$ 的伽罗瓦覆盖，其中乘积取 $n$ 次，而 $\triangle$ 是扩展对角线，其定义为

$$\triangle = \{(x_1, \ldots, x_k) \in X^k \mid x_i = x_j \quad \text{for some} \quad i \neq j\}.$$

该投影有一条分支曲线 $S$，我们接下来计算 $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - S)$ 和 $\pi_1(X_{\text{Gal}})$。$X$ 退化为平面的并后，其分支曲线是一个次数为 $q$ 的直线排列，其中 $q$ 是退化中的边数。

直线排列的顶点是三条或更多直线相交的点。顶点的重数是 $k$ 在该点相交的直线条数。在本文中，我们研究重数为 1、3 和 4 的奇点。存在一种再生过程（例如，见 [3]），它会将每条直线“展开”为二重直线或圆锥曲线。由此得到再生曲线 $S$ 的局部描述；该曲线是次数为 $2q$ 的尖点曲线。要计算表示，我们首先必须对阴影中的边进行全局排序。然后，每个顶点产生的关系取决于该点处的局部排序。范坎彭定理 [20] 指出，群 $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - S)$ 由 $\gamma_i$、$\gamma_{i'}$（$i = 1$）至 $q$ 生成，其中每个生成元表示退化中两个平面之间的一条边，并满足以下五类关系。

（1）对于圆锥曲线的每个分支点，都有一个形如 $\gamma = \gamma'$ 的关系，其中 $\gamma$、$\gamma'$ 是生成元 $\gamma_j$ 和 $\gamma_{j'}$ 的某些共轭元；（2）对于每个节点，都有 $[\gamma, \gamma'] = 1$，其中 $\gamma$、$\gamma'$ 是 $\gamma_i$ 和 $\gamma_j$ 的某些共轭元，而 $i$、$j$ 是交于该节点的直线；（3）对于每个尖点，都有 $\langle\gamma$、$\gamma'\rangle = 1$，其中 $\gamma$、$\gamma'$ 与（2）中的情形相同；$_1$（4）“射影关系” $\prod \gamma_{i'}\gamma_i = 1$、$_{i=d}$；（5*）对于分支曲线上相交的每一对边，都有一个交换子关系。

因此，除射影关系外，其他关系都可以局部计算。换言之，$G$是若干“局部群”的 amalgamated product，每个顶点对应一个局部群，由与该顶点相交的边所对应的生成元生成——并满足式 (4) 的射影关系及 (5*) 型关系。合并的方式是，将与同一条边关联的生成元识别为相同；这些生成元分别出现在该边两端顶点所对应的两个局部群中。

以下引理总结了再生后重数为 3 或 4 的顶点所对应的局部群，其中边的编号顺序固定。我们对每个阴影 $X^i$ 中的边进行编号时，特意作了选择，使得局部只会出现这些引理中所列的顺序。

图 6 中有一个三条直线的交点，其全局顺序为 $i < j < k$。

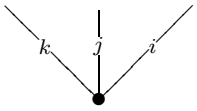



FIGURE 6. 三条直线的交点

引理 2.1. 对于编号如图6所示的每个顶点，在 $G$ 上导出的关系如下：

$$\langle \gamma_{i'}, \gamma_j \rangle = \langle \gamma_{i'}, \gamma_{j'} \rangle = \langle \gamma_{i'}, \gamma_j^{-1} \gamma_{j'} \gamma_j \rangle = e \tag{1}$$

$$\gamma_i = \gamma_{j'} \gamma_j \gamma_{i'} \gamma_j^{-1} {\gamma_{j'}}^{-1} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma_k, \gamma_{j'} \gamma_j \gamma_{i'} \gamma_j {\gamma_{i'}}^{-1} \gamma_j^{-1} {\gamma_{j'}}^{-1} \rangle =& \langle \gamma_k, \gamma_{j'} \gamma_j \gamma_{i'} \gamma_{j'} {\gamma_{i'}}^{-1} \gamma_j^{-1} {\gamma_{j'}}^{-1} \rangle = \\ =& \langle \gamma_k, \gamma_{j'} \gamma_j \gamma_{i'} \gamma_j^{-1} \gamma_{j'} \gamma_j {\gamma_{i'}}^{-1} \gamma_j^{-1} {\gamma_{j'}}^{-1} \rangle = e \end{aligned} \tag{3}$$

$$\gamma_{k'} = \gamma_k \gamma_{j'} \gamma_j \gamma_{i'} \gamma_{j'} \gamma_j {\gamma_{i'}}^{-1} \gamma_j^{-1} {\gamma_{j'}}^{-1} \gamma_k \gamma_{j'} \gamma_j \gamma_{i'} \gamma_j^{-1} {\gamma_{j'}}^{-1} {\gamma_{i'}}^{-1} \gamma_j^{-1} {\gamma_{j'}}^{-1} \gamma_k^{-1} \tag{4}$$

$$[\gamma_i, \gamma_k] = [\gamma_i, \gamma_{k'}] = [\gamma_{i'}, \gamma_k] = [\gamma_{i'}, \gamma_{k'}] = e. \tag{5}$$

图 7 展示了一个四条直线的交点，其全局顺序为 $i < j < k < l$.

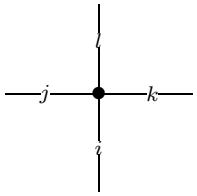



FIGURE 7. 四条直线的交点

引理 2.2. 四条直线的交点会对 $G$ 贡献以下关系列表:

(6) $$\langle\gamma_{i'},\gamma_j\rangle=\langle\gamma_{i'},\gamma_{j'}\rangle=\langle\gamma_{i'},\gamma_j^{-1}\gamma_{j'}\gamma_j\rangle=e$$

(7) $$\langle\gamma_k,\gamma_l\rangle=\langle\gamma_{k'},\gamma_l\rangle=\langle\gamma_k^{-1}\gamma_{k'}\gamma_k,\gamma_l\rangle=e$$

(8) $$[\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_{i'}\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1},\gamma_l]=e$$

(9) $$[\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_{i'}\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1},\gamma_k^{-1}{\gamma_{k'}}^{-1}\gamma_l^{-1}\gamma_{l'}\gamma_l\gamma_{k'}\gamma_k]=e$$

(10) $$\langle\gamma_i,\gamma_j\rangle=\langle\gamma_i,\gamma_{j'}\rangle=\langle\gamma_i,\gamma_j^{-1}\gamma_{j'}\gamma_j\rangle=e$$

(11) $$\langle\gamma_k,\gamma_l^{-1}\gamma_{l'}\gamma_l\rangle=\langle\gamma_{k'},\gamma_l^{-1}\gamma_{l'}\gamma_l\rangle=\langle\gamma_k^{-1}\gamma_{k'}\gamma_k,\gamma_l^{-1}\gamma_{l'}\gamma_l\rangle=e$$

(12) $$[\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_i\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1},\gamma_l^{-1}\gamma_{l'}\gamma_l]=e$$

(13) $$[\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_i\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1},\gamma_k^{-1}{\gamma_{k'}}^{-1}\gamma_l^{-1}{\gamma_{l'}}^{-1}\gamma_l\gamma_{l'}\gamma_l\gamma_{k'}\gamma_k]=e$$

(14) $$\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_{i'}\gamma_j\gamma_{i'}^{-1}\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1}=\gamma_l\gamma_{k'}\gamma_l^{-1}$$

(15) $$\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_{i'}\gamma_{j'}\gamma_{i'}^{-1}\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1}=\gamma_l\gamma_{k'}\gamma_k{\gamma_{k'}}^{-1}\gamma_l^{-1}$$

(16) $$\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_i\gamma_j\gamma_i^{-1}\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1}=\gamma_l^{-1}\gamma_{l'}\gamma_l\gamma_{k'}\gamma_l^{-1}{\gamma_{l'}}^{-1}\gamma_l$$

(17) $$\gamma_{j'}\gamma_j\gamma_i\gamma_{j'}\gamma_i^{-1}\gamma_j^{-1}{\gamma_{j'}}^{-1}=\gamma_l^{-1}\gamma_{l'}\gamma_l\gamma_{k'}\gamma_k\gamma_{k'}^{-1}\gamma_l^{-1}{\gamma_{l'}}^{-1}\gamma_l.$$

2.4. 对偶图。群 $G$ 自然带有一个到对称群 $S_n$的投影，其中每个生成元 $\gamma_i$ 或 $\gamma_{i'}$ 都映射为交换边编号为 $i$处相邻平面的换位。

从一个表示 中，我们可以利用正合序列求出 $\pi_1(X_{\mathrm{Gal}})$ 的一个表示

$$0 \to \pi_1(X_{\mathrm{Gal}}) \to G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle \to S_n \to 0; \tag{18}$$

这可以使用 Reidmeister-Schreier 方法完成；然而，生成元的数量会乘以 $n!$ ，因此必须设法使计算变得可行。

考虑一个阴影，例如 $i=1$的 $X^i$ 、2、3、4。现在定义一个从基本群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 到对称群 $S_n$的映射，其中 $n$ 是阴影中 2-胞腔的数量。回想一下， $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$由 $\gamma_i$ 和 $\gamma_{i'}$生成，每条非冗余边对应一对生成元。到 $S_n$ 的映射由此定义为将 $\gamma_i$ 和 $\gamma_{i'}$ 都映射为换位（$ab$），其中 $a$、$b$是相交于公共边 $i$的三角形。

$S_n$ 中的一组对换可以编码为 $n$ 个顶点上的图 $T$ 的边。当且仅当 $T$ 连通时，这些对换生成整个群。此外， $S_n$ 可以用给定的对换及某一组关系来表示。群 $C_Y(T)$是通过施加“局部”关系定义的，因此存在一个投影$C_Y(T) \to S_n$。在迄今研究的所有情形中，都可以证明 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 的生成元满足 $C_Y(T)$的定义关系。

阴影的对偶图是图 $T$，其顶点为各个 2-胞腔，每一对相交的 2-胞腔之间都有一条边。例如， $X^1$ 的对偶图（见图 2）如图 10 所示。

由于两个对换的乘积的阶为 2 或 3，具体取决于它们是否相交，因此我们将抽象群 $C_Y(T)$ 与对偶图 $T$关联起来，并按如下方式定义该群。

定义 2.3. 设 $T$ 是一个连通图，不一定是简单图，但不含环。设 $C(T)$ 是 Coxeter 群，其生成元为 $T$ 的边，并满足以下三类关系：$u^2=1$ 对每个生成元成立；$(uv)^2=1$ 若对应的边 $u$、$v$ 不相交；以及 $(uv)^3=1$若 $u$、$v$ 相交于一个顶点。（若 $u$、$v$ 连接相同的两个顶点，则不假设存在任何关系。）

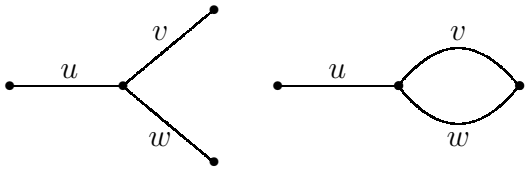



FIGURE 8

此外，我们将群 $C_Y(T)$ 定义为 $C(T)$ 关于以下四类关系的商群：

$$[wuw, v] = e \quad \text{if } u, v, w \text{ are as in Figure 8 (left)}, \tag{19}$$

$$\langle wuw, v\rangle = e \quad \text{if } u, v, w \text{ are as in Figure 8 (right)}, \tag{20}$$

$$[wuw, vxv] = e \quad \text{if } x, u, v, w \text{ are as in Figure 9 (left)}, \tag{21}$$

$$\langle wuw, vxv\rangle = e \quad \text{if } x, u, v, w \text{ are as in Figure 9 (right)} \tag{22}$$

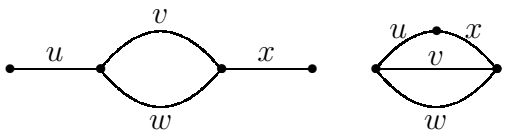



FIGURE 9

容易看出，如果将每个生成元映射到交换其两个顶点的换位，那么定义 $C_Y(T)$ 的所有关系在 $S_n$ 中都成立。因此，我们得到了一个定义良好的投影 $C_Y(T) \to S_n$，其中 $n$ 是顶点数。

不难看出，如果 $T$ 是一棵树，那么 $C_Y(T)$ 与 $S_n$ 同构。一般而言，按环排列的换位满足另一个关系，即“循环关系”；该关系在 $C_Y(T)$ 中并不成立。我们利用这一点计算映射 $C_Y(T) \to S_n$ 的核，现解释如下。

2.5. 群 $S_n \ltimes A_{t,\ n}$。映射 $C_Y(T) \to S_n$ 的核在 [19], 中已针对 $T$为简单图的情形求得。对于平面图 $T$， [6] 将其推广到了一个类似定义的群$A_Y(T)$，该群自然覆盖 Artin辫群 $B_n$；映射 $A_Y(T) \to B_n$ 的核也在其中求得。由此结果可以推导出，对于任意平面图 $T$，无论其是否为简单图， $C_Y(T) \to S_n$ 的核的结构。我们认为，相同的描述适用于任意图（详情见 [12]），但当前论文并不需要这一结果。

设 $t \geq 0$ 和 $n$ 为自然数。回顾 [19]中群 $A_{t,\ n}$ 的定义。令$U := \{u, u', \dots\}$为一个由 $t$ 个元素组成的集合。

定义 2.4. 群 $A_{t,n}$ 由元素 $u_{x,y}$生成，其中 $u \in U$和 $x, y \in \{1, \dots, n\}$，并满足以下关系：对任意 $u, u' \in U$以及任意 $x, y, z$:

(1) $u_{x,x} = e$(2) $u_{x,y}u_{y,z} = u_{x,z} = u_{y,z}u_{x,y}$(3)
$[u_{x,y}, u'_{w,z}] = e$ （对互不相同的 $x, y, w$ 和 $z$）

同一群的另一种描述如下。

定义 2.5. 对于 $x \in \{1, \dots, n\}$，令 $F_{(x)}$表示由字母 $t$生成的自由群 $u_x (u \in U)$。令$F^*_{t\ ,n}$:
$= \prod_{x \in \{1,\dots,n\}} F^{(x)}$。映射 ab : $F_{(x)} \to \mathbb{Z}^t$，定义为 ab$(u_x) = u$，（其中 $\mathbb{Z}^t$被视为由 $U$生成的自由阿贝尔群），可自然扩展为映射 $F^*_{t\ ,n} \to \mathbb{Z}^t$。我们将此映射的核定义为 $F_{t,n}$ [19, 定义 5.6]。

[19] 的主要结果是 $C_Y(T) \cong S_n \ltimes A_{t,\ n}$，其中 $n$ 是 $T$中的顶点数， $t$ 是 $\pi_1(T)$的秩。对称群通过作用于指标，在$A_{t,\ n}$上作用。文中还针对 $n \geq 5$验证了 [19, 定理 5.7]，即$A_{t,\ n} \cong F_{t,\ n}$。特别地，存在一个短正合列

$$1 \longrightarrow F_{t,n} \longrightarrow C_Y(T) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1.$$

## 3. Results

本节描述每个 $i = 1$、2、3、4对应的群 $\pi_1(X^i_{\mathrm{Gal}})$。我们应用第2节中描述的算法和方法。

以下记号将用于交换关系。

记号 1. 涉及$\gamma_{i,\ i'}$ 的公式是以下所有公式的简写：将该项替换为 $\gamma_i$ 或 $\gamma_{i'}$所得的公式。

### 3.1. 曲面 $X^1$。

定理 3.1。 $X^1$ 的伽罗瓦覆盖的基本群是平凡群。

证明。下面描述图 2 中阴影 $X^1$ 对应的群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 。该群由 $\{\gamma_i\}$ 生成，对应于 $i = 1, 1'$, $2, 2', \dots, 9, 9'$。顶点 $V_1$ 和 $V_2$ 给出的关系如引理 2.2 所示,

其中（$i,j,k,l$）分别等于（1, 2, 3, 4）和（6, 7, 8, 9）。对于顶点 $V_3$和 $V_4$，其关系如引理 2.1 所示，其中（$i,j,k$）分别等于（2, 5, 7）和（4, 5, 6）。顶点 $V_5$、 $V_6$、 $V_7$和 $V_8$ 分别给出对应于 $i=1$、3、8 和 9 的关系 $\gamma_i=\gamma_{i'}$。于是得到以下类型（5*）的关系：

$[\gamma_{i,i'},\gamma_{j,j'}]=e$对于（$i,j$）$\in$（$\{1,3\}\times\{5,6,7,8,9\}$）（$\cup$）（$\{2\}\times\{6,8,9\}$）（$\cup$）（$\{4\}\times\{7,8,9\}$）（$\cup$）（$\{5\}\times\{8,9\}$）。1最后一个关系是射影关系 $\prod_{i=9}\gamma_{i'}\gamma_i=e$.

接下来，我们令（$i,j,k,l$）等于（1, 2, 3, 4），并将（14）和（15）进行比较，再结合 $\gamma_1=\gamma_{1'}$和 $\gamma_3=\gamma_{3'}$，得到 $\gamma_2=\gamma_{2'}$。然后，我们可以由（14）和（16）得到 $\gamma_4=\gamma_{4'}$。同样，令（$i,j,k,l$）等于（6, 7, 8, 9），并结合 $\gamma_8=\gamma_{8'}$和 $\gamma_9=\gamma_{9'}$，也可得到 $\gamma_7=\gamma_{7'}$和 $\gamma_6=\gamma_{6'}$。

现在我们转而处理关系 (2)，并代入 $i=2$、 $j=5$ 以及此前得到的 $\gamma_2=\gamma_{2'}$，得到 $\gamma_5=\gamma_{5'}$。同理，我们代入 $i=4$、 $j=5$ 和 $\gamma_5=\gamma_{5'}$，得到 $\gamma_4=\gamma_{4'}$。

由此可知，群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 由 $\{\gamma_i\}$、 $1\le i\le 9$生成。现在我们给出 $X^1$中各边的对偶图，见图 10，由此可以轻松读出映射 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle\to S_8$（其中 8 是对偶图中顶点的数量）。

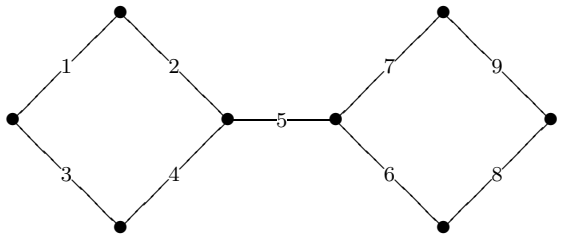



FIGURE 10. 与 $X^1$相关的对偶图 $T_1$

根据上述化简，我们在 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 中得到的关系属于以下类型

(23)
$$[\gamma_i,\gamma_j]=e,\quad \text{if i,j are disjoint lines;}$$
$$\langle\gamma_i,\gamma_j\rangle=e,\quad \text{otherwise.}$$

我们还有两个关系 $\gamma_1\gamma_2\gamma_1 = \gamma_3\gamma_4\gamma_3$ 和 $\gamma_6\gamma_7\gamma_6 = \gamma_8\gamma_9\gamma_8$，它们与对偶图中的两个环有关。此外，我们的表示中还出现了关系 $[\gamma_4, \gamma_2\gamma_5\gamma_2] = e$ 和 $[\gamma_5, \gamma_6\gamma_7\gamma_6] = e$，它们分别对应于图中两组各有三条直线交于一点的直线。这意味着 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle \to S_8$ 是一个同构，并且由于 $\pi_1(X^1_{\mathrm{Gal}})$ 是该映射的核，$X^1$ 的伽罗瓦覆盖的基本群是平凡的。□

3.2. 曲面 $X^2$。

定理 3.2. 与 $X^2$ 相关的伽罗瓦覆盖的基本群是平凡群。

证明。群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 由 $\{\gamma_i, \gamma_{i'}\}$ 生成，其中 $i = 1$，.....，10。根据图 3，顶点$V_1$、 $V_2$ 和 $V_3$ 给出引理 2.2 中的关系，其中（$i$、 $j$、 $k$、 $l$）对于 $V_1$等于（1、2、3、4），对于 $V_2$等于（4、5、6、7），对于 $V_3$等于（7、8、9、10）。顶点 $V_4$ 和 $V_5$ 给出引理 2.1 中的关系，其中（$i$、 $j$、 $k$）分别等于（2、5、8）和（3、6、9）。顶点 $V_6$ 和 $V_7$ 分别给出关于 $i = 1$ 和 $i = 10$的关系 $\gamma_i = \gamma_{i'}$。类型（5*）的关系为:

$$[\gamma_{i,i'}, \gamma_{j,j'}] = e \text{ for } (i,j) \in \begin{array}{l}(\{1\}\times\{5,6,7,8,9,10\})\cup(\{2\}\times\{6,7,9,10\})\cup(\{3\}\times\{5,7,8,10\})\\ \cup(\{4\}\times\{8,9,10\})\cup(\{5\}\times\{9,10\})\cup(\{6\}\times\{8,10\}).\end{array}$$

1与往常一样，射影关系为 $\prod \gamma_{i'}\gamma_i = e.i{=}10$

现在我们解释如何简化 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 的表示。如上所述，我们有 20 个生成元和相当多的关系。我们尝试在 Magma 中运行一次表示，得到的输出是 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 的一个简化表示，其中包含八个生成元 $\gamma_1, \gamma_{3'}, \gamma_5, \gamma_{5'}, \gamma_{6'}, \gamma_7, \gamma_9, \gamma_{10}$，但仍有一长串关系。

我们根据生成元列表构造对偶图，见图 11。

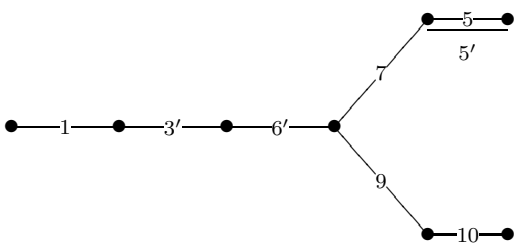



FIGURE 11. 在 *Magma*中首次运行后的对偶图

我们从输出中发现缺少一个关系 $[\gamma_7, \gamma_{10}] = e$，它可以由输出中的另一个关系 $[\gamma_1\gamma_7\gamma_{6'}\gamma_{3'}\gamma_{6'}\gamma_1\gamma_7, \gamma_{10}] = e$ 推导出来。然后我们将其添加到表示中，并再次运行 Magma 。

对 Magma 进行第二次运行，得到的结果包含生成元 $\gamma_1$、$\gamma_2$、$\gamma_{3'}$、$\gamma_{5'}$、$\gamma_{6'}$、$\gamma_7$、$\gamma_9$、$\gamma_{10}$，以及一长串关系。我们从化简后的表示中选取所有类型为 (23) 的关系，并构造与这些生成元相关的对偶图，见图12。

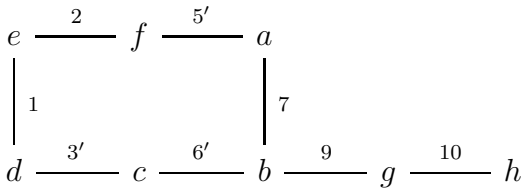



FIGURE 12. *Magma* 中第二次运行后的对偶图

在输出结果中，我们没有找到关系 $[\gamma_{5'}, \gamma_{6'}] = e$，但其中出现的关系 $[\gamma_{6'}\gamma_{3'}\gamma_{6'}, \gamma_{5'}] = e$可化简为 $[\gamma_{5'}, \gamma_{6'}] = e$。此时，图中所示环对应的循环关系仍然缺失。

对于 $T$，图12所示的图给出了一个良定义的满射 $\varphi\colon C_Y(T) \to G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$，见定义 2.3。此映射将对应于边 $E$ 的生成元映射为生成元 $\gamma_i$，其中 $i$ 是图12中边 $E$ 上的标记。根据$C_Y(T)$的定义，此映射是良定义的。由 [19],，映射 $\psi\colon C_Y(T) \to S_8 \ltimes A_{1,\ 8}$，定义为

$$\gamma_1 \mapsto (e\ d),\quad \gamma_2 \mapsto (e\ f),\quad \gamma_{3'} \mapsto (c\ d),\quad \gamma_{5'} \mapsto (a\ f)u_{a,f},\quad \gamma_{6'} \mapsto (b\ c),$$

and

$$\gamma_7 \mapsto (a\ b),\quad \gamma_9 \mapsto (b\ g),\quad \gamma_{10} \mapsto (g\ h)$$

是一个同构。这里，$S_8$ 作用于标签集 $L = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$，而$A_{1,8}$由形如$u_{x,y}$ 的元素生成（见第 2.5 小节），其中 $x, y \in L$。因此，我们只需计算 $\ker \varphi \circ \psi^{-1}$。具体做法是将 $G$ 的定义关系拉回到$S_8 \ltimes A_{1,8}$，从而得到唯一一个非零关系：$u_{h,f}u_{g,d} = e$。然而，我们可以用 $S_8$ 作用于这个关系，得到任意互不相同的 $x, y, x', y' \in L$所对应的$u_{x,y} = u_{x'}^{-1}{}_{,y'}$。特别地，$u_{a,b}^2 = u_{c,{}_d}u_{d,e} = u_{c,e} = u_{a,b}$，因此$u_{a,b} = 1$，且$A_{1,8}$的所有生成元都属于 $\ker \varphi \circ \psi^{-1}$。

因此我们证明了 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle \cong S_8$。特别地，$X^2_{\mathrm{Gal}}$ 的基本群是平凡群。□

3.3. 曲面 $X^3$。

定理 3.3。与 $X^3$ 相关的伽罗瓦覆盖的基本群是平凡群。

证明。与 $X^3$ 相关的群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 由 $\{\gamma_i\}$ 生成，其中 $i = 1, 1', 2, 2', \ldots, 11, 11'$。顶点$V_1$, $V_2$, $V_3$ 和 $V_4$ 给出引理 2.2 中的关系，其中 $(i, j, k, l)$ 对于 $V_1$等于 (1, 2, 3, 4)，对于 $V_2$等于 (3, 6, 8, 10)，对于 $V_3$等于 (4, 5, 6, 7)，对于 $V_4$等于 (7, 9, 10, 11)。顶点 $V_5$ 和 $V_6$ 给出引理 2.1 中的关系，其中 $(i, j, k)$ 分别等于 (2, 5, 9) 和 (1, 8, 11)。(5*) 类型的关系如下：

$$[\gamma_{i,i'}, \gamma_{j,j'}] = e$$

for

$$(i,j) \in \begin{array}{l}(\{1\}\times\{5,6,7,9,10\})\cup(\{2\}\times\{6,7,8,10,11\})\cup(\{3\}\times\{5,7,9,11\})\cup(\{4\}\times\{9\})\\ \cup(\{4,5\}\times\{8,10,11\})\cup(\{6\}\times\{9,11\})\cup(\{8\}\times\{7,9\}),\end{array}$$

[1]且射影关系为 $\prod \gamma_{i'}\gamma_i = e.i=11$

群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 现在有 22 个生成元和一长串关系。将此输入送入Magma后，输出的群由生成元 $\gamma_{1'}, \gamma_{2'}, \gamma_5, \gamma_{5'}, \gamma_{6'}, \gamma_7, \gamma_{8'}, \gamma_9$ 和 $\gamma_{10}$以及一长串关系构成。让我们像图 13 中那样，为 $X^3$ 的三角形标上标签。

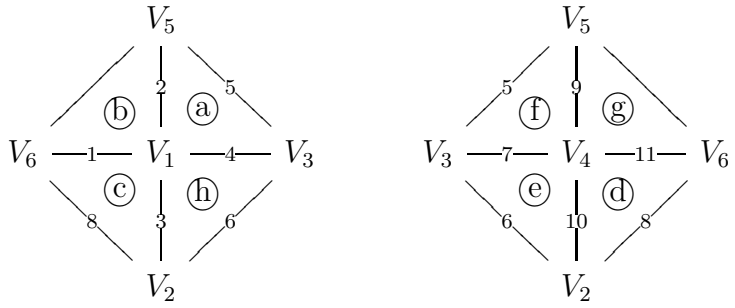



FIGURE 13. 带有已标注三角形的阴影 $X^3$

具有这些生成元的对偶图现见图 14。

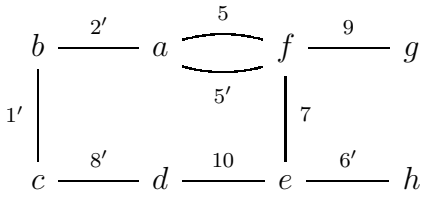



FIGURE 14. 剩余生成元的对偶图

从 Magma 得到的简化关系列表包含了除 $\langle\gamma_5、\ \gamma_7\rangle = e$、$\langle\gamma_5、\ \gamma_9\rangle = e$、$\langle\gamma_{5'}、\ \gamma_7\rangle = e$、$\langle\gamma_{6'}、\ \gamma_{10}\rangle = e$ 和 $\langle\gamma_7、\ \gamma_{10}\rangle = e$ 之外，与 $T$ 对应的 $C_Y$（$T$）的所有 (23) 型定义关系。它还包含关系 $\langle\gamma_{6'}\gamma_7\gamma_{6'}、\ \gamma_{5'}\rangle = e$、$\langle\gamma_{6'}\gamma_{5'}\gamma_{8'}\gamma_{6'}、\ \gamma_7\gamma_{10}\gamma_{8'}\gamma_7\rangle = e$ 和 $\langle\gamma_{6'}\gamma_{8'}\gamma_7\gamma_{6'}\gamma_{8'}、\ \gamma_{1'}\gamma_5\gamma_{2'}\gamma_5\gamma_{1'}\rangle = e$，它们可以分别简化为 $\langle\gamma_{5'}、\ \gamma_7\rangle = e$、$\langle\gamma_7、\ \gamma_{10}\rangle = e$ 和 $\langle\gamma_5、\ \gamma_7\rangle = e$。因此，我们得到了与 $T$ 对应的 (23) 型关系，但不包括 $\langle\gamma_5、\ \gamma_9\rangle = e$ 和 $\langle\gamma_{6'}、\ \gamma_{10}\rangle = e$。

记 $T_0'$ 为从 $T$ 中删除标记为 $6'$、9和 $5'$的边后得到的子图，记 $T_0$ 为从 $T$ 中删除标记为 $6'$、9和5的边后得到的子图。由于我们已经导出了对应于 $T_0$ 和 $T_0'$的关系，因此可以得出存在自然映射$C_Y(T_0) \to G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 和 $C_Y(T_0') \to G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$。这两个映射在同时出现在两个群中的生成元上相同，即 $\gamma_{1'}$、$\gamma_{2'}$、$\gamma_7$、$\gamma_{8'}$和 $\gamma_{10}$，因此我们得到一个从它们的amalgamated product出发的映射。图 $T_0$ 和 $T_0'$ 各有一个环，因此根据 [19]，$C_Y(T_0)$和 $C_Y(T_0')$都同构于 $S_6 \ltimes A_{1,\ 6}$ by

$$\gamma_{1'} \mapsto (b\ c), \gamma_{2'} \mapsto (a\ b), \gamma_5 \mapsto (a\ f)u_{a,f}, \gamma_{5'} \mapsto (a\ f)u'_{a,f}, \gamma_7 \mapsto (e\ f), \gamma_{8'} \mapsto (c\ d), \gamma_{10} \mapsto (d\ e).$$

这里，$S_6$ 作用于标签集 $L = \{a, b, c, d, e, f\}$，对应于 $C_Y(T_0)$的$A_{1,\ 6}$副本由形如$u_{x,\ y}$ 的元素生成，其中 $x$、$y \in L$；而对应于$C_Y(T_0')$的$A_{1,\ 6}$ 副本由形如$u'_{x,\ y}$的元素生成，其中 $x$、$y \in L$（见第 2.5 小节）。因此，它们的 amalgamated product 同构于 $S_6 \ltimes (A_{1,\ 6} * A_{1,\ 6})$，我们将其记为 $H$。显然，所得映射到 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 并非满射，因此我们将缺失的生成元与其作自由积，从而得到映射

$$\varphi_1 : H * \langle\gamma_{6'}, \gamma_9\rangle \twoheadrightarrow G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle,$$

加入其余关系后，我们需要求出它的核。

输出中的一条关系经 $\varphi_1$ 拉回后变为

$$(a\ b\ c)\gamma_{6'}(a\ b)(c\ d\ e)\gamma_{6'}(a\ b\ c)(d\ e)\gamma_{6'}(a\ b)(c\ d\ e)\gamma_{6'}(a\ b\ d\ c)\gamma_{6'}(a\ b)(c\ e\ d)=e.$$

利用 $\gamma_{6'}$ 与所有固定 $e$ 的置换都可交换这一事实，这个关系可简化为 $\langle\gamma_{6'},\ (d\ e)\rangle=e$，它是 $\langle\gamma_{6'},\gamma_{10}\rangle=e$ 经 $\varphi_1$ 拉回所得的关系，而 $\langle\gamma_{6'},\gamma_{10}\rangle=e$ 是缺失的 (23) 型关系之一。

将边 $6'$ 添加到 $T_0$ 和 $T_0'$，并按照上述过程，通过计数新推导出的关系 $\langle\gamma_{6'},\gamma_{10}\rangle=e$，我们得到一个映射

$$\varphi_2:(S_7\ltimes(A_{1,7}*A_{1,7}))*\langle\gamma_9\rangle\twoheadrightarrow G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle.$$

这里，$S_7$ 在标签集 $L=\{a,b,c,d,e,f,h\}$ 上作用；$A_{1,7}$ 的一个副本由形如 $u_{x,y}$ 的元素生成，另一个则由形如 $u'_{x,y}$ 的元素生成，其中 $x,y\in L$。

输出中的另一个关系经 $\varphi_2$ 拉回后得到 $u_{f,a}u'_{c,d}u_{a,f}u'_{d,c}=e$；将其与对换共轭后，可推出对于所有互不相同的 $x,y$ 和 $w,z$，$u_{x,y}$ 与 $u'_{w,z}$ 可交换（回想一下，$u_{y,x}=u_{x}^{-1}{}_{,y}$）。

接下来，我们考虑输出中由 $\varphi_2$ 拉回得到的关系

$$u'_{e,a}u_{h,e}u'_{a,h}u_{c,a}u'_{h,c}u_{a,h}u'_{c,e}=e,$$

并对其进行化简。我们用 $\sim$ 表示群中的共轭。

$$\begin{aligned}
u_{c,e} &\sim u'_{c,h}u_{c,e}u'_{h,c}\\
&= u'_{c,e}u'_{e,h}u_{c,a}u_{a,e}u'_{h,c}\\
&\sim u'_{e,h}u_{c,a}u'_{h,c}u_{a,e}u'_{c,e}\\
&= u'_{e,h}u_{c,a}u'_{h,c}u_{a,h}u_{d,e}u_{h,d}u'_{c,e}\\
&\sim u_{h,d}u'_{e,h}u_{c,a}u'_{h,c}u_{a,h}u_{d,e}u'_{c,e}\\
&= u_{h,d}u'_{e,a}u'_{a,h}u_{c,a}u'_{h,c}u_{a,h}u_{d,e}u'_{c,e}\\
&= u'_{e,a}u_{h,d}u_{d,e}u'_{a,h}u_{c,a}u'_{h,c}u_{a,h}u'_{c,e}=e.
\end{aligned}$$

这意味着，对于所有不同的 $x$ 和 $y$，$u_{x,\ y}=e$。特别地，$\gamma_5$ 经 $\varphi_2$ 拉回后为 $(a\ f)$，也就是说，$\gamma_5$ 是通过 $\gamma_{2'}\gamma_{1'}\gamma_{8'}\gamma_{10}$ 对 $\gamma_7$ 进行的共轭。由于 $\gamma_{1'}$、$\gamma_{2'}$、$\gamma_{8'}$ 和 $\gamma_{10}$ 都与 $\gamma_9$ 可交换，且 $\langle\gamma_7$ 成立，我们得出 $\langle\gamma_5$ 也成立。

此外， $\gamma_5$ 可以表示为其他生成元的乘积。这意味着我们有一个满射 $C_Y(\hat{T}) \twoheadrightarrow G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$，其中 $\hat{T}$是从 $T$中移除边 5 后得到的子图。我们要找出这个满射的核。

和之前一样， $C_Y(T)$ 同构于 $S_8 \ltimes A_{1,\ 8}$，因为

$$\gamma_{1'} \mapsto (b\ c),\ \ \gamma_{2'} \mapsto (a\ b),\ \ \gamma_{5'} \mapsto (a\ f)u'_{a,f},\ \ \gamma_{6'} \mapsto (e\ h),\ \ \gamma_7 \mapsto (e\ f),$$

and

$$\gamma_{8'} \mapsto (c\ d),\ \ \gamma_9 \mapsto (f\ g),\ \ \gamma_{10} \mapsto (d\ e).$$

将 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 的部分定义关系拉回到 $C_Y(\hat{T})$，并利用上述与 $S_8 \ltimes A_{1,\ 8}$ 的同构，我们得到关系 $u'^2_{f,\ d} = e$ 和 $u'_{c,\ g}u'_{c,\ d}u'_{f,\ d}u'_{e,\ a}u'_{h,\ b} = e$。利用这些关系，我们可以得出，对于所有 $w$、 $z$，都有 $u'_{w,\ z} = e$ 。为此，我们先用换位 $(f\ c)$ 对 $u'^2_{f,\ d} = e$ 作共轭，得到 $u'^2_{c,\ d} = e$，然后化简另一个关系：

$$e = u'_{c,g}u'_{c,d}u'_{f,d}u'_{e,a}u'_{h,b} = u'_{d,g}u'^2_{c,d}u'_{f,d}u'_{e,a}u'_{h,b} = u'_{f,g}u'_{e,a}u'_{h,b}. \tag{24}$$

用换位 $(h\ c)$ 作共轭后，我们得到

$$u'_{f,g}u'_{e,a}u'_{c,b} = e. \tag{25}$$

(24) 与 (25) 的差为 $u'_{h,\ c} = e$，再用 $S_8$ 的元素作共轭后，对于所有 $w$、 $z$，我们得到 $u'_{w,\ z} = e$ 。这意味着 $A_{1,\ 8}$ 包含在我们正在计算的核中，因此 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle \cong S_8$。这意味着与 $X^3$ 相关的伽罗瓦覆盖的基本群是平凡群。□

3.4. 曲面 $X^4$。最后，我们考虑曲面 $X$ ，其退化是阴影 $X^4$。回顾一下， $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - S)$ 是分支曲线补空间的基本群。我们令 $\bar{G}$ 表示 $\pi_1(X_{\text{Gal}}) = G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$。

定理3.4。与 $X^4$ 相关的伽罗瓦覆盖的基本群 $\bar{G}$ 是一个阿贝尔-阿贝尔群，阶为 $2^{23}$。（事实上，是一个中心扩张 $1 \to \mathbb{Z}_2^3 \to \bar{G} \to \mathbb{Z}_2^{20} \to 1$。）

证明。在此情形下，群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 由 $\{\gamma_i\}$ for $i = 1, 1', 2, 2', \ldots, 12, 12'$ 生成。这次，六个顶点 $V_1, \ldots, V_6$ 的次数均为 4，它们导出的关系如引理 2.2 所示。对于 $V_1$，有 $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4)$；对于 $V_2$，有 $(i, j, k, l) = (3, 6, 8, 11)$；对于 $V_3$，有 $(i, j, k, l) = (4, 5, 6, 7)$；对于 $V_4$，有 $(i, j, k, l) = (7, 10, 11, 12)$；对于 $V_5$，指标为

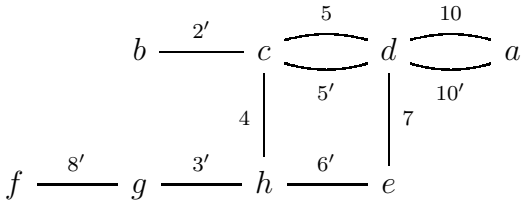



FIGURE 16. 第一次运行后的对偶图 *Magma*

$(i,j,k,l) = (2,5,9,10)$；最后，对于 $V_6$，有 $(i,j,k,l) = (1,8,9,12)$。(5*) 型关系为：

$$[\gamma_{i,i'}, \gamma_{j,j'}] = e$$

for

$$(i,j) \in \begin{array}{l} (\{1\}\times\{5,6,7,10,11\}) \cup (\{2\}\times\{6,7,8,11,12\}) \cup (\{3\}\times\{5,7,9,10,12\}) \\ \cup(\{4\}\times\{8,9,10,11,12\}) \cup (\{5\}\times\{8,11,12\}) \cup (\{6\}\times\{9,10,12\}) \\ \cup(\{7\}\times\{8,9\}) \cup (\{8\}\times\{10\}) \cup (\{9\}\times\{11\}). \end{array}$$

$_1$射影关系与之前相同，为 $\prod_{i=12} \gamma_{i'}\gamma_i = e$。

群 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 现在有 24 个生成元，以及一长串关系。我们使用 Magma 来简化这些关系。同样，某些生成元可以用其他生成元表示，因此剩下的生成元为 $\gamma_{2'}, \gamma_{3'}, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_{5'}, \gamma_{6'}, \gamma_7, \gamma_{8'}, \gamma_{10}, \gamma_{10'}$。我们按照图 15 给三角形加上标记，并考察由这些生成元生成的对偶图，见图16。

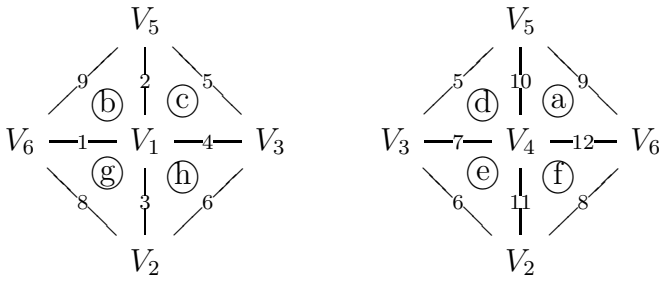



FIGURE 15. $X^4$ 带标记的三角形

我们收集了所有形式为 (23) 的关系，并注意到缺少关系 $\langle\gamma_5, \gamma_{10'}\rangle = e$、$\langle\gamma_5, \gamma_{10}\rangle = e$ 和 $\langle\gamma_5, \gamma_7\rangle = e$。输出中的关系 $\langle\gamma_{10'}, \gamma_{5'}\gamma_5\gamma_{2'}\gamma_5\gamma_{5'}\gamma_5\gamma_{2'}\gamma_5\gamma_{5'}\rangle = e$ 可简化为 $\langle\gamma_5, \gamma_{10'}\rangle = e$，这足以让我们在原始表示上运行 Magma ，

加上这个现已得到证明的附加关系。现在，我们得到 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$ 的另一个简化表示，这次的生成元为 $\gamma_{1'}$、$\gamma_{2'}$、$\gamma_{3'}$、$\gamma_5$、$\gamma_{5'}$、$\gamma_7$、$\gamma_{8'}$、$\gamma_9$、$\gamma_{11}$、$\gamma_{11'}$；其图记为 $T$，如图 17 所示。

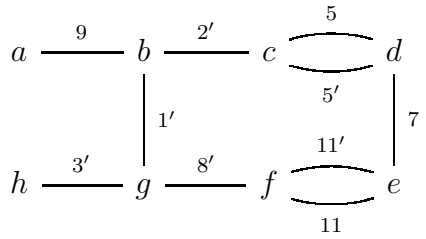



FIGURE 17. *Magma*中的第二次运行后的对偶图

我们想验证我们的群是 $C_Y(T)$的商群，其中 $T$ 见图 17。首先注意到，缺少关系 $\langle\gamma_{2'}$、$\gamma_9\rangle = e$、$\langle\gamma_5$、$\gamma_7\rangle = e$、$[\gamma_5, \gamma_9] = e$ 和 $[\gamma_{5'}, \gamma_9] = e$；但可以利用输出中的其他关系推导出这些关系。例如，我们将$\langle\gamma_{2'}\gamma_{5'}\gamma_{2'}$、$\gamma_9\rangle = e$ 化简，得到 $\langle\gamma_{2'}$、$\gamma_9\rangle = e$。随后，我们证明了以下关系：

$$
\begin{aligned}
[\gamma_{1'}\gamma_{2'}\gamma_{1'}, \gamma_9] &= e \\
[\gamma_{1'}\gamma_{3'}\gamma_{1'}, \gamma_{8'}] &= e \\
\langle\gamma_{5'}, \gamma_{2'}\gamma_5\gamma_{2'}\rangle &= e \\
\langle\gamma_{5'}, \gamma_7\gamma_5\gamma_7\rangle &= e \\
\langle\gamma_{11'}, \gamma_7\gamma_{11}\gamma_7\rangle &= e \\
\langle\gamma_{11'}, \gamma_{8'}\gamma_{11}\gamma_{8'}\rangle &= e \\
[\gamma_{2'}\gamma_{5'}\gamma_{2'}, \gamma_7\gamma_5\gamma_7] &= e \\
[\gamma_{8'}\gamma_{11'}\gamma_{8'}, \gamma_7\gamma_{11}\gamma_7] &= e.
\end{aligned}
$$

由此，我们验证了所有定义关系 (19)–(22)，因此我们的群确实是$C_Y(T)$的商群。

设 $F_{t,n}$ 为第 2.5 小节中定义的群。正如第 2.4 小节中所述，$C_Y(T) \cong S_8 \ltimes F_{3,8}$。为计算 $G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$，还需将所有关系改写为 $F_{3,8}$ 的生成元语言。回想一下，$F_{3,8}$ 是直积 $(\mathbb{F}_3)^8$ 的一个子群；设 $u_i, v_i, w_i$ 为

第 $i$ 个分量的生成元。因此，自由群 $\langle u_i, v_i, w_i\rangle$ 的元素两两交换。用这种语言表示，$F_{3,8}$ 由所有元素 $u_j u_i^{-1}$，$v_j v_i^{-1}$ 和 $w_j w_i^{-1}$ 生成。

基于通过移除边 5、 $5'$ 和$11'$从 $T$ 得到的生成子图 $T_0$，最后一步是重新诠释 $\bar{G} = G/\langle\langle\gamma^2\rangle\rangle$的定义关系，我们通过将 $G$ 映射到$S_8 \ltimes F_3$的一个商群来完成这一点, $_8$，方法是

$$\gamma_{1'} \mapsto (bg),\ \ \gamma_{2'} \mapsto (bc),\ \ \gamma_{3'} \mapsto (gh),\ \ \gamma_7 \mapsto (de),\ \ \gamma_{8'} \mapsto (fg),\ \ \gamma_9 \mapsto (ab)$$

and

$$\gamma_5 \mapsto (cd)u_c u_d^{-1},\ \ \gamma_{5'} \mapsto (cd)v_c v_d^{-1},\ \ \gamma_{11'} \mapsto (ef)w_e w_f^{-1}.$$

¯正如预期的那样， $G$ 的大多数定义关系现在都变成了平凡关系。一个例外是关系 $\omega = e$, 其中

$$\omega = [u_d, v_d][v_c, w_c]u_a^{-1}w_a v_b^{-1}u_b w_b^{-1}v_b u_c w_c w_d^{-1}u_d^{-1}w_e^{-1}u_e^{-1}w_f u_f^{-1}u_g w_g u_h w_h^{-1}. \tag{26}$$

其他非平凡关系要简单得多，通过作用 $S_8$，我们得到以下规则：

$$[u_i, v_i] = [u_j, v_j], \tag{27}$$

$$[u_i, w_i] = [u_j, w_j], \tag{28}$$

$$[v_i, w_i] = [v_j, w_j], \tag{29}$$

$$(u_i)^2 = (u_j)^2, \tag{30}$$

$$(v_i)^2 = (v_j)^2, \tag{31}$$

$$(w_i)^2 = (w_j)^2. \tag{32}$$

分别令 $C^*$ 和 $C$表示由关系 (27)–(32) 定义的 $F_{3,8}^*$ 和 $F_{3,8}$ 的商群。在 $C^*$中计算更容易：对所有 $[u_i, v_i]$，记 $[u, v]$，并类似地记 $[u, w]$、 $[v, w]$以及平方 $u^2$、 $v^2$、 $w^2$。我们有 $v_i^2 = v_j^2 = u_i v_j^2 u_i^{-1} = u_i v_i^2 u_i^{-1} = [u, v]^2 v_i^2$，因此 $[u, v]^2 = 1$，类似地， $[u, w]^2 = [v, w]^2 = 1$。模掉中心的交换子 $[u, v]$、 $[v, w]$和 $[w, u]$后，该群是阿贝尔的。

推论 3.5. 群 $C$ 和 $C^*$ 是中心扩张，如下列交换图所示：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2^3 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\text{ab}} & (\mathbb{Z}_2^3)^7 & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}^3 & \to & C^* & \xrightarrow{\text{ab}} & (\mathbb{Z}_2^3)^8 & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2^3 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

这里，左上角的群由交换子生成；标记了此类符号的箭头表示阿贝尔化映射，中间一行由短正合列诱导

$$1 \to F_{3,8} \to F_{3,8}^* \to \mathbb{Z}^3 \to 1$$

该短正合列在定义 2.5 中给出。

注意，对于互不相同的 $i$、$j$、$k$，$u_i u_j^{-1}$ 与 $v_i v_j^{-1}$ 在 $C$ 中可交换，但 $[u_i u_j^{-1}, v_i v_k^{-1}] = [u, v]$。根据推论 3.5，我们可以简化式 (26) 中定义的元素 $\omega$。该元素关系的 $b$ 项消去了交换子，于是得到 $\omega = u_a^{-1} w_a u_b w_b^{-1} u_c w_c w_d^{-1} u_d^{-1} w_e^{-1} u_e^{-1} w_f u_f^{-1} u_g w_g u_h w_h^{-1}$。利用 $u_i^2 = u_j^2$ 和 $w_i^2 = w_j^2$，以及 $[u, w]^2 = 1$。进一步简化后得到

$$\omega = [u, w](u_a u_b u_c u_d u_e^{-1} u_f^{-1} u_g^{-1} u_h^{-1})(w_a w_b w_c w_d w_e^{-1} w_f^{-1} w_g^{-1} w_h^{-1}). \tag{33}$$

再由 (30) 和 (32) 可知，该元素在 $S_8$ 对指标的作用下保持对称，且阶为 2，因此 $C/\langle\omega\rangle$ 的阶为 $2^{23}$。回想一下，这是群 $\pi_1(X_{\text{Gal}}^4)$，而对它的计算正是本文的主要目标。

回想一下，分支曲线补空间的基本群是该群与 $S_8$ 的半直积，因此有必要描述阿贝尔化的 $S_8$- 模结构。

注记 3.6. 将所有群都视为 $S_8$-模，阿贝尔化 $C^*/[C^*, C^*]$ 是自然模 $V = \mathbb{Z}_2^8$ 的三个副本的直和，即 $\langle u_i\rangle$、$\langle v_i\rangle$ 和 $\langle w_i\rangle$。

为了便于比较，请注意，对于 $p > 2$，$\mathbb{Z}_p^8$ 是两个不可约子模的直和，$\mathbb{Z}_p^8 = (\mathbb{Z}_p^8)_0 \oplus D$，其中左侧分量是零和向量构成的子空间，而$D$ 是由 (1, . . . , 1) 张成的“对角”子空间。另一方面，对于 $p = 2$，不可约

模分别是 $0 \subset D \subset V_0 \subset V$，其在 $\mathbb{Z}_2$上的维数为 $0 < 1 < 7 < 8$ 。现在，虽然 $C^*/[C^*, C^*] = V \oplus V \oplus V$，由推论 3.5 可知， $C$ 的阿贝尔化为$C/[C, C] \cong V_0 \oplus V_0 \oplus V_0$。

最后， $\omega$ 将这个直和中的 $u$ 和 $w$ 副本粘合起来，因此 $\pi_1(X^4_{\mathrm{Gal}})$的阿贝尔化为

$$(C/\langle\omega\rangle)/[C/\langle\omega\rangle, C/\langle\omega\rangle] \cong V_0 \oplus (V_0 \oplus V_0)/D(1, 1),$$

其中， $D(1, 1)$ 是 $D \oplus D \subset V_0 \oplus V_0$直和中的 $D$ 对角副本。

□

## References

[1] M. Amram，非平面退化及相关基本群，已投稿。[2] M. Amram，D. Goldberg，高次伽罗瓦覆盖，Algebr. Geom. Topol. 4 (2004)，841–859。Zbl 1069.14065[3] M. Amram，C. Gong，U. Sinichkin，S.-L. Tan，W.-Y. Xu，M. Yoshpe，六次曲面的伽罗瓦覆盖基本群，（2021），https://doi.org/10.1142/S1793525321500412。[4] M. Amram，C. Gong，S. L. Tan，M. Teicher，W.-Y. Xu，关于 $E_k$ 型平面 Zappatic 退化的伽罗瓦覆盖基本群，Int. J. Algebr. Comput. 29 (2019)，905–925。[5] M. Amram，C. Gong，M. Teicher，W.-Y. Xu，五次曲面的伽罗瓦覆盖基本群，土耳其数学杂志 45(4) (2021)，1517–1542。[6] M. Amram，R. Lawrence，U. Vishne，辫群的 Artin 覆盖，结理论及其应用杂志第 21 卷 (7) (2012)，44 页，https://doi.org/10.1142/S0218216512500617。[7] M. Amram，S. Ogata，托里克簇——退化与基本群，密歇根数学杂志 54 (2006)，587–610。[8] M. Amram，M. Teic her，U. Vishne，曲面 $T \times T$ 的伽罗瓦覆盖基本群，国际代数与计算杂志，18(8) (2008)，1259–1282。[9] M. Amram，S.-L. Tan，W.-Y. Xu，M. Yoshpe，计算 $\mathbb{CP}^1 \times T$ 的 (2,3)-嵌入的伽罗瓦覆盖基本群，数学学报 36 (2020)，273–291。[10] A. Calabri，C. Ciliberto，F. Flamini 等，关于曲面退化的 $K^2$ 及多重点公式，数学年刊 165 (2007)，335–395。[11] A. Calabri，C. Ciliberto，F. Flamini 等，关于曲面退化，（2008），arXiv:math/0310009v2。[12] N. Cohen，《对称群的局部覆盖》，理学硕士论文，巴伊兰大学，编写中。[13] C. Ciliberto，A. Lopez，R. Miranda，K3 曲面的射影退化、高斯映射与法诺三维簇，数学发明 114 (1993)，641–667。

[14] C. Liedtke，一般投影的伽罗瓦闭包基本群，Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010)，2167–2188。Zbl 1198.14017[15] B. Moishezon，M. Teicher，正指标单连通代数曲面，数学发明 89 (1987)，601–643。[16] Moishezon，B.，Robb，A.，Teicher，M.，Hirzebruch曲面的伽罗瓦覆盖，Math. Ann. 305 (1996)，493–539。[17] B. Moishezon，M. Teicher，复几何中的辫群方法 III：$V_3$ 的射影退化，Contemp. Math. 162 (1993)，313–332。[18] B. Moishezon，M. Teicher，复几何中的辫群方法 IV： $V_3 \to \mathbb{CP}^2$ 的分支曲线 $S_3$ 的辫单值化及其在 $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - S_3, *)$ 中的应用，Contemp. Math. 162 (1993)，332–358。[19] L. Rowen，M. Teicher，U. Vishne，对称群的考克斯特覆盖，J. Group Theory 8 (2005)，139–169。Zbl 1120.20040[20] E. R. Van Kampen，关于代数曲线的基本群，Amer. J. Math. 55 (1933)，255–260。Meirav Amram, Department of Mathematics, Shamoon College of Engineering, Ashdod, Israel电子邮箱: meiravt@sce.ac.ilCheng Gong, Department of Mathematics, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, P.R. China电子邮箱：cgong@suda.edu.cnPraveen Kumar Roy, UM-DAE Centre for excellence in basic sciences, Mumbai, India电子邮箱: praveen.roy1991@gmail.comUriel Sinichkin, School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel电子邮箱：sinichkin@mail.tau.ac.ilUzi vishne, Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Israel电子邮箱：vishne@math.biu.ac.il