arXiv:2303.05243v1 [math.CO] 9 Mar 2023

互异分拆函数的高阶 Tur´an 不等式

Janet J.W. Dong[1] 和 Kathy Q. Ji[2]

[1, 2] 天津大学应用数学中心，中国
天津 300072

电子邮箱：[1]dongjinwei@tju.edu.cn 和 [2]kathyji@tju.edu.cn

摘要。我们证明，互异部件分拆的数量 $q(n)$ 对于 $n \geq 33$ 具有对数凹性，并满足 Craig 和 Pun 猜想的关于 $n \geq 121$ 的高阶 Tur´an 不等式。为此，我们基于 Chern 关于 η-商的渐近公式，为 $q(n)$ 以及 $q(n-1)q(n+1)/q(n)^2$ 建立了明确的误差项。

关键词：对数凹性、高阶 Tur´an 不等式、互异部件分拆、第一类第一阶贝塞尔函数

美国数学学会分类：11P82, 05A19, 30A10

1 引言

本文旨在探讨互异分拆函数的 Tur´an 不等式及高阶 Tur´an 不等式。Tur´an 不等式（亦称牛顿不等式）和高阶 Tur´an 不等式（亦称三次不等式）源于对 Laguerre-P´olya 类实整函数的麦克劳林系数的研究，参见例如 [14] 和 [28]。若实数序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$满足 Tur´an 不等式，或称为对数凹，则对于$n \geq 1$,

$$\alpha_n^2 \geq \alpha_{n-1}\alpha_{n+1}. \tag{1.1}$$

若序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ 满足高阶 Tur´an 不等式，则对于$n \geq 1$,

$$4(\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}\alpha_{n+1})(\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n\alpha_{n+2}) \geq (\alpha_n\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}\alpha_{n+2})^2. \tag{1.2}$$

Tur´an 不等式和高阶 Tur´an 不等式与詹森多项式密切相关，例如参见 [10, 11, 12]。与序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ 相关的、次数为 d 且平移量为 n 的詹森多项式$J^{d,n}_{\alpha}(X)$定义为

$$J_{\alpha}^{d,n}(X) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \alpha_{n+i} X^i.$$

当 $d=2$ 且平移量为 $n-1$时，詹森多项式 $J^{2}_{,\alpha}{}^{n-1}(X)$化简为

$$J_{\alpha}^{2,n-1}(X)=\alpha_{n-1}+2\alpha_{n}X+\alpha_{n+1}X^{2}.$$

显然，当且仅当 $J^{2}_{,\alpha}{}^{n-1}(X)$ 仅有实根时，$\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ 在 n 处是对数凹的。一般而言，我们称数列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ 在 n 处满足 d 阶 Tur´an 不等式，当且仅当 $J^{d}_{,\alpha}{}^{n-1}(X)$ 是双曲的。回顾一下，若一个多项式的所有根均为实数，则称其为双曲的。

分拆函数的 Tur´an 不等式及高阶 Tur´an 不等式最初由 Chen [6], DeSalvo 和 Pak [13] 以及 Nicolas[24]研究。回顾一下，n 的一个分拆是一个由非递减正整数构成的有限序列$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$，满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r=n$。令 $p(n)$ 表示 n的分拆数。DeSalvo 和 Pak [13] 以及 Nicolas [24] 证明，对于 $n\geq 26$，分拆函数 $p(n)$ 是对数凹的。Chen [6] 猜想，对于 $n\geq 95$，$p(n)$ 满足高阶 Tur´an 不等式；这一猜想由陈、贾和王 [7]证明。陈、贾和王 [7] 进一步猜想，对于 $d\geq 4$，存在正整数 $N_p(d)$，使得 $p(n)$ 对$n\geq N_p(d)$满足 d 阶 Tur´an 不等式；也就是说，与 $p(n)$ 相关的詹森多项式 $J^{d}_{,p}{}^{n-1}(X)$ 对于 $n\geq N_p(d)$ 是双曲的。Griffin、Ono、Rolen 和 Zagier [18] 证实了他们的猜想对充分大的 n成立。近来，其他分拆函数的 Tur´an 不等式也得到了广泛研究，例如，Bringmann、Kane、Rolen 和 Tripp [5], 、Dong、Ji 和 Jia [15], 、Engel [16], 、Liu 和 Zhang [23], 、Jia [21] 以及 Ono、Pujahari 和 Rolen [25]的相关研究。

本文旨在研究互异分拆函数的 Tur´an 不等式及高阶 Tur´an 不等式。令 $q(n)$ 表示将 n 分拆为互异部件的方法数。例如，9 有以下八种互异部件分拆：

$$(9),\ (8,1),\ (7,2),\ (6,3),\ (6,2,1),\ (5,3),\ (5,2,1),\ (4,3,2).$$

根据欧拉分拆定理，$q(n)$ 也表示将 n 分拆为奇数部件的方法数，参见 Andrews [2, 第 1] 章或欧拉[17] 。

$q(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\geq 0}q(n)q^{n}=\prod_{j=1}^{\infty}(1+q^{j})=\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2j+1}}.$$

Hagis [19] 和 Hua [20] 利用圆法，以克洛斯特曼和与贝塞尔函数为工具，建立了 $q(n)$ 的拉德马赫型公式。基于该公式，Craig 和 Pun[9] 利用 Griffin、Ono、Rolen 和 Zagier[18]的一般性结果，证明了当 n 充分大时，$q(n)$ 满足阶数为 d 的 Tur´an 不等式。他们还提出了以下猜想。

猜想 1.1（Craig-Pun）。函数 $q(n)$ 是对数凹的（ $n\geq 33$ ），并且满足 $n\geq 121$ 的高阶 Tur ´an 不等式。

本文的主要贡献是证实猜想 1.1。我们没有使用 Hagis [19] 和 Hua [20], 给出的 $q(n)$ 的拉德马赫型公式，而是发现 Chern 的渐近公式对于证明猜想 1.1 起着重要作用，这些公式涉及 η-商 [8] 。

借助 Chern 的渐近公式，我们得到 $q(n)$ 的一个渐近公式，并对误差项给出一个有效界。为陈述这一界，我们采用以下记号:

$$\nu(n) = \frac{\pi\sqrt{24n+1}}{6\sqrt{2}}. \tag{1.3}$$

我们有 $q(n)$ 的以下渐近公式。

定理 1.2. 对于 $\nu(n) \geq 21$，或者等价地， $n \geq 135$,

$$q(n) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} I_1(\nu(n)) + R(n), \tag{1.4}$$

其中 $I_1(s)$ 是第一类第一种修正贝塞尔函数，定义为

$$I_1(s) = \frac{s}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}e^{st}\mathrm{d}t, \tag{1.5}$$

and

$$|R(n)| \leq \frac{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{2}}}{6\nu(n)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{\nu(n)}{3}\right). \tag{1.6}$$

利用定理 1.2，我们为 $q(n)$ 建立一个上界和一个下界，这两个界在猜想 1.1 的证明中是必需的。

定理 1.3. 设

$$M(n) := \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} I_1(\nu(n)). \tag{1.7}$$

对于 $\nu(n) \geq 43$,

$$M(n)\left(1-\frac{1}{\nu(n)^6}\right) \leq q(n) \leq M(n)\left(1+\frac{1}{\nu(n)^6}\right). \tag{1.8}$$

Let

$$Q(n) = \frac{q(n-1)q(n+1)}{q(n)^2}. \tag{1.9}$$

由 (1.1) 显然可知， $q(n)$ 对于 $n \geq 33$ 是对数凹的，当且仅当 $Q(n) \leq 1$ 对于 $n \geq 33$。利用 (1.2) 可以验证，只要满足以下条件， $q(n)$ 就满足关于 $n \geq 121$ 的高阶 Tur´an 不等式:

$$4(1-Q(n))(1-Q(n+1)) - (1-Q(n)Q(n+1))^2 \geq 0 \tag{1.10}$$

对于 $n \geq 121$。因此，为了证明猜想 1.1，我们首先利用定理 1.3 为 $Q(n)$ 建立有效的上下界。

定理 1.4。设

$$E_Q(n) := 1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5}. \tag{1.11}$$

那么，对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$E_Q(n) - \frac{135}{\nu(n)^6} < Q(n) < E_Q(n) + \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6}. \tag{1.12}$$

事实证明，猜想 1.1 可由定理 1.4 推出。因此，我们得到以下推论。

定理 1.5. 对于 $n \geq 121$，三次多项式

$$q(n-1) + 3q(n)x + 3q(n+1)x^2 + q(n+2)x^3$$

只有实零点。

本文结构安排如下。第 2 节证明若干涉及第一类第一种修正贝塞尔函数的不等式，这些不等式是证明定理 1.4 所必需的。第 3 节借助 Chern 关于 η-商的渐近公式证明定理 1.2，随后利用定理 1.2 证明定理 1.3。第 4 节借助定理 1.2 以及第 2 节中建立的关于第一类第一种修正贝塞尔函数的不等式，证明定理 1.4。第 5 节利用定理 1.4 给出猜想 1.1 的证明。最后，第 6 节提出一些有待进一步研究的问题。

2 $I_1(s)$ 的显式界

为了使定理 1.3 中的渐近公式在猜想 1.1 的证明中发挥作用，我们需要关于第一类修正贝塞尔函数 $I_1(s)$ 的一些不等式。在此之前，我们先回顾伽马函数 $\Gamma(a)$ 和上不完全伽马函数 $\Gamma(a, s)$ 的定义，参见 [1, 第 6] 章。

伽马函数 $\Gamma(a)$ 定义为

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

众所周知,

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

参见 [27,第 32–34] 页。

上不完全伽马函数 $\Gamma(a, s)$ 定义为

$$\Gamma(a, s) = \int_s^\infty t^{a-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

关于 $\Gamma(a,s)$ 的以下估计可由 Pinelis [26] 的命题 2.6 的证明推得，而该命题的证明是引理 2.2 证明所需的。对于 $a \geq 1$ 和 $s \geq a$,

$$\Gamma(a,s) \leq as^{a-1}e^{-s}. \tag{2.1}$$

猜想 1.1 的证明中关于 $I_1(s)$ 的第一个不等式归功于 Bringmann、Kane、Rolen 和 Trippin [5, 引理 2.2]。

引理 2.1（Bringmann-Kane-Rolen-Trippin）。对于 $s \geq 1$,

$$I_1(s) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi s}}e^s. \tag{2.2}$$

我们还需要关于 $I_1(s)$ 的进一步估计。

引理 2.2。设

$$E_I(s) := 1 - \frac{3}{8s} - \frac{15}{128s^2} - \frac{105}{1024s^3} - \frac{4725}{32768s^4} - \frac{72765}{262144s^5}. \tag{2.3}$$

那么对于 $s \geq 26$,

$$\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}\left(E_I(s) - \frac{31}{s^6}\right) \leq I_1(s) \leq \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}\left(E_I(s) + \frac{31}{s^6}\right), \tag{2.4}$$

证明。我们从 $I_1(s)$ 的积分定义 (1.5) 出发,

$$I_1(s) = \frac{s}{\pi}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}}e^{st}\mathrm{d}t + \frac{s}{\pi}\int_{-1}^0 (1-t^2)^{\frac{1}{2}}e^{st}\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

显然,

$$\left|\frac{s}{\pi}\int_{-1}^0 (1-t^2)^{\frac{1}{2}}e^{st}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{s}{\pi}. \tag{2.6}$$

接下来，我们估计（2.5）中的第一个积分。令 $u = 1-t$，可得

$$\frac{s}{\pi}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}}e^{st}\mathrm{d}t = \frac{se^s}{\pi}\int_0^1 (2-u)^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}e^{-su}\mathrm{d}u. \tag{2.7}$$

由泰勒公式可得

$$(2-u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - \frac{u}{2\sqrt{2}} - \frac{u^2}{16\sqrt{2}} - \frac{u^3}{64\sqrt{2}} - \frac{5u^4}{1024\sqrt{2}} - \frac{7u^5}{4096\sqrt{2}} + c(\xi)u^6, \tag{2.8}$$

其中

$$c(\xi) = \frac{1}{6!}\left(\frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}u^6}(2-u)^{\frac{1}{2}}\right)_{u=\xi} = -\frac{21}{1024}(2-\xi)^{-\frac{11}{2}} \quad \text{for some} \quad \xi \in (0,1). \tag{2.9}$$

将 (2.8) 代入 (2.7)，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}se^s}{\pi}\int_0^1\left(u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}u^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32}u^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{128}u^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{2048}u^{\frac{9}{2}}-\frac{7}{8192}u^{\frac{11}{2}}\right)e^{-su}\mathrm{d}u\\
&\quad+\frac{se^s}{\pi}\int_0^1 c(\xi)u^{\frac{13}{2}}e^{-su}\mathrm{d}u\\
&=\frac{\sqrt{2}se^s}{\pi}\left(\int_0^\infty-\int_1^\infty\right)\left(u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}u^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32}u^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{128}u^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{2048}u^{\frac{9}{2}}-\frac{7}{8192}u^{\frac{11}{2}}\right)e^{-su}\mathrm{d}u\\
&\quad+\frac{se^s}{\pi}\int_0^1 c(\xi)u^{\frac{13}{2}}e^{-su}\mathrm{d}u:=I_1^{(1)}(s)+I_1^{(2)}(s)+I_1^{(3)}(s).
\end{aligned}\tag{2.10}$$

计算式 (2.10) 中的第一个积分 $I_1^{(1)}(s)$，可得主项:

$$\begin{aligned}
I_1^{(1)}(s)=&\frac{\sqrt{2}se^s}{\pi}\int_0^\infty\left(u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}u^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32}u^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{128}u^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{2048}u^{\frac{9}{2}}-\frac{7}{8192}u^{\frac{11}{2}}\right)e^{-su}\mathrm{d}u\\
=&\frac{\sqrt{2}e^s}{\sqrt{s}\pi}\int_0^\infty\left((su)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4s}(su)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32s^2}(su)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{128s^3}(su)^{\frac{7}{2}}\right.\\
&\left.-\frac{5}{2048s^4}(su)^{\frac{9}{2}}-\frac{7}{8192s^5}(su)^{\frac{11}{2}}\right)e^{-su}\mathrm{d}(su)\\
=&\frac{\sqrt{2}e^s}{\sqrt{s}\pi}\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4s}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{32s^2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{128s^3}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\right.\\
&\left.-\frac{5}{2048s^4}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)-\frac{7}{8192s^5}\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)\right)\\
=&\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}\left(1-\frac{3}{8s}-\frac{15}{128s^2}-\frac{105}{1024s^3}-\frac{4725}{32768s^4}-\frac{72765}{262144s^5}\right).
\end{aligned}\tag{2.11}$$

接下来计算式 (2.10) 中的第二个积分 $I_1^{(2)}(s)$:

$$\begin{aligned}
I_1^{(2)}(s) =& -\frac{\sqrt{2}se^s}{\pi}\int_1^\infty \left(u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}u^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32}u^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{128}u^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{2048}u^{\frac{9}{2}}-\frac{7}{8192}u^{\frac{11}{2}}\right)e^{-su}\mathrm{d}u\\
=& -\frac{\sqrt{2}e^s}{\sqrt{s}\pi}\int_s^\infty \left((su)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4s}(su)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32s^2}(su)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{128s^3}(su)^{\frac{7}{2}}-\right.\\
&\left.-\frac{5}{2048s^4}(su)^{\frac{9}{2}}-\frac{7}{8192s^5}(su)^{\frac{11}{2}}\right)e^{-su}\mathrm{d}(su)\\
=& \frac{\sqrt{2}e^s}{\sqrt{s}\pi}\left(-\Gamma\left(\frac{3}{2},s\right)+\frac{1}{4s}\Gamma\left(\frac{5}{2},s\right)+\frac{1}{32s^2}\Gamma\left(\frac{7}{2},s\right)+\frac{1}{128s^3}\Gamma\left(\frac{9}{2},s\right)\right.\\
&\left.+\frac{5}{2048s^4}\Gamma\left(\frac{11}{2},s\right)+\frac{7}{8192s^5}\Gamma\left(\frac{13}{2},s\right)\right),\\
\overset{(2.1)}{\leq}& \frac{\sqrt{2}e^s}{\sqrt{s}\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{32}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{128}\cdot\frac{9}{2}+\frac{5}{2048}\cdot\frac{11}{2}+\frac{7}{8192}\cdot\frac{13}{2}\right)\sqrt{s}e^{-s}\\
=& \frac{37495\sqrt{2}}{16384\pi} \qquad \text{for} \quad s\geq\frac{13}{2}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

接下来还需估计 (2.10) 中的 $I_1^{(3)}(s)$。由 (2.9) 可知,

$$\begin{aligned}
|I_1^{(3)}(s)| = \left|\frac{se^s}{\pi}\int_0^1 c(\xi)u^{\frac{13}{2}}e^{-su}\mathrm{d}u\right| &\leq \frac{21s^{-\frac{13}{2}}e^s}{1024\pi}\int_0^\infty (su)^{\frac{13}{2}}e^{-su}\mathrm{d}(su)\\
&= \frac{21s^{-\frac{13}{2}}e^s}{1024\pi}\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)\\
&= \frac{2837835}{131072\sqrt{\pi}}s^{-\frac{13}{2}}e^s.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

结合 (2.6)、(2.11)、(2.12) 和 (2.13), 可得对于 $s\geq\frac{13}{2}$,

$$I_1(s) = \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}\left(1-\frac{3}{8s}-\frac{15}{128s^2}-\frac{105}{1024s^3}-\frac{4725}{32768s^4}-\frac{72765}{262144s^5}\right)+r(s), \tag{2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
|r(s)| &\leq \frac{s}{\pi}+\frac{37495\sqrt{2}}{16384\pi}+\frac{2837835}{131072\sqrt{\pi}}s^{-\frac{13}{2}}e^s\\
&= \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}\cdot\frac{1}{s^6}\left(\left(\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{\pi}}+\frac{37495}{8192\sqrt{\pi}}\right)s^{\frac{13}{2}}e^{-s}+\frac{2837835\sqrt{2}}{131072}\right).
\end{aligned}$$

为证明 (2.4), 只需证明对于 $s\geq 26$,

$$|r(s)| \leq \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}\cdot\frac{31}{s^6}. \tag{2.15}$$

定义

$$f(s) := \left(\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{\pi}} + \frac{37495}{8192\sqrt{\pi}}\right) s^{\frac{13}{2}} e^{-s} + \frac{2837835\sqrt{2}}{131072}.$$

注意到

$$f'(s) = s^{\frac{11}{2}} e^{-s} \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} s^2 + \frac{5\left(12288\sqrt{2} - 7499\right)}{8192\sqrt{\pi}} s + \frac{487435}{16384\sqrt{\pi}}\right).$$

由于 $f'(s) < 0 \text{for } s \geq 8$, 我们推得 $f(s)$ 在 $s \geq 8$ 时递减。这意味着当 $s \geq 26$ 时,

$$f(s) \leq f(26) \approx 30.8068 < 31.$$

因此, 不等式 (2.15) 成立。结合 (2.14) 和 (2.15), 可得引理 2.2 中的 (2.4)。证明完毕。 ∎

根据引理 2.2, 我们得到关于 $I_1(\nu(n-1))I_1(\nu(n+1))/I_1(\nu(n))^2$, 的以下不等式, 这些不等式将在定理 1.4 的证明中用到。

引理 2.3。对于 $\nu(n) \geq 60$,

$$\frac{I_1(\nu(n-1))I_1(\nu(n+1))}{I_1(\nu(n))^2} \geq \frac{\nu(n)}{\sqrt{\nu(n-1)\nu(n+1)}} \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} - \frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right) \times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{129}{\nu(n)^6}\right), \tag{2.16}$$

$$\frac{I_1(\nu(n-1))I_1(\nu(n+1))}{I_1(\nu(n))^2} \leq \frac{\nu(n)}{\sqrt{\nu(n-1)\nu(n+1)}} \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6}\right) \times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{121}{\nu(n)^6}\right). \tag{2.17}$$

证明。利用 (2.4), 我们发现对于 $\nu(n) \geq 26$,

$$\frac{I_1(\nu(n-1))I_1(\nu(n+1))}{I_1(\nu(n))^2} \geq \frac{\nu(n)}{\sqrt{\nu(n-1)\nu(n+1)}} e^{\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n)} L(n) \tag{2.18}$$

and

$$\frac{I_1(\nu(n-1))I_1(\nu(n+1))}{I_1(\nu(n))^2} \leq \frac{\nu(n)}{\sqrt{\nu(n-1)\nu(n+1)}} e^{\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n)} R(n), \tag{2.19}$$

其中 $\nu(n)$ 和 $E_I(s)$ 分别定义为 (1.3) 和 (2.3),

$$L(n) = \frac{\left(E_I(\nu(n-1)) - \frac{31}{\nu(n-1)^6}\right)\left(E_I(\nu(n+1)) - \frac{31}{\nu(n+1)^6}\right)}{\left(E_I(\nu(n)) + \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2} \tag{2.20}$$

and

$$R(n)=\frac{\left(E_I(\nu(n-1))+\frac{31}{\nu(n-1)^6}\right)\left(E_I(\nu(n+1))+\frac{31}{\nu(n+1)^6}\right)}{\left(E_I(\nu(n))-\frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2}. \tag{2.21}$$

为得到 (2.16) 和 (2.17)，我们打算用 $\nu(n)$ 来估计 $\exp(\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n))$、$L(n)$ 和 $R(n)$。由 $\nu(n)$ 的定义 (1.3) 可知，对于 $\nu(n)\geq 2$,

$$\nu(n-1)=\sqrt{\nu(n)^2-\frac{\pi^2}{3}},\quad \nu(n+1)=\sqrt{\nu(n)^2+\frac{\pi^2}{3}}. \tag{2.22}$$

注意到，对于 $\nu(n)\geq 2$,

$$\begin{aligned}\nu(n-1)&=\nu(n)-\frac{\pi^2}{6\nu(n)}-\frac{\pi^4}{72\nu(n)^3}-\frac{\pi^6}{432\nu(n)^5}-\frac{5\pi^8}{10368\nu(n)^7}+O\left(\frac{1}{\nu(n)^8}\right),\\ \nu(n+1)&=\nu(n)+\frac{\pi^2}{6\nu(n)}-\frac{\pi^4}{72\nu(n)^3}+\frac{\pi^6}{432\nu^5(n)}-\frac{5\pi^8}{10368\nu(n)^7}+O\left(\frac{1}{\nu(n)^8}\right),\end{aligned}$$

因此不难验证，对于 $\nu(n)\geq 3$,

$$d_v(n)<\nu(n-1)<u_v(n), \tag{2.23}$$

$$\bar{d}_v(n)<\nu(n+1)<\bar{u}_v(n), \tag{2.24}$$

其中

$$\begin{aligned}d_v(n)&=\nu(n)-\frac{\pi^2}{6\nu(n)}-\frac{\pi^4}{72\nu(n)^3}-\frac{\pi^6}{432\nu(n)^5}-\frac{5\pi^8}{5184\nu(n)^7},\\ u_v(n)&=\nu(n)-\frac{\pi^2}{6\nu(n)}-\frac{\pi^4}{72\nu(n)^3}-\frac{\pi^6}{432\nu(n)^5},\\ \bar{d}_v(n)&=\nu(n)+\frac{\pi^2}{6\nu(n)}-\frac{\pi^4}{72\nu(n)^3}+\frac{\pi^6}{432\nu(n)^5}-\frac{5\pi^8}{5184\nu(n)^7},\\ \bar{u}_v(n)&=\nu(n)+\frac{\pi^2}{6\nu(n)}-\frac{\pi^4}{72\nu(n)^3}+\frac{\pi^6}{432\nu(n)^5}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

结合 (2.23) 和 (2.24)，现在我们可以用 $\nu(n)$ 来界定 $\exp(\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n))$、$L(n)$ 和 $R(n)$。

我们先估计 $\exp(\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n))$。应用 (2.23) 和 (2.24)，可得，对于 $\nu(n)\geq 3$,

$$-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}-\frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}<\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n)<-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}.$$

由此可得，对于 $\nu(n)\geq 3$,

$$\exp(\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n))<\exp\left(-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}\right) \tag{2.26}$$

and

$$\exp(\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n))>\exp\left(-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}-\frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right). \tag{2.27}$$

注意，对于 $s<0$,

$$1+s<e^s<1+s+s^2.$$

因此我们得到

$$\exp\left(-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}\right)<1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}+\frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6} \tag{2.28}$$

and

$$\exp\left(-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}-\frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right)>1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}-\frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}. \tag{2.29}$$

结合 (2.26) 和 (2.28)，可得对于 $\nu(n)\geq 3$,

$$\exp\left(\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n)\right)<1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}+\frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6}. \tag{2.30}$$

利用 (2.27) 和 (2.29)，可得对于 $\nu(n)\geq 3$,

$$\exp\left(\nu(n-1)+\nu(n+1)-2\nu(n)\right)>1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}-\frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}. \tag{2.31}$$

接下来，我们估计 $L(n)$ 和 $R(n)$。令

$$\begin{aligned}P_l(n)=\frac{1}{\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6}&\left(\nu(n-1)^6-\frac{3}{8}\nu(n-1)^4u_v(n)-\frac{15}{128}\nu(n-1)^4\right.\\&\left.-\frac{105}{1024}\nu(n-1)^2u_v(n)-\frac{4725}{32768}\nu(n-1)^2-\frac{72765}{262144}u_v(n)-31\right)\\&\times\left(\nu(n+1)^6-\frac{3}{8}\nu(n+1)^4\bar{u}_v(n)-\frac{15}{128}\nu(n+1)^4-\frac{105}{1024}\nu(n+1)^2\bar{u}_v(n)\right.\\&\left.-\frac{4725}{32768}\nu(n+1)^2-\frac{72765}{262144}\bar{u}_v(n)-31\right)\end{aligned} \tag{2.32}$$

and

$$\begin{aligned}P_r(n)=\frac{1}{\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6}&\left(\nu(n-1)^6-\frac{3}{8}\nu(n-1)^4d_v(n)-\frac{15}{128}\nu(n-1)^4\right.\\&\left.-\frac{105}{1024}\nu(n-1)^2d_v(n)-\frac{4725}{32768}\nu(n-1)^2-\frac{72765}{262144}d_v(n)+31\right)\\&\times\left(\nu(n+1)^6-\frac{3}{8}\nu(n+1)^4\bar{d}_v(n)-\frac{15}{128}\nu(n+1)^4-\frac{105}{1024}\nu(n+1)^2\bar{d}_v(n)\right.\\&\left.-\frac{4725}{32768}\nu(n+1)^2-\frac{72765}{262144}\bar{d}_v(n)+31\right).\end{aligned} \tag{2.33}$$

将 (2.23) 和 (2.24) 代入 (2.20) 和 (2.21)，不难验证，对于$\nu(n) \geq 3$,

$$L(n) \geq \frac{P_l(n)}{\left(E_I(\nu(n)) + \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2} \tag{2.34}$$

and

$$R(n) \leq \frac{P_r(n)}{\left(E_I(\nu(n)) - \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2}. \tag{2.35}$$

为了用 $\nu(n)$ 给出 $L(n)$ 和 $R(n)$ 的界，我们将证明，对于 $\nu(n) \geq 60$,

$$\begin{aligned}\frac{P_l(n)}{\left(E_I(\nu(n)) + \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2} &\geq 1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{129}{\nu(n)^6} \\ &= \frac{32\nu(n)^6 - \pi^4\nu(n) - 4128}{32\nu(n)^6}\end{aligned} \tag{2.36}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{P_r(n)}{\left(E_I(\nu(n)) - \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2} &\leq 1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{121}{\nu(n)^6} \\ &= \frac{32\nu(n)^6 - \pi^4\nu(n) + 3872}{32\nu(n)^6},\end{aligned} \tag{2.37}$$

这等价于证明，对于 $\nu(n) \geq 60$,

$$32\nu(n)^6 P_l(n) - \left(32\nu(n)^6 - \pi^4\nu(n) - 4128\right)\left(E_I(\nu(n)) + \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2 \geq 0 \tag{2.38}$$

and

$$\left(32\nu(n)^6 - \pi^4\nu(n) + 3872\right)\left(E_I(\nu(n)) - \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2 - 32\nu(n)^6 P_r(n) \geq 0. \tag{2.39}$$

将 (2.22) 和 (2.25) 代入 (2.32) 和 (2.33)，我们得到

$$\begin{aligned}&32\nu(n)^6 P_l(n) - \left(32\nu(n)^6 - \pi^4\nu(n) - 4128\right)\left(E_I(\nu(n)) + \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2 \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{26} a_j \nu(n)^j}{\nu(n)^{14}\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6}\end{aligned} \tag{2.40}$$

and

$$\begin{aligned}&\left(32\nu(n)^6 - \pi^4\nu(n) + 3872\right)\left(E_I(\nu(n)) - \frac{31}{\nu(n)^6}\right)^2 - 32\nu(n)^6 P_r(n) \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{26} b_j \nu(n)^j}{\nu(n)^{14}\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6},\end{aligned} \tag{2.41}$$

其中 a_j 和 b_j 是实数。这里我们仅列出 a_{24}、a_{25}、a_{26}、b_{24}、b_{25} 和 b_{26} 的取值:

$$a_{24} = 78 - \frac{175\pi^4}{64}, \quad a_{25} = -1608 - \frac{19\pi^4}{16}, \quad a_{26} = 160 - \frac{4\pi^4}{3},$$

$$b_{24} = 102 + \frac{175\pi^4}{64}, \quad b_{25} = \frac{19\pi^4}{16} - 1416, \quad b_{26} = \frac{4\pi^4}{3} - 96.$$

容易验证，对于任意 $0 \le j \le 23$ 和 $\nu(n) \ge 27$,

$$-|a_j|\nu(n)^j \ge -|a_{24}|\nu(n)^{24}$$

and

$$-|b_j|\nu(n)^j \ge -|b_{24}|\nu(n)^{24}.$$

由此可得，对于 $\nu(n) \ge 27$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{26} a_j\nu(n)^j &\ge -\sum_{j=0}^{24} |a_j|\,\nu(n)^j + a_{25}\nu(n)^{25} + a_{26}\nu(n)^{26} \\ &\ge -25\,|a_{24}|\,\nu(n)^{24} + a_{25}\nu(n)^{25} + a_{26}\nu(n)^{26}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{26} b_j\nu(n)^j &\ge -\sum_{j=0}^{24} |b_j|\,\nu(n)^j + b_{25}\nu(n)^{25} + b_{26}\nu(n)^{26} \\ &\ge -25\,|b_{24}|\,\nu(n)^{24} + b_{25}\nu(n)^{25} + b_{26}\nu(n)^{26}.\end{aligned}$$

此外，容易验证，对于 $\nu(n) \ge 60$,

$$-25\,|a_{24}|\,\nu(n)^{24} + a_{25}\nu(n)^{25} + a_{26}\nu(n)^{26} \ge 0$$

and

$$-25\,|b_{24}|\,\nu(n)^{24} + b_{25}\nu(n)^{25} + b_{26}\nu(n)^{26} \ge 0.$$

因此，(2.38) 和 (2.39) 对于 $\nu(n) \ge 60$ 成立，进而 (2.36) 和 (2.37) 对于$\nu(n) \ge 60$ 成立。将 (2.36) 代入 (2.34)，可得对于 $\nu(n) \ge 60$,

$$L(n) \ge 1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{129}{\nu(n)^6}. \tag{2.42}$$

将 (2.37) 代入 (2.35)，可得对于 $\nu(n) \ge 60$,

$$R(n) \le 1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{121}{\nu(n)^6}. \tag{2.43}$$

将 (2.30)、(2.31)、(2.42) 和 (2.43) 代入 (2.18) 和 (2.19)，即可得到 (2.16) 和 (2.17)。证明至此完成。 ∎

3 定理1.2和定理 1.3 的证明

为证明定理 1.2，我们首先通过特化 Chern [8] 给出的 η-商 $G(q)$ 的渐近公式，推导出 $q(n)$ 的渐近公式，并给出一个显式界。定义

$$G(q) = G(e^{2\pi i\tau}) := \prod_{r=1}^{R}(q^{m_r};q^{m_r})_\infty^{\delta_r}, \tag{3.1}$$

其中 $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_R)$ 是由 R 个互不相同的正整数组成的序列，而 $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_R)$ 是由 R 个非零整数组成的序列。本文中我们始终采用关于 q-级数 [2] 的标准记号。

$$(a;q)_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j) \quad \text{and} \quad (a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j).$$

为了陈述 Chern 的结果，我们需要先给出一些定义。设 h 和 j 是满足最大公约数 $(h,j) = 1$ 的正整数，令

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{R}\delta_r, \qquad \Delta_2 = \sum_{r=1}^{R} m_r\delta_r,$$

$$\Delta_3(k) = -\sum_{r=1}^{R}\frac{\delta_r \gcd^2(m_r,k)}{m_r}, \qquad \Delta_4(k) = \prod_{r=1}^{R}\left(\frac{m_r}{\gcd(m_r,k)}\right)^{-\frac{\delta_r}{2}},$$

$$\hat{A}_k(n) = \sum_{\substack{0\le h<k\\ \gcd(h,k)=1}} \exp\left(-\frac{2\pi nhi}{k} - \pi i\sum_{r=1}^{R}\delta_r s\left(\frac{m_r h}{\gcd(m_r,k)}, \frac{k}{\gcd(m_r,k)}\right)\right), \tag{3.2}$$

其中 $s(h,j)$ 是由下式定义的 Dedekind 和

$$s(h,j) = \sum_{r=1}^{j-1}\left(\frac{r}{j} - \left[\frac{r}{j}\right] - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{hr}{j} - \left[\frac{hr}{j}\right] - \frac{1}{2}\right).$$

令 $L = \mathrm{lcm}(m_1,\ldots,m_R)$。我们将集合 $\{1,2\cdots,L\}$ 划分为两个互不相交的子集：

$$\mathcal{L}_{>0} := \{1 \le l \le L : \Delta_3(l) > 0\},$$
$$\mathcal{L}_{\le 0} := \{1 \le l \le L : \Delta_3(l) \le 0\}.$$

若记

$$G(q) = \sum_{n\ge 0} g(n)q^n.$$

Chern [8] 得到了带有 $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{R}\delta_r \ge 0$ 的 $g(n)$ 渐近公式。

定义

$$\mathbb{E}_{\Delta_1}(s) := \begin{cases} 1, & \Delta_1 = 0, \\ 2\sqrt{s}, & \Delta_1 = -\frac{1}{2}, \\ s\log(s+1), & \Delta_1 = -1, \\ s^{-2\Delta_1-1}\zeta(-\Delta_1), & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $\zeta(\cdot)$ 是黎曼ζ函数。

定理3.1（Chern）。若 $\Delta_1 \le 0$ 且不等式

$$\min_{1\le r\le R}\left(\frac{\gcd^2(m_r,l)}{m_r}\right) \ge \frac{\Delta_3(l)}{24} \tag{3.4}$$

对所有 $1 \le l \le L$ 都成立，则对于正整数 N 和 $n > -\frac{\Delta_2}{24}$，有

$$\begin{aligned} g(n) = E(n) + \sum_{l\in\mathcal{L}_{>0}} 2\pi\Delta_4(l)\left(\frac{24n+\Delta_2}{\Delta_3(l)}\right)^{-\frac{\Delta_1+1}{2}} \\ \times \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\equiv_L l}} \frac{I_{-\Delta_1-1}\left(\frac{\pi}{6k}\sqrt{\Delta_3(l)(24n+\Delta_2)}\right)}{k}\hat{A}_k(n), \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{aligned} |E(n)| \le \frac{2^{-\Delta_1}\pi^{-1}N^{-\Delta_1+2}}{n+\frac{\Delta_2}{24}} \exp\left(2\pi\left(n+\frac{\Delta_2}{24}\right)N^{-2}\right) \sum_{l\in\mathcal{L}_{>0}} \Delta_4(l)\exp\left(\frac{\Delta_3(l)\pi}{3}\right) \\ + 2\exp\left(2\pi\left(n+\frac{\Delta_2}{24}\right)N^{-2}\right)\mathbb{E}_{\Delta_1}(N) \\ \times \left(\sum_{1\le l\le L}\Delta_4(l)\exp\left(\frac{\pi\Delta_3(l)}{24} + \sum_{r=1}^{R}\frac{|\Delta_r|\exp\left(-\pi\gcd^2(m_r,l)/m_r\right)}{\left(1-\exp\left(-\pi\gcd^2(m_r,l)/m_r\right)\right)^2}\right)\right. \\ \left. - \sum_{l\in\mathcal{L}_{>0}}\Delta_4(l)\exp\left(\frac{\pi\Delta_3(l)}{24}\right)\right), \end{aligned}$$

且 $I_\nu(s)$ 是第一类修正贝塞尔函数的 ν 阶函数。

现在我们可以借助定理3.1证明定理 1.2。定理 1.2 的证明。回顾一下,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n)q^n = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty},$$

表1： $\Delta_3(l)$ 和 $\Delta_4(l)$ 在 $1 \le l \le 2$ 时的取值。

l	1	2
$\Delta_3(l)$	$\frac{1}{2}$	-1
$\Delta_4(l)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

因此我们有 $\mathbf{m} = (1, 2)$ 和 $\delta = (-1, 1)$。直接计算可得 $\Delta_1 = 0$，以及 $\Delta_2 = 1$。我们还有 $L = 2$。$1 \le l \le L$ 时 $\Delta_3(l)$ 和 $\Delta_4(l)$ 的取值列于表1。因此 $\mathcal{L}_{>0} = \{1\}$。不难验证，对于 $1 \le l \le 2$，(3.4) 始终成立。

因此，由定理3.1可得

$$q(n) = E(n) + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} \sum_{\substack{1 \le k \le N \\ 2 \nmid k}} I_1\left(\frac{\nu(n)}{k}\right) \frac{\hat{A}_k(n)}{k},$$

其中 $\nu(n)$ 的定义如 (1.3) 所示，且

$$\begin{aligned}
|E(n)| \le{}& \frac{\pi^{-1}N^2}{n + \frac{1}{24}} \exp\left(2\pi\left(n + \frac{1}{24}\right)N^{-2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\exp\left(2\pi\left(n + \frac{1}{24}\right)N^{-2}\right) \\
&\times \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\frac{\pi}{48} + \frac{\exp(-\pi)}{(1-\exp(-\pi))^2} + \frac{\exp(-\pi/2)}{(1-\exp(-\pi/2))^2}\right) \right. \\
&\left. + \exp\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\exp(-\pi)}{(1-\exp(-\pi))^2} + \frac{\exp(-2\pi)}{(1-\exp(-2\pi))^2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{48}\right) \right\}.
\end{aligned}$$

假设 $N = \lfloor \nu(n) \rfloor$，则

$$\begin{aligned}
|E(n)| \le{}& \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \frac{\lfloor \nu(n) \rfloor^2}{\nu(n)^2} \exp\left(\frac{6\nu(n)^2}{\pi \lfloor \nu(n) \rfloor^2} + \frac{\pi}{6}\right) \\
&+ 2\exp\left(\frac{6\nu(n)^2}{\pi \lfloor \nu(n) \rfloor^2}\right) \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\frac{\pi}{48} + \frac{\exp(-\pi)}{(1-\exp(-\pi))^2} + \frac{\exp(-\pi/2)}{(1-\exp(-\pi/2))^2}\right) \right. \\
&\left. + \exp\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\exp(-\pi)}{(1-\exp(-\pi))^2} + \frac{\exp(-2\pi)}{(1-\exp(-2\pi))^2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{48}\right) \right\}.
\end{aligned}$$

利用以下两个不等式:

$$\frac{\lfloor \nu(n) \rfloor^2}{\nu(n)^2} \le 1 \quad \text{and} \quad \frac{\nu(n)^2}{\lfloor \nu(n) \rfloor^2} < \frac{\nu(n)^2}{(\nu(n)-1)^2} < 2 \quad \text{for } \nu(n) \ge 4,$$

我们推导得出

$$|E(n)| \le \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\exp\left(\frac{12}{\pi}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$+2\exp\left(\frac{12}{\pi}\right)\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{48}+\frac{\exp(-\pi)}{(1-\exp(-\pi))^2}+\frac{\exp(-\pi/2)}{(1-\exp(-\pi/2))^2}\right)\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\exp(-\pi)}{(1-\exp(-\pi))^2}+\frac{\exp(-2\pi)}{(1-\exp(-2\pi))^2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{48}\right)\right\} \le 173.$$

因此，我们得出，对于 $\nu(n) \ge 4$,

$$q(n) = E(n) + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} \sum_{\substack{1\le k\le \lfloor \nu(n)\rfloor \\ 2\nmid k}} I_1\left(\frac{\nu(n)}{k}\right)\frac{\hat{A}_k(n)}{k}, \tag{3.6}$$

其中 $|E(n)| \le 173$。

ˆ注意到 $A_1(n) = 1$，因此由 (3.6) 可得

$$q(n) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} I_1(\nu(n)) + R(n),$$

其中

$$R(n) = E(n) + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} \sum_{\substack{3\le k\le \lfloor \nu(n)\rfloor \\ 2\nmid k}} I_1\left(\frac{\nu(n)}{k}\right)\frac{\hat{A}_k(n)}{k}. \tag{3.7}$$

因此，为了证明定理 1.2，只需证明对于 $\nu(n) \ge 21$,

$$|R(n)| \le \frac{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{2}}}{6\nu(n)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{\nu(n)}{3}\right). \tag{3.8}$$

ˆ 根据 $A_k(n)$ 的定义，我们得到，对于任意 $n \ge 0$ 和 $k \ge 1$,

$$|\hat{A}_k(n)| \le k,$$

因为对于任意 $s \in \mathbb{R}$，都有 $|e^{2\pi si}| = 1$。因此可得

$$\left|\frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} \sum_{\substack{3\le k\le \lfloor \nu(n)\rfloor \\ 2\nmid k}} I_1\left(\frac{\nu(n)}{k}\right)\frac{\hat{A}_k(n)}{k}\right| \le \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)} \sum_{\substack{3\le k\le \lfloor \nu(n)\rfloor \\ 2\nmid k}} I_1\left(\frac{\nu(n)}{k}\right)$$
$$\le \frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)}\frac{\lfloor \nu(n)\rfloor}{2} I_1\left(\frac{\nu(n)}{3}\right)$$
$$\le \frac{\sqrt{2}\pi^2}{24} I_1\left(\frac{\nu(n)}{3}\right).$$

利用 (2.2)，我们推导得出

$$\left|\frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)}\sum_{\substack{3\le k\le N\\ 2\mid k}} I_1\left(\frac{\nu(n)}{k}\right)\frac{\hat{A}_k(n)}{k}\right| \le \frac{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{2}}}{12\nu(n)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{\nu(n)}{3}\right). \tag{3.9}$$

将 (3.9) 代入 (3.7)，可得对于 $\nu(n) \ge 4$,

$$|R(n)| \le 173 + \frac{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{2}}}{12\nu(n)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{\nu(n)}{3}\right). \tag{3.10}$$

接下来证明，对于 $\nu(n) \ge 21$,

$$173 < \frac{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{2}}}{12\nu(n)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{\nu(n)}{3}\right). \tag{3.11}$$

定义

$$r(s) := \frac{692\sqrt{3}}{\pi^{\frac{3}{2}}}s^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{s}{3}\right).$$

显然,

$$r'(s) = \frac{346}{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{2}}s^{\frac{1}{2}}}(-2s+3)\exp\left(-\frac{s}{3}\right).$$

由于当 $s \ge \frac{3}{2}$ 时，$r'(s) \le 0$，我们推得 $r(s)$ 在 $s \ge \frac{3}{2}$ 时递减。这意味着

$$r(\nu(n)) \le r(21) < 1$$

对于 $\nu(n) \ge 21$。因此，不等式 (3.11) 成立。将 (3.11) 应用于 (3.10)，即可得到 (3.8)。证毕。 ∎

我们运用定理 1.2 证明定理 1.3，以此结束本节。

定理 1.3 的证明。定义

$$G(n) := \frac{\frac{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{2}}}{6\nu(n)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{\nu(n)}{3}\right)}{\frac{\sqrt{2}\pi^2}{12\nu(n)}I_1(\nu(n))} = \sqrt{\frac{6\nu(n)}{\pi}}\cdot\frac{\exp\left(\frac{\nu(n)}{3}\right)}{I_1(\nu(n))}. \tag{3.12}$$

根据定理 1.2，我们有

$$M(n)(1-G(n)) \le q(n) \le M(n)(1+G(n)).$$

为证明 (1.8)，只需证明对于 $\nu(n) \ge 38$,

$$G(n) \le \frac{1}{\nu(n)^6}. \tag{3.13}$$

利用引理 2.2，我们得到对于 $s \geq 26$,

$$I_1(s) \geq \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}} \left(1 - \frac{3}{8s} - \frac{15}{128s^2} - \frac{105}{1024s^3} - \frac{4725}{32768s^4} - \frac{72765}{262144s^5} - \frac{31}{s^6}\right).$$

注意，对于 $s \geq 4$

$$\frac{1}{8s} - \frac{15}{128s^2} - \frac{105}{1024s^3} - \frac{4725}{32768s^4} - \frac{72765}{262144s^5} - \frac{31}{s^6} \geq 0,$$

因此，对于 $s \geq 26$,

$$I_1(s) \geq \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}} \left(1 - \frac{1}{2s}\right). \tag{3.14}$$

将 (3.14) 代入 (3.12)，可得对于 $\nu(n) \geq 26$,

$$G(n) \leq \frac{2\sqrt{3}\nu(n)}{1 - \frac{1}{2\nu(n)}} \exp\left(-\frac{2\nu(n)}{3}\right). \tag{3.15}$$

基于以下观察:

$$\left(1 - \frac{1}{2\nu(n)}\right)\left(1 + \frac{1}{\nu(n)}\right) = 1 + \frac{1}{2\nu(n)^2}\left(\nu(n) - 1\right) \geq 1 \quad \text{for} \quad \nu(n) \geq 1,$$

我们发现，(3.15) 可以进一步估计为

$$G(n) \leq 2\sqrt{3}\nu(n)\left(1 + \frac{1}{\nu(n)}\right) \exp\left(-\frac{2\nu(n)}{3}\right). \tag{3.16}$$

我们声称，对于 $\nu(n) \geq 43$,

$$2\sqrt{3}\exp\left(-\frac{2\nu(n)}{3}\right) \leq \frac{1}{2\nu(n)^7}, \tag{3.17}$$

可改写为

$$4\sqrt{3}\nu(n)^7 \exp\left(-\frac{2\nu(n)}{3}\right) \leq 1.$$

定义

$$L(s) := 4\sqrt{3}s^7 \exp\left(-\frac{2s}{3}\right).$$

由于

$$L'(s) = 4\sqrt{3}\exp\left(-\frac{2s}{3}\right) s^6 \left(-\frac{2}{3}s + 7\right) \leq 0 \quad \text{for } s \geq \frac{21}{2},$$

我们发现，当 $s \geq \frac{21}{2}$ 时， $L(s)$ 是递减的。因此，对于 $\nu(n) \geq 43$,

$$L(\nu(n)) = 4\sqrt{3}\nu(n)^7 \exp\left(-\frac{2\nu(n)}{3}\right) \leq L(43) < 1,$$

因此，当 $\nu(n) \geq 43$ 时，(3.17) 成立。由此验证了该断言。

将 (3.17) 应用于 (3.16)，可得

$$G(n) \leq \nu(n)\left(1 + \frac{1}{\nu(n)}\right) \cdot \frac{1}{2\nu(n)^7} < \frac{1}{\nu(n)^6}$$

对于 $\nu(n) \geq 43$。证明至此完成。 ∎

4 定理 1.4 的证明

本节中，我们借助定理 1.3 和引理 2.3 给出定理 1.4 的证明。

定理 1.4 的证明。回顾

$$Q(n) = \frac{q(n-1)q(n+1)}{q(n)^2}.$$

定义

$$A(n) = \frac{M(n-1)M(n+1)}{M(n)^2}, \tag{4.1}$$

其中 $M(n)$ 的定义见 (1.7)。由定理 1.3 可知，对于 $\nu(n) \geq 43$,

$$A(n)L_Q(n) \leq Q(n) \leq A(n)R_Q(n), \tag{4.2}$$

其中

$$L_Q(n) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\nu(n-1)^6}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu(n+1)^6}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\nu(n)^6}\right)^2} \tag{4.3}$$

and

$$R_Q(n) = \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu(n-1)^6}\right)\left(1 + \frac{1}{\nu(n+1)^6}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\nu(n)^6}\right)^2}. \tag{4.4}$$

为了得到 (1.12)，我们接下来用 $\nu(n)$ 来估计 $A(n)$、$L_Q(n)$ 和 $R_Q(n)$。我们首先考虑 $A(n)$。将 (1.7) 代入 (4.1)，得到

$$A(n) = \frac{\nu(n)^2 I_1(\nu(n-1))I_1(\nu(n+1))}{\nu(n-1)\nu(n+1)I_1(\nu(n))^2}. \tag{4.5}$$

将引理 2.3 应用于 (4.5)，可得对于 $\nu(n) \geq 60$,

$$\begin{aligned} A(n) \geq \frac{\nu(n)^3}{\sqrt{\nu(n-1)^3\nu(n+1)^3}} &\left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} - \frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right) \\ &\times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{129}{\nu(n)^6}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

and

$$\begin{aligned} A(n) \leq \frac{\nu(n)^3}{\sqrt{\nu(n-1)^3\nu(n+1)^3}} &\left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6}\right) \\ &\times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{121}{\nu(n)^6}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

我们断言，对于 $\nu(n) \geq 8$,

$$1+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\frac{7\pi^8}{864\nu(n)^8} \leq \frac{\nu(n)^3}{\sqrt{\nu(n-1)^3\nu(n+1)^3}} \leq 1+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\frac{\pi^8}{123\nu(n)^8}, \quad (4.8)$$

这等价于

$$\begin{cases} \nu(n)^{12}-\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6\left(1+\dfrac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\dfrac{7\pi^8}{864\nu(n)^8}\right)^4 \geq 0, \\ \nu(n)^{12}-\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6\left(1+\dfrac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\dfrac{\pi^8}{123\nu(n)^8}\right)^4 \leq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

回顾一下,

$$\nu(n-1)=\sqrt{\nu(n)^2-\frac{\pi^2}{3}} \quad \text{and} \quad \nu(n+1)=\sqrt{\nu(n)^2+\frac{\pi^2}{3}}.$$

经计算可得

$$\begin{aligned} &\nu(n)^{12}-\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6\left(1+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\frac{7\pi^8}{864\nu(n)^8}\right)^4 \\ &=\frac{\pi^{12}}{406239826673664\nu(n)^{32}}\left(1340897918976\nu(n)^{32}+27935373312\pi^4\nu(n)^{28}\right. \\ &\quad +1551965184\pi^8\nu(n)^{24}-1551965184\pi^{12}\nu(n)^{20}-60816096\pi^{16}\nu(n)^{16} \\ &\quad \left.-3873177\pi^{20}\nu(n)^{12}+625779\pi^{24}\nu(n)^8+33957\pi^{28}\nu(n)^4+2401\pi^{32}\right) \quad (4.10) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\nu(n)^{12}-\nu(n-1)^6\nu(n+1)^6\left(1+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\frac{\pi^8}{123\nu(n)^8}\right)^4 \\ &=-\frac{\pi^8}{42715740489984\nu(n)^{32}}\left(4823367264\nu(n)^{36}-141396118128\pi^4\nu(n)^{32}\right. \\ &\quad -2942756919\pi^8\nu(n)^{28}-175420755\pi^{12}\nu(n)^{24}+163918779\pi^{16}\nu(n)^{20} \\ &\quad +6413999\pi^{20}\nu(n)^{16}+418192\pi^{24}\nu(n)^{12}-66144\pi^{28}\nu(n)^8 \\ &\quad \left.-3584\pi^{32}\nu(n)^4-256\pi^{36}\right). \quad (4.11) \end{aligned}$$

注意，对于 $\nu(n) \geq 4$,

$$\begin{aligned} &1551965184\pi^8\nu(n)^{24}-1551965184\pi^{12}\nu(n)^{20} \\ &\quad -60816096\pi^{16}\nu(n)^{16}-3873177\pi^{20}\nu(n)^{12} \geq 0, \quad (4.12) \end{aligned}$$

以及对于 $\nu(n) \geq 8$,

$$\begin{cases} 4823367264\nu(n)^{36} - 141396118128\pi^4\nu(n)^{32} \\ \quad - 2942756919\pi^8\nu(n)^{28} - 175420755\pi^{12}\nu(n)^{24} \geq 0, \\ 418192\pi^{24}\nu(n)^{12} - 66144\pi^{28}\nu(n)^8 - 3584\pi^{32}\nu(n)^4 - 256\pi^{36} \geq 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

将 (4.12) 应用于 (4.10)，并将 (4.13) 应用于 (4.11)，可得 (4.9) 对于 $\nu(n) \geq 8$ 成立，这意味着 (4.8) 对于 $\nu(n) \geq 8$ 成立，因此该命题得证。将 (4.8) 代入 (4.6) 和 (4.7)，可得对于 $\nu(n) \geq 60$,

$$\begin{aligned} A(n) \geq & \left(1 + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} + \frac{7\pi^8}{864\nu(n)^8}\right)\left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} - \frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right) \\ & \times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{129}{\nu(n)^6}\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

and

$$\begin{aligned} A(n) \leq & \left(1 + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} + \frac{\pi^8}{123\nu(n)^8}\right)\left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6}\right) \\ & \times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{121}{\nu(n)^6}\right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

接下来证明，对于 $\nu(n) \geq 4$,

$$L_Q(n) \geq 1 - \frac{5}{\nu(n)^6} \quad \text{and} \quad R_Q(n) \leq 1 + \frac{5}{\nu(n)^6}. \tag{4.16}$$

将 (2.22) 代入 (4.3) 和 (4.4)，可得

$$L_Q(n) = \frac{\nu(n)^{12}\left(\left(\nu(n)^2 + \frac{\pi^2}{3}\right)^3 - 1\right)\left(\left(\nu(n)^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)^3 - 1\right)}{\left(\nu(n)^6 + 1\right)^2\left(\nu(n)^4 - \frac{\pi^4}{9}\right)^3}$$

and

$$R_Q(n) = \frac{\nu(n)^{12}\left(\left(\nu(n)^2 + \frac{\pi^2}{3}\right)^3 + 1\right)\left(\left(\nu(n)^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)^3 + 1\right)}{\left(\nu(n)^6 - 1\right)^2\left(\nu(n)^4 - \frac{\pi^4}{9}\right)^3}.$$

假设

$$\begin{aligned} \phi(s) = & 729s^{24} - 1215\pi^4 s^{20} + 7290s^{18} + 81\pi^8 s^{16} - 2187\pi^4 s^{14} + \left(3645 - 3\pi^{12}\right)s^{12} \\ & + 243\pi^8 s^{10} - 1215\pi^4 s^8 - 9\pi^{12}s^6 + 135\pi^8 s^4 - 5\pi^{12} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\psi(s) =&729s^{24} - 1215\pi^4 s^{20} - 7290s^{18} + 81\pi^8 s^{16} + 2187\pi^4 s^{14} + \left(3645 - 3\pi^{12}\right) s^{12} \\ &- 243\pi^8 s^{10} - 1215\pi^4 s^8 + 9\pi^{12} s^6 + 135\pi^8 s^4 - 5\pi^{12}.\end{aligned}$$

不难证明

$$L_Q(n) - \left(1 - \frac{5}{\nu(n)^6}\right) = \frac{\phi\left(\nu(n)\right)}{\nu(n)^6 \left(9\nu(n)^4 - \pi^4\right)^3 \left(\nu(n)^6 + 1\right)^2} \tag{4.17}$$

and

$$R_Q(n) - \left(1 + \frac{5}{\nu(n)^6}\right) = \frac{-\psi\left(\nu(n)\right)}{\nu(n)^6 \left(9\nu(n)^4 - \pi^4\right)^3 \left(\nu(n)^6 - 1\right)^2}. \tag{4.18}$$

此外，不难证明 $\psi(s) \geq 0$ for $s \geq 4$ and

$$\phi(s) - \psi(s) = 14580s^{18} - 4374\pi^4 s^{14} + 486\pi^8 s^{10} - 18\pi^{12} s^6 > 0$$

for $s \geq 2$。因此，我们得到对于 $\nu(n) \geq 4$,

$$\phi\left(\nu(n)\right) > \psi\left(\nu(n)\right) \geq 0. \tag{4.19}$$

由此可知，(4.16) 成立。

将 (4.14)、(4.15) 和 (4.16) 代入 (4.2)，我们得到对于 $\nu(n) \geq 60$,

$$\begin{aligned}Q(n) \geq &\left(1 + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} + \frac{7\pi^8}{864\nu(n)^8}\right)\left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} - \frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right) \\ &\times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{129}{\nu(n)^6}\right)\left(1 - \frac{5}{\nu(n)^6}\right)\end{aligned} \tag{4.20}$$

and

$$\begin{aligned}Q(n) \leq &\left(1 + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} + \frac{\pi^8}{123\nu(n)^8}\right)\left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6}\right) \\ &\times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{121}{\nu(n)^6}\right)\left(1 + \frac{5}{\nu(n)^6}\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

为了证明定理 1.4，只需证明对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$\begin{aligned}&\left(1 + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} + \frac{7\pi^8}{864\nu(n)^8}\right)\left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} - \frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right) \\ &\quad\times \left(1 - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{129}{\nu(n)^6}\right)\left(1 - \frac{5}{\nu(n)^6}\right) \\ &> 1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{135}{\nu(n)^6}\end{aligned} \tag{4.22}$$

and

$$\left(1+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\frac{\pi^8}{123\nu(n)^8}\right)\left(1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}+\frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6}\right)$$
$$\times\left(1-\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5}+\frac{121}{\nu(n)^6}\right)\left(1+\frac{5}{\nu(n)^6}\right)$$
$$<1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}-\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5}+\frac{126+\frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6}. \tag{4.23}$$

我们先证明 (4.22)。注意到

$$\left(1+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\frac{7\pi^8}{864\nu(n)^8}\right)\left(1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}-\frac{5\pi^8}{2592\nu(n)^7}\right)$$
$$\times\left(1-\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5}-\frac{129}{\nu(n)^6}\right)\left(1-\frac{5}{\nu(n)^6}\right)$$
$$-\left(1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}-\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5}-\frac{135}{\nu(n)^6}\right)$$
$$=\frac{1}{71663616\nu(n)^{27}}\sum_{j=0}^{21}c_j\nu(n)^j, \tag{4.24}$$

其中 c_j 是实数。这里我们只列出 c_{19}、 c_{20}、 c_{21} 的值:

$$c_{19}=642816\pi^8,\quad c_{20}=-304128\pi^8,\quad c_{21}=71663616.$$

显然,

$$\sum_{j=0}^{21}c_j\nu(n)^j\geq-\sum_{j=0}^{19}|c_j|\nu(n)^j+c_{20}\nu(n)^{20}+c_{21}\nu(n)^{21}.$$

此外，可以验证，对于 $0\leq j\leq 18$ 和 $\nu(n)\geq 4$,

$$-|c_j|\nu(n)^j\geq-|c_{19}|\nu(n)^{19}.$$

另一方面，不难验证，对于 $\nu(n)\geq 67$,

$$c_{21}\nu(n)^2+c_{20}\nu(n)-20|c_{19}|>0.$$

综合以上所有结果，我们得出，对于 $\nu(n)\geq 67$,

$$\sum_{j=0}^{21}c_j\nu(n)^j\geq\left(c_{21}\nu(n)^2+c_{20}\nu(n)-20|c_{19}|\right)\nu(n)^{19}>0.$$

这就证明了 (4.22)。

同样，为了论证 (4.23)，我们首先注意到

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}+\frac{\pi^8}{123\nu(n)^8}\right)\left(1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}+\frac{\pi^8}{1296\nu(n)^6}\right)\\&\quad\times\left(1-\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5}+\frac{121}{\nu(n)^6}\right)\left(1+\frac{5}{\nu(n)^6}\right)\\&\quad-\left(1-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3}+\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4}-\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5}+\frac{126+\frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6}\right)\\&=-\frac{1}{20404224\nu(n)^{26}}\sum_{j=0}^{19}d_j\nu(n)^j,\end{aligned}\tag{4.25}$$

其中 d_j 为实数。这里我们还列出了最后三个系数的值：

$$d_{17}=53136\pi^8,\quad d_{18}=-183600\pi^8,\quad d_{19}=47232\pi^8.\tag{4.26}$$

显然，

$$\sum_{j=0}^{19}d_j\nu(n)^j\geq-\sum_{j=0}^{17}|d_j|\nu(n)^j+d_{18}\nu(n)^{18}+d_{19}\nu(n)^{19}.\tag{4.27}$$

此外，可以证明，对于 $0\leq j\leq 16$ 和 $\nu(n)\geq 2$，

$$-|d_j|\nu(n)^j\geq-|d_{17}|\nu(n)^{17}$$

对于 $\nu(n)\geq 7$，

$$d_{19}\nu(n)^2+d_{18}\nu(n)-18|d_{17}|>0.$$

因此我们得出，对于 $\nu(n)\geq 67$，

$$\sum_{j=0}^{19}d_j\nu(n)^j\geq\left(d_{19}\nu(n)^2+d_{18}\nu(n)-18|d_{17}|\right)\nu(n)^{17}>0,$$

所以（4.23）成立。

将 (4.22) 和 (4.23) 代入 (4.20) 和 (4.21)，即可得到 (1.12)。证明至此完成。

∎

5 猜想 1.1 的证明

本节中，我们借助定理 1.4 证实猜想 1.1。在此之前，我们先回顾 Jia 给出的以下引理 [21], ，它对证明猜想 1.1 很有用。

引理 5.1（Jia）。设 u 和 v 是两个正实数，满足 $\frac{15}{16} \leq u < v <$1。若

$$u + \sqrt{(1-u)^3} > v,$$

then

$$4(1-u)(1-v) - (1-uv)^2 > 0.$$

猜想 1.1 的证明。我们首先证明，当 $n \geq 33$ 时， $q(n)$ 是对数凹的。这等价于证明，对于 $n \geq 33$,

$$Q(n) \leq 1.$$

由定理 1.4 可知，对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$Q(n) < 1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6}. \tag{5.1}$$

容易验证，对于 $\nu(n) \geq 44$

$$-\frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} \leq 0$$

and

$$-\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6} \leq 0,$$

因此，对于 $n \geq 1365$，我们得到 $Q(n) < 1$ 。可以验证，对于$33 \leq n \leq 1365$， $Q(n) < 1$ 。于是，我们推出，对于 $n \geq 33$， $Q(n) < 1$ ，因此，当 $n \geq 33$ 时， $q(n)$ 是对数凹的。

为了证明当 $n \geq 121$ 时， $q(n)$ 满足高阶 Tur´an 不等式，只需证明，对于 $n \geq 121$,

$$4(1-Q(n))(1-Q(n+1)) - (1-Q(n)Q(n+1))^2 > 0. \tag{5.2}$$

直接验证可知，当 $121 \leq n \leq 1365$ 时，(5.2) 成立，因此只需证明 (5.2) 对 $n \geq 1365$ 成立。利用引理 5.1 以及我们此前已证明的结论 $Q(n+1) < 1$ for $n \geq 32$，我们只需证明，对于$n \geq 1365$,

$$\frac{15}{16} \leq Q(n) < Q(n+1) \tag{5.3}$$

and

$$Q(n+1) < Q(n) + \sqrt{(1-Q(n))^3}. \tag{5.4}$$

利用定理 1.4，我们可以看出，对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$Q(n) > 1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{135}{\nu(n)^6}.$$

容易验证，对于 $\nu(n) \geq 5$,

$$\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{135}{\nu(n)^6} > 0$$

and

$$1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} \geq 1 - \frac{\pi^4}{36 \cdot 5^3} > \frac{15}{16}.$$

因此，我们得到对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$Q(n) > \frac{15}{16}.$$

再次利用定理 1.4，我们发现对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$\begin{aligned} Q(n+1) - Q(n) > & \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n+1)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n+1)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n+1)^5} - \frac{135}{\nu(n+1)^6}\right) \\ & - \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6}\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

注意，对于 $\nu(n) \geq 3$,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\nu(n+1)^3} < \dfrac{1}{\nu(n)^3} - \dfrac{\pi^2}{4\nu(n)^5}, \\ \dfrac{1}{\nu(n+1)^4} > \dfrac{1}{\nu(n)^4} - \dfrac{2\pi^2}{3\nu(n)^6}, \\ \dfrac{1}{\nu(n+1)^5} < \dfrac{1}{\nu(n)^5}, \\ \dfrac{1}{\nu(n+1)^6} < \dfrac{1}{\nu(n)^6}. \end{cases} \tag{5.6}$$

将 (5.6) 应用于 (5.5)，我们得到对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$\begin{aligned} Q(n+1) - Q(n) > & \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} + \frac{-\frac{\pi^4}{32} + \frac{\pi^6}{144}}{\nu(n)^5} - \frac{\frac{\pi^6}{18} + 135}{\nu(n)^6}\right) \\ & - \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} + \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6}\right) \\ = & \frac{\pi^6}{144\nu(n)^5} - \frac{261 + \frac{\pi^6}{18} + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6}. \end{aligned}$$

不难验证，对于 $\nu(n) \geq 49$,

$$\frac{\pi^6}{144\nu(n)^5} - \frac{261 + \frac{\pi^6}{18} + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6} > 0,$$

因此可得，对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$Q(n+1) - Q(n) > 0,$$

并且，当 $n = 1365$ 时， $\nu(n) = 67$ ，因此 (5.3) 得到验证。

为证明 (5.4)，再次利用定理 1.4，可得对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$\begin{aligned} Q(n+1) - Q(n) < & \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n+1)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n+1)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n+1)^5} + \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n+1)^6}\right) \\ & - \left(1 - \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} + \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} - \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{135}{\nu(n)^6}\right) \\ = & \frac{\pi^4}{36}\left(\frac{1}{\nu(n)^3} - \frac{1}{\nu(n+1)^3}\right) - \frac{\pi^4}{12}\left(\frac{1}{\nu(n)^4} - \frac{1}{\nu(n+1)^4}\right) \\ & + \frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\nu(n)^5} - \frac{1}{\nu(n+1)^5}\right) + \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n+1)^6} + \frac{135}{\nu(n)^6}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

可以验证，对于 $\nu(n) > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\nu(n)^3} - \dfrac{1}{\nu(n+1)^3} < \dfrac{\pi^2}{2\nu(n)^5}, \\ \dfrac{1}{\nu(n+1)^4} - \dfrac{1}{\nu(n)^4} < 0, \\ \dfrac{1}{\nu(n)^5} - \dfrac{1}{\nu(n+1)^5} < \dfrac{1}{\nu(n)^5}, \end{cases} \tag{5.8}$$

并且，对于 $\nu(n) \geq 55$,

$$\frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n+1)^6} + \frac{135}{\nu(n)^6} < \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296} + 135}{\nu(n)^6} < \frac{\pi^2}{2\nu(n)^5}. \tag{5.9}$$

将 (5.8) 和 (5.9) 应用于 (5.7)，可得对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$\begin{aligned} Q(n+1) - Q(n) < & \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{\pi^2}{2\nu(n)^5} + \frac{\pi^4}{32} \cdot \frac{1}{\nu(n)^5} + \frac{\pi^2}{2\nu(n)^5} \\ = & \frac{\frac{\pi^6}{72} + \frac{\pi^4}{32} + \frac{\pi^2}{2}}{\nu(n)^5}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

还需证明，对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$\sqrt{(1 - Q(n))^3} > \frac{\frac{\pi^6}{72} + \frac{\pi^4}{32} + \frac{\pi^2}{2}}{\nu(n)^5}. \tag{5.11}$$

由于对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$1 - Q(n) > \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} - \frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} + \frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6},$$

并且对于 $\nu(n) \geq 44$，可以验证

$$\frac{\pi^4}{32\nu(n)^5} - \frac{126 + \frac{\pi^8}{1296}}{\nu(n)^6} > 0$$

and

$$-\frac{\pi^4}{12\nu(n)^4} > -\frac{1}{4\nu(n)^3},$$

因此我们推得，对于 $\nu(n) \geq 67$,

$$1 - Q(n) > \frac{\pi^4}{36\nu(n)^3} - \frac{1}{4\nu(n)^3} = \frac{\pi^4 - 9}{36\nu(n)^3} > 0. \tag{5.12}$$

容易验证，对于 $\nu(n) \geq 31$,

$$\frac{\sqrt{(\pi^4 - 9)^3}}{216\nu(n)^{\frac{9}{2}}} > \frac{\frac{\pi^6}{72} + \frac{\pi^4}{32} + \frac{\pi^2}{2}}{\nu(n)^5}. \tag{5.13}$$

结合 (5.12) 和 (5.13)，我们得到 (5.11)，因此当 $\nu(n) \geq 67$ 时，(5.4) 成立，或者等价地， $n \geq 1365$。证明完毕。 ∎

6 总结性评述

设 $p_k(n)$ 表示 n 中不存在 k 的倍数部分的分拆数。根据定义，我们可知

$$\sum_{n \geq 0} p_k(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{kn}}{1 - q^n}.$$

当 $k = 2$ 时，这个分拆函数 $p_k(n)$ 化简为 $q(n)$。在 [9], 中，Craig 和 Pun 还猜想，最小数目 N_k 和 M_k 满足：当 $n \geq N_k$ 时， $p_k(n)$ 是对数凹的；并且当 $n \geq M_k$ 时，满足高阶 Tur´an 不等式，其中 $k = 3$、4、5。更准确地说，Craig 和 Pun [9] 猜想：

$$N_3 = 58, \quad N_4 = 17, \quad N_5 = 42$$

and

$$M_3 = 185, \quad M_4 = 64, \quad M_5 = 137.$$

基于 Chern 的 η-商的渐近公式，并采用本文中的类似论证，我们可以证明他们猜想的值是正确的。这里我们

省略细节。不过，我们的方法无法求出任意固定 k 下的值 N_k 和 M_k，使得 $p_k(n)$ 对数凹（$n \geq N_k$）且满足 $n \geq M_k$ 的高阶 Tur´an 不等式。若能找到一种统一的方法，根据 k 确定这样的 N_k 和 M_k，将会很有意思。

最后但同样重要的是，我们想提到，在研究关于 $p(n)$ 的高阶 Tur´an 不等式时，Chen [6] 对二元型不变量相关的不等式进行了全面研究。特别地，他考察了四次二元型的以下三个不变量

$$\begin{aligned}
&A(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,\\
&B(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = -a_0a_2a_4 + a_2^3 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - 2a_1a_2a_3,\\
&I(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = A(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)^3 - 27B(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)^2.
\end{aligned}$$

Chen [6] 猜想，当 n 足够大时，分拆函数 $p(n)$ 和 spt 函数 spt(n) 都满足由四次二元型不变量导出的不等式。关于 spt 函数的定义，请参阅 Andrews [3] 或 Chen [6]。Banerjee [4] 以及 Jia和Wang [22]最近证明了 Chen 关于分拆函数 $p(n)$ 的猜想不等式。更准确地说，Banerjee [4]和 Jia和Wang [22] 分别独立证明了，对于 $n \geq 221$，$B(p(n-1)\ p(n)\ p(n+1)\ p(n+2)\ p(n+3)) > 0$；Banerjee [4] 则证明了，对于 $n \geq 185$，$A(p(n-1)\ p(n)\ p(n+1)\ p(n+2), p(n+3)) > 0$。

同样地，我们将给出关于 $q(n)$ 的相应猜想。

猜想 6.1. 设 $a_n = q(n)$，则

$$\begin{aligned}
&A(a_{n-1},a_n,a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3}) > 0, && \text{对于 } n \geq 230,\\
&B(a_{n-1},a_n,a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3}) > 0, && \text{对于 } n \geq 272,\\
&I(a_{n-1},a_n,a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3}) > 0, && \text{对于 } n \geq 267.
\end{aligned}$$

致谢。本文获得中国国家自然科学基金资助。

参考文献

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun（编），《数学函数手册：公式、图表与数学表格》，第10次印刷，美国商务部国家标准局，1972年。[2] G.E. Andrews，《分拆理论》，剑桥数学丛书，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[3] G.E. Andrews，分拆 n 中最小部分的个数，《纯粹与应用数学杂志》624（2008）133–142。

[4] K. Banerjee，四次二元型的不变量及 Chen 关于分拆函数不等式的猜想之证明，已投稿。[5] K. Bringmann、B. Kane、L. Rolen 和 Z. Tripp，分数分拆以及 Chern-Fu-Tang 和 Heim-Neuhauser 的猜想，美国数学会汇刊 B 辑 8（2021年）615–634。[6] W.Y.C. Chen，Andrews 的 spt 函数，《组合学综述 2017》，141–203，伦敦数学会讲义系列，440，剑桥大学出版社，剑桥，2017年。[7] W.Y.C. Chen、D.X.Q. Jia 和 L.X.W. Wang，分拆函数的高阶 Tur´an 不等式，美国数学会汇刊 372（2019年）2143–2165。[8] S. Chern，eta 商傅里叶系数的渐近性质，《数论杂志》199（2019年）168–191。[9] W. Craig 和 A. Pun，关于 k 正则分拆的高阶 Tur´an 不等式的一则注记，《数论研究》 7（2021年），论文编号 5，共 7 页。[10] T. Craven 和 G. Csordas，詹森多项式与 Tur´an 不等式和 Laguerre 不等式，《太平洋数学杂志》136(2)（1989年）241–260。[11] G. Csordas、T.S. Norfolk 和 R.S. Varga，黎曼猜想与 Tur´an 不等式，美国数学会汇刊 296(2)（1986年）521–541。[12] G. Csordas 和 R.S. Varga，必要且充分条件与黎曼猜想，《应用数学进展》11(3)（1990年）328–357。[13] S. DeSalvo 和 I. Pak，分拆函数的对数凹性，《拉马努金杂志》38（2015年）61–73。[14] D.K. Dimitrov，高阶 Tur´an 不等式，《美国数学会会刊》126（1998年）2033–2037。[15] J.J.W. Dong、K.Q. Ji 和 D.X.Q. Jia，关于破碎 k-菱形分拆函数的 Tur´an 不等式，《拉马努金杂志》，即将刊出。[16] B. Engel，过分拆函数的对数凹性，《拉马努金杂志》43（2017年）229–241。[17] L. Euler，《无穷分析导引》，Marcum-Michaelem Bousquet，洛桑，1748年。[18] M. Griffin、K. Ono、L. Rolen 和 D. Zagier，黎曼 ζ 函数及其他数列的詹森多项式，《美国国家科学院院刊》116（2019年）11103–11110。[19] P. Hagis，奇数加项的分拆，《美国数学杂志》85（1963年）213–222。[20] L.K. Hua，关于一个数分拆为互不相等的部分的分拆数，美国数学会汇刊 51（1942年）194–201。[21]D.X.Q. Jia，关于破碎 k-菱形分拆函数的不等式，arXiv:2209.07056。[22] D.X.Q. Jia 和 L.X.W. Wang，分拆函数的行列式不等式，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》150（2020年）1451–1466。[23] E.Y.S. Liu 和 H.W.J. Zhang，关于过分拆函数的不等式，《拉马努金杂志》54（2021年）485–509。

[24] J.-L. Nicolas, 《关于具有许多阿贝尔群的整数 N》, 《傅里叶研究所年刊》28（1978）1–16。[25] K. Ono、S. Pujahari 和 L. Rolen, 《平面分拆函数的 Tur´án 不等式》, 《数学进展》409（2022）B 部，论文编号 108692，共 31 页。[26] I. Pinelis, 《不完全伽马函数的精确上下界》, 《数学不等式及其应用》23(4)（2020年）1261–1278。[27] H. Rademacher, 《解析数论专题》, Springer，柏林，1973。[28] G. Szeg¨o, 《关于 P. Tur´án 的勒让德多项式不等式》, 《美国数学会通报》54（1948）401–405。