arXiv:2303.05255v2 [math.DG] 8 Dec 2023

关于带联络的实线丛与实光滑德利涅上同调的札记

PETER MARIU　S FLYDAL、GEREON QUICK 和 EIRIK EI　　K SVANES

Abstract. 我们为带对合流形定义了光滑 Deligne 上同调的一个实版本，它在等变层上同调与光滑虚值微分形式之间起到插值作用。我们的主要结果是对带对合流形上的带实联络的实线丛进行分类。

1. 引言

在 [2] Atiyah 引入了实向量丛，即定义在带有对合的空间 X 上的复向量丛，并配备反线性共轭映射。实丛的 K-理论同时推广了正交 KO-理论、普通复K-理论和自共轭 KSC-理论。实向量丛在数学物理中发挥着重要作用。一个近期例子是 de Nittis 和 Gomi 在 [10] 中的结果：拓扑绝缘体由球面和环面上的实线丛的同构类分类，这些实线丛配备了某些自然的对合。事实上，对带联络的线丛及其以丛状物表述的高形式推广的研究，长期以来在数学物理和弦理论中发挥着重要作用。例如，在量子场论中，对某些线丛选择联络，在定义配分函数时发挥着作用。具体而言，规范不变性往往要求配分函数是所考虑结构空间上的一个线丛的截面。这个空间通常被解释为某种形式的雅可比簇（更多详情见例如 [25] ）。近来，微分上同调也已成为理解狄拉克量子化和反常的重要工具，尤其是在高形式对称性和丛状物方面（参考文献见例如 [20, 8, 1] ）。因此，有必要从数学角度研究这类结构及其所有变体。

与普通丛一样，实向量丛 E 的微分几何可以通过其上的实联络来研究。这促使我们构造整数等变上同调的实微分精化。本文旨在进行这一构造，并将其应用于实线丛的研究。我们希望未来这项工作能帮助对带有对合的流形上的实向量丛及其上的实联络进行分类，这类似于通过德利涅上同调对光滑或复流形上的带联络丛进行分类，如 [13]所述。Berry 联络是实联络的一个重要例子，可视为量子力学与拓扑之间的纽带，相关表述见 [3] 和 [23] （另见 [6]）。格拉斯曼–贝里

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14F43, 55R91,55R15。第二位作者谨此感谢 RCN 项目编号为 313472 *Equations in Motivic Homotopy*的部分资助。

布洛赫丛上的联络也已在 [10, 第二节 D 部分]中得到研究。

本文首先研究实微分上同调理论的低次情形，以及带实联络的实线丛。现在简要概述我们的主要结果。令 C_2 表示二阶循环群。设 (M,τ) 为带对合流形，并令 $H^*(M,C_2;\mathcal{F})$ 表示以 C_2-层 $\mathcal{F}$ 为系数的 C_2-等变层上同调。令 $\mathcal{E}^k(M)$ 表示 M 上的不变光滑虚值形式，并令 $\mathcal{E}_0^k(M)$ 表示闭整虚值形式构成的子群。

定理 1.1. 设 (M,τ) 为带对合流形。对于每个 $q,p \geq 0$，存在上同调群 $H^q_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(p))$，称为实光滑德利涅上同调，使得 $H^p_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(p))$ 构成一个短正合列

$$0 \to \mathcal{E}^{p-1}(M)/\mathcal{E}_0^{p-1}(M) \to H^p_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(p)) \to H^p(M,C_2;i\mathbb{Z}) \to 0.$$

对于 $p=2$，该正合列同构于

$$0 \to \left\{\begin{array}{l} isom.\ classes\ of \\ Real\ connections \\ on\ the\ bundle \\ M\times U(1) \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} isom.\ classes\ of \\ Real\ line\ bundles \\ with\ Real \\ connection\ over\ M \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} isom.\ classes \\ of\ Real \\ line\ bundles \\ over\ M \end{array}\right\} \to 0$$

其中，我们将 $U(1)$ 配备复共轭作用，并将 $M\times U(1)$ 配备由各因子诱导的 C_2 作用。对于 $q<p$，存在如下形式的自然短正合列

$$0 \to H^{q-1}(M,C_2;i\mathbb{R})/H^{q-1}(M,C_2;i\mathbb{Z})_{\mathrm{free}} \to H^q_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(p)) \to H^q(M,C_2;i\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

群 $H^2_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(3))$ 与带平坦实联络的实线丛同构类集合一一对应。

我们注意到，类似的上同调理论此前已有发展。在[15] Gomi 构造了更一般的等变光滑德利涅上同调，但未考虑其在带实联络的实丛中的应用。在 [10]de Nittis 和 Gomi 利用 $H^2(M,C_2;i\mathbb{Z})$ 对低维带对合流形上的实向量丛进行了分类。我们希望群 $H^p_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(p))$ 有助于探究混合情形，即 $H^2(M,C_2;i\mathbb{Z})$ 同时具有自由部分和挠部分（见 [10, 注 3.18]）。在 [11] dos Santos 和 Lima-Filho 利用布雷登上同调发展了一种等变德利涅上同调理论。然而，在偶数次情形下，系数上的作用方式似乎并不适用于实丛的分类。在 [16] Grady 和 Sati 利用分类栈构造了扭曲德利涅上同调，该理论嵌入一个微分上同调菱形中，并可用于获得类似的分类结果。我们研究的德利涅复形的各种变体并未考虑 C_2-作用。在 [12] 和 [18], [19] 中，作者证明了等变整上同调的较高上同调次数可以分类实丛格。丛状物与德利涅上同调之间的联系（见 [4,第五章]）引出了一个问题：本文提出的实德利涅上同调是否可用于研究具有实联络结构和曲率形式的实丛状物？我们尚未进一步探讨这一问题。总的来说，我们认为现有文献与本文存在显著差异，而本文提供了一个新的视角。

2. Manifolds with involution and Real bundles

令 C_2 表示二阶循环群。我们回顾 C_2-空间和实丛的定义及其基本性质。

定义 2.1. C_2-空间（即带对合空间）是指一个拓扑空间 X，配有一个自逆同胚 τ: $X \to X$。若一个 C_2- 空间（ M,τ ）满足：M 是一个无边界的仿紧光滑有限维流形，且 τ 是光滑的，则称其为 C_2-流形。我们通常简写（M,τ）为 M。从 C_2-流形（M,τ）到（N,σ）的态射是一个光滑映射 f: $M \to N$，并且与对合可交换，即 $f \circ \tau = \sigma \circ f$。我们用 $\mathbf{Man}_{C_2}$ 表示 C_2-流形构成的范畴。

紧致 C_2-流形的例子包括 $\mathbb{C}^N$ 中在复共轭下封闭的紧致子空间，其中以复共轭作为对合，例如 $U(n)$（ $N = n^2$）；特别是带复共轭的单位圆 $U(1)$。其他重要的例子包括带对径对合的 $\mathbb{S}^n$ 维球面 n，以及由若干个 $U(1)$ 和 $\mathbb{S}^n$ 的副本作积构成的环面。现在我们回顾 C_2-空间上的实丛的定义，参见 [2, 第 368] 页:

定义 2.2. 设 (M,τ) 是一个 C_2-流形。(M,τ) 上的实向量丛是一个复向量丛 π: $E \to M$ over M，满足 E 是一个 C_2-流形 (E,σ)，且投影 π: $E \to M$ 与对合相容，$\pi \circ \sigma = \tau \circ \pi$，并且 σ 在 $E_x \to E_{\tau(x)}$ 上的限制是 $\mathbb{C}$-反线性的，即对于每个 $e \in E_x$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，在 $E_{\tau(x)}$ 中有 $\sigma(\lambda e) = \overline{\lambda}\sigma(e)$。

以下结果是 [9, 命题 4.10] 的推论（另见 [10, §2]）。

命题 2.3. 设 $(M,\tau) \in \mathbf{Man}_{C_2}$ 紧致，且 (E,σ) 是 (M,τ) 上的实丛，投影映射为 π: $E \to M$。则 (E,σ) 等变局部平凡，即对于每个 $p \in M$，存在一个 τ-不变邻域 U of p，以及一个等变同胚 h: $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$，其中乘积丛$U \times \mathbb{C}^n \to U$ 赋有如下实结构：在$\mathbb{C}^n$上取复共轭。此外，如果 $p = \tau(p)$，则邻域 U 可以取为连通的。如果$p \neq \tau(p)$，则 U可以取为两个互不相交的开集 $U := U' \cup \tau(U')$ 的并，且满足 $p \in U'$。

注记 2.4. 命题 2.3 意味着，每个 (M,τ) 都有一个平凡化覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$，使得每个 U_i 都是连通的；如有必要，可将形如 $U_i = U_i' \cup \tau(U_i')$ 的集合拆分为其连通分支。于是，我们可以按以下方式在指标集 I 上得到由对合τ 诱导的作用：对于每个 $i \in I$，有 $\tau(U_i) = U_j$（其中 $j = i$ 是可能的），并定义 $\tau(i) := j$。

定义 2.5. 设 (M,τ) 是一个 C_2-流形。若覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 满足对每个 $U_i \in \mathcal{U}$ 都有 $\tau(U_i) \in \mathcal{U}$，则称其为 M 的一个 C_2-覆盖，或称等变覆盖。若一个 C_2-覆盖所诱导的指标集上的作用是自由的，则称该覆盖没有不动点。

注 2.6. 我们可以通过添加在对合 τ 下固定的集合 U_i 的双重副本，将 C_2-覆盖变为没有不动点的覆盖。

定义 2.7. 设 (M,τ) 是一个 C_2-流形。(M,τ) 的等变单位分解是一个从属于等变覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_I$ 的通常的单位分解 $\{\phi_i\}_{i\in I}$，并且每个函数 ϕ_i: $U_i \to \mathbb{R}$ 都满足

$$\phi_i \circ \tau = \phi_{\tau(i)}.$$

注 2.8. 若 $\{\theta_i\}_{i\in I}$ 是一个从属于等变覆盖的通常的单位分解，我们可以通过设定将 $\{\theta_i\}_{i\in I}$ 转化为等变单位分解

$$\phi_i(p) := \frac{1}{2}(\theta_i(p) + \theta_i(\tau(p))).$$

注 2.9. 设 $(M,\tau) \in \mathsf{Man}^{C_2}$ 是紧的，且 $E \to M$ 是一个实向量丛。如 [9, 注 4. 11]，所述，通过取一个等变平凡化覆盖，并利用等变单位分解进行拼接，我们可以在 E 上赋予一个与 τ 相容的厄米度量。根据 [10, 推论 2.7]，维数为 n 的实向量丛在 (M,τ) 上的同构类，与实主 $U(n)$-丛的同构类之间存在自然的一一对应。因此，关于实向量丛的结果可以转化为关于实主 $U(n)$-丛的类似结论。本文主要选择研究前者。

定义 2.10. 设 (E,σ) 是 (M,τ) 上的一个实向量丛，并令 $\Gamma(E)$ 表示其截面空间。在 $\Gamma(E)$ 上有一个由 σ_Γ 诱导的对合，定义如下:

$$\sigma_\Gamma(s) := \sigma \circ s \circ \tau, \text{ for } s \in \Gamma(E).$$

作用 σ_Γ 的不动点称为 E 的实截面。

设 (M,τ) 是 $\in \mathsf{Man}^{C_2}$，并设 $\mathcal{A}^k(M,\mathbb{C})$ 表示 M 上复值光滑 k-形式的空间。对于 (M,τ) 上的实向量丛 (E,σ)，我们定义取值于 E 的微分 k-形式空间如下

$$\mathcal{A}^k(M,E) := \Gamma(E) \otimes_{\mathcal{A}^0(M,\mathbb{C})} \mathcal{A}^k(M,\mathbb{C})$$

其带有对合，记作 σ_k： $\mathcal{A}^k(M,E) \to \mathcal{A}^k(M,E)$，定义为

$$\sigma_k(s\otimes\omega) := (\sigma\circ s\circ\tau)\otimes\overline{(\tau^*(\omega))}.$$

底层丛 E 上的普通联络是一个微分算子

$$\nabla\colon \Gamma(E) = \mathcal{A}^0(M,E) \to \mathcal{A}^1(M,E)$$

它满足莱布尼茨法则。0-形式和 1-形式上的对合 σ_0 和 σ_1 分别在联络空间上诱导出对合 $\tilde{\sigma}$，定义为

$$\tilde{\sigma}(\nabla) := \sigma_1 \circ \nabla \circ \sigma_0.$$

按照 [10]，我们现在可以如下定义实联络的概念:

定义 2.11. 设 (M,τ) 是一个 C_2-流形，(E,σ) 是定义在 (M,τ) 上的实向量丛。称 ∇ on E 上的联络为实联络，若 $\nabla = \tilde{\sigma}(\nabla)$，即

$$\nabla \circ \sigma_0 = \sigma_1 \circ \nabla.$$

注 2.12. 设 (E,σ) 是一个实丛，且 ∇ be E 上的一个普通联络。则 ∇ 在 (E,σ) 上诱导出一个实联络 ∇'，其定义为

$$\nabla' := \frac{1}{2}(\nabla + \tilde{\sigma}(\nabla)).$$

由于普通联络构成一个仿射空间（例如参见[10, 注 B.3]），∇' 是 E上的一个联络。由于每个丛都允许定义联络，因此我们看到每个实向量丛都允许定义实联络。

ˇ3. Equivariant sheaves and Cech hypercohomology

我们首先回顾 C_2-等变层的定义，见 [17]，然后讨论相应的层上上同调和 Čech 上同调。

定义 3.1. 设 (M,τ) 是一个 C_2-流形。$(\mathcal{F},\sigma)$ 上的阿贝尔群 C_2-层（简称 C_2-层）是定义在 M 上的阿贝尔群层 $\mathcal{F}$，并带有一个层同构 $\sigma\colon \mathcal{F}\to\tau^*\mathcal{F}$，使得 $\tau^*(\sigma)=\sigma^{-1}$。

设 $\mathcal{F}$ 是一个 C_2-层，且 $(M,\tau)\in \mathbf{Man}^{C_2}$。整体截面 $\Gamma(M,\mathcal{F})$ 上有一个诱导作用 σ_Γ，其定义如下：

$$\sigma_\Gamma(s)(x)=\sigma(s(\tau(x)))\quad \forall x\in M.$$

Let

$$\Gamma^{C_2}(M,\mathcal{F}):=\Gamma(M,\mathcal{F})^{C_2}=\{s\in\Gamma(M,\mathcal{F})|s=\sigma_\Gamma(s)\}$$

表示在此作用下保持不变的截面空间。

例 3.2。我们将考虑两个主要例子：取值于 $U(1)\subset\mathbb{C}$ 的局部常值层，以及局部常值层 $i\mathbb{Z}\subset\mathbb{C}$。在这两种情况下，$C_2$-作用均由从 $\mathbb{C}$ 继承的复共轭给出。我们常用 $z\mapsto\overline{z}$ 表示这些模上的作用。

根据 [17, §5.1], ，C_2-层范畴有足够多的内射对象。因此，如 [17,§5.2], 中所述，我们可以将 $(M,\tau)\in\mathbf{Man}^{C_2}$ 的等变层上同调（系数取自一个 C_2-层 $\mathcal{F}$）定义为等变整体截面函子的右导出函子 Γ^{C_2}，即

$$H^*(M,C_2;\mathcal{F}):=\mathrm{R}^*\Gamma^{C_2}(M,\mathcal{F}).$$

备注 3.3。对于 $(M,\tau)\in\mathbf{Man}^{C_2}$ 以及阿贝尔 C_2-层 $\mathcal{F}$，令 $H^*_{C_2}(X;\mathcal{F})$ 表示 [24, §6] 中定义的带扭曲系数的博雷尔上同调（另见 [12, 定义 3.19]）。依照 [24, §6]，存在一个自然同构

$$H^*_{C_2}(X;\mathcal{F})\cong H^*(M,C_2;\mathcal{F}).$$

例 3.4. 令 $i\mathbb{Z}$ 为取值于 $i\mathbb{Z}$、对合由复共轭给出的局部常值 C_2-层。根据备注 3.3，群 $H^*(M,C_2;i\mathbb{Z})$ 同构于具有扭曲 $\mathbb{Z}$-系数的等变博雷尔上同调。后者上同调在 [10] 中记为 $H^*_{C_2}(M,\mathbb{Z}(1))$。根据 [21]，$H^2_{C_2}(M,\mathbb{Z}(1))$ 将 (M,τ) 上的实线丛分类（另见 [9, 5.1] 和 [22, §1]）。

例 3.5. 假设 M 紧致。根据 [10], ，存在群的自然同构

$$H^1(M,C_2;i\mathbb{Z})\cong[M,U(1)]_{C_2},$$

其中右侧的群表示从 M 到单位圆 $U(1)$ 的 Real 映射的 C_2-同伦类。我们回顾一下，一般而言，C_2-同伦与普通同伦不同。例如，对跖映射 $a\colon U(1)\to U(1)$ 作为普通映射同伦于恒等映射。然而，作为对合由共轭给出的 C_2-映射，a 并不同伦于恒等映射。

与普通层上同调一样，等变层上同调在许多情况下也可以通过 Čech 构造来计算；我们称之为等变 Čech 上同调，现从 [17, §5.5] 回顾其定义。设 (M,τ) 是一个固定的 C_2-流形，并设

$\mathcal{U}$ 是一个没有不动点的 C_2-覆盖。设 $(\mathcal{F},\sigma)$ 是 (M,τ) 上的一个 C_2-层。我们考虑等变 Čech 上链空间

$$\check{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \left\{\omega \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \mid \sigma(\omega_{\tau(i_0),\dots,\tau(i_p)} \circ \tau) = \omega_{i_0,\dots,i_p}\right\}$$

其中 $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 是通常的 Čech 复形。余边界映射 ∂继承自通常情形，因为等变上链的余边界仍是等变的。关于 C_2-覆盖$\mathcal{U}$及系数 $\mathcal{F}$的 M 的等变 Čech 上同调，是复形 Čech $C^*(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 的上同调，即

$$\check{\mathbb{H}}^k(\mathcal{U},C_2;\mathcal{F}) := \frac{\ker\left(\partial\colon \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\right)}{\operatorname{Im}\left(\partial\colon \check{C}^{k-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\right)}.$$

注意，(M,τ) 的 C_2-覆盖范畴构成一个有向集。因此，对所有 C_2-覆盖上的等变 Čech 上同调取直接极限，即可如下定义 Čech 上同调群：

定义 3.6. 设 $(M,\tau) \in \mathsf{Man}_{C_2}$，且 $\mathcal{F}$ 是定义在 (M,τ) 上的一个 C_2-层。我们将 (M,τ) 关于系数 $\mathcal{F}$ 的等变 Čech 上同调定义为

$$\check{\mathbb{H}}^*(M,C_2;\mathcal{F}) := \operatorname*{colim}_{\mathcal{U}} \check{\mathbb{H}}^k(\mathcal{U},C_2;\mathcal{F}),$$

其中，直接极限是对 M 的所有 C_2-覆盖 $\mathcal{U}$ 取的。

命题 3.7. 对于 C_2-流形 (M,τ) 以及 M 上的阿贝尔 C_2-层 $\mathcal{F}$，˘等变 Čech 上同调计算等变层上同调，即我们有一个自然同构

$$H^*(M,C_2;\mathcal{F}) \cong \check{\mathbb{H}}^*(M,C_2;\mathcal{F}).$$

证明。由 [17, 定理 5.5.6] 可得此结论，因为 C_2 通过同胚作用，而且商 M/C_2 是仿紧的。对于后者，我们注意到，可以将 M/C_2 的每个覆盖提升到 M，且这会保持局部有限性，因为 C_2 是有限群。□

现在，设 (M,τ) 上有一个形如以下形式的 C_2-层复形 $\mathcal{F}^*$

$$\mathcal{F}^* = \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \dots$$

其中只有非负次数上存在非零层。设 M 的一个 C_2-覆盖为 $\mathcal{U}$。我们通过在复形 $\mathcal{F}^*$ 的每个次数上纵向取 ˘Čech 复形，构造双复形 ˘$C^{*,*}(\mathcal{U},\mathcal{F}^*)$，即

$$\check{C}^{p,q}(\mathcal{U},\mathcal{F}^*) = \check{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}^p).$$

垂直微分 ∂^* 由每个次数上的等变 Čech 复形诱导得到。我们得到由复形 $\mathcal{F}^*$中的映射诱导的水平映射 d^*。双复形 ˘$C^{*,*}(\mathcal{U},\mathcal{F}^*)$ 的总体复形 T^* 在次数 k 上定义为

$$T^k(\mathcal{U},\mathcal{F}^*) := \bigoplus_{i+j=k} \check{C}^{i,j}(\mathcal{U},\mathcal{F}^*), \quad d_T^{i,j} := \partial^i + (-1)^i\,\mathrm{d}^j\,.$$

˘ 于是，我们可以定义相对于覆盖 $\mathcal{U}$、系数取 $\mathcal{F}^*$ 的 M 的等变 Cech 超上同调为该复形的上同调，并将其记为

$$\check{\mathbb{H}}^*(\mathcal{U},C_2;\mathcal{F}^*) := H^*(T^*(\mathcal{U},\mathcal{F}^*)).$$

ˇ 定义 3.8。采用上述记号，(M,τ)的系数取 $\mathcal{F}^*$ 的等变 Cech 超上同调定义为

$$\check{\mathbb{H}}^*(M,C_2;\mathcal{F}^*) := \operatorname*{colim}_{\mathcal{U}} \check{\mathbb{H}}^*(\mathcal{U},C_2;\mathcal{F}^*)$$

其中，余极限取遍 (M,τ) 的所有 C_2-覆盖。

4. A Real Deligne complex

设 (M,τ) 是一个 C_2-流形，并令 $\overline{\mathcal{A}}^k := i\mathcal{A}^k_{\mathbb{R}}$ 表示 M 上取值于虚数的光滑 k-形式层。我们将 $\overline{\mathcal{A}}^k$ 视为一个带层，对合由复共轭给出。通常的德拉姆微分 d 将 $\overline{\mathcal{A}}^*$ 变为一个 C_2-层复形。我们用 $\overline{\mathcal{A}}^{*\leq p}$ 表示在 p 处的截断：

$$\overline{\mathcal{A}}^{*\leq p} = \left(\overline{\mathcal{A}}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \overline{\mathcal{A}}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{d}} \overline{\mathcal{A}}^p \to 0 \to \ldots\right)$$

令 $\iota\colon i\mathbb{Z} \to \overline{\mathcal{A}}^0$ 表示自然包含。仿照通常的德利涅上同调（例如参见 [4, 第一章. 5]），我们将第 p 个实德利涅复形记为 $\mathbb{Z}_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(p)$，定义如下：

$$i\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}^0 \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}^{p-1} \longrightarrow 0,$$

其中 $i\mathbb{Z}$ 位于 0 次。它是一个阿贝尔 C_2-层复形。现在我们如下定义实德利涅上同调的一个版本：

定义 4.1. 设 $M=(M,\tau) \in \mathsf{Man}_{C_2}$ 且 $p \geq 0$ 为整数。M 的第 p 个实德利涅上同调定义为等变切赫超上同调

$$H^*_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(p)) := \check{\mathbb{H}}^*(M,C_2;\mathbb{Z}_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(p)).$$

例 4.2. 对于 $p=0$，由定义和命题 3.7 可知，我们有一个自然同构

$$H^*_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(0)) \cong H^*(M,C_2;i\mathbb{Z}).$$

对于 $p \geq 1$，有如下引理：

引理 4.3. 设 $M=(M,\tau) \in \mathsf{Man}_{C_2}$ 且 $p \geq 1$ 为整数。设 $\mathcal{U}(1)$ 表示取值于群 $U(1)$ 的光滑函数层，其 C_2-作用由共轭给出。设 $\mathcal{U}(1)_p$ 表示 M 上的 C_2-层复形如下

$$\mathcal{U}(1)_p : 0 \to \mathcal{U}(1) \xrightarrow{\mathrm{d}\log} \overline{\mathcal{A}}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \overline{\mathcal{A}}^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \overline{\mathcal{A}}^{p-1} \to 0.$$

存在一个上同调群的自然同构

$$H^*_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(p)) = \check{\mathbb{H}}^{*-1}(M,C_2;\mathcal{U}(1)_p).$$

证明。我们有如下 C_2-层复形之间的拟同构

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & i\mathbb{Z} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \overline{\mathcal{A}}^1 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \overline{\mathcal{A}}^2 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \overline{\mathcal{A}}^{p-1} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp(2\pi-)} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot 2\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{U}(1) & \xrightarrow{\mathrm{d}\log} & \overline{\mathcal{A}}^1 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \overline{\mathcal{A}}^2 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \overline{\mathcal{A}}^{p-1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由于 $\mathcal{U}(1)$ 位于底部复形的第 1 次，以上拟同构导出了所需的同构。□

定理 4.4. 设 (M,τ) 为一个 C_2-流形。带实联络的实线丛的同构类之群同构于群 $H^2_{\mathcal{D},\tau}(M;\mathbb{Z}(2))$。

证明。由引理 4.3，对于 $p=2$，我们有如下同构：

$$H^*_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(2)) \cong \check{\mathbb{H}}^{*-1}(M,C_2;\mathcal{U}(1)\to\overline{\mathcal{A}}^1).$$

现在我们将证明，$\check{\mathbb{H}}^1(M,C_2;\mathcal{U}(1)\to\overline{\mathcal{A}}^1)$ 同构于带有实联络的实 $U(1)$-丛的同构类群。该计算与 [4, §2.2] 中的论证类似。设 (L,∇) 是由一个实 $U(1)$-丛 L 和一个实联络 ∇ 组成的一对。在一个平凡化开覆盖 C_2 $\mathcal{V}=\{V_i\}$ 上，我们可以将这对 (L,∇) 表示为 (s_i,A_i)，其中 s_i 是实截面，A_i 是局部实联络 1-形式。注意，由于 s_i 是等变的，我们有 $s=(s_i)_{i\in I}\in\check{C}^0(\mathcal{V};\overline{\mathcal{A}}^0)$。对于每个 i,j，我们构造截面 $g_{ij}=\partial(s)=\frac{s_i}{s_j}\in\Gamma(V_{ij},U(1))$，其中 ∂ 表示 Cech余边界算子，且 $V_{ij}=V_i\bigcap V_j$。截面 g_{ij} 是等变的，因为共轭与复数的取分数运算可交换，并且它们满足余循环条件。因此，g_{ij} 诱导出一个等变 Cech 余循环$g\in\check{C}^1(\mathcal{V},U(1))$。接下来，我们在每个开集 V_i 上定义 1-形式 $\omega_i=\nabla(s_i)_{s_i}$。由于联络是厄米的，根据 [4, 2.2.16]，我们知道每个 ω_i 都是纯虚 1-形式。因此，它们诱导出一个元素 $\omega\in\check{C}^0(\mathcal{V};\overline{\mathcal{A}}^1)$。此外，在每个交集 V_{ij} 上，我们有

$$\begin{aligned}
\omega_i-\omega_j &= \frac{\nabla(s_i)}{s_i}-\frac{\nabla(s_j)}{s_j}\\
&= \frac{\nabla(g_{ij}s_j)}{g_{ij}s_j}-\frac{\nabla(g_{ji}s_i)}{g_{ji}s_i}\\
&= \frac{g_{ij}\nabla(s_j)+\mathrm{d}g_{ij}\otimes s_j}{g_{ij}s_j}-\frac{g_{ji}\nabla(s_i)+\mathrm{d}g_{ji}\otimes s_i}{g_{ji}s_i}\\
&= -\left(\frac{\nabla(s_i)}{s_i}-\frac{\nabla(s_j)}{s_j}\right)+2\,\mathrm{d}g_{ij}\frac{1}{g_{ij}}.
\end{aligned}$$

结合上、下两个等式，我们在 V_{ij} 上得到 $\omega_i-\omega_j=\mathrm{d}\log(g_{ij})$。因此，$(g,\omega)$ 定义了层复形 $\mathcal{U}(1)\to\overline{\mathcal{A}}^1$ 的第一等变切赫超上同调中的一个元素，即 $(g,\omega)\in\check{\mathbb{H}}^*(\mathcal{V};\mathcal{U}(1)\to\overline{\mathcal{A}}^1)$。不难证明，$(g,\omega)$ 的类与用于表示线丛 L 的截面无关。因此，我们得到了一个良定义的映射，将在覆盖 $\mathcal{V}$ 上可平凡化的带实联络的实线丛的同构类集合映到 $\check{\mathbb{H}}^1(\mathcal{V};\mathcal{U}(1)\to\overline{\mathcal{A}}^1)$。对所有 C_2-覆盖上的这些映射取直接极限，得到一个映射，其目标为 $\check{\mathbb{H}}^1(M,C_2;\mathcal{U}(1)\to\overline{\mathcal{A}}^1)$。由构造可知，$(L,\nabla)+(L',\nabla')=(L\otimes L',\nabla+\nabla')$ 被映到类之和 $(g,\omega)+(g',\omega')$，也就是说，我们构造的映射是一个群同态。该映射的满射性和单射性可仿照 [4, 定理2.2的证明11] 得出。□

命题 4.5. 设 (M,τ) 是一个 C_2-流形。带有平坦实联络的实线丛的同构类构成的群，同构于群 $H^2_{\mathcal{D},\tau}(M;\mathbb{Z}(p))$，对所有 $p>2$ 均成立。

证明。首先我们假设 $p=3$。由引理 4.3 可得同构

$$H^*_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(3)) \cong \check{\mathbb{H}}^{*-1}\left(M,C_2;\mathcal{U}(1)\to\overline{\mathcal{A}}^1\to\overline{\mathcal{A}}^2\right).$$

˘ 注意，在次数 $*=2$ 中，切赫超上同调群的元素

$$\check{\mathbb{H}}^1\left(M, C_2; \mathcal{U}(1) \to \overline{\mathcal{A}}^1 \to \overline{\mathcal{A}}^2\right)$$

可表示为一对 (g, ω)，如定理 4.4 的证明中所述，但额外要求在每个开集 U_i 上 $\mathrm{d}\omega_i = 0$。将这样的一对与带实联络的实丛对应起来后，这一额外要求就对应于实联络的平坦性，即联络的曲率为零；实联络的曲率定义方式与普通联络相同。对于 $p > 2$，我们可以采用与情形 $p = 3$ 相同的论证，只需注意相应的德利涅复形在低次数上相同。□

5. Computing Real Deligne cohomology

对于每个 p，复形 $\mathbb{Z}_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(p)$ 位于 C_2-层的短正合列中

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}^{*\leq p-1}[-1] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(p) \longrightarrow i\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

令 $f\colon M \to M/C_2$ 表示典范投影。按照 [17, §5.1], ，对每个k，层 $f_*\overline{\mathcal{A}}^k = (\overline{\mathcal{A}}^k)^{C_2}$ 在 M/C_2 上定义为这样一个层：其在开集 $U \subset M/C_2$ 上的截面由 C_2-不变元素 $\overline{\mathcal{A}}^k(f^{-1}(U))$ 给出，即，

$$(\overline{\mathcal{A}}^k)^{C_2}(U) = (\overline{\mathcal{A}}^k(f^{-1}(U))^{C_2}.$$

为简化记号，我们将 $(\overline{\mathcal{A}}^k)^{C_2}$ 在该作用下的整体截面空间记为

$$\mathcal{E}^k(M) := (\overline{\mathcal{A}}^k)^{C_2}(M) = \left\{\omega \in \overline{\mathcal{A}}^k(M) \mid \overline{\tau^*(\omega)} = \omega\right\}.$$

对于 $k = 0$， $\mathcal{E}^0(M) = C^\infty_{\mathcal{R}}(M, i\mathbb{R})$ 是光滑实值虚函数的群。注意， $\mathcal{E}^*(M)$ 构成一个上链复形，其微分 $\mathrm{d}\colon \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M)$ 由 $\overline{\mathcal{A}}^*(M)$ 中的微分诱导。于是，我们将 $\mathcal{E}^{p-1}/\mathrm{d}\,\mathcal{E}^{p-2}(M)$ 写作商 $\mathcal{E}^{p-1}(M)/\mathrm{d}\,\mathcal{E}^{p-2}(M)$。下面的结果计算了 $\overline{\mathcal{A}}^{*\leq p-1}[-1]$ 的上同调：

命题 5.1. 对于 $(M, \tau) \in \mathsf{Man}_{C_2}$，存在同构

$$\check{\mathbb{H}}^j\left(M, C_2; \overline{\mathcal{A}}^{*\leq p-1}\right) = \begin{cases} H^j(M, C_2; i\mathbb{R}) & j < p-1 \\ \mathcal{E}^{p-1}/\mathrm{d}\,\mathcal{E}^{p-2}(M) & j = p-1 \\ 0 & j > p-1. \end{cases}$$

证明。由 [17, 定理 5.3 的推论 1.1] 我们知道 $H^*\left(M, C_2;\ \overline{\mathcal{A}}^k\right)$ 同构于 $H^*\left(M/C_2, (\overline{\mathcal{A}}^k)^{C_2}\right)$。利用单位分解和测地凸覆盖，可知层 $(\overline{\mathcal{A}}^k)^{C_2}$ 是软的，因而是无环的。根据 de Rham 定理的等变版本（如 [14,定理 2.2] 所示）以及 $\mathcal{E}^k(M)$ 的定义，即得所述结论。□

命题 5.1 意味着正合列 (1) 导出如下形式的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^{p-2}(M, C_2; i\mathbb{R}) \longrightarrow H^{p-1}_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M; \mathbb{Z}(p)) \longrightarrow H^{p-1}(M, C_2; i\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{E}^{p-1}/\,\mathrm{d}\,\mathcal{E}^{p-2}(M) \longrightarrow H^{p}_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M; \mathbb{Z}(p)) \longrightarrow H^{p}(M, C_2; i\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow H^{p+1}_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M; \mathbb{Z}(p)) \longrightarrow H^{p+1}(M, C_2; i\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

在次数 $q > p$ 中，我们得到一个同构 $H^q_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M, \mathbb{Z}(p)) \cong H^q(M, C_2; i\mathbb{Z})$。不过，次数为 $q \leq p$ 的情形更有意思。首先考虑 $q < p$。如 [4], 中所述，我们注意到连接态射

$$\delta\colon H^*(M, C_2; i\mathbb{Z}) \to H^{*+1}(M, C_2; i\mathbb{R})$$

将整虚形式映入所有虚值形式所成的群中。连接态射 δ 消去挠元，其在 $H^{*+1}(M, C_2; i\mathbb{R})$ 中的像是 $H^*(M, C_2; i\mathbb{Z})$ 的自由部分。这说明了以下结果：

命题 5.2。对于每个 $q < p$，我们有以下正合列

$$0 \to H^{q-1}(M, C_2; i\mathbb{R})/H^{q-1}(M, C_2; i\mathbb{Z})_{\mathrm{free}} \to H^q_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M; \mathbb{Z}(p)) \to H^q(M, C_2; i\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \to 0$$

其中下标 free 表示相应群的自由部分，tors 表示挠部分。□

注记 5.3。对于 $q = 2$ 和 $p = 3$，我们得到短正合列

$$0 \to H^1(M, C_2; i\mathbb{R})/H^1(M, C_2; i\mathbb{Z})_{\mathrm{free}} \to H^2_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M; \mathbb{Z}(3)) \to H^2(M, C_2; i\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

在 [10, §3] 中，利用 $H^2(M, C_2; i\mathbb{Z})$ 的挠部分和自由部分对实线丛进行分类。我们期待上述短正合列或许能为 [10, 注记 3.18] 中讨论的混合情形带来新的见解。

现在我们来看情形 $p = q$。连接态射是将闭整虚形式包含到群 $\mathcal{E}^{p-1}/\,\mathrm{d}\,\mathcal{E}^{p-2}(M)$ 中的包含映射。我们用 $\mathcal{E}^{p-1}_0(M)$ 表示由具有整虚周期的闭形式和余边界生成的 $\mathcal{E}^{p-1}{}_{\text{闭}}(M)$ 的子群。于是，根据长正合列和命题 5.1，我们推出以下结果：

定理 5.4. 对于每个 p，我们都有以下正合列

$$0 \to \mathcal{E}^{p-1}/\mathcal{E}^{p-1}_0(M) \to H^p_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M; \mathbb{Z}(p)) \to H^p(M, C_2; i\mathbb{Z}) \to 0. \quad \square \tag{2}$$

6. Classification of Real line bundles with connection

对于 $p = 1$，群 $\mathcal{E}^0_0(M)$ 等于从 M 到 $i\mathbb{Z}$ 的实光滑函数群。我们将后一个群记为 $C^\infty_{\mathcal{R}}(M, i\mathbb{Z})$。由 [10] 可得 $H^1(M, C_2; i\mathbb{Z}) \cong [M, U(1)]_{C_2}$ 若 M 是紧的。由引理 4.3，我们有

$$H^1_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M, \mathbb{Z}(1)) \cong H^0(M, C_2; \mathcal{U}(1)).$$

群 $H^0(M;\, C_2;\, \mathcal{U}(1))$ 由从 M到 $U(1)$ 的光滑实函数构成，我们将其记为 $C^\infty_{\mathcal{R}}(M,\, U(1))$。因此，当 $p = 1$和 M是紧的时，我们可以将序列 (2) 改写为

$$0 \to C^\infty_{\mathcal{R}}(M, i\mathbb{R})/C^\infty_{\mathcal{R}}(M, i\mathbb{Z}) \to C^\infty_{\mathcal{R}}(M, U(1)) \to [M, U(1)]_{C_2} \to 0.$$

现在我们假设 $p = 2$。由 [22],, 群 $H^2(M, C_2;\, i\mathbb{Z})$ 对实线丛的同构类进行分类。根据定理 4.4, $H^2_{\mathcal{D},\, \mathcal{R}}(M;\, \mathbb{Z}(2))$ 中的元素与 M 上带有实联络的实线丛的同构类一一对应。下面的结果给出了群 $\mathcal{E}^1/\mathcal{E}^1_0(M)$ 的一种解释，其中我们将 $M \times U(1)$ 视为实空间，并赋予乘积上诱导的 C_2-作用。

命题 6.1. 群 $\mathcal{E}^1/\mathcal{E}^1_0(M)$ 与平凡丛 $M \times U(1)$ 上联络的同构类集合之间存在一一对应。

证明. 考虑如下由 C_2-层构成的复形的短正合列：

(3)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & i\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \overline{\mathcal{A}}^1 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp(2\pi -)} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot 2\pi} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{U}(1) & \xrightarrow{\mathrm{d}\log} & \overline{\mathcal{A}}^1 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

取等变超上同调可得到一个长正合列。对第二行应用命题 5.1，得到正合列

$$H^1(M, C_2; i\mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota^1} \mathcal{E}^1/\,\mathrm{d}\,\mathcal{E}^0(M) \to H^1\left(M, C_2; \mathcal{U}(1)) \to \overline{\mathcal{A}}^1\right) \xrightarrow{\alpha^1} H^2(M, C_2; i\mathbb{Z}) \to 0$$

其中 α^* 表示连接同态。正合性意味着存在一个同构

$$\operatorname{coker}(\iota^1) \cong \ker(\alpha^1) \tag{4}$$

其中 ι 表示 (3) 中复形的上方态射。我们已经知道存在一个同构

$$\operatorname{coker}(\iota^1) \cong \mathcal{E}^1/\mathcal{E}^1_0(M).$$

由引理 4.3 和定理 4.4，我们可以将 $H^1(M, C_2;\, \mathcal{U}(1)) \to \overline{\mathcal{A}}^1)$ 中的元素识别为带有实联络的实线丛的同构类，并将群 $H^2(M, C_2;\, i\mathbb{Z})$ 中的元素识别为实线丛的同构类。利用这些识别，我们看到映射 α^1 将带有实联络的实线丛映射到其底层实线丛。因此， α^1 的核对应于平凡丛 $M \times U(1)$ 上实联络的同构类。于是，同构 (4) 可以改写为

$$\mathcal{E}^1/\mathcal{E}^1_0(M) = \left\{ \begin{array}{l} \text{isomorphism classes of Real} \\ \text{connections on } M \times U(1) \end{array} \right\}. \qquad \square$$

总结上述讨论，我们证明了以下结果，它是实光滑德利涅上同调的类似物，见 [13, 第 162] 页：

定理 6.2. 设 (M,τ) 是一个 C_2-流形。存在如下两个短正合列之间的同构：

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^1/\mathcal{E}^1_0(M) \longrightarrow H^2_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H^2(M,C_2;i\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

and

$$0 \to \left\{\begin{array}{l} \textit{isom. classes of} \\ \textit{Real connections} \\ \textit{on the bundle} \\ M\times U(1) \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \textit{isom. classes of} \\ \textit{Real line bundles} \\ \textit{with Real} \\ \textit{connection over } M \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \textit{isom. classes} \\ \textit{of Real} \\ \textit{line bundles} \\ \textit{over } M \end{array}\right\} \to 0.$$

我们以以下评述结束本文，这些评述说明了我们为何选择这样的实德利涅上同调群定义：

注记 6.3. 与光滑 Deligne 上同调类似，群 $H^p_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(q))$ 在 $p=q$ 的情形下最为有趣。由例 4.2 可得

$$H^0_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(0)) \cong H^0(M,C_2;i\mathbb{Z}),$$

并在引理 4.3 中令 $p=1$，可得

$$H^1_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(1)) \cong \check{\mathbb{H}}^0(M,C_2;\mathcal{U}(1)) \cong H^0(M;C_2;\mathcal{U}(1)),$$

其中第二个同构由命题 3.7 得出。因此，结合定理 6.2 中关于 $H^2_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(2))$ 的主要结果，我们得到群 $H^p_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(qp)$ 在 $p=0$、1、2 时的识别，这类似于 §1.4] 中 $p=q$ 的 Deligne 上同调群的识别。因此，我们认为定义 4.1 中的群$H^p_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(q))$ 值得称为实 Deligne 上同调群。

注记 6.4。我们尚未进一步探究群$H^p_{\mathcal{D},\ \mathcal{R}}(M;\ \mathbb{Z}(q))$的几何解释。不过，我们注意到，对于 $q=p=3$，我们得到短正合列

$$0 \to \mathcal{E}^2/\mathcal{E}^2_0(M) \to H^3_{\mathcal{D},\mathcal{R}}(M;\mathbb{Z}(3)) \to H^3(M,C_2;i\mathbb{Z}) \to 0.$$

根据 [18],，群 $H^3(M,C_2;\ i\mathbb{Z})$ 对实丛格的稳定同构类进行分类。因此，我们预期 $H^3_{\mathcal{D},\ \mathcal{R}}(M;\ \mathbb{Z}(3))$ 对具有实联络结构和曲率形式的实丛格的稳定同构类进行分类，其方式类似于[4, 第五章]。

References

[1] F. Apruzzi, F. Bonetti, I. G. Etxebarria, S. Hosseini, S. Schafer-Nameki, 《弦理论中的对称性拓扑场论》，《数学物理通讯》402（2023），895–949。[2] M. F. Atiyah, K理论与实结构，《数学季刊》（2）17（1966），367–386。[3] M. V. Berry, 《绝热变化伴随的量子相位因子》，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》392（1984），第1802期，45–57。[4] J. L. Brylinski, 《环空间、特征类与几何量子化》，《数学进展》107，Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1993。[5] J. L. Brylinski, D. A. McLaughlin, 《特征类的Čech余循环》，《数学物理通讯》178（1996），第1期，225–236。[6] M. Dedushenko, 《量子场论中的贝里联络、反常及其应用札记》，《SciPost 物理》15，167（2023）。[7] H. Esnault, E. Viehweg, 《德利涅–贝林森上同调》，载于：《特殊值的 L函数的贝林森猜想》，43–91，《数学展望》4，学术出版社，1988。[8] D. S. Freed, 《Dirac 电荷量子化与广义微分上同调》，《微分几何综述》，129–194，《微分几何综述》7，国际出版社，2000。

[9] G. De Nittis, K. Gomi, 《“实”布洛赫丛的分类：AI型拓扑量子系统》, 《几何物理杂志》86（2014）, 303–338。[10] G. De Nittis, K. Gomi, 《时间反演对称布洛赫丛的微分几何不变量：“实”情形》, 《数学物理杂志》57（2016）, 第5期, 053506, 49页。[11] P. F. dos Santos, P. Lima-Filho, 《实簇上的整数德利涅上同调》, 《数学年刊》350（2008）, 973–1022。[12] C.-K. Fok, 《紧李群的实K理论》, SIGMA《对称性、可积性、几何与方法及其应用》10（2014）, 论文022, 26页。[13] P. Gajer, 《德利涅上同调的几何》, 《数学发明》127（1997）, 155–207。[14] O. Goertsches, L. Zoller, 《等变德拉姆上同调：理论与应用》, 圣保罗数学科学杂志13（2019）, 第2期, 539–596。[15] K. Gomi, 《等变光滑德利涅上同调》, 《大阪数学杂志》42（2005）, 309–337。[16] D. Grady, H. Sati, 《扭曲光滑德利涅上同调》, 《全球分析与几何年刊》53（2018）, 第3期, 445–466。[17] A. Grothendieck, 《关于同调代数的若干问题》, 《东北数学杂志》9（1957）, 119–221。[18] P. Hekmati, M. Murray, R. Szabo, R. Vozzo, 《实丛格、定向反转面与扭曲KR同调》, 《高等理论数学物理》23（2019）, 2093–2159。[19] P. Hekmati, M. Murray, R. Szabo, R. Vozzo, 《定向反转面的符号选择》, 《数学物理通讯》378（2020）, 第3期, 1843–1873。[20] M. J. Hopkins, I. M. Singer, 《几何、拓扑与 M理论中的二次函数》, 《微分几何杂志》70（2005）, 329–452。[21] B. Kahn, 《向量实丛的等变切尔恩类构造》, 《交换代数通讯》15（1987）, 695–711。[22] V. A. Krasnov, 《实代数簇上向量丛的特征类》, 《苏联科学院学报：数学辑》55（1991）, 第4期, 716–746。[23] B. Simon, 《全纯、量子绝热定理与贝里相位》, 《物理评论快报》51（1983）, 第24期, 2167–2170。[24] A. Stieglitz, 《等变层上同调》, 《数学手稿》26（1978）, 201–221。[25] E. Witten, 《M理论中的五膜有效作用量》, 《几何物理杂志》22（1997）, 103–133。

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Trondheim, Norway
Email address: petermf@live.no

Department of Mathematical Sciences, NTNU, Trondheim, Norway
Email address: gereon.quick@ntnu.no

Department of Mathematics and Physics, Universitet i Stavanger, Norway
Email address: eirik.e.svanes@uis.no