arXiv:2303.05274v1 [math.DG] 9 Mar 2023

Hull-Strominger系统的Futaki不变量与Yau猜想

MARIO GARCIA-FERNANDEZ 和 RAUL GONZALEZ MOLINA

ABSTRACT. 我们发现了一个新的障碍，阻碍Hull-Strominger系统解的存在。该障碍超越了Calabi-Yau流形 (X, Ω) 的平衡性质以及其上丛的Mumford-Takemoto斜率稳定性。基本原理是：若切丛上的联络 ∇ 满足Hermitian-Yang-Mills条件，则可为与系统的解相关联的全纯弦代数丛构造一个（可能是不定的）Hermitian-Einstein度量。借助这一点，我们定义了一族Futaki不变量，它们阻碍给定平衡类中解的存在。我们的结果受到Yau关于这些方程存在性问题的一个强版本猜想的启发。

1. INTRODUCTION

设 X 是一个维数为三、带有全纯体积形式 Ω 的紧复流形。设 V 是 X 上的全纯向量丛。设 α 是一个实常数。对于 X 上的厄米度量g 和 V上的厄米度量 h ，Hull-Strominger系统由下式给出

$$\begin{aligned} F_h \wedge \omega^2 &= 0, \\ d(\|\Omega\|_\omega \omega^2) &= 0, \\ dd^c\omega - \alpha(\operatorname{tr} R_\nabla \wedge R_\nabla - \operatorname{tr} F_h \wedge F_h) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 ω 表示 g的厄米形式。(1.1) 的第一行是度量 h的 Hermitian-Einstein 方程。第二行的共形平衡条件等价于 g 的 Bismut联络的全纯群包含于 SU(3)。最后一个方程称为 Bianchi 恒等式，其中切丛上的度量联络 ∇ 的选取存在歧义；这一歧义可追溯至异质弦理论 [37, 48]的起源。

Hull-Strominger系统最近在数学界引发了广泛关注，既因为它在研究非K¨ahler Calabi-Yau流形 [16, 26, 47] 方面的应用，也因为它与镜像对称的一种猜想性推广有关 [1, 51]。正如Li-Yau [42] 和Fu-Yau [22, 23] 在关于这些方程的开创性工作中最初提出的，人们预期Hull-Strominger系统在几何化Reid幻想 [11,20], 方面发挥关键作用，通过合流变换将典范丛平凡的复三维流形联系起来。这一设想对我们理解

本研究部分获得西班牙科学与创新部资助，资助项目包括 PID2019-109339GA-C32、EUR2020-112265，以及由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 I+D+i SEV2015-05554-18-1。

复维数为三的射影卡拉比-丘流形的模空间，以及弦景观的物理应用，也具有重要意义。

Hull-Strominger 系统的存在性与唯一性问题目前仍未得到充分解决。本文受 S.-T. Yau [52], 关于解存在性的一个猜想启发，该猜想为近期在 [32, 46]中发展的一般方法提供了重要检验。为了理解这一问题，我们先说明方程 (1.1) 的三类必要条件。首先，若 $(X, \Omega\ V)$ 存在解，则陈类必须满足一些显然的上同调障碍，即

$$\deg_{\mathfrak{b}}(V) = 0, \qquad ch_2(V) = ch_2(X) \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R}), \tag{1.2}$$

其中 ch_2 表示第二陈特征，$\deg_{\mathfrak{b}}(V) := c_1(V) \cdot \mathfrak{b} \in \mathbb{R}$，且

$$\mathfrak{b} := [\|\Omega\|_{\omega}\omega^2] \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

这里， $H^{p,q}_{BC}(X)$ 是复流形X的 Bott-Chern 上同调群，而 $H^{p,p}_{BC}(X, \mathbb{R})$ $\subset H^{p,p}_{BC}(X)$ 是典范实结构。其次，Calabi-Yau 三维流形 (X,Ω) 必须是平衡的 [45], ，也就是说，它必须存在一个平衡厄米度量，其平衡类为 $\mathfrak{b}$。第三，Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理 [15, 50] 及其对 Hermitian流形的推广（见[9, 41, 43]）要求 V 关于 $\mathfrak{b}$ 满足 Mumford-Takemoto斜率稳定性。

在这一设定下，Hull-Strominger系统的Yau猜想 [52]指出，前述三个必要条件是求得Hull-Strominger系统之解的唯一障碍（见猜想2.1）。为了推动这一有趣的问题——目前我们对此知之甚少——自然有必要从两个方面强化这一论断。一方面，理想情况下，对解的存在问题给出完整答案时，应能控制平衡类 $\mathfrak{b}$，从而在我们先验地用来衡量丛的稳定性 V 的那个平衡类中，构造出Hull-Strominger系统的解（若不作此假设，猜想2.1已在 [5], 中针对 V 相对于某个K¨ahler类稳定的情形得到了肯定回答）。当 $\mathfrak{b}$ 被指定为某个K¨ahler类的平方时，解的存在性最近已由Collins、Picard和Yau在 [12]中确立。然而请注意，即使假设 X 是射影的，由于Fu和Xiao的一个结果 [21], 这些类也无法穷尽平衡锥。

另一方面，按照最初在 [52], 中的表述，猜想2.1的陈述并未指定（1.1）中的联络 ∇ 。在后来的表述[53]中，根据 [48]中的建议，取 ∇ 为 g 的 Chern联络。然而，另一种联络的选择似乎在物理和几何意义上都更为重要，即取满足Hermitian-Yang-Mills方程的 ∇

$$R^{0,2}_{\nabla} = 0, \qquad R_{\nabla} \wedge \omega^2 = 0. \tag{1.4}$$

对于 ∇ 的这一试探形式，方程 (1.1) 的解满足杂化弦运动方程 [18, 39] ，并且在微扰理论中还具有许多理想性质 [14, 38, 44]。就几何而言，满足 (1.4) 的方程 (1.1) 的解是广义Ricci平坦的 [25, 27] ，并且具有矩映射解释 [7, 35]，由此在其模空间上导出一个有趣的度量。此外，

目前已有有力证据表明，这些解通过 T 对偶和顶点代数理论 [1, 6, 28]，在 (0,2) 镜像对称中发挥着重要作用。

受前述讨论启发，本文拟采用试探形式（1.4）探讨以下更强版本的Yau猜想2.1。注意，（1.4）的一个解会在 $T^{1,0} = T^{1,0}X$上诱导一个（可能非标准的）全纯向量丛结构，记作 $V_0 = (T^{1,0}, \nabla^{0,1})$。设 $h^{0,1}_{\bar\partial}(X)$表示Dolbeault上同调群 $H^{0,1}_{\bar\partial}(X)$的维数。

问题1.1. 设(X, Ω)是一个紧致Calabi-Yau三维流形，满足 $h^{0,1}_{\bar\partial}(X) = 0$，并带有一个平衡类 $\mathfrak{b}$。设 V是其上的一个 $\mathfrak{b}$-多重稳定全纯向量丛，满足（1.2）。设 V_0 是 $T^{1,0}$上的一个一般的 $\mathfrak{b}$-多重稳定全纯向量丛结构。(X, Ω, V)是否存在Hull-Strominger系统（1.1）的一个解(g, h)，满足 $\alpha \neq 0$ 且平衡类为 $\mathfrak{b}$，并且 ∇ 是 V_0上某个厄米-Einstein度量 h_0 的Chern联络?

对于非一般的 V_0 或 $h^{0,1}_{\bar\partial}(X) \neq 0$，不难找到一些例子，证明前述问题的答案是否定的（见第2.2节）。这些技术条件旨在防止 Bianchi 恒等式出现“退化”解，即 $\operatorname{tr} R_\nabla \wedge R_\nabla = \operatorname{tr} F_h \wedge F_h$；当 X 是非 K¨ahler 流形时，这类解不可能存在。我们推测，这些障碍确实源于方程组 (1.1) 和 (1.4) 的“范畴对称性”，而这应当能通过高阶规范理论 [3] 得到解释。

1.1. Futaki不变量。本文的主要目标是提供一种新工具，帮助我们处理问题1.1中提出的 Yau猜想的强版本。为此，我们将利用满足试探形式 (1.4) 的 Hull-Strominger系统解的特殊性质。更确切地说，我们将能够运用广义几何，并应用文献 [32, 34] 中引入的全纯弦代数丛度量理论。

设 (X, Ω) 是一个紧致 Calabi-Yau流形，带有一对全纯向量丛 V_0 和 V，如问题1.1所述。为简单起见，在本引言中我们假设 $\dim_{\mathbb{C}} X = 3$，但我们的结果也适用于高维情形下 Hull-Strominger系统的抽象定义（见定义 5.9）。记 P 为 $V_0 \oplus V$的分裂标架的全纯主丛。那么，P满足

$$p_1(P) = 0 \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R}), \tag{1.5}$$

其中 $p_1(P)$ 表示通过 Chern-Weyl 理论与双线性形式相关联的第一庞特里亚金类

$$\langle , \rangle := -\alpha \operatorname{tr}_{V_0} + \alpha \operatorname{tr}_V . \tag{1.6}$$

利用 (1.5)，可以为 P 典范地关联一族如下形式的全纯向量丛扩张

$$0 \longrightarrow T^*_{1,0} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow A_P \longrightarrow 0, \tag{1.7}$$

其中 A_P 表示 P 的全纯 Atiyah algebroid。用[32, 34], 的语言来说，这些扩张对应于一类特殊的全纯 Courant 代数丛的底层正交丛，这类代数丛称为弦。考虑

复流形 $H^{p,\ {}_A{}^q}(X)$ 的 Aeppli 上同调群，以及典范实结构 $H^{p,\ {}_A{}^p}(X,\mathbb{R}) \subset H^{p,\ {}_A{}^p}(X)$。考虑由 ∂ 算子诱导的映射，它映至 X 的 Dolbeault上同调：

$$\partial\colon H^{1,1}_A(X,\mathbb{R}) \to H^{2,1}_{\bar\partial}(X).$$

因此，我们关注的弦代数丛所产生的全纯向量丛扩张 (1.7)，由一个以向量空间 $\mathrm{Im}\,\partial$ 为模型的仿射空间 $\mathfrak{S}$ 参数化（见命题3.11和注 3.13）。

考虑以下有限维复李代数族

$$\mathfrak{H} \to \mathfrak{S}$$

其中，$\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ 上方的纤维由 $SO(r,\mathbb{C})$-丛 $\mathcal{Q}_\mathfrak{s}$ 的全纯规范变换群的李代数给出

$$\mathfrak{H}_\mathfrak{s} := H^0(X, \mathrm{End}\,\mathcal{Q}_\mathfrak{s}).$$

那么，存在一族特征标（见第6.1节）

$$\mathcal{F}\colon \mathfrak{H} \longrightarrow H^{1,1}_A(X).$$

更明确地说，对于实平衡类 $\mathfrak{b} \in H^{2,\ {}^2_{BC}}(X,\mathbb{R})$ 和 $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$，李代数特征标

$$\langle \mathcal{F}_\mathfrak{s}, \mathfrak{b}\rangle : \mathfrak{H}_\mathfrak{s} \to \mathbb{C}.$$

由 $\mathfrak{b}$ 所定义的正交丛 $\mathcal{Q}_\mathfrak{s}$ 的 Futaki不变量给出，其中我们使用对偶同构 $H^{2,\ {}^2_{BC}}(X)^* \cong H^{1,\ {}_A{}^1}(X)$。

定理1.2. 设 (X, Ω) 是一个 Calabi-Yau 三维流形，其上带有一对满足 (1.2) 的全纯向量丛 V_0 和 V。假设 $(X, \Omega\ V)$ 存在一个 Hull-Strominger系统 (1.1) 的解，其平衡类为 $\mathfrak{b} \in {}_{H^{2,\ {}^2_{BC}}}(X,\mathbb{R})$，且 ∇ 是 V_0 上厄米-爱因斯坦度量 h_0 的 Chern 联络。那么，存在 $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ 使得 $\langle \mathcal{F}_\mathfrak{s}, \mathfrak{b}\rangle = 0$。

这为采用试探形式 (1.4) 的 Hull-Strominger系统解的存在性提供了一个新的潜在障碍；该障碍超越了 Calabi-Yau流形 (X,Ω) 的平衡性质以及丛 V_0 和 V 的 Mumford-Takemoto斜率稳定性。

作为我们主要结果的推论，为了对问题1.1给出否定答案，只需找到一个元组 $(X, \Omega\ V)$ 和一个平衡类 $\mathfrak{b} \in {}_{H^{2,\ {}^2_{BC}}}(X,\mathbb{R})$，满足陈述中的条件，使得 V 是 $\mathfrak{b}$- 多重稳定的，并且

$$\langle \mathcal{F}_\mathfrak{s}, \mathfrak{b}\rangle \neq 0, \qquad \forall \mathfrak{s} \in \mathfrak{U}^0,$$

其中 $\mathfrak{U}^0$ 表示在 V_0 的模空间某个稠密开子集上，相对族中的弦代数簇扩张的限制。尽管我们付出了努力，仍未能找到满足这一强条件的例子，因此问题1.1仍未解决。尽管如此，我们希望这个新不变量能够判定在特定的 V_0 选择下解是否不存在；这是我们计划在未来工作中探讨的问题。

当 $\mathcal{Q}$ 引理表明，空间 $\mathfrak{S}$ 退化为一点，也就是说，(1.7) 中的 $\mathcal{Q}$ 在同构意义下由 P 唯一确定 [32]。在这种情况下，我们得到一个唯一的不变量 $\mathcal{F}_0$，它阻碍了 Calabi-Yau流形 X 满足 ∂

解的存在性。该不变量可视为全纯丛 P 的经典 Futaki不变量的弦论版本。基于此，我们预期 $\mathcal{F}_0$ 能够有效地用于研究 Calabi-Yau流形通过合流变换和翻转得到的情形下的问题1.1，并可能对 Reid幻想的几何化及弦景观产生有趣的影响。值得注意的是，我们的不变量 $\mathcal{F}_0$ 在一般的 Clemens-Friedman流形上恒等于零，因为平衡锥退化为零类 [19]。这与以下预期相符：这些非 K¨ahler 流形存在 Hull-Strominger系统的解。

1.2. 耦合 Hermitian-Einstein 度量。我们证明定理1.2的方法有几个值得关注的显著特点。该方法受到 De La Ossa、Larfors 和 Svanes 的一项重要结果启发：他们指出，Hull-Strominger系统等价于 Courant代数丛上的一个适当的 Hermitian-Yang-Mills方程，且在微扰理论的所有阶上均成立 [13], 。第5节旨在为他们的结果给出精确的数学对应表述（见注5.13）：在第5.1节中，我们用经典张量刻画

$$F_{\mathbf{G}} \wedge \omega^{n-1} = 0, \tag{1.8}$$

全纯弦代数丛上的广义伪Hermitian度量 G（见定义 4.3）所满足的厄米-爱因斯坦条件。基于此，我们在命题5.12中证明，任何满足试探形式 (1.4) 的 Hull-Strominger系统解都会导出 (1.8) 的一个解，由此便可构造定理1.2中的 Futaki不变量。

方程 (1.8) 启发我们定义一个新的耦合方程组，称为耦合 Hermitian-Einstein系统（见定义 5.1），其解可导出方程 (1.8) 的解。耦合Hermitian-Einstein系统比 Hull-Strominger系统更弱，也更灵活；例如，它既不要求复流形是平衡的，也不要求其具有全纯体积形式。因此，我们期望能在具有 $c_1(X) = 0$ 但典范丛非平凡的紧复流形上找到解。此外，该系统的解对应于弦代数丛上一类自然的广义Ricci平坦度量，并且与异质超引力有着有趣的联系，这进一步说明了研究它们的动机（见注 5.7 和注 5.8）。这一问题将在其他工作中探讨。

本文上述思想和方法将在后续工作 [29], 中进一步拓展；届时我们将研究与满足试探形式 (1.4) 的 Hull-Strominger系统的解相关联的全纯弦代数丛的稳定性条件。尽管我们的整体图景大多仍属猜想，但我们预期这一稳定性条件将在未来的研究中帮助我们发现解存在性的新障碍，与 [30] 中的情形类似。

2. Strengthening Yau's Conjecture

2.1. 原始表述。本节将精确陈述最初在[52], 中提出的关于 Hull-Strominger系统1.1的Yau猜想，并评述我们在问题1.1中借助试探形式 1.4提出的强版本。首先引入一些记号。给定一个紧致

复流形 X，我们将用 $H^{p,q}_{BC}(X)$表示其Bott-Chern上同调群，定义如下:

$$H^{p,q}_{BC}(X) = \frac{\ker d : \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p+q+1}(X,\mathbb{C})}{\operatorname{Im} dd^c : \Omega^{p-1,q-1}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})}, \tag{2.1}$$

以及由 $H^{p,p}_{BC}(X,\mathbb{R}) \subset H^{p,p}_{BC}(X)$ 表示的典范实结构。若 X 具有平衡度量，我们就称其为平衡；也就是说，存在一个厄米度量 g_0，其厄米形式为 $\omega_0 = g_0(J,)$，并满足 $d\omega_0^{n-1} = 0$。此时，ω_0 定义了一个平衡类

$$\mathfrak{b}_0 := [\omega_0^{n-1}] \in H^{n-1,n-1}_{BC}(X,\mathbb{R}). \tag{2.2}$$

此外，若 X 具有一个全纯体积形式 Ω（下文将固定该形式），我们就称其为Calabi-Yau流形。注意，我们并不要求 X 是射影的，也不要求其为 K¨ahler。

设 V 是平衡流形 X 上的一个全纯向量丛，且其平衡类为 $\mathfrak{b}_0 = [\omega_0^{n-1}]$。那么，根据 Donaldson-Uhlenbeck-Yau定理[15, 50] 及其对 Hermitian流形的推广（见 [9, 41, 43]），Hermitian-Einstein方程的解的存在性

$$F_h \wedge \omega_0^{n-1} = 0,$$

对于 V 上的厄米度量 h，这等价于 V 关于 $\mathfrak{b}_0$ 的 Mumford-Takemoto斜率多重稳定性。

有了这些预备知识，Hull-Strominger系统的 Yau猜想可表述如下:

猜想2.1（Yau猜想 [52]）。设 (X, Ω) 是一个紧致Calabi-Yau三维流形，并带有一个平衡类 $\mathfrak{b}_0$。设 V 是 X 上满足 (1.2) 的全纯向量丛。若 V 关于 $\mathfrak{b}_0$ 是多重稳定的，则 $(X, \Omega\ V)$ 存在 Hull-Strominger系统 (1.1) 的一个解。

如第1节所述，自然可以从两个方面强化 Yau猜想的表述。首先，猜想2.1并未说明 $\mathfrak{b}_0$ 是否等于 (1.3) 中定义的解 $\mathfrak{b}$ 的平衡类。因此，理想情况下，对猜想2.1的完整解答应能控制平衡类，从而得到一个具有 $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}$ 的 Hull-Strominger系统解。其次，在 [52], 中最初的表述里，猜想2.1的陈述并未指定 (1.1) 中的联络 ∇。在此，我们建议选取满足厄米-Yang-Mills方程 (1.4) 的 ∇，这既具有物理意义，也具有几何意义（见第1节）。

我们对 Hull-Strominger系统存在性问题的处理，在∇满足 (1.4) 的情况下，使我们考虑V_0 上的全纯向量丛结构 $T^{1,0}$ 这些结构相对于平衡类 $\mathfrak{b}$是多重稳定的。然而，对于 V和 V_0的某些特殊选择，可能存在 Hermitian-Einstein方程的解，使得 tr $R_\nabla \wedge R_\nabla =$ tr $F_h \wedge F_h$；当 X 是非 K¨ahler 流形时，这将阻碍 Bianchi 恒等式存在解。正如我们将在下一节更明确地看到的，这促使我们提出问题1.1。

注2.2. 注意，若问题1.1的答案为肯定，则特别地可得到猜想2.1的一个解，其试探形式为 (1.4)（见注5.10）。一个尚未解决的问题是：假设$_{T^{1,\ 0}}$ 的全纯切丛在 X 上是 $\mathfrak{b}$-多重稳定的，能否按照 [22, 23, 53], 的提议，将关于 ∇ 的猜想2.1（针对 g的Chern联络）归结为问题1.1。

2.2. 一般性与 $h^{0,\ _{\bar{\partial}}{}^{1}}(X) \neq 0$ 条件。本节旨在说明问题1.1陈述中的技术条件为何必要，即全纯向量丛结构 V_0以及 $h^{0,\ _{\bar{\partial}}{}^{1}}(X) \neq 0$的一般性。这些条件的依据是以下结果。

命题 2.3. 设(X, Ω)是一个带有平衡类 $\mathfrak{b}$的紧致Calabi-Yau三维流形。假设 X 不允许任何K¨ahler度量。设 $L \to X$是 X 上的一个第一Chern类 $c_1(L) = 0$ 为零的全纯线丛。设 V_0 是 $T^{1,\ 0}$ 上的一个相对于 $\mathfrak{b}$多重稳定的全纯丛结构。则$(X, \Omega\ V_0 \otimes L)$不允许存在一个具有平衡类 $\mathfrak{b}$的Hull-Strominger系统(1.1)的解，使得 ∇ 是 V_0上的某个厄米-Einstein度量 h_0 的Chern联络。

证明。假设 (g, h, ∇) 是这样一个解，其中 ∇ 是h_0的 Chern联络。设 h_L 是 L上的一个平坦度量。那么， $h_0 \otimes h_L$ 是 $V_0 \otimes L$上的一个 Hermitian-Einstein度量，因此存在一个全纯规范变换，将h 变为 $h_0 \otimes h_L$。特别地，由于 h_L 是平坦的，有

$$\operatorname{tr} F_h^2 = \operatorname{tr} F_{h_0}^2$$

因此 $dd^c\omega = 0$。由此， g 既是共形平衡的，又是多重闭的，故必为 K¨ahler（[40]），这与我们的假设矛盾。□

在一个具有 $h^{0,\ _{\bar{\partial}}{}^{1}}(X) \neq 0$的非 K¨ahler 流形 X 上，前述结果给出了连续族(V_0, V)，对于这些连续族，不存在满足试探形式 1.4 的 Hull-Strominger系统解。特别地，总可以作出非一般选择 $V = V_0$，从而阻碍解的存在。为具体起见，下面讨论两个对前述情形稍作推广的例子。

例 2.4. 设 (X, Ω) 是一个紧致Calabi-Yau三维流形，它是一个非平凡 T^2-主丛在 $K3$ 曲面 S 上的全空间，如 [23, 28] 中所述。那么， X 不是 K¨ahler 的，是平衡的，并且还满足$_{h^{0,\ _{\bar{\partial}}{}^{1}}(X) = 1}$。根据 [28, 引理 2.1], ，存在一个平衡类 $\mathfrak{b}$ ，使得 $\mathfrak{b}$-多重稳定全纯结构 V_0 的模空间 $T^{1,\ 0}$ 非空。于是，对于任意这样的 V_0，以及 X 上满足 $c_1(L_j) = 0$ 的全纯线丛 L_0、.....、 L_r，我们定义

$$V = V_0 \otimes L_0 \bigoplus (\oplus_{j=1}^{r} L_j).$$

现在仿照命题 2.3 的证明进行论证，可知 $(X, \Omega\ V)$ 不存在满足平衡类 $\mathfrak{b}$ 的系统 (1.1) 的解，其中 ∇ 是 V_0 上某个 Hermitian-Einstein度量 h_0 的 Chern联络。

下一个例子将考察幂零流形上 Hull-Strominger 系统的存在性问题，与开创性论文 [18]中的情形相同。

例2.5. 设 (X, J) 是一个复维数为 3、带有左不变复结构 J 且典范丛平凡的非 K¨ahler 紧致平衡幂零流形。回忆一下， X 微分同胚于商空间 $\Gamma\backslash G$，其中 $\Gamma\backslash G$ 是由单连通幂零李群 G 模去一个最大秩余紧格 Γ 得到的。于是，由 $[49, \text{命题 } 2.3]$, 中的分类可知， $h^{0,\,1}_{\bar\partial}(X) \neq 0$。光滑切丛是平凡的，我们将 $T^{1,\,0} \cong X \times \mathbb{C}^3$ 上的全纯结构取为全纯线丛的直和

$$V_0 = L_1^0 \oplus L_2^0 \oplus L_3^0$$

满足 $c_1(L_j^0) = 0$。考虑秩为 r 的全纯向量丛

$$V = \oplus_{j=1}^r L_j,$$

由 L_j 个满足 $c_1(L_j) = 0$ 的全纯线丛组成。那么， V_0 和 V 关于任意平衡类 $\mathfrak{b} \in H^{2,\,2}_{BC}(X, \mathbb{R})$ 都是$\mathfrak{b}$-多重稳定的。此外，关于任意平衡度量的 Hermitian-Einstein度量都是平坦的。现在仿照命题 2.3 的证明可知，对于任意给定的 $\mathfrak{b}$，$(X, \Omega\ V)$ 不存在具有平衡类 $\mathfrak{b}$ 的 Hull-Strominger系统 (1.1) 的解，使得 ∇ 是 V_0 上某个 Hermitian-Einstein度量 h_0 的 Chern联络。

可以考虑其他非一般选择的全纯向量丛，它们不允许方程组存在解，例如 $V = V_0^*$ 或$V = W \oplus W'$ 和 $V_0 = W^* \oplus W'$，其中 W和W' 是 X 上的某些多重稳定丛。我们将在下一个例子中讨论一个有趣的具体情形。

例2.6. 设 (X, Ω) 是由$X = SL(2, \mathbb{Z}[i])\backslash SL(2, \mathbb{C})$给出的 Calabi–Yau 紧致三维流形。该复流形具有一个由 $SL(2, \mathbb{C})$上的左不变形式诱导的整体标架$T^{*}_{1,\,0}$，它们满足结构方程

$$d\omega_1 = \omega_{23}, \quad d\omega_2 = -\omega_{13}, \quad d\omega_3 = \omega_{12}$$

并且 $\Omega = \omega_{123}$。具体而言，该标架与由 $T_{[1]}X = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$中元素的左平移给出的标架对偶:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 1 & -i/2 \end{pmatrix}.$$

我们固定厄米度量的平衡类 $\mathfrak{b}$

$$\omega_0 = \frac{i}{2}(\omega_{1\overline{1}} + \omega_{2\overline{2}} + \omega_{3\overline{3}}).$$

设 W 是 $X \times \mathbb{C}^2$ 上的全纯向量丛，其 Dolbeault 算子定义为

$$\overline{\partial}_W = \overline{\partial} + \sum_{i=1}^{3} \omega_{\overline{i}} \otimes X_i$$

并令 $V = W^{\oplus 4}$。可积性 $\overline{\partial}_W^2 = 0$ 归结为这样一个事实：对于该算子的矩阵值 (0,1)-形式，我们使用了上述 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的标准表示。

类似地，令 V_0 为 $X \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上的全纯向量丛，其 Dolbeault 算子由 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的伴随表示诱导：

$$\overline{\partial}_{V_0} = \overline{\partial} + \sum_{i=1}^{3} \omega_{\overline{i}} \otimes [X_i, \cdot].$$

根据定义， V_0 是通过伴随表示，与 $SL(2,\mathbb{C})$-标架主丛相关联的丛

$$\rho : SL(2,\mathbb{C}) \to GL(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})), \quad g \mapsto \mathrm{Ad}_g.$$

换言之， $V_0 \cong \mathrm{End}_0\ W$，其中 End_0 表示零迹自同态。有趣的是，可以证明 V_0 同构于$(T^{1,\ 0},\ (\nabla^B)^{0,1})$，其中 ∇^B 表示 ω_0 的Bismut联络（参见 [17]）。

接下来，我们注意到 $\mathbb{C}^2$ 上的标准厄米度量在 W 上诱导出一个厄米度量 h_W，其Chern曲率为

$$F_{h_W} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}(\omega_{1\overline{2}} - \omega_{2\overline{1}}) & \frac{1}{2}((\omega_{1\overline{3}} - \omega_{3\overline{1}}) - i(\omega_{2\overline{3}} - \omega_{3\overline{2}})) \\ -\frac{1}{2}((\omega_{1\overline{3}} - \omega_{3\overline{1}}) + i(\omega_{2\overline{3}} - \omega_{3\overline{2}})) & \frac{i}{2}(\omega_{1\overline{2}} - \omega_{2\overline{1}}) \end{pmatrix}.$$

通过直接计算可验证

$$F_{h_W} \wedge \omega_0^2 = 0.$$

因此，丛 W 是 $\mathfrak{b}$-多重稳定的， V_0 和 V也同样如此。

现在，我们考虑上述丛 V_0 和 V所满足的 Hull-Strominger系统 (1.1)，并采用试探形式 (1.4)。设 (ω', h_0, h) 是一个解，其平衡类为 $\mathfrak{b}$ （其中 ∇ 是 V_0 上 h_0 的 Chern 联络）。设 h_W 是关于 ω' 的 W 上的 Hermitian-Einstein 度量。由 Hermitian-Einstein度量的唯一性，存在一个全纯规范变换 $u \in \mathrm{Aut}(V)$，使得$uh = \tilde{h}_W^{\oplus 4}$，因此 $\mathrm{tr}_V F_h^2 = 4\mathrm{tr}_W F_{\tilde{h}_W}^2$。类似地，$h_0$ 的 Chern联络可通过全纯规范变换与联络 $\rho_* D^{h_W}$ 联系起来；后者由 $\tilde{h}_W$ 的 Chern联络 $D^{\tilde{h}_W}$ 经由 ρ 诱导。于是，我们有

$$\mathrm{tr}_{V_0} F_{h_0}^2 = \mathrm{tr}_{V_0}(\rho \circ F_{\tilde{h}_W})^2 = 4\mathrm{tr}_W F_{\tilde{h}_W}^2$$

最后一步归结为验证：

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(\rho(A)^2) = 4\mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2}(A^2), \quad A \in SL(2,\mathbb{C}).$$

因此，按照前面例子中的论证，我们得出 ω' 是 K¨ahler，这与 X 不存在 K¨ahler 度量相矛盾。

我们以一个例子结束本节，该例展示了非 K¨ahler 流形上解的存在可能面临的另一种障碍，这与 Bianchi 恒等式解的正性有关。事实上，对于这个例子，我们无法判断是否存在具有试探形式 (1.4) 的 Hull-Strominger 系统的解，并推测它可能会对问题1.1给出否定答案。

例2.7。 回到例2.5中的情形，对于一个紧Calabi-Yau幂零流形（X，其底层幂零李代数为$\mathfrak{h}_{19}^-$，在 [18, 第 8]节中讨论过。这个复流形具有一个由左不变形式诱导的整体标架$T_{1,0}^*$

满足结构方程

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = \omega_{13} + \omega_{1\overline{3}}, \quad d\omega_3 = i(\omega_{1\overline{2}} - \omega_{2\overline{1}}),$$

并且满足 $\Omega = \omega_{123}$。由左不变形式诱导的、最一般的 d-闭纯虚 (1,1)-形式在 X 上由下式给出

$$F = \pi(m\omega_{1\overline{1}} + ni(\omega_{1\overline{2}} - \omega_{2\overline{1}})),$$

对于 m、$n \in \mathbb{R}$。适当选择格后，可以证明，对于任意 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{i}{2\pi}F$ 都具有整数周期，因此根据一般理论，它是全纯厄米线丛 $(L, h) \to X$ 的 Chern联络的曲率形式。

我们固定平衡厄米形式

$$\omega = \tfrac{i}{2}(\omega_{1\overline{1}} + \omega_{2\overline{2}} + \omega_{3\overline{3}})$$

并考虑相应的平衡类 $\mathfrak{b}$。沿用前面的记号，容易看出，当 $m = 0$ 时， $c_1(L) \cdot \mathfrak{b} = 0$。因此，取整数 $n_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = 1, \ldots, r$，并取相应的线丛 L_j 如上，便得到全纯向量丛

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} L_j$$

相对于 $\mathfrak{b}$ 是多重稳定的。

我们在 T^1 上取一个全纯结构 $'$，其 Dolbeault 算子具有如下形式

$$\overline{\partial}^{\lambda}_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{ijk} X_k,$$

其中 $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ 是 $\{\omega_i\}_{i=1,2,3}$ 的对偶标架，而 $\lambda_{i,j,k}$ 是常复函数。假设 V_0 相对于 $\mathfrak{b}$ 是多重稳定的，可以证明

$$V_0 \cong L_1^0 \oplus L_2^0 \oplus L_3^0$$

对于满足 $c_1(L_i^0) = 0$ 的线丛 L_i^0。

在此设定下，我们考虑耦合常数为 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\alpha \in \mathbb{R}$ 的 Hull-Strominger系统 (1.1) 及拟设 (1.4)，也就是说，考虑三元组 $(\omega', \oplus_{j=1}^3 h_j^0, \oplus_{j=1}^r h_j)$，其中 ω' 是 X 上的 Hermitian 形式，而 $\tilde{h}_j^0$ （分别为 $\tilde{h}_j$）是 L_j^0（分别为 L_j）上的厄米度量。若存在一个解，那么显然，特别地，相对于 ω' 的 Hermitian-Einstein度量 h_j^0 是平坦的。先假设$\alpha > 0$。那么，根据 [10]（另见 [29, 命题 2.14]），任何解都必须满足 $d\omega' = 0$ 和 $F_{\tilde{h}_j} = 0$，这与我们的假设矛盾。在 $\alpha = 0$ 的情形下，根据 [40]，任何解同样都是 K¨ahler。

在 $\alpha < 0$ 的剩余情形中，我们假设三元组 $(\omega', \oplus_{j=1}^3 \tilde{h}_j^0, \oplus_{j=1}^r \tilde{h}_j)$ 满足： ω'、$F_{\tilde{h}_j}$ 和 $F_{\tilde{h}_j^0}$ 是 X 上的不变 (1, 1) 形式。由此可得 $F_{\tilde{h}_j} = F_{h_j}$ 和 $F_{\tilde{h}_j^0} = 0$，因此 Bianchi 恒等式可化简为

$$dd^c\omega' = -\alpha \sum_{j=1}^{r} F_{h_j}^2 = -2\alpha\pi^2 \sum_{j=1}^{r} n_j^2 \omega_{12\overline{12}}.$$

可以证明，前一个方程的一般解为

$$\omega' = -\frac{\alpha\pi^2}{2}(\sum_{j=1}^{r} n_j^2\omega_{3\overline{3}} + s_1 i\omega_{1\overline{1}} + s_2(\omega_{1\overline{2}} - \omega_{2\overline{1}}) + s_3 i(\omega_{1\overline{2}} + \omega_{2\overline{1}}) + \\ + s_4(\omega_{1\overline{3}} - \omega_{3\overline{1}}) + s_5 i(\omega_{1\overline{3}} + \omega_{3\overline{1}}) + s_6(\omega_{2\overline{3}} - \omega_{3\overline{2}}) + s_7 i(\omega_{3\overline{2}} + \omega_{2\overline{1}}))$$

其中 s_i 为实常数，因此，由于 $\omega_{2\overline{2}}$ 中的分量为零，可知 ω' 必然非正。这证明，对于所选的 (V, V_0)，在 Bianchi 恒等式的不变解中，不存在 Hull-Strominger系统 (1.1) 的潜在解，因为相应的 ω' 并非厄米度量。

3. Background on holomorphic Courant algebroids

3.1. 全纯 Courant 代数丛。设 X 为复流形。我们分别用 $\mathcal{O}_X$ 和 $\underline{\mathbb{C}}$ 表示全纯函数层和 $\mathbb{C}$ 值的局部常值函数层，它们定义在 X 上。我们分别用 $T^{1,0}$ 和 $T^*_{1,0}$ 表示 X 的全纯切丛和余切丛。

定义 3.1. 全纯 Courant 代数丛是一个全纯向量丛 $\mathcal{Q} \to X$，配备非退化的全纯对称双线性形式 $\langle,\rangle$、一个全纯向量丛态射 $\pi\colon\ \mathcal{Q} \to T^{1,0}$（称为锚映射），以及定义在 $\mathcal{Q}$ 的全纯截面上的 Dorfman 括号，即一个层的 $\underline{\mathbb{C}}$-模同态

$$[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{Q} \otimes_{\underline{\mathbb{C}}} \mathcal{Q} \to \mathcal{Q},$$

对于 u、v、$w \in \mathcal{Q}$ 和 $\phi \in \mathcal{O}_X$，满足：

(D1): $[u,[v,w]] = [[u,v],w] + [v,[u,w]]$, (D2): $\pi([u,v]) = [\pi(u)\ \pi(v)]$,(D3): $[u,\phi v] = \pi(u)(\phi)v + \phi[u,v]$, (D4): $\pi(u)\ \langle v,\ w\rangle = \langle[u,v],\ w\rangle + \langle v,[u,w]\rangle$, (D5): $[u,v] + [v,u] = \mathcal{D}\langle u,\ v\rangle$,

其中 $\mathcal{D}$: $\mathcal{O}_X \to \mathcal{Q}$ 表示外微分、自然映射 $\pi^*\colon\ T^*X \to \mathcal{Q}^*$ 以及由 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 给出的同构 $\mathcal{Q}^* \to \mathcal{Q}$ 的复合。

我们将全纯 Courant 代数丛 $(\mathcal{Q}, \langle,\rangle, [\cdot,\cdot], \pi)$ 简记为$\mathcal{Q}$。利用同构 $\langle,\ \rangle\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}^*$，我们得到一个全纯向量丛复形

$$T^*_{1,0} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{Q} \xrightarrow{\pi} T^{1,0}. \tag{3.1}$$

定义3.2。若锚映射 π 满射，则称 $\mathcal{Q}$ 是传递的。 (3.1)

给定 X上的传递全纯Courant代数丛 $\mathcal{Q}$，存在一个与之相关的全纯李代数丛

$$A_{\mathcal{Q}} := \mathcal{Q}/(\operatorname{Ker}\pi)^{\perp}.$$

此外，全纯子丛

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{Q}} := \operatorname{Ker}\pi/(\operatorname{Ker}\pi)^{\perp} \subset A_{\mathcal{Q}}$$

继承了二次李代数全纯丛的结构。因此，丛 $\mathcal{Q}$ 构成了全纯向量丛的一个双重扩张

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T^*_{1,0} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{Q} \longrightarrow A_{\mathcal{Q}} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{ad}_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\pi^*} A_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\pi} T^{1,0} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

传递全纯Courant代数丛的分类已在 [34, 命题 2.9]中给出，特别是在 $A_{\mathcal{Q}}$ 同构于某个全纯主丛的 Atiyah algebroid 的情形下。这种形式的全纯 Courant 代数丛称为弦型。我们不会在此直接用到这一复杂的分类，因此不作详细说明，而是简要讨论由此得到的基本例子。

例 3.3. 设 G 为一个复李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。我们假设 $\mathfrak{g}$ 带有一个非退化双不变对称双线性形式

$$\langle , \rangle : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C}.$$

设 p: $P \to X$ 为一个以 X为底空间的全纯主 G丛。考虑 P的全纯 Atiyah 李代数胚 A_P:= $T^{1,\ 0}P/G$，其括号由 $T^{1,\ 0}P$上的李括号诱导。李代数全纯丛 ad P:=Ker $dp \subset A_P$ 适合如下全纯李代数丛的短正合列

$$0 \to \mathrm{ad}\, P \to A_P \to T^{1,0} \to 0.$$

接下来，我们构造一个传递全纯 Courant 代数丛，使得 (3.2) 中的第二个序列与上述全纯李代数丛的正合序列典范同构。为此，我们假设存在如下的一对 (τ, θ): θ 是底层光滑 G丛P 上的主联络，其曲率 F_θ 满足

$$F_\theta^{0,2} = 0$$

且其 (0, 1) 部分诱导出 P上的全纯结构；同时， $\tau \in \Omega^{3,0} \oplus \Omega^{2,1}$ 是一个复三形式，满足

$$d\tau - \langle F_\theta \wedge F_\theta \rangle = 0. \tag{3.3}$$

这里，$\Omega^{p,q}$ 表示 X 上型为 (p, q) 的光滑复微分形式空间。给定这样的一对 (τ, θ)，我们定义一个全纯 Courant 代数丛$\mathcal{Q}_{P,\tau,\theta}$，其底层光滑复向量丛为

$$T^{1,0} \oplus \mathrm{ad}\, P \oplus T^*_{1,0},$$

其 Dolbeault 算子为

$$\bar\partial_0(V + r + \xi) = \bar\partial V + i_V F_\theta^{1,1} + \bar\partial^\theta r + \bar\partial \xi - i_V \tau^{2,1} + 2\left\langle F_\theta^{1,1}, r \right\rangle \tag{3.4}$$

非退化对称双线性形式

$$\langle V + r + \xi, V + r + \xi \rangle_0 = \xi(V) + \langle r, r \rangle,$$

括号，

$$[V+r+\xi, W+t+\eta]_0 = [V,W] - F_\theta^{2,0}(V,W) + \partial_V^\theta t - \partial_W^\theta r - [r,t] + i_V\partial\eta + \partial(\eta(V)) - i_W\partial\xi + i_W i_V \tau^{3,0}, + 2\left\langle \partial^\theta r, t\right\rangle + 2\left\langle i_V F_\theta^{2,0}, t\right\rangle - 2\left\langle i_W F_\theta^{2,0}, r\right\rangle,$$

以及锚映射 $\pi_0(V+r+\xi) = V$。可以验证，$\mathcal{Q}_{P,\tau,\theta}$按照定义3.2的意义构成一个传递全纯Courant代数丛（见[34, 命题 2.4]）。

注 3.4。特别要注意，条件（3.3）意味着第一庞特里亚金类消失

$$p_1(P) = 0 \in H^4_{dR}(X,\mathbb{C}), \tag{3.5}$$

其中，$p_1(P)$表示通过Chern-Weyl理论与配对 $\langle,\rangle$ 在 $\mathfrak{g}$ 上相关联的不变量。当复流形满足 $\partial\bar\partial$-引理时，条件（3.5）实际上足以构造一个弦型传递全纯Courant代数丛，如例 3.3所示（见 [34, 推论 3.6]）。

3.2. 约化。我们主要关注的全纯 Courant 代数丛，是通过约化机制从光滑范畴中的一种特殊类型的 Courant代数丛得到的。回顾一下，在光滑流形 M 上的 Courant代数丛由一个实正交丛（$E, \langle,\rangle$）、光滑截面上的括号 $[,]$，以及一个保持括号的态射 $\pi\colon E \to T := TM$构成，并满足一组类似于定义 3.1中的公理。下文中，M 上的 Courant代数丛将简记为 E。

设 E 是光滑流形 M 上的光滑 Courant 锚代数丛。我们假设 M 配备了可积复结构 J。考虑光滑复 Courant 代数丛 $E\otimes\mathbb{C}$，其 Courant 结构由对称双线性形式 $\langle,\rangle$、括号 $[\cdot,\cdot]$和锚映射 π 的 $\mathbb{C}$-线性扩张给出。接下来回顾提升的概念，它将使我们能够从 $E\otimes\mathbb{C}$ 构造一个全纯 Courant 代数丛。

定义 3.5. 设 E 是复流形 $X = (M, J)$ 上的光滑 Courant 锚代数丛。$T^{0,1}$ 到 $E\otimes\mathbb{C}$ 的提升是一个各向同性、对合的子丛 $\ell \subset E\otimes\mathbb{C}$，在锚映射 π: $E\otimes\mathbb{C} \to T\otimes\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{C}$-线性扩张下同构映射到 $T^{0,1}$。

给定从 $T^{0,1}$ 到 $E\otimes\mathbb{C}$ 的提升 ℓ，根据 [36]，我们考虑由 ℓ 给出的 $E\otimes\mathbb{C}$ 的约化，即正交丛

$$\mathcal{Q}_\ell := \ell^\perp/\ell,$$

其中，$\ell^\perp$ 是关于 $E\otimes\mathbb{C}$上的对称配对而言的 ℓ。由于 ℓ 是 $T^{0,1}$的提升，$\pi_{|\ell^\perp}$ 的核包含$T^*_{1,0}$，因此 $\mathcal{Q}_\ell$ 构成形如（3.1）的向量丛复形。$\mathcal{Q}_\ell$ 上的 Dolbeault 算子定义如下：给定 $\mathcal{Q}_\ell$的一个光滑截面 s，定义

$$\overline{\partial}^\ell_V s = [\tilde V, \tilde s] \mod \ell$$

其中 $V \in T^{0,1}$， $\tilde{V}$ 是 V 到 ℓ的唯一提升，而 $\tilde{s}$ 是 s 到 $\ell^{\perp}$的任意截面提升。$E \otimes \mathbb{C}$ 上的 Dorfman 括号满足 Jacobi 恒等式，这意味着 $\overline{\partial}^{\ell} \circ \overline{\partial}^{\ell} = 0$，并且该恒等式在 $\mathcal{Q}_{\ell}$的全纯截面上诱导出一个 Dorfman 括号。不难证明， $\mathcal{Q}_{\ell}$ 按照定义3.2（参见 [35, 命题 2.8]）定义了一个全纯 Courant 代数丛。

接下来我们将聚焦于一种特殊类型的光滑传递Courant代数丛，称为弦。这将有助于我们更明确地构造上述 $\mathcal{Q}_{\ell}$对象，并重现例 3.3中的构造。回顾一下，如果一个Courant代数丛 E 的锚映射是满射，则称其为传递的。特别地，这样的对象定义了实光滑向量丛的双重扩张

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T^* \xrightarrow{\pi^*} E \longrightarrow A_E \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \mathrm{ad}_E \longrightarrow A_E \longrightarrow T \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

这里，李代数丛 $A_E := E/(\mathrm{Ker}\,\pi)^{\perp}$ 和 $\mathrm{ad}_E = \mathrm{Ker}\ \pi/(\mathrm{Ker}\ \pi)^{\perp}$ 的定义与全纯情形相同。我们需要的基本例子如下。

例3.6. 设 K 是一个实李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。我们假设$\mathfrak{k}$ 配备了一个非退化双不变对称双线性形式

$$\langle , \rangle : \mathfrak{k} \otimes \mathfrak{k} \to \mathbb{R}.$$

设 p: $P_K \to M$是一个光滑主 K-丛，其底空间为 M。考虑Atiyah李锚丛A_{P_K}: $= TP_K/K$。李代数光滑丛 $\mathrm{ad}\ P_K$:=Ker$dp \subset A_{P_K}$ 构成如下李锚丛短正合列

$$0 \to \mathrm{ad}\, P_K \to A_{P_K} \to T \to 0.$$

接下来，我们构造一个传递的 Courant代数丛，使得 (3.2) 中的第二个序列与上述李代数丛的正合序列典范同构。为此，我们假设

$$p_1(P_K) = 0 \in H^4_{dR}(M, \mathbb{R}),$$

其中， $p_1(P)$ 表示通过切尔恩-外尔理论，根据双不变配对 $\langle , \rangle$ 与 $\mathfrak{g}$ 相关联的 P_K 的第一庞特里亚金类。于是，给定 P_K 上的一个主联络 θ，存在一个光滑实三形式 $H \in \Omega^3$，使得

$$dH - \langle F_\theta \wedge F_\theta \rangle = 0. \tag{3.7}$$

给定这样一对 (H, θ)，我们定义一个光滑 Courant 锚代数丛 $E_{P_K,H,\theta}$，其底层向量丛为

$$T \oplus \mathrm{ad}\, P_K \oplus T^*,$$

非退化对称双线性形式 $\langle , \rangle_0$，以及如例 3.3 中定义的锚映射 π_0，括号定义为

$$\begin{aligned} [V + r + \xi, W + t + \eta]_0 = [V, W] - F_\theta(V, W) + d^\theta_V t - d^\theta_W r - [r, t] \\ + L_V \eta - i_W d\xi + i_W i_V H \\ + 2\left\langle d^\theta r, t \right\rangle + 2\left\langle i_V F_\theta, t \right\rangle - 2\left\langle i_W F_\theta, r \right\rangle. \end{aligned}$$

不难看出，$E_{P_K,\ H,\ \theta}$ 定义了一个光滑的传递 Courant 代数丛，定义见上文。

例3.6中的传递 Courant代数丛属于光滑弦代数丛的范畴 [34], ，这引出了下面的定义。

定义3.7。若光滑 Courant 锚代数丛 E 在 M 上同构于例3.6中的 Courant 代数丛$E_{P_K,\ H,\ \theta}$，其中某个三元组 (P_K, H, θ) 满足 (3.7)，则称其为弦型。

此处采用的光滑 Courant代数丛同构概念是标准定义，即由保持括号和锚映射的正交丛态射给出（参见 [34, 定义2.3]）。

下面的结果明确刻画了弦型光滑 Courant代数丛上的提升。它由 [35, 引理2.15] 结合 [35, 引理5.11], 中的陈对应即可轻易推出，因此我们省略证明。为陈述该结果，我们用 $\Omega^{p,p}_{\mathbb{R}}$, 表示复流形上的实 (p,p)-形式空间。回忆一下，给定例3.6中的 Courant代数丛 E ，一对 $(\gamma,\beta)\ \in\Omega^2_{\mathbb{C}}\oplus\Omega^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{ad}\ \underline{P}_K)$ 会在 $E\otimes\mathbb{C}$上诱导一个正交自同构，其表达式为

$$(\gamma,\beta)(V+r+\xi)=V+i_V\beta+r+i_V\gamma-\langle i_V\beta,\beta\rangle-2\langle\beta,r\rangle+\xi. \tag{3.8}$$

引理 3.8（[35]）。设 X 是一个复流形。设 $E_0\ =\ E_{P_K,\ H_0,\ \theta_0}$ 为例3.6中的弦型光滑 Courant 锚代数丛。那么， $T^{0,\ 1}$ 的提升$\ell\subset E_0\otimes\mathbb{C}$ 等价于一个满足以下条件的三元组

$$(\omega,b,a)\in\Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}\oplus\Omega^2\oplus\Omega^1(\mathrm{ad}\,P_K)$$

满足

$$\begin{aligned} H_0+d^c\omega-db+2\langle a\wedge F_{\theta_0}\rangle+\langle a\wedge d^{\theta_0}a\rangle+\frac{1}{3}\langle a\wedge[a\wedge a]\rangle=0,\\ F^{0,2}_{\theta_0}+\bar\partial^{\theta_0}a^{0,1}+\frac{1}{2}[a^{0,1}\wedge a^{0,1}]=0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

更准确地说，给定满足（3.9）的（ω， b， a），该提升为

$$\ell(\omega,b,a)=\{(i\omega-b,-a)(V^{0,1}),\ V^{0,1}\in T^{0,1}\}, \tag{3.10}$$

反过来，任意提升都能唯一地表示为这种形式。特别地，令 $\theta=\theta_0+a$，等式（3.9）意味着

$$dd^c\omega+\langle F_\theta\wedge F_\theta\rangle=0,\qquad F^{0,2}_\theta=0. \tag{3.11}$$

下一个结果由 [34, 命题 2.16], 推出，给出了与提升 ℓ（ω， b， a）相关联的全纯 Courant 代数丛的显式公式。为此，我们使用恒等式

$$\ell(\omega,b,a)^\perp=\ell(\omega,b,a)\oplus(i\omega-b,-a)(T^{1,0}\oplus(\mathrm{ad}\underline{P}_K)\otimes\mathbb{C}\oplus T^*_{1,0}).$$

引理 3.9. 设 X 是一个复流形，配备了如上所述的弦型光滑 Courant 锚代数丛 E_{P_K,H_0,θ_0}，且 K 紧致。设 $\ell(\omega,b,a)$ 是如引理 3.8 中所述的 $T^{0,1}$ 的一个提升。于是，使用例 3.3 中的记号，存在一个典范同构

$$\mathcal{Q}_{\ell(\omega,b,a)}\cong\mathcal{Q}_{P,2i\partial\omega,\theta},$$

由下式给出

$$[(i\omega - b, -a)(X + r + \xi^{1,0})] \mapsto X^{1,0} + r + \xi^{1,0},$$

其中 $P = (P_K \times_K G, \theta^{0,1})$ 是由 θ 诱导的全纯主 G-丛，其中 $G = K^c$ 是 K 的复化。

3.3. Bott-Chern代数丛。引理 3.9 中得到的全纯 Courant 代数丛对应于例 3.3 中所考虑对象的一个特殊类别。例如，若 $\mathcal{Q}$ 是由弦型光滑 Courant 锚代数丛经约化得到的，则它必与 $\mathcal{Q}_{P,\tau,\theta}$ 同构，其中 $\tau = 2i\partial\omega$ 对某个 $\omega \in \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$，成立，而 θ 是将 P 约化到极大紧子群所得的 Chern联络。仿照 [32, 35]，，我们引入以下定义。

定义 3.10. 复流形 X 上的全纯 Courant 代数丛 $\mathcal{Q}$ 若与弦型光滑 Courant 锚代数丛 E 的约化 $\mathcal{Q}_\ell$ 同构，则称其为 Bott-Chern 型；这里 ℓ 是 $T^{0,1}$ 到 $E \otimes \mathbb{C}$ 的某个提升。

接下来，我们回顾固定全纯主丛 [32] 时 Bott-Chern 型全纯 Courant 代数丛的分类。设 G 是一个复约化李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。取一个非退化双不变对称双线性形式 $\langle , \rangle : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$，使得对任意紧李子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$，都有 $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{k} \rangle \subset \mathbb{R}$。设 P 是紧复流形 X 上的全纯主 G-丛，满足

$$p_1(P) = 0 \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R}), \tag{3.12}$$

其中 p_1 的定义与 (3.5) 中相同。那么，对于将 P 约化到极大紧子群 $K \subset G$ 的任意约化 h，以及相应的 Chern联络 θ^h，我们可以选取 $\omega \in \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$，使得

$$dd^c\omega + \langle F_h \wedge F_h \rangle = 0,$$

并按照例 3.3 构造 Bott-Chern代数丛 $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{P,2i\partial\omega,\theta^h}$。根据构造，$\mathcal{Q}$ 属于如下形式的全纯扩张

$$0 \longrightarrow T^*_{1,0} \longrightarrow \mathcal{Q} \xrightarrow{\rho} A_P \longrightarrow 0, \tag{3.13}$$

其中 $\rho(V + r + \xi) = \theta^h V + r$ 是一个保括号映射（$\theta^h V$表示水平提升），它诱导出李代数丛同构 $A_{\mathcal{Q}} \cong A_P$ 以及二次李代数丛同构 $\mathrm{ad}_{\mathcal{Q}} \cong (\mathrm{ad}\, P, \langle , \rangle)$。我们关注的分类是对之前所述的配对 $(\mathcal{Q}, \rho)$（我们沿用 [32]的说法，称之为 Bott-Chern代数丛）进行分类，具体通过如下交换图实现：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T^*_{1,0} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \xrightarrow{\rho} & A_P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & T^*_{1,0} & \longrightarrow & \mathcal{Q}' & \xrightarrow{\rho'} & A_P & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.14}$$

其中 φ: $\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ 是全纯 Courant 代数丛的一个同构。

考虑复流形 $H^{p,q}_A(X)$ 的 Aeppli 上同调群，定义如下

$$H^{p,q}_A(X) = \frac{\ker \partial\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p+1,q+1}(X, \mathbb{C})}{\mathrm{Im}\, \partial \oplus \overline{\partial} : \Omega^{p-1,q}(X, \mathbb{C}) \oplus \Omega^{p,q-1}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p,q}(X, \mathbb{C})}. \tag{3.15}$$

我们用 $H^{p,\ {}_A{}^p}(X,\mathbb{R}) \subset H^{p,\ {}_A{}^p}(X)$ 表示典范实结构。令 $\Omega_{cl}^{2,\ 0}$，为 X 上闭 (2,0)-形式的层，其第一上同调可描述为 [36]

$$H^1(\Omega_{cl}^{2,0}) \cong \frac{\mathrm{Ker}\ d\colon \Omega^{3,0}\oplus\Omega^{2,1}\to\Omega^{4,0}\oplus\Omega^{3,1}\oplus\Omega^{2,2}}{\mathrm{Im}\ d\colon \Omega^{2,0}\to\Omega^{3,0}\oplus\Omega^{2,1}}.$$

取代表元后，∂-算子诱导出一个良定义的线性映射

$$\partial\colon H_A^{1,1}(X,\mathbb{R})\to H^1(\Omega_{cl}^{2,0}). \tag{3.16}$$

命题3.11（[32]）。令 $\mathfrak{S}$ 为具有固定主丛 P 和二次李代数丛 $(\mathrm{ad}\,P,\langle,\rangle)$ 的、定义于 X 上的 Bott-Chern代数丛等价类集合，这些代数丛由图式 (3.14) 定义。那么，$\mathfrak{S}$ 是一个仿射空间，其对应的向量空间由 (3.16) 的像给出。特别地，若 X 是¯的一个 $\partial\partial$-流形，则只有一个等价类。

注 3.12。注意，此处考虑的同构概念比 [34], 中的更强：Courant代数丛同构 φ: $\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}'$ 可以覆盖dg：$A_P\to A_P$，其中 g是 P上的一个非平凡全纯规范变换。

注 3.13。考虑映射 $H^1(\Omega_{cl}^{2,\ 0},\ )\to H^{2,\ {}_{\bar\partial}{}^1}(X)$与 (3.16) 的复合，其中前者由 $[\tau]\to[\tau^{2,1}]$定义。该复合可解释为一个遗忘映射，其像对固定主丛 P下、作为 Bott-Chern代数丛基础结构的 Atiyah–Lie 锚代数丛 A_P 被$T^*_{1,\ 0}$ 扩张的全纯扩张进行分类。第 6 节定义 Futaki不变量时，实际上需要的正是这一较弱的结构。

4. Generalized Hermitian metrics on Bott-Chern algebroids

4.1. 广义 Hermitian 度量。接下来，我们在 Bott-Chern代数丛上引入广义 Hermitian 度量，其符号可能是不定号。我们的讨论主要遵循 [25, 30, 33]。回顾一下，弦型光滑 Courant 锚代数丛 E 上的广义度量由一个正交分解给出

$$E = V_+\oplus V_-$$

满足环境度量在 V_+ 上的限制是正定的，且 $\pi_{|V_+}: V_+\to T$ 是一个同构。回顾一下，广义度量唯一确定一个作用于 M 上的黎曼度量 g 以及E的一个各向同性分裂。特别地，它关联着一个同构 $E\cong E_{P_K,\ H,\ \theta}$，其中三形式 H和联络 θ 由条件 (3.7) 唯一确定（见例3.6）。此外，通过这一识别，我们有

$$V_+=\{V+g(V), V\in T\},\quad V_-=\{V-g(V)+r, V\in T, r\in \mathrm{ad}\,P_K\}. \tag{4.1}$$

广义度量与复几何之间的基本联系由以下定义给出。

定义 4.1. 设 X 是一个赋有弦型光滑 Courant 锚代数丛 E 的复流形。若广义度量 $E=V_+\oplus V_-$ 与 J 相容，则称其为相容的。

$$\ell=\{e\in V_+\otimes\mathbb{C},\ \pi(e)\in T^{0,1}\}\subset E\otimes\mathbb{C}$$

是 $T^{0,\ 1}$ 的提升。

利用由广义度量确定的 E 分解，不难看出，定义 4.1 蕴含 g 是厄米的，并且

$$\ell = e^{i\omega} T^{0,1} \subset E \otimes \mathbb{C}$$

其中 $\omega = g(J,)$ 是相应的 Hermitian形式。现在应用引理 3.8，可得如下结论。

引理 4.2. 设 $X = (M, J)$ 是一个复流形，并配备了一个弦型 E 的光滑 Courant 锚代数丛。广义度量 $E = V_+ \oplus V_-$ 与 J 相容，当且仅当相应的黎曼度量 g 是厄米的，并且

$$H = -d^c \omega, \qquad F_\theta^{0,2} = 0. \tag{4.2}$$

特别地

$$dd^c \omega + \langle F_\theta \wedge F_\theta \rangle = 0.$$

给定一个相容的广义度量，考虑相应的 Bott-Chern 型全纯 Courant 代数丛 $\mathcal{Q}_\ell \cong \mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta}$ （见引理 3.9 和定义 3.10）。接下来，我们为 $\mathcal{Q}_\ell$ 找到另一种表示方式，它将自然地赋予这个丛一个可能具有不定号的厄米度量。为此，注意到 $V_+^\perp = V_-$ 意味着

$$\ell^\perp = (V_- \otimes \mathbb{C}) \oplus \ell.$$

因此，作为光滑正交丛， $\mathcal{Q}_\ell$ 与.....典范同构

$$\mathcal{Q}_\ell := \ell^\perp / \ell \cong V_- \otimes \mathbb{C}.$$

定义 4.3. 设 X 是一个复流形，配备了弦型光滑 Courant 锚代数丛 E 和一个相容的广义度量 $E = V_+ \oplus V_-$。诱导的广义厄米度量 G 定义在 $\mathcal{Q}_\ell$ 上，具体为

$$\mathbf{G}([s_1], [s_2]) = -\langle \pi_- s_1, \overline{\pi_- s_2} \rangle$$

对于 $[s_j] \in \ell^\perp / \ell$ 和 $\pi_-\colon\ \ell^\perp \to V_- \otimes \mathbb{C}$ 正交投影。

我们现在证明本节的主要结果，计算诱导的广义厄米度量 G 的 Chern 联络，并用底层的二元组 (H, θ) 表示（见引理 4.2）。我们的结果扩展了 Bismut 恒等式（见 [8, 定理 2.9]）；近期， [30] 用全纯 Courant 代数丛的语言对该恒等式作了解释。

命题 4.4. 设 $X = (M, J)$ 是一个复流形，配备了弦型光滑 Courant 锚代数丛 E 和相容的广义度量$E = V_+ \oplus V_-$。那么，通过同构 $\mathcal{Q}_\ell \cong V_- \otimes \mathbb{C}$，相关广义厄米度量 G 在 $\mathcal{Q}_\ell$ 上的 Chern联络为

$$D_V^{\mathbf{G}} s = \pi_- [\sigma_+ V, s]. \tag{4.3}$$

这里， $\sigma_+ V = V + g(V)$ 是同构 $\pi_{|V_+}\colon\ V_+ \to T$ 的逆。更明确地说，通过识别 $V_- \cong T \oplus \mathrm{ad}\ P_K$，我们有

$$D_V^{\mathbf{G}}(W + r) = \nabla_V^- W - g^{-1} \langle i_V F_\theta, r \rangle + d_V^\theta r - F_\theta(V, W), \tag{4.4}$$

其中 $\nabla^- = \nabla + \frac{1}{2} g^{-1} d^c \omega$， ∇ g的 Levi-Civita 联络。

证明。(4.3) 式右端定义了 V_-上的一个正交联络，并可按 $\mathbb{C}$-线性延拓为 $V_-\otimes\mathbb{C}$上的 G-酉联络。根据 $\mathcal{Q}_\ell$上 Dolbeault 算子的抽象定义，我们有，(4.3) 式右端的 (0,1) 部分与 $\overline{\partial}^\ell$一致。(4.4) 式由 [33,方程 (5.10)] 得出。□

在下一个结果中，我们将根据引理 3.9 中的同构 $\mathcal{Q}_\ell \cong \mathcal{Q}_{P,2i\partial\omega,\theta}$ 计算广义厄米度量 G 的显式公式。

引理 4.5. 设 X 是一个复流形，配备了一个弦型光滑 Courant 锚代数丛 E 和一个相容的广义度量 $E = V_+ \oplus V_-$。那么，由引理 3.9 诱导的厄米等距映射 $\psi\colon \mathcal{Q}_{P,2i\partial\omega,\theta} \to V_-\otimes\mathbb{C}$ 由下式给出

$$\psi(V + r + \xi) = e^{i\omega}V + r - \tfrac{1}{2}e^{-i\omega}g^{-1}\xi.$$

因此，

$$\psi^*\mathbf{G}(V + r + \xi, V + r + \xi) = g(V, \overline{V}) + \tfrac{1}{4}g^{-1}(\xi, \overline{\xi}) - \langle r, \overline{r}\rangle .$$

证明。 ψ 的公式可通过复合以下同构得到

$$\mathcal{Q}_{P,2i\partial\omega,\theta} \xrightarrow{e^{i\omega}} \mathcal{Q}_\ell \xrightarrow{\pi_-} V_-\otimes\mathbb{C}.$$

沿 ψ 对定义 (4.3) 中的 G 进行拉回是直接的。 □

注记 4.6. 根据前一个引理，G 的符号为 $(4n+2l_2, 2l_1)$，其中 (l_1, l_2) 是 $\langle,\rangle$ 的符号：$\mathfrak{k}\otimes\mathfrak{k}\to\mathbb{R}$ 以及 $n = \dim_{\mathbb{C}} X$。

4.2. 广义厄米度量的曲率。接下来，我们计算定义 4.3 中广义厄米度量 G 的曲率形式和第二Ricci曲率（见公式 (4.8)）。我们将系统地使用如下识别 $\mathcal{Q}_\ell \cong V_-\otimes\mathbb{C}$ and

$$V_- \cong T \oplus \operatorname{ad} P_K. \tag{4.5}$$

考虑 V_- 上由下式给出的（可能是不定的）度量

$$\langle V + r, V + r\rangle^0 := -\langle V - g(V) + r, V - g(V) + r\rangle = g(V, V) - \langle r, r\rangle .$$

然后，将 $\mathbb{C}$-线性地延拓 $\langle,\rangle^0$ 至 $V_-\otimes\mathbb{C}$，由定义 4.3 可知，G 由下式给出

$$\mathbf{G}(s_1, s_2) = \langle s_1, \overline{s_2}\rangle^0 .$$

由命题 4.4，Chern联络 $D^{\mathbf{G}}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性延拓的 $\langle,\rangle^0$-正交联络

$$D\colon \Omega^0(V_-) \to \Omega^1(V_-),$$

因此，要计算 $F_{\mathbf{G}} := F_{D^{\mathbf{G}}}$，只需给出 F_D 的公式。具体而言，根据分解 (4.5)，我们有

$$D_V(W + r) = \nabla^-_V W - g^{-1}\langle i_V F_\theta, r\rangle + d^\theta_V r - F_\theta(V, W).$$

为了进行计算，将 D 表示为矩阵形式会很有用：

$$D = \begin{pmatrix} \nabla^- & \mathbb{F}^\dagger \\ -\mathbb{F} & d^\theta \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbb{F} \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(T, \mathrm{ad}\ P_K))$ 是取值于 $\mathrm{Hom}(T, \mathrm{ad}\ P_K)$ 的 1-形式

$$(i_V \mathbb{F})(W) := F_\theta(V, W) \tag{4.6}$$

并且 $\mathbb{F}^\dagger \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(\mathrm{ad}\ P_K, T))$ 是相应的 $\langle , \rangle^0$-伴随算子

$$(i_V \mathbb{F}^\dagger)(r) = -g^{-1} \langle i_V F_\theta, r \rangle .$$

我们采用标准记号 R_{∇^-} 表示 ∇^- 的曲率，并用 $\nabla^{\theta,\ -}$ 表示由 θ 和 ∇^- 在 $\Lambda^2 T^* \otimes \mathrm{ad}\ P_K$ 上诱导的协变导数。特别地，

$$(\nabla_Z^{\theta,-} F_\theta)(V, W) = d_Z^\theta(F_\theta(V, W)) - F_\theta(\nabla_Z^- V, W) - F_\theta(V, \nabla_Z^- W)$$

对于 M 上的任意三个向量场 V、W、Z。

引理 4.7。D 的曲率由下式给出

$$F_D = \begin{pmatrix} R_{\nabla^-} - \mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F} & -\mathbb{I}^\dagger \\ \mathbb{I} & [F_\theta,] - \mathbb{F} \wedge \mathbb{F}^\dagger \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} i_W i_V \mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F}(Z) &= g^{-1} \langle i_W F_\theta, F_\theta(V, Z) \rangle - g^{-1} \langle i_V F_\theta, F_\theta(W, Z) \rangle , \\ i_W i_V \mathbb{I}(Z) &= (\nabla_Z^{\theta,-} F_\theta)(V, W) - F_\theta(V, g^{-1} i_Z i_W d^c \omega) + F_\theta(W, g^{-1} i_Z i_V d^c \omega), \\ i_W i_V \mathbb{F} \wedge \mathbb{F}^\dagger(r) &= F_\theta(W, g^{-1} \langle i_V F_\theta, r \rangle) - F_\theta(V, g^{-1} \langle i_W F_\theta, r \rangle). \end{aligned}$$

证明。为计算曲率，我们写作

$$D = D^0 + \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{F}^\dagger \\ -\mathbb{F} & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $D^0 = \nabla^- \oplus d^\theta$。于是，我们有

$$\begin{aligned} F_D &= F_{D_0} + d^{D_0} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{F}^\dagger \\ -\mathbb{F} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F} & 0 \\ 0 & -\mathbb{F} \wedge \mathbb{F}^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{\nabla^-} - \mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F} & (d^{\theta,-}\mathbb{F})^\dagger \\ -d^{\theta,-}\mathbb{F} & [F_\theta,] - \mathbb{F} \wedge \mathbb{F}^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $d^{\theta,\ -} : \Omega^1(\mathrm{Hom}(T, \mathrm{ad}\ P_K)) \to \Omega^2(\mathrm{Hom}(T, \mathrm{ad}\ P_K))$ 是由 ∇^- 和 θ 诱导的外协变导数。上述 $\mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F} \wedge \mathbb{F}^\dagger$ 的显式公式是代数性的，留给读者验证。至于 $d^{\theta,\ -}\mathbb{F}$，我们有

$$\begin{aligned} -i_W i_V d^{\theta,-}\mathbb{F}(Z) &= -d_V^\theta(F_\theta(W, Z)) + d_W^\theta(F_\theta(V, Z)) + F_\theta([V, W], Z) \\ &\quad + F_\theta(W, \nabla_V^- Z) - F_\theta(V, \nabla_W^- Z) \\ &= d_Z^\theta(F_\theta(V, W)) + F_\theta([V, Z], W) - F_\theta([W, Z], V) \\ &\quad + F_\theta(W, \nabla_V^- Z) - F_\theta(V, \nabla_W^- Z) \\ &= (\nabla_Z^{\theta,-} F_\theta)(V, W) + F_\theta(W, T_{\nabla^-}(V, Z)) - F_\theta(V, T_{\nabla^-}(W, Z)) \end{aligned}$$

其中 T_{∇^-} 表示 ∇^- 的挠率张量；在第二个等式中，我们使用了 Bianchi 恒等式 $d^\theta F_\theta = 0$。现在，我们的 $\mathbb{I}$ 公式可由 $T_{\nabla^-}(W, Z) = g^{-1} i_Z i_W d^c \omega$ 推出。□

接下来，我们计算广义Hermitian度量 G 的第二Ricci曲率，其定义如下：

$$S_{\mathbf{G}}\frac{\omega^n}{n} = F_{\mathbf{G}} \wedge \omega^{n-1} \tag{4.8}$$

其中 ω 是引理 4.2 中的厄米形式。与之前类似，斜厄米自同态 $S_{\mathbf{G}}$ 由联络 D 的第二Ricci曲率 S_D 的 $\mathbb{C}$-线性延拓给出。为了计算下面的 S_D ，我们需要以下技术引理。

引理 4.8. 设(M, g)是偶数维黎曼流形。设$F \in \Omega^2$ 和 $H \in \Omega^3$ 为微分形式。则 Hodge星算子满足：

$$i_V * (F \wedge *H) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} F(e_i, g^{-1}i_V i_{e_i} H)$$

对任意向量场 V以及 T的任意一组 g-标准正交标架 $e_1, \ldots, e_m$，

证明. 对于 e^i 对偶标架，有

$$*(e^i \wedge *\psi) = i_{e_i}\psi$$

对于 $\psi \in \Omega^p$，因此

$$*(e^i \wedge e^j \wedge *\psi) = (-1)^p i_{e_j} i_{e_i}\psi.$$

由双线性可得

$$*(F \wedge *H) = -\sum_{i<j} F(e_i, e_j)H(e_i, e_j, \cdot),$$

因此

$$i_V * (F \wedge *H) = -\sum_{i<j} F(e_i, e_j)H(e_i, e_j, V) = \frac{1}{2}\sum_{i} F(e_i, g^{-1}i_V i_{e_i} H).$$

□

回忆一下，引理 4.2 中厄米度量 g 的 Bismut 联络由下式给出（参见命题 4.4）

$$\nabla^B = \nabla - \tfrac{1}{2}g^{-1}d^c\omega.$$

∇ 的 Levi-Civita 联络 g。这个表达式在 $X = (M, J)$ 的切丛上定义了一个酉联络，因此它在反典范丛 $-i\rho_B$ 上诱导出一个良定义的曲率，其中 ρ_B 是 Bismut Ricci形式。具体而言，对于点处 T 的一个 g-标准正交基 $e_1, \ldots, e_{2n}$，有

$$\rho_B(V, W) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} g(R_{\nabla^B}(V, W)Je_j, e_j). \tag{4.9}$$

命题 4.9. 联络 D 的第二Ricci形式 S_D 由下式给出

$$S_D = \begin{pmatrix} -g^{-1}(\rho_B + \langle S_\theta, F_\theta\rangle) & -\mathbb{S}^\dagger \\ \mathbb{S} & [S_\theta,] \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbb{S}(V) = i_{JV}\left(- d^{\theta *} F_\theta - i_{\theta_\omega^\sharp} F_\theta + *(F_\theta \wedge *d^c\omega))\right),$$

对于 $d^{\theta *}$ d^θ 的伴随算子，以及 $\theta_\omega = Jd^*\omega$ g 的 Lee 形式。

证明。回顾第二 Ricci 形式的另一种表达式

$$S_D = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} F_D(e_j, Je_j)$$

在某点处，取 T 的一组 g-标准正交基 $e_1, \ldots, e_{2n}$。利用这一点并应用引理 4.7，我们得到

$$S_D = \begin{pmatrix} S_{\nabla^-} - \frac{1}{2}\mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F}(e_i, Je_i) & -\frac{1}{2}\mathbb{I}^\dagger(e_i, Je_i) \\ \frac{1}{2}\mathbb{I}(e_i, Je_i) & [S_\theta,] - \frac{1}{2}\mathbb{F} \wedge \mathbb{F}^\dagger(e_i, Je_i) \end{pmatrix}.$$

我们首先计算

$$g(i_{Je_i} i_{e_i} \mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F}(V), W) = \langle F_\theta(Je_i, W), F_\theta(e_i, V)\rangle - \langle F_\theta(e_i, W), F_\theta(Je_i, V)\rangle$$

将此与恒等式（参见 [31, 命题 3.21] 的证明）结合起来

$$g(R_{\nabla^-}(V_1, V_2)V_3, V_4) - g(R_{\nabla^B}(V_3, V_4), V_1, V_2) = \tfrac{1}{2} dd^c\omega(V_1, V_2, V_3, V_4) \quad (4.10)$$

以及引理 4.2，我们还得到

$$\begin{aligned} g(S_{\nabla^-}(V), W) &= \tfrac{1}{2} g(R_{\nabla^-}(e_i, Je_i)V, W) \\ &= \tfrac{1}{2} g(R_{\nabla^B}(V, W)e_i, Je_i) + \tfrac{1}{4} dd^c\omega(e_i, Je_i, V, W) \\ &= -\rho_B(V, W) - \tfrac{1}{4}\langle F_\theta \wedge F_\theta\rangle(e_i, Je_i, V, W) \\ &= -\rho_B(V, W) - \tfrac{1}{2}\langle i_{e_i} F_\theta \wedge F_\theta\rangle(Je_i, V, W) \\ &= -\rho_B(V, W) - \langle S_\theta, F_\theta(V, W)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle i_{e_i} F_\theta \wedge i_{Je_i} F_\theta\rangle(V, W) \\ &= -\rho_B(V, W) - \langle S_\theta, F_\theta(V, W)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle F_\theta(e_i, V), F_\theta(Je_i, W)\rangle \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\langle F_\theta(e_i, W), F_\theta(Je_i, V)\rangle \\ &= -\rho_B(V, W) - \langle S_\theta, F_\theta(V, W)\rangle + \tfrac{1}{2} g(i_{Je_i} i_{e_i} \mathbb{F}^\dagger \wedge \mathbb{F}(V), W), \end{aligned}$$

如所声称的。再次利用引理 4.2，特别是 $F_\theta = F^{1,\ 1}_{\theta}$，我们还得到

$$\begin{aligned} i_{Je_i} i_{e_i} \mathbb{F} \wedge \mathbb{F}^\dagger(r) &= F_\theta(Je_i, g^{-1}\langle i_{e_i} F_\theta, r\rangle) - F_\theta(e_i, g^{-1}\langle i_{Je_i} F_\theta, r\rangle) \\ &= -F_\theta(e_i, Jg^{-1}\langle i_{e_i} F_\theta, r\rangle) - F_\theta(e_i, g^{-1}\langle F_\theta(Je_i,), r\rangle) \\ &= -2F_\theta(e_i, g^{-1}\langle F_\theta(Je_i,), r\rangle) \\ &= -2F_\theta(e_i, e_j)\langle F_\theta(Je_i, e_j), r\rangle. \end{aligned}$$

最后，再次利用 $F_\theta = F^{1,\ 1}_{\theta}$ 并考虑对称性，可知最后一个表达式为零。

在计算剩余项时，我们将使用近复结构 J 的协变导数的以下标准表达式，

d^θ 的伴随算子以及 Lee 形式：

$$\begin{aligned}(\nabla_V J)W &= \frac{1}{2}g^{-1}(d\omega(V,W,\cdot) - d^c\omega(JV,W,\cdot)),\\ d^{\theta *}F_\theta &= -i_{e_i}\nabla^{\theta,g}_{e_i}F_\theta,\\ \theta_\omega(V) &= \tfrac{1}{2}d\omega(e_i,Je_i,V).\end{aligned}$$

其中 $\nabla^{\theta,\,g}$ 是关于 Levi-Civita 联络∇和 θ的协变导数。结合式 (4.7)，我们得出：

$$\begin{aligned}i_{Je_i}i_{e_i}\mathbb{I}(V) &= -i_{Je_i}i_{e_i}d^{\theta,-}\mathbb{F}(V)\\ &= i_{Je_i}i_{e_i}d^\theta(i_VF_\theta) - F_\theta(e_i,\nabla^-_{Je_i}V) + F_\theta(Je_i,\nabla^-_{e_i}V)\\ &= 2d^\theta_{e_i}(F_\theta(e_i,JV)) + F_\theta([e_i,Je_i],V) + 2F_\theta(Je_i,\nabla^-_{e_i}V)\\ &= 2(\nabla^{\theta,g}_{e_i}F_\theta)(e_i,JV) + 2F_\theta(\nabla_{e_i}e_i,JV) + 2F_\theta(e_i,\nabla_{e_i}JV)\\ &+ 2F_\theta(\nabla_{e_i}Je_i,V) + 2F_\theta(Je_i,(\nabla^- - \nabla)_{e_i}V) + 2F_\theta(Je_i,\nabla_{e_i}V)\\ &= -2d^{\theta *}F_\theta(JV) + 2F_\theta((\nabla_{e_i}J)e_i,V) + 2F_\theta(Je_i,(\nabla^- - \nabla)_{e_i}V)\\ &+ 2F_\theta(e_i,(\nabla_{e_i}J)V)\\ &= -2d^{\theta *}F_\theta(JV) - 2F_\theta(\theta^\sharp_\omega,JV) + F_\theta(e_i,g^{-1}i_{JV}i_{e_i}d^c\omega).\end{aligned}$$

该结论由引理 4.8 得出。 □

5. Coupled Hermitian-Einstein metrics

5.1. 耦合Hermitian-Einstein系统。接下来，我们引入 Hull-Strominger系统 (1.1) 的一个放宽版本，其灵感源自命题 4.9。我们的定义将给出一类自然的广义Hermitian度量 G，它们满足以下厄米-爱因斯坦型方程

$$F_{\mathbf{G}} \wedge \omega^{n-1} = 0. \tag{5.1}$$

请注意，在前述表达式中，经典度量 g 既出现在广义Hermitian度量 G 的定义中，也出现在迹算子$\wedge\omega^{n-1}$中。鉴于式 (5.1) 中这一额外的非线性，我们将这些新方程称为耦合Hermitian-Einstein系统（参见 [30]）。

我们沿用第 3.3 节中的设定，并简要回顾如下。设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的复约化李群。固定一个非退化、双不变的对称双线性型 $\langle,\rangle$：$\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$，使得对于任意紧李子代数 $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{g}$，都有 $\langle\mathfrak{k},\mathfrak{k}\rangle\subset\mathbb{R}$。

定义 5.1. 设 X 是一个复维数为 n 的复流形，配备一个全纯主 G-丛 P。若一对 (g,h) 中， g 是 X 上的厄米度量，且 h 是将 P 约化到一个极大紧子群所得的约化，则称其满足耦合Hermitian-Einstein系统：

$$\begin{aligned}F_h\wedge\omega^{n-1} &= \frac{z}{n}\omega^n,\\ \rho_B + \langle z, F_h\rangle &= 0,\\ dd^c\omega + \langle F_h\wedge F_h\rangle &= 0,\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中， F_h 是 h 的 Chern联络的曲率， ρ_B 是度量 g 的 Bismut-Ricci形式，而 z 是李代数 $\mathfrak{k}$ 中的一个中心元素。

注释5.2. 假设 X 是紧致的，则系统 (5.2) 会施加一些显然的必要约束，即

$$2\pi c_1(X) + [\langle z, F_h\rangle] = 0 \in H^2_{dR}(X,\mathbb{R}), \qquad p_1(P) = 0 \in H^{2,2}_{BC}(X,\mathbb{R}),$$

其中， $[\langle z, F_h\rangle]$ 是通过特征标$\langle z$与 P 相关联的 Chern-Weyl不变量， $\rangle$: $\mathfrak{k} \to \mathbb{R}$，而 p_1 的定义同 (3.5)。此外，根据 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理在 Hermitian流形 [9, 41, 43],上的推广，丛 P 必须关于 g 的共形类中唯一的 Gauduchon度量斜率多稳定（参见 [4]）。

本节致力于研究耦合Hermitian-Einstein系统 (5.2) 的基本结构性质。我们的首要目标是证明，任意一个解都会导出 Bott-Chern代数丛上的一个广义Hermitian度量 G，并且该度量满足 Hermitian-Einstein方程 (5.1)。

下面的引理可与经典结果相比较：该结果指出，若背景度量为 K¨ ahler 度量，则 Hermitian-Yang-Mills 联络是 Yang-Mills 联络。Hermitian几何中的对应结论显然为专家所熟知，但由于我们未能在文献中找到相关结果，故在此给出完整证明。

引理 5.3. 设 (X, g) 是复维数为 n en- 的厄米流形，赋有一个全纯主 G-丛 P。设 h 是 P 上的一个 Hermitian-Einstein约化，即满足

$$F_h \wedge \omega^{n-1} = \frac{z}{n}\omega^n$$

其中 z 是李代数 $\mathfrak{k}$ 中的一个中心元素。则满足以下方程

$$d^{h*}F_h + i_{\theta^\sharp_\omega} F_h - *(F_\theta \wedge *d^c\omega) = 0.$$

证明. 曲率形式 F_h 满足

$$F_h = F_h^{1,1} \qquad d^h F_h = 0$$

而厄米-爱因斯坦条件可以改写为

$$\frac{1}{2}\sum_i F_h(e_i, Je_i) = z.$$

利用上述条件，我们得到

$$\begin{aligned}
d^{h*}F_h(V) &= -(\nabla^{h,g}_{e_i}F_h)(e_i,V)\\
&= -d^h_{e_i}(F_h(Je_i,JV)) + F_h(\nabla_{e_i}e_i,V) + F_h(e_i,\nabla_{e_i}V)\\
&= -d^hF_h(e_i,Je_i,JV) - d^h_{Je_i}(F_h(e_i,JV)) + d^h_{JV}(F_h(e_i,Je_i))\\
&- F_h([e_i,Je_i],JV) + F_h([e_i,JV],Je_i) - F_h([Je_i,JV],e_i)\\
&+ F_h(\nabla_{e_i}e_i,V) + F_h(e_i,\nabla_{e_i}V)\\
&= (\nabla^{h,g}_{Je_i}F_h)(Je_i,V)) + F_h(\nabla_{Je_i}Je_i,V) + F_h(Je_i,\nabla_{Je_i}V)\\
&- F_h([e_i,Je_i],JV) + F_h([e_i,JV],Je_i) - F_h([Je_i,JV],e_i)\\
&+ F_h(\nabla_{e_i}e_i,V) + F_h(e_i,\nabla_{e_i}V)\\
&= -d^{h*}F_h(V) + 2F_h(\nabla_{e_i}e_i,V) + 2F_h(e_i,\nabla_{e_i}V)\\
&- 2F_h(\nabla_{e_i}Je_i,JV) + 2F_h(\nabla_{e_i}JV,Je_i) + 2F_h(\nabla_{JV}Je_i,e_i).
\end{aligned}$$

合并项 $d^{h*}F_h(V)$，并再次利用 $F_h = F^{1,1}_h$，可得

$$d^{h*}F_h(V) = -F_h((\nabla_{e_i}J)e_i,JV) + F_h((\nabla_{e_i}J)V,Je_i) + F_h(\nabla_{JV}Je_i,e_i).$$

利用基本的对称性性质，可知

$$F_h(\nabla_{JV}Je_i,e_i) = F_h(e_j,e_i)g(\nabla_{JV}Je_i,e_j) = 0,$$

结合命题 4.9 证明中关于 ∇J 和 θ_ω 的公式，可知

$$\begin{aligned}
F_h((\nabla_{e_i}J)e_i,JV) &= F_h(\theta^\sharp_\omega,V),\\
F_h((\nabla_{e_i}J)V,Je_i) &= \tfrac{1}{2}F_h(e_i,g^{-1}i_Vi_{e_i}d^c\omega),
\end{aligned}$$

由引理 4.8，结论即得。 □

在下一个结果中，我们刻画广义Hermitian度量所满足的Hermitian-Einstein方程 (5.1)。

引理 5.4. 设 X 是一个复流形，其上赋有全纯主 G 丛 P。假设一对 (g,h) 满足 Bianchi 恒等式

$$dd^c\omega + \langle F_h\wedge F_h\rangle = 0. \tag{5.3}$$

考虑 Bott-Chern代数丛$\mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$（见例 3.3）所对应的全纯向量丛，并在其上赋予引理 4.5 中的（可能是不定的）厄米度量 G。那么，G 满足 Hermitian-Einstein方程 (5.1) 当且仅当以下条件成立

$$\begin{aligned}
[S_h,] &= 0,\\
d^{h*}F_h + i_{\theta^\sharp_\omega}F_h - *(F_\theta\wedge *d^c\omega) &= 0,\\
\rho_B + \langle S_h,F_h\rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中 S_h 表示 h 的第二Ricci曲率。

证明。根据构造，G 的 Chern联络是第 4.2 节中 $\langle,\rangle^0$-正交联络 D 的 $\mathbb{C}$-线性延拓。于是，证明可由命题 4.9 直接推出。□

从 (5.4) 可以直接看出，广义Hermitian度量的厄米-爱因斯坦条件 (5.1) 对二次李代数 $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ 的选取非常敏感。例如，当 $\mathfrak{g}$ 为阿贝尔的时，第一个条件显然成立。特别地，当 $\mathfrak{g} = \{0\}$ 时，引理 5.4 恢复了多重闭厄米度量的命题 4.4] [30, 。另一方面，当 $\mathfrak{g}$ 为半单的时，第一个方程推出 $S_h = 0$ ，因此根据引理 5.3，第二个方程也成立。此外，在这种情况下有 $\rho_B = 0$, 因此方程 (5.4) 与 Bianchi 恒等式 (5.3) 合起来等价于满足 $z = 0$ 的耦合 Hermitian-Einstein系统 (5.2)。

我们现在可以证明本节的第一个主要结果。

命题 5.5. 设 X 是一个复流形，其上赋有全纯主 G 丛 P。假设 (g, h) 是耦合的 Hermitian-Einstein 系统 (5.2) 的解。考虑全纯向量丛 $\mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$ ，其上赋有引理 4.5 中的（可能是不定的）厄米度量 G。那么，G 满足 Hermitian-Einstein方程 (5.1)。

证明. 结合定义 5.1、引理 5.3 和引理 5.4，证明显而易见。□

最后，本节将给出耦合 Hermitian-Einstein 系统的一种黎曼刻画。特别地，我们将看到，方程 (5.2) 的解对应于弦代数丛上一类自然的广义 Ricci平坦度量，并且与异质超引力存在有趣的关联，这进一步说明了研究它们的意义（参见注 5.7 和注 5.8）。

命题 5.6. 设 X 是一个复流形，配备全纯主 G-丛 P。假设 (g, h) 满足耦合厄米-爱因斯坦方程组 (5.2)。那么，(g, h) 满足方程

$$\begin{aligned} \mathrm{Rc} - \frac{1}{4}H^2 + \langle i_{e_i}F_\theta, i_{e_i}F_\theta\rangle + \tfrac{1}{2}L_{\varphi^\sharp}g = 0,\\ d^*H - d\varphi + i_{\varphi^\sharp}H = 0,\\ d^{\theta *}F_\theta + i_{\varphi^\sharp}F_\theta + *(F_\theta \wedge *H) = 0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 Rc 是黎曼里奇张量，且

$$H = -d^c\omega, \qquad \theta = \theta^h, \qquad \varphi = \theta_\omega. \tag{5.6}$$

证明. 我们已经看到，厄米-爱因斯坦条件蕴含 (5.5) 中的最后一个方程。因此，只需证明 (5.2) 蕴含

$$\begin{aligned} \rho_B^{1,1}(\cdot, J\cdot) &= \mathrm{Rc} - \frac{1}{4}H^2 + \langle i_{e_i}F_\theta, i_{e_i}F_\theta\rangle + \langle z, F_\theta(J,)\rangle + \tfrac{1}{2}L_{\varphi^\sharp}g,\\ \rho_B^{2,0+0,2}(\cdot, J\cdot) &= -\frac{1}{2}(d^*H - d\theta_\omega + i_{\varphi^\sharp}H). \end{aligned} \tag{5.7}$$

为验证这一点，我们将使用以下一般公式，这些公式适用于任意厄米流形（见 [40, 命题 3.1]）：

$$\begin{aligned} \mathrm{Rc}(V, W) &= \mathrm{Rc}_B(V, W) - \tfrac{1}{2}d^*d^c\omega(V, W) + \tfrac{1}{4}g(d^c\omega(V, e_i), d^c\omega(W, e_i)),\\ \rho_B(V, W) &= -\mathrm{Rc}_B(V, JW) - (\nabla^B_V\theta_\omega)JW + \tfrac{1}{4}dd^c\omega(V, W, e_i, Je_i), \end{aligned}$$

其中 Rc_B 表示 ∇^B的 Ricci张量。为证明 (5.7) 中的第一个恒等式，我们现在计算

$$\begin{aligned}\rho_B^{1,1}(V,JW) &= \tfrac{1}{2}\left(\rho_B(V,JW)-\rho_B(JV,W)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{Rc}_B(V,W)+\mathrm{Rc}_B(JV,JW)+(\nabla^B_V\theta_\omega)W+(\nabla^B_{JV}\theta_\omega)JW\\ &+\tfrac{1}{4}dd^c\omega(V,JW,e_i,Je_i)-\tfrac{1}{4}dd^c\omega(JV,W,e_i,Je_i))\\ &= \tfrac{1}{2}(2\,\mathrm{Rc}(V,W)-\tfrac{1}{2}g(d^c\omega(V,e_i,),d^c\omega(W,e_i,))\\ &-\tfrac{1}{2}\langle F_\theta\wedge F_\theta\rangle(V,JW,e_i,Je_i)+L_{\theta^\sharp_\omega}g(V,W))\\ &= \Big(\mathrm{Rc}-\tfrac{1}{4}H\circ H+\langle i_{e_i}F_\theta,i_{e_i}F_\theta\rangle+\langle z,F_\theta(J\cdot,\cdot)\rangle+\tfrac{1}{2}L_{\theta^\sharp_\omega}g\Big)(V,W)\end{aligned}$$

其中我们记

$$H\circ H=\sum_{i,j}H(e_i,e_j,\cdot)H(e_i,e_j,\cdot)$$

第三个等号则用到了恒等式（见 [40, 公式 (3.23)]）

$$\mathrm{Rc}_B(W,JV)=-\mathrm{Rc}_B(V,JW)-(\nabla^B_V\theta_\omega)JW-(\nabla^B_W\theta_\omega)JV.$$

类似地，（5.7）中的第二个恒等式由下式得出

$$\begin{aligned}\rho_B^{2,0+0,2}(V,JW) &= \tfrac{1}{2}(\rho_B(V,JW)+\rho_B(JV,W))\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{Rc}_B(V,W)+(\nabla^B_V\theta_\omega)W+\tfrac{1}{4}dd^c\omega(V,JW,e_i,Je_i)\\ &-\mathrm{Rc}_B(JV,JW)-(\nabla^B_{JV}\theta_\omega)JW+\tfrac{1}{4}dd^c\omega(JV,W,e_i,Je_i))\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{Rc}_B(V,W)-\mathrm{Rc}_B(W,V)+(\nabla^B_V\theta_\omega)W-(\nabla^B_W\theta_\omega)V)\\ &= \tfrac{1}{2}(d^*d^c\omega(V,W)+d\theta_\omega(V,W)+\theta_\omega(g^{-1}d^c\omega(V,W)))\\ &= -\tfrac{1}{2}(d^*H-d\theta_\omega+i_{\theta^\sharp_\omega}H)(V,W).\end{aligned}$$

□

注 5.7. 考虑例3.6中的光滑弦代数丛。应用[27, 引理 7.1], ，方程（5.5）等价于广义度量 V_+ （见（4.1））的广义Ricci张量 Ric^+ 消失，其中散度算子根据 φ作适当选择。因此，根据前面的结果，耦合Hermitian-Einstein系统（5.2）的任意解都是广义Ricci平坦。注意，（5.5）修正了 [25, 27]中广义Ricci张量公式的一些错误。

注 5.8. 当 $\varphi=df$ 对于某个光滑函数 f时，方程（5.5）与数学物理文献中所谓的异质超引力运动方程一致（例如参见 [18]）。

5.2. 与 Hull-Strominger系统的关系。接下来我们研究耦合Hermitian-Einstein系统 (5.2) 与 Hull-Strominger系统 (1.1) 之间的关系。我们的构造要求联络 ∇ 具有试探形式 (1.4)，因此在讨论中我们将默认这一条件成立。我们将采用 Hull-Strominger系统的一种抽象定义，见[32, 定义 24], ，该定义适用于任意维数。

设 X 是一个维数为 n 、带有全纯体积形式 Ω 的紧复流形。设 V_0 和 V_1 是 X 上的全纯向量丛，满足

$$ch_2(V_0) = ch_2(V_1) \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R}). \tag{5.8}$$

定义 5.9. 我们称三元组 (g, h_0, h_1) 满足耦合常数为 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的 Hull-Strominger 系统，其中 g 是 X 上的厄米度量， h_j 是 V_j 上的厄米度量， $j = 0, 1$，若

$$\begin{aligned} F_{h_0} \wedge \omega^{n-1} &= 0, \\ F_{h_1} \wedge \omega^{n-1} &= 0, \\ d(\|\Omega\|_\omega \omega^{n-1}) &= 0, \\ dd^c\omega - \alpha \operatorname{tr} F_{h_0} \wedge F_{h_0} + \alpha \operatorname{tr} F_{h_1} \wedge F_{h_1} &= 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

注 5.10. 取 $n = 3, V = V_1$ ，并假设 V_0 与 $T^{1,0}$ 作为光滑复向量丛同构。那么，具有 Hermitian-Yang-Mills 试探形式 (1.4) 的 (1.1) 的任意解，都会确定一个具有 $V_0 = (T^{1,0}, \nabla^{0,1})$ 和 $h_0 = g$ 的 (5.9) 的解。反过来，(5.9) 的任意解都会给出一个 (1.1) 的解，其中 ∇ 满足 (1.4)；该解通过在 $T^{1,0}$ 上施加复规范变换，将 Chern联络D^{h_0} 拉回，并令 g 变为 h_0 （以获得一个与 g 相容的联络）来定义。注意，方程 (1.1) 在这一变换下是不变量。

在下一个结果中，我们建立它与耦合Hermitian-Einstein系统之间的关系。

命题5.11. 假设 $(X, \Omega\ V_0, V_1)$ 存在一个带耦合常数 α 的 Hull-Strominger系统 (5.9) 的解 (g, h_0, h_1)。记 P 为 $V_0 \oplus V_1$, $h = h_0 \oplus h_1$ 的分裂标架的全纯主 G丛，并考虑配对 $\langle , \rangle : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ ，其由下式诱导:

$$\langle , \rangle := -\alpha \operatorname{tr}_{V_0} + \alpha \operatorname{tr}_{V_1} . \tag{5.10}$$

那么，(g, h) 是带有 $z = 0$ 的耦合Hermitian-Einstein系统 (5.2) 的解。

证明. 根据构造，只需证明 g 满足 $\rho_B = 0$。这是因为 ρ_B 与 ∇^B 在反典范丛中诱导的联络的曲率成比例（见 (4.9)），再结合 (5.9) 中的第二个方程即可得出（见 $[26,$ 命题3.6$]$）：

$$\nabla^B(\|\Omega\|_\omega^{-1}\Omega) = 0.$$

□

前述结果的关键结论是，Hull-Strominger系统 (5.9) 的任意解都唯一确定一个可能是不定的厄米-爱因斯坦广义度量。证明由命题 5.5 和命题 5.11 得出。

命题5.12. 假设（X，Ω V_0, V_1）存在 Hull-Strominger系统（5.9）的一组解（g, h_0, h_1）。考虑全纯向量丛

它是 Bott-Chern代数丛 $\mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$的底层向量丛，其中 P 和 h 如命题 5.11 所述。那么，引理 4.5 中的（可能是不定的）厄米度量 G 满足 Hermitian-Einstein方程（5.1）。

注5.13。引理 5.4 和命题5.12 应与 De la Ossa、Larfors 和 Svanes 在 [13, 推论 1], 中给出的原始结果进行比较；他们指出，Hull-Strominger系统在微扰理论的所有阶上都等价于 (5.1)。

6. Futaki invariants

6.1. Aeppli类与Futaki不变量。本节介绍一族特征，它们阻碍 Hull-Strominger 系统 (5.9) 的解的存在。这源于一种一般形式体系，它将一个不变量与任何具有矩映射解释的方程相关联（例如参见 [2]）；我们将其称为 Futaki不变量，以类比于经典不变量：后者阻碍 K¨ahler 流形 [24] 上 K¨ ahler-Einstein 度量的存在。

我们的 Futaki 不变量的构造，源于将这一一般框架应用于全纯向量丛上的 Hermite-Einstein 方程；其新颖之处在于，我们允许解 G 具有任意符号。由于这在文献中并非完全标准，我们给出适用于本文情形的详细说明。设 X 是一个紧复流形，并赋有全纯向量丛 $\mathcal{Q}$。回顾一下，选择 $\mathcal{Q}$ 上的伪Hermitian度量 G，唯一确定一个相容的 Chern联络 $D^{\mathbf{G}}$ ，使得 $(D^{\mathbf{G}})^{0,1}$ 是 $\mathcal{Q}$ 上的典范 Dolbeault 算子。

引理 6.1. 设 X 是一个紧复流形， $\mathcal{Q}$ 是 X 上的全纯向量丛，且 $\mathfrak{b} \in H^{n-1,\ n-1}_{BC}(X,\mathbb{R})$ 是一个 Bott–Chern类。那么，映射

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{b}} : H^0(X, \operatorname{End}\ \mathcal{Q}) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{6.1}$$

$$\varphi \mapsto \int_X \operatorname{tr}(\varphi F_{\mathbf{G}}) \wedge \nu \tag{6.2}$$

定义了李代数 $H^0(X, \operatorname{End}\ \mathcal{Q})$ 的一个特征标，它既不依赖于 $\mathfrak{b} = [\nu]$ 的代表元 ν，也不依赖于 $\mathcal{Q}$ 上伪Hermitian度量 G 的选取。特别地， $\mathcal{F}_{\mathfrak{b}} = 0$ 若 $\mathcal{Q}$ 上存在伪Hermitian度量 G，且 X 上存在平衡Hermitian度量 ω，满足 $\mathfrak{b} = [\omega^{n-1}]$，并且是下列 Hermitian-Einstein 方程的解

$$F_{\mathbf{G}} \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

证明。设 $\tilde{\nu}, \nu \in \Omega^{n-1,\ n-1}$ 是定义在 X 上的 d-闭形式，使得

$$\tilde{\nu} - \nu = \overline{\partial}\partial\alpha$$

对某个 $\alpha \in \Omega^{n-2,\ n-2}$成立。于是，根据类型分解和 $D^{\mathbf{G}}$的 Bianchi 恒等式，我们有

$$\int_X \operatorname{tr}(\varphi F_{\mathbf{G}}) \wedge \overline{\partial}\partial\alpha = \int_X d(\operatorname{tr}(\varphi F_{\mathbf{G}}) \wedge \partial\alpha) - \int_X \operatorname{tr}(\overline{\partial}\varphi F_{\mathbf{G}}) \wedge \partial\alpha = 0,$$

根据假设，这两个加项分别独立地消失。现在，令 G 和 G′ 为 $\mathcal{Q}$上的任意伪Hermitian度量。由于 G 和 G′ 均

非退化，因此存在 $\mathcal{Q}$上的光滑复规范变换 g，使得 $G'(\cdot,\cdot) = G(g\cdot,\cdot)$。于是，它们的陈曲率满足关系

$$F_{\mathbf{G}'} = F_{\mathbf{G}} + \overline{\partial}(g^{-1}\partial^{\mathbf{G}}g)$$

并且由类型分解以及 φ的全纯性可知

$$\begin{aligned}\int_X \mathrm{tr}(\varphi(F_{\mathbf{G}'} - F_{\mathbf{G}})) \wedge \nu &= \int_X \mathrm{tr}(\varphi\overline{\partial}(g^{-1}\partial^{\mathbf{G}}g)) \wedge \nu \\ &= \int_X d(\mathrm{tr}(\varphi(g^{-1}\partial^{\mathbf{G}}g)) \wedge \nu) - \int_X \mathrm{tr}(\overline{\partial}\varphi \wedge (g^{-1}\partial^{\mathbf{G}}g)) \wedge \nu \\ &+ \int_X \mathrm{tr}(\varphi(g^{-1}\partial^{\mathbf{G}}g)) \wedge \overline{\partial}\nu \\ &= 0.\end{aligned}$$

最后，对于 $\varphi, \varphi' \in H^0(X, \mathrm{End}\ \mathcal{Q})$，利用 $[F_{\mathbf{G}}, \varphi'] = \bar{\partial}\partial^{\mathbf{G}}\varphi'$，可得

$$\int_X \mathrm{tr}([\varphi, \varphi']F_{\mathbf{G}}) \wedge \nu = -\int_X \mathrm{tr}(\varphi\bar{\partial}\partial^{\mathbf{G}}\varphi') \wedge \nu = -\int_X d(\mathrm{tr}(\varphi\partial^{\mathbf{G}}\varphi')) \wedge \nu = 0.$$

□

利用对偶同构 $H^{n-1,n-1}_{BC}(X)^* \cong H^{1,1}_A(X)$，引理 6.1 中的 Futaki 不变量（其中 $\mathfrak{b}$ 沿着 $H^{n-1,n-1}_{BC}(X)$ 变化）可以更简洁地写成一个取值于 a $H^{1,1}_A(X)$ 的特征标

$$\mathcal{F} : H^0(X, \mathrm{End}\ \mathcal{Q}) \to H^{1,1}_A(X) \colon \varphi \mapsto [\mathrm{tr}(\varphi F_{\mathbf{G}})].$$

为了将引理 6.1 应用于 Hull-Strominger系统 (5.9)，我们假设紧复流形 X 带有一个全纯体积形式 Ω。设 V_0 和 V_1 是 X 上的全纯向量丛，满足 (5.8)。记 P为 $V_0 \oplus V_1$的分裂标架全纯主丛。固定$\alpha \in \mathbb{R}$，并考虑结构群李代数上的配对 $\langle , \rangle : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$，其定义如 (5.10)。于是有

$$p_1(P) = 0 \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R}), \tag{6.3}$$

并且根据命题3.11，X 上以主丛 P和二次李代数丛(ad $P, \langle , \rangle$)为结构的 Bott-Chern代数丛等价类集合是一个非空仿射空间 $\mathfrak{S}^\alpha$，其模型空间为.....的像

$$\partial \colon H^{1,1}_A(X, \mathbb{R}) \to H^1(\Omega^{2,0}_{cl}). \tag{6.4}$$

考虑有限维复李代数族

$$\mathfrak{H}^\alpha \to \mathfrak{S}^\alpha,$$

其中，$\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}^\alpha$ 上的纤维由向量丛 $\mathcal{Q}_\mathfrak{s}$的全纯规范变换群的李代数给出

$$\mathfrak{H}^\alpha_\mathfrak{s} := H^0(X, \mathrm{End}\ \mathcal{Q}_\mathfrak{s}).$$

然后，应用引理 6.1，可得一族以 $H^{1,1}_A(X)$ 为值的特征

$$\mathcal{F}^\alpha \colon \mathfrak{H}^\alpha \longrightarrow H^{1,1}_A(X). \tag{6.5}$$

定理 6.2. 假设 $(X, \Omega\ V_0, V_1)$ 存在 Hull-Strominger系统 (5.9) 的一个解 (g, h_0, h_1)，其耦合常数为 $\alpha \in \mathbb{R}$，且具有平衡类

$$\mathfrak{b} = [\|\Omega\|_\omega \omega^{n-1}] \in H^{n-1,n-1}_{BC}(X, \mathbb{R}).$$

那么，存在 $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}^\alpha$ 使得 $\langle \mathcal{F}^\alpha_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{b} \rangle = 0$。

证明。考虑与解 (g, h_0, h_1) 相关联的 Bott-Chern代数丛 $Q_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$，其定义如例 3.3，其中 $h = h_0 \oplus h_1$。记其同构类为$\mathfrak{s} = [Q_{P,2i\partial\omega,\theta^h}] \in \mathfrak{S}^\alpha$。于是，由命题5.12可知，引理 4.5 中的不定厄米度量 G 满足厄米-爱因斯坦方程 (5.1)，因此应用引理 6.1 可得 $\langle \mathcal{F}^\alpha_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{b} \rangle = 0$。□

备注 6.3。按照 [35]，，我们预期李代数族 $\mathfrak{H}^\alpha$ 在参数上全纯依赖；具体而言，限制在任意具有固定实弦类 σ 的轨迹 $\mathfrak{S}^\alpha_\sigma \subset \mathfrak{S}^\alpha$ 上时亦然。

作为定理 6.2 的直接应用，我们得到第1节中陈述的定理1.2。若全纯切丛 $T^{1,0}$（配备标准全纯结构）相对于某个平衡类 $\mathfrak{b} \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R})$ 是多重稳定的，我们预计定理 6.2 也给出了关于存在满足 $\nabla = D^g$ 的方程 (1.1) 的解的障碍。

作为定理 6.2 的推论，要否定问题1.1 中针对 Calabi-Yau 三维流形情形的 Yau猜想强版本，只需找到一个元组 $(X, \Omega\ V)$、$\alpha \in \mathbb{R}$ 以及一个平衡类 $\mathfrak{b} \in H^{2,2}_{BC}(X, \mathbb{R})$，使得 V 是 $\mathfrak{b}$-多重稳定的，并且

$$\langle \mathcal{F}^\alpha_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{b} \rangle \neq 0, \qquad \forall \mathfrak{s} \in \mathfrak{U}^0,$$

其中，$\mathfrak{U}^0$ 表示在 V_0 的模空间中某个稠密开子集上弦代数丛相对族的限制。

¯当 Calabi-Yau流形 X 满足 $\partial\partial$-引理时，空间 $\mathfrak{S}^\alpha$退化为一个点（见命题3.11）。在这种情况下，我们得到一个唯一的 Futaki不变量 $\mathcal{F}^\alpha_0$，它阻碍解的存在；该不变量可视为全纯丛 P的经典 Futaki 不变量的弦论版本。基于此，我们预计 $\mathcal{F}^\alpha_0$ 能为解决问题1.1提供有用工具，尤其是在通过合流变换和翻转得到的 Calabi-Yau流形的情形下。

注 6.4. 由命题 5.5 和引理 6.1 可得定理 6.2 的一个更强版本。例如，设 P 是紧复流形 X 上的全纯主丛，且该流形存在耦合Hermitian-Einstein系统（5.2）的一个解 (g, h)。设 $\tilde{g}$ 是 g的共形类中的一个 Gauduchon度量。那么，若 $\tilde{g}$ 是平衡的，则 $\mathcal{F}_{\mathfrak{b}} = 0$，其中$\mathfrak{b} = [\tilde{\omega}^{n-1}]$。

6.2. 通过锚定端同态得到显式公式。接下来，我们的目标是证明定理 6.2 中 Futaki不变量的一个显式公式。为此，我们进一步利用与方程 (5.9) 中最后一个方程的一个解相关联的 Bott-Chern代数丛 $\mathcal{Q}$ 的结构。

我们固定 P，它与 (X,Ω) 上的一对全纯向量丛 V_0 和 V_1 相关联，如第6.1节所述。考虑与以下方程的一个解相关联的 Bott-Chern代数丛 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$（见例 3.3）：

$$dd^c\omega + \langle F_h \wedge F_h\rangle = 0, \tag{6.6}$$

其中 $h = h_0 \oplus h_1$ 和 $\langle,\rangle$ 如 (5.10) 中所示，由 $\alpha \in \mathbb{R}$的选取确定。我们将 $\Lambda^2\mathcal{Q} \subset$End $\mathcal{Q}$ 记为$\mathcal{Q}$的正交端同态丛，即满足

$$\langle\varphi\cdot,\cdot\rangle_0 + \langle\cdot,\varphi\cdot\rangle_0 = 0.$$

定义 6.5. 若存在 $\phi \in \Gamma$(End $T^{1,\ 0}$) 使得，则称元素 $\varphi \in \Gamma(\Lambda^2\ \mathcal{Q})$ 为 $\mathcal{Q}$的锚定端同态

$$\pi \circ \varphi = \phi \circ \pi. \tag{6.7}$$

在下一个结果中，我们通过将 $\mathcal{Q}$ 底层的光滑复向量丛与 $T^{1,\ 0} \oplus$ ad $P \oplus T^{*}_{1,\ 0}$ 相识别（见例 3.3），给出锚定端同态的显式刻画。

引理 6.6. 设 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$ 为与 (6.6) 的一个解相关联的 Bott-Chern代数丛。设 φ 为 $\mathcal{Q}$的锚定端同态。那么，存在 $\phi \in \Gamma$(End $T^{1,\ 0}$)、 $b \in \Omega^{2,\ 0}$、 $\sigma \in \Gamma(\Lambda^2adP)$ 斜正交，以及由 φ唯一确定的 $\alpha \in \Omega^{1,0}$(ad P)，使得

$$\varphi = \varphi(\phi,\alpha,\sigma,b) := \begin{pmatrix} \phi & 0 & 0 \\ \alpha & \sigma & 0 \\ b & -2\langle\alpha,\cdot\rangle & -\phi^* \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

反过来，任意上述元组 $(\phi, b, \sigma, \alpha)$ 都通过公式 (6.8) 定义了 $\mathcal{Q}$ 的一个锚定端同态φ。

证明。证明可直接由 [25, 第 3 节.1] 得出。 □

接下来的结果将刻画 (6.8) 中 φ 的全纯性条件 $\partial_0\varphi = 0$，其中 ∂_0 表示例 3.3 中的 Dolbeault 算子。

引理 6.7. 设 $\mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}_{P,2i\partial\omega,\theta^h}$ 为与 (6.6) 的一个解相关联的 Bott-Chern代数丛。设 $\varphi = \varphi(\phi,\alpha,\sigma,b)$ 是 $\mathcal{Q}$ 的一个锚定端同态。那么， φ 是全纯的，当且仅当满足以下条件

$$\begin{aligned} \overline{\partial}\phi &= 0 \\ \overline{\partial}\sigma &= 0 \\ \overline{\partial}\alpha + \sigma(F_h) - F_h(\phi\cdot,\cdot) &= 0 \\ \overline{\partial}b + \phi\lrcorner(2i\partial\omega) - 2\langle\alpha\wedge F_h\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

其中

$$i_{Y^{1,0}}i_{V^{1,0}}(\phi\lrcorner(2i\partial\omega)) = i_{Y^{1,0}}i_{\phi(V^{1,0})}(2i\partial\omega) + i_{\phi(Y^{1,0})}i_{V^{1,0}}(2i\partial\omega)$$

证明。采用引理 6.6 中的记号，证明可由以下内容得出

$$(\overline{\partial}_0\varphi)(V+\xi+r) = \overline{\partial}_0(\varphi(V+\xi+r)) - \varphi(\overline{\partial}_0(V+\xi+r))$$

使用由 (3.4) 给出的 $\overline{\partial}_0$ 表达式。要求该表达式对任意 V、 ξ 和 r 均为零，等价于上述方程。□

注 6.8. 满足 $\phi=\sigma=0$ 的方程 (6.9) 的解空间为

$$S_0=\{(b,\alpha)\mid \overline{\partial}b-2\langle\alpha\wedge F_h\rangle=0\,, b\in\Omega^{2,0},\ \alpha\in H^0(X,\Omega^{1,0}(\mathrm{ad}\ P))\}.$$

若我们定义（参见 [34,命题 4.6]）

$$\delta_P: H^0(X,\Omega^{1,0}(\mathrm{ad}\ P))\longrightarrow H^{2,1}_{\overline{\partial}}(X)\colon \alpha\mapsto[2\langle\alpha\wedge F_h\rangle],$$

空间 S_0 适合短正合列

$$0\to H^{2,0}_{\overline{\partial}}(X)\to S_0\to\ker\delta_P\to 0$$

特别地，若 $h^{2,0}_{\overline{\partial}}(X)>0$，或者若 $h^0(\Omega^{1,0}(\mathrm{ad}\ P))>h^{2,1}_{\overline{\partial}}(X)$，则 $\mathcal{Q}$ 具有全纯锚定端同态。

注 6.9. 假设 X 满足 $\partial\bar\partial$-引理。那么，对于任意 $s\in H^0(X,\mathrm{ad}\ P)$，我们可以如下构造由 (6.8) 定义的全纯锚定自同态 $\varphi=\varphi(\phi,\alpha,\sigma,b)$：令

$$\phi=0\ ,\ \alpha=\partial^h s\ ,\ \sigma=[s,\cdot].$$

现在，我们有

$$\bar\partial\langle\partial^h s\wedge F_h\rangle=\langle\bar\partial\partial^h s\wedge F_h\rangle=\langle[F_h,s]\wedge F_h\rangle=-\langle s\wedge[F_h\wedge F_h]\rangle=0,$$

因此，根据 $\partial\bar\partial$-引理，存在 $b\in\Omega^{2,0}$ 使得

$$\overline{\partial}b=2\langle\partial^h s\wedge F_h\rangle,$$

因为右端是 ∂-恰当且 d-闭的。

接下来，我们讨论定理 6.2 中 $\mathcal{Q}$ 的全纯锚定端同态对应的 Futaki不变量的计算。为此，给定 X 上的一对厄米度量 g 和 g_0、$\gamma\in\Gamma(\mathrm{End}\,T\otimes\mathbb{C})$，以及 $\tau\in\Omega^{2,}$，记

$$\mathrm{tr}_{g,g_0}\gamma:=\frac{1}{2}g(\gamma Je_j^0,e_j^0),\qquad \Lambda_{\omega_0}\tau=\frac{1}{2}\tau(e_j^0,Je_j^0),$$

对于 T 的任意一组 g_0-正交标准基 $e_1^0,\dots,e_{2n}^0$，其中我们使用爱因斯坦求和约定，对重复指标求和。

命题 6.10. 考虑与 (6.6) 的一个解 (ω,h) 相关联的 Bott-Chern代数丛 $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$，其中 ω 为正，且配对由 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的 (5.10) 诱导。设 $\varphi=\varphi(\phi,\alpha,\sigma,b)$ 是 $\mathcal{Q}$ 的全纯锚定端同态，且 $\mathfrak{b}=[\omega_0^{n-1}]\in H^{n-1,\ n-1}_{BC}(X,\mathbb{R})$ 是一个平衡类。那么，引理 6.1 中 Futaki 特征的取值为

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}^\alpha(\varphi),\mathfrak{b}\rangle=&-\int_X(\mathrm{tr}_{g,g_0}R_{\nabla^B}+\langle\Lambda_{\omega_0}F_h,F_h\rangle)(e_k,\phi^{*_g}e_k^{0,1}-\phi e_k^{1,0})\frac{\omega_0^n}{n}\\&-\int_X\left\langle\mathrm{tr}_{g,g_0}R^{0,2}_{\nabla^B},b\right\rangle_g\frac{\omega_0^n}{n}\\&+\int_X\left(\mathrm{tr}_{\mathrm{ad}\,P}(\sigma[\Lambda_{\omega_0}F_h,\cdot])+\langle\sigma F_h(e_j^0,e_k),F_h(Je_j^0,e_k)\rangle\right)\frac{\omega_0^n}{n}\\&+2\int_X\left\langle\alpha(e_k),\Lambda_{\omega_0}\nabla^{h,-}_{e_k}F_h+F_h(Je_j^0,g^{-1}d^c\omega(e_j^0,e_k,\cdot))\right\rangle\frac{\omega_0^n}{n}\end{aligned}\tag{6.10}$$

对于任意选取的 T 的 g-正交基 $e_1,\dots,e_{2n}$ 和 g_0-正交基 $e_1^0,\dots,e_{2n}^0$。

证明。考虑由引理 4.5 定义的同构 $\psi\colon \mathcal{Q}_{P,2i\partial\omega,\theta^h} \to T\otimes\mathbb{C}\oplus \mathrm{ad}\ P$，即

$$\psi(V+r+\xi) = V - \tfrac{1}{2}g^{-1}\xi + r.$$

则 $\tilde{\varphi} := \psi\circ\varphi\circ\psi^{-1}$ 由下式给出

$$\tilde{\varphi}(V+r) = \phi(V^{1,0}) - \phi^{*_g}(V^{0,1}) - \tfrac{1}{2}g^{-1}i_{V^{1,0}}b + g^{-1}\langle\alpha, r\rangle + \sigma(r) + i_{V^{1,0}}\alpha$$

其中 $\phi^{*_g}(V^{0,1}) = g^{-1}g(V^{0,1},\phi\cdot)$。由引理 6.1 和公式 (4.8)，只需计算

$$\operatorname{tr}\tilde{\varphi}S_{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\tilde{\varphi}F_{\mathbf{G}}(e_j^0, Je_j^0).$$

为此，利用 $\varphi = \varphi(\phi,\alpha,\sigma,b)$ 关于 ϕ、α、σ 和 b 线性依赖这一点，我们可以唯一地分解为

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_\phi + \tilde{\varphi}_b + \tilde{\varphi}_\alpha + \tilde{\varphi}_\sigma,$$

使得 $\tilde{\varphi}_\phi$ 仅依赖于 ϕ，其余项也类似。现在，记 $\pi_{1,0}\colon T\otimes\mathbb{C}\to T^{1,0}$ 为自然投影，由引理 4.7 可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\tilde{\varphi}_\phi F_{\mathbf{G}}(e_j^0, Je_j^0) &= \operatorname{tr}_{T\otimes\mathbb{C}}\phi\circ\pi_{1,0}(R_{\nabla^-}(e_j^0,Je_j^0) - \mathbb{F}^\dagger\wedge\mathbb{F}(e_j^0,Je_j^0))\\
&\quad - \operatorname{tr}_{T\otimes\mathbb{C}}\phi^{*_g}\circ\pi_{0,1}(R_{\nabla^-}(e_j^0,Je_j^0) - \mathbb{F}^\dagger\wedge\mathbb{F}(e_j^0,Je_j^0))\\
&= g(R_{\nabla^-}(e_j^0,Je_j^0)e_k, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0})\\
&\quad - \left\langle F_h(Je_j^0, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0}), F_h(e_j^0, e_k)\right\rangle\\
&\quad + \left\langle F_h(e_j^0, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0}), F_h(Je_j^0, e_k)\right\rangle\\
&= \tfrac{1}{2}dd^c\omega(e_j^0, Je_j^0, e_k, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0})\\
&\quad + g(R_{\nabla^B}(e_k, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0})e_j^0, Je_j^0)\\
&\quad - \left\langle F_h(Je_j^0, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0}), F_h(e_j^0, e_k)\right\rangle\\
&\quad + \left\langle F_h(e_j^0, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0}), F_h(Je_j^0, e_k)\right\rangle\\
&= -2\operatorname{tr}_{g,g_0} R_{\nabla^B}(e_k, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0})\\
&\quad - 2\left\langle \Lambda_{\omega_0}F_h, F_h(e_k, \phi^{*_g}e_k^{0,1} - \phi e_k^{1,0})\right\rangle,
\end{aligned}$$

其中，在第三个和第四个等式中，我们分别使用了 (4.10) 和 (6.6)。类似地，

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\tilde{\varphi}_b F_{\mathbf{G}}(e_j^0, Je_j^0) &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}_{T\otimes\mathbb{C}} g^{-1}b\circ\pi_{1,0}(R_{\nabla^-}(e_j^0,Je_j^0) - \mathbb{F}^\dagger\wedge\mathbb{F}(e_j^0,Je_j^0))\\
&= -\tfrac{1}{2}b(R_{\nabla^-}(e_j^0,Je_j^0)e_k, e_k) + \tfrac{1}{2}b(g^{-1}\left\langle F_h(Je_j^0,\cdot), F_h(e_j^0,e_k)\right\rangle, e_k)\\
&\quad - \tfrac{1}{2}b(g^{-1}\left\langle F_h(e_j^0,\cdot), F_h(Je_j^0,e_k)\right\rangle, e_k)\\
&= -\tfrac{1}{2}g(R_{\nabla^B}(e_k,e_m)e_j^0, Je_j^0)b(e_m,e_k)\\
&\quad + \tfrac{1}{2}b(g^{-1}\left\langle F_h(e_j^0,\cdot), F_h(e_j^0,e_k)\right\rangle, Je_k)\\
&\quad - \tfrac{1}{2}b(g^{-1}\left\langle F_h(e_j^0,\cdot), F_h(Je_j^0,e_k)\right\rangle, e_k)\\
&= -2\left\langle \operatorname{tr}_{g,g_0} R^{0,2}_{\nabla^B}, b\right\rangle_g,
\end{aligned}$$

并且，使用引理 4.7 中的记号，

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\tilde{\varphi}_\alpha F_{\mathbf{G}}(e_j^0, Je_j^0) &= 2\left\langle \alpha(e_k), \mathbb{I}(e_j^0, Je_j^0)e_k\right\rangle \\ &= 4\left\langle \alpha(e_k), \Lambda_{\omega_0}\nabla^{h,-}_{e_k^0} F_h\right\rangle + 4\left\langle \alpha(e_k), F_h(Je_j^0, g^{-1}d^c\omega(e_j^0, e_k, \cdot))\right\rangle\end{aligned}$$

最后，取 ad P 的基 $\{r_k\}$ 和 $\{\tilde{r}_k\}$，使得 $\langle r_k、\ \tilde{r}_j\rangle = \delta_{kj}$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\tilde{\varphi}_\sigma F_{\mathbf{G}}(e_j^0, Je_j^0) &= \operatorname{tr}_{\mathrm{ad}\,P}\sigma\circ([F_h(e_j^0, Je_j^0), \cdot] - \mathbb{F}\wedge\mathbb{F}^\dagger(e_j^0, Je_j^0)) \\ &= \left\langle \tilde{r}_k, \sigma([F_h(e_j^0, Je_j^0), r_k])\right\rangle \\ &\quad - \left\langle \tilde{r}_k, \sigma F_h(Je_j^0, g^{-1}\left\langle F_h(e_j^0, \cdot), r_k\right\rangle)\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \tilde{r}_k\sigma F_h(e_j^0, g^{-1}\left\langle F_h(Je_j^0, \cdot), r_k\right\rangle)\right\rangle \\ &= 2\operatorname{tr}_{\mathrm{ad}\,P}\sigma([\Lambda_{\omega_0}F_h, \cdot] \\ &\quad - \left\langle \tilde{r}_k, \sigma F_h(Je_j^0, e_k)\right\rangle\left\langle F_h(e_j^0, e_k), r_k\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \tilde{r}_k, \sigma F_h(e_j^0, e_k)\right\rangle\left\langle F_h(Je_j^0, e_k), r_k\right\rangle \\ &= 2\operatorname{tr}_{\mathrm{ad}\,P}\sigma([\Lambda_{\omega_0}F_h, \cdot] + 2\left\langle \sigma F_h(e_j^0, e_k), F_h(Je_j^0, e_k)\right\rangle.\end{aligned}$$

□

6.3. 代数丛视角。本节中，我们转换视角，将 Hull-Strominger系统视为在 Calabi-Yau流形 (X, Ω) 上为固定的 Bott-Chern代数丛 $\mathcal{Q}$ 定义的一种典范几何。这是 [32], 采用的方法，其中证明了这些方程可以通过膨胀子泛函得到变分解释。为简化记号，我们暂且采用主丛的形式体系。我们固定一个全纯主 G-丛 P，其定义在 X 上。在此设置下， h 表示 P 到极大紧子群 $K\subset G$ 的约化，而 θ^h 表示相应的 Chern联络。基本思想由以下定义给出:

定义 6.11. 设 $\mathcal{Q}$ 是 Calabi-Yau 流形 (X, Ω) 上的 Bott-Chern代数丛，其主丛为 P，二次李代数丛为 $(\mathrm{ad}\,P, \langle,\rangle)$。那么，若一对 (ω, h) 满足以下方程，其中 ω 是 X 上的厄米形式，且 h 如前所述，我们称其为 $\mathcal{Q}$ 上的度量:

$$dd^c\omega + \langle F_h\wedge F_h\rangle = 0,$$

若存在 Bott-Chern代数丛的同构

$$\mathcal{Q}_{P, 2i\partial\omega, \theta^h} \cong \mathcal{Q},$$

其中 $\mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\omega,\ \theta^h}$ 的定义同例 3.3。此外，若 (ω, h) 满足以下条件，我们称其在 $\mathcal{Q}$ 上满足 Hull-Strominger系统:

$$\begin{aligned}F_h\wedge\omega^{n-1} &= 0, \\ d(\|\Omega\|_\omega\omega^{n-1}) &= 0.\end{aligned} \tag{6.11}$$

请注意，在给定的 $\mathcal{Q}$上是否存在厄米度量，先验而言是一个困难的问题（参见例2.7 和 [32, 命题3.15]）。不失一般性，我们可以假设，对于满足$dd^c\tau_0 + \langle F_{h_0}\wedge F_{h_0}\rangle = 0$的一对 (τ_0, h_0)，有$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{P,\ 2i\partial\tau_0,\ \theta^{h_0}}$。这里， τ_0 是 X 上的一个实(1,1)形式，但它未必

正定。于是，(ω, h)在 $\mathcal{Q}$ 上构成度量的条件可以更明确地写为

$$db = 2i\partial\omega - 2i\partial\tau_0 + 2\langle a \wedge F_{h_0}\rangle + \langle a \wedge d^{\theta^{h_0}} a\rangle + \frac{1}{3}\langle a \wedge [a \wedge a]\rangle,$$

对于 $a = \theta^h - \theta^{h_0} \in \Omega^{1,0}(\mathrm{ad}\ P)$ 以及某个 $b \in \Omega^{2,0}$。

我们的下一个结果给出了在给定的 Bott-Chern代数丛上 Hull-Strominger系统解存在性的一个障碍。

定理 6.12. 设 $\mathcal{Q}$ 是 Calabi-Yau流形 (X, Ω) 上的 Bott-Chern代数丛。考虑由引理 6.1 构造的相关 Futaki不变量

$$\mathcal{F} : H^0(X, \mathrm{End}\ \mathcal{Q}) \to H^{1,1}_A(X)$$

若存在 Hull-Strominger系统 (6.11) 在 $\mathcal{Q}$ 上的一个解，其平衡类为 $\mathfrak{b} \in H^{n-1,n-1}_{BC}(X, \mathbb{R})$，则可得

$$\langle \mathcal{F}, \mathfrak{b}\rangle = 0.$$

证明。证明与定理 6.2 的证明相同，依据命题5.12和引理 6.1 得出。□

回顾一下，给定的 Bott-Chern代数丛对应一个实 Aeppli类 $\Sigma_{\mathcal{Q}}(\mathbb{R})$ 的仿射空间（见 [32, 定义 3.20]），其模型空间为 (3.16) 的核。第一作者与 Rubio、Shahbazi 和 Tipler 共同提出的猜想是：在每个 Aeppli类上，Hull-Strominger 的解在 $\mathcal{Q}$ 的自同构意义下应当是唯一的（参见 [32,附录 A]）。如果这一猜想成立，便可得到一个定义良好的映射

$$\Sigma_{\mathcal{Q}}(\mathbb{R}) \supset U \longrightarrow \{\mathfrak{b} \mid \langle \mathcal{F}, \mathfrak{b}\rangle = 0\} \subset H^{n-1,n-1}_{BC}(X, \mathbb{R})$$

它定义在容许解的 Aeppli类所构成的轨迹 $U \subset \Sigma_{\mathcal{Q}}(\mathbb{R})$ 上。一个有趣的开放问题是，先前的（猜想中的）映射能否延拓到 $\Sigma_{\mathcal{Q}}(\mathbb{R})$。这样便能得到一个更直观的、与 Futaki不变量相关的障碍，其定义基于给定的 Bott-Chern代数丛以及所选的一个 Aeppli类。

References

[1]L. ´Alvarez-C´onsul，Andoni De Arriba de La Hera 和 M. Garcia-Fernandez，《齐性 Hopf 曲面上的 (0,2) 镜像对称》，《国际数学研究通知》（2023），doi.org/10.1093/imrn/rnad016。[2] L. ´Alvarez-C´onsul，M. Garcia-Fernandez 和 O. Garc´ıa-Prada，《K ¨ahler 度量与 Yang-Mills 联络的耦合方程》，《几何与拓扑》17（2013）2731–2812。[3] L. ´Alvarez-C´onsul，M. Garcia-Fernandez 和 R. Tellez，《高阶陈对应》，即将出版。[4] B. Anchouche 和 I. Biswas，《紧致 K ¨ahler 流形上多重稳定主丛的爱因斯坦-厄米联络》，《美国数学杂志》123 (2)（2001）207–228。[5] B. Andreas 和 M. Garcia-Fernandez，《通过 Calabi-Yau三维流形上的稳定丛求解 Strominger系统》，《数学物理通讯》315 (1)（2012）153–168。[6] A. De Arriba de La Hera，《超对称顶点代数与 Killing旋量》，博士论文，西班牙马德里康普顿斯大学（2023）。[7] A. Ashmore、C. Strickland-Constable、D. Tennyson、D. Waldram，《通过广义几何研究异质背景：矩映射与模空间》，《高能物理学杂志》2020 71（2020）。

[8] J.-M. Bismut，《数学年刊》289 (1986) 681–699。[9] N.P. Buchdahl，紧复曲面上的Hermitian-Einstein联络与稳定向量丛，《数学年刊》280 (1988) 625–684。[10] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, E. Witten，超弦真空构型，《核物理B》258 (1) (1985) 46–74。[11] T. C. Collins, S. Picard, and S.-T. Yau，合流变换中的切丛稳定性，arXiv:2102.11170 (2021)。[12] ———, Kähler类平方中的Strominger系统，arXiv:2211.03784(2022)。[13] X. De la Ossa, M. Larfors, and E. E. Svanes，异质结构与瞬子联络的限制，Nigel Hitchin 70 岁生日会议论文集。《几何与物理：第二卷：Nigel Hitchin 纪念文集》(2018)。[14] X. De la Ossa and E. E. Svanes，联络、场重定义与异质超引力，《高能物理学杂志》2014 12 (2014)。[15] S.K. Donaldson，复代数曲面上的反自对偶Yang–Mills联络与稳定向量丛，《伦敦数学学会会刊》50 (1985) 1–26。[16] T. Fei，广义Calabi-Gray几何与异质超弦，《国际华人数学家大会》2017 (2020) 261–282。[17] T. Fei, S. T. Yau，复李群及其商空间上的Strominger系统不变解，《数学物理通讯》338 (3) (2014) 1183–1195。[18] M. Fernández, S. Ivanov, L. Ugarte, R. Villacampa，具有非零通量和常数膨胀子的非Kähler异质弦紧化，《数学物理通讯》288 (2009) 677–697。[19] ∂∂R. Friedman，一般Clemens流形的 ∂∂-引理，《纯粹与应用数学季刊》15 (4) (2019) 1001–1028。[20] J.-X. Fu, J. Li and S.-T. Yau，在若干非Kähler Calabi-Yau三维流形族上构造平衡度量，《微分几何杂志》90 (2012) 81–129。[21] J. Fu, J. Xiao，Kähler流形的Kähler锥与平衡锥之间的关系，《数学进展》263 (2014) 230–252。[22] J.-X. Fu and S.-T. Yau，受弦理论启发的一类Monge-Ampère型方程，《复分析与几何通讯》15 (2007) 29–76。[23] J.-X. Fu and S.-T. Yau，非Kähler流形上带通量的超弦理论与复Monge-Ampère理论，《微分几何杂志》78 (2008) 369–428。[24] A. Futaki，Einstein Kähler度量存在性的一种障碍，《数学发明》73 (1983) 437–443。[25] M. Garcia-Fernandez，无挠广义联络与异质超引力，《数学物理通讯》332 (2014) 89–115。[26] ———, Strominger系统讲义，《Travaux Mathématiques》，特刊：ICMAT GEOQUANT 学校，卷 XXIV (2016) 7–61。[27] ———, 广义几何中的Ricci流、Killing旋量与T对偶，《数学进展》350 (2019) 1059–1108。[28] 非Kähler三维流形上的Hull-Strominger系统T对偶解，《纯粹与应用数学杂志》766 (2020) 137–150。[29] M. Garcia-Fernandez, R. Gonzalez Molina，Hull-Strominger系统的调和度量与稳定性，arXiv:2301.08236 (2023)。[30] M. Garcia-Fernandez, J. Jordan and J. Streets，非Kähler Calabi-Yau几何与多重闭流，arXiv:2106.13716 (2021)。[31] M. Garcia-Fernandez and J. Streets，广义Ricci流，《大学讲座丛书》，第76卷，美国数学会 (2021)。[32] M. Garcia-Fernandez, R. Rubio, C. S. Shahbazi, C. Tipler，全纯Courant代数丛上的典范度量，《伦敦数学学会会刊》125 (3) (2022) 700-758。[33] M. Garcia-Fernandez, R. Rubio and C. Tipler，Strominger系统的无穷小模空间与广义几何中的Killing旋量，《数学年刊》369 (2017) 539–595。[34] ———, 全纯弦代数丛，《美国数学会汇刊》373 (2020) 7347–7382。

[35] ———, 弦代数丛的规范理论，即将在《微分几何杂志》发表，arXiv:2004.11399 (2020)。[36] M. Gualtieri，广义Kähler几何，《数学物理通讯》331 (1) (2014) 297–331。[37] C. Hull，带挠率和时空超对称性的超弦紧化，载于都灵 1985 年会议论文集《超统一与额外维度》(1986) 347–375。[38] ———, 异质超弦紧化，《物理快报B辑》178 (1986) 357–364。[39]S. Ivanov，异质超对称性、反常消除与运动方程，《物理快报B辑》685 (2010) 190–196。[40] S. Ivanov, G. Papadopoulos，消失定理与弦背景，《经典与量子引力》18 (2001) 1089–1110。[41] J. Li and S.-T. Yau，非Kähler流形上的厄米–杨–米尔斯联络，《弦理论的数学方面》（加利福尼亚州圣迭戈，1986）560–573，《数学物理高级丛书》1，世界科学出版社，[42] J. Li and S.-T. Yau，带挠率的超对称弦理论的存在性，《微分几何杂志》70 (2005) 143–181。[43] M. Lübcke and A. Teleman，《小林–希钦对应》，世界科学出版公司 (1995)。[44] D. Martelli and J. Sparks，非Kähler异质旋转，《理论与数学物理进展》15 (1) (2011) 131–174。[45] M. L. Michelsohn，复几何中特殊度量的存在性，《数学学报》149 (1) (1982) 261–295。[46] D.-H. Phong, S. Picard, and X. Zhang，几何流与Strominger系统，数学杂志 288 (2017) 101–113。[47] ———, 复几何中的新曲率流，《微分几何综述》22 (2017) 331–364。[48] A. Strominger，带挠率的超弦，《核物理B》274 (1986) 253–284。[49] L. Ugarte and R. Villacampa，六维幂零流形上的平衡厄米几何，《数学论坛》27 (2) (2015) 1025–1070。[50] K. K. Uhlenbeck and S.-T. Yau，紧致Kähler流形上稳定丛存在厄米–杨–米尔斯联络的研究，《纯粹与应用数学通讯》39-S (1986) 257–293；42 (1989) 703–707。[51] S.-T. Yau，复几何：简史与未来，《中国科学A辑：数学》48 (2005) 47–60。[52] ———，异质通量与非Kähler几何 II，2006 年第四届西蒙斯数学与物理研讨会报告，石溪大学，http://insti.physics.sunysb.edu/conf/simonswork4/talks/Yau.pdf。[53] ———, 复流形上的度量，中国科学：数学 53 (3) (2010) 565–572。

(CSIC-UAM-UC3M-UCM), Ciudad Universitaria de Cantoblanco, 28049 Madrid,Spain电子邮箱：mario.garcia@icmat.es

Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UC3M-UCM), Nicolás Cabrera 13–15, Cantoblanco, 28049 Madrid, Spain电子邮箱：raul.gonzalez@icmat.es