arXiv:2303.05276v2 [math.DG] 5 Jul 2023

`反射多胞体上的蒙日-安培方程的可解性与热带仿射结构

ROLF ANDREASSON 和 JAKOB HULTGREN

Abstract. 给定一个带有高度函数的自反多胞体，我们证明了相关蒙日-安培方程可解的充要条件。当该多胞体为 Delzant 多胞体时，此方程的可解性意味着相应卡拉比-丘超曲面族满足度量 SYZ 猜想。我们阐明了热带仿射结构中奇点的位置如何由偏微分方程决定，其思路类似于自由边界问题；并给出正例与反例，展示可解性和奇异集性质中微妙的问题。此外，我们改进了关于费马族 SYZ 猜想的现有结果，证明了极限势函数的正则性。

1. Introduction

令 Y为由自反多胞体 $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$定义的环面簇，其中$M$ 是 Y和 $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$的特征格。令 $d \geq 1$ 并假设 $\dim Y = d+1$。固定一个高度函数 $h\colon \Delta \cap M \to \mathbb{Z}$，使得对于任意 $m \in \Delta \cap M \setminus \{0\}$，均有 $h(0) = 0 < h(m)$，由此得到 Y中的一族超曲面

$$X = \{(x,t) \in Y \times \mathbb{C}^* : \sum_{m \in \Delta \cap M} t^{h(m)} f_m(x) = 0\}$$

其中，对于每个 $m \in \Delta \cap M$， f_m 是与 m 相关联的 $\mathbb{T}^{d+1}$-不变截面。随着 $t \to 0$，该族的纤维 $X_t = \{x \in Y : (x,t) \in X\}$ 退化为 Y 中的环面边界。当 Y 光滑时，这种收敛的微分几何方面正是镜像对称中著名的 SYZ 猜想 [SYZ96] 的研究主题。为每个这样的 X_t 赋予由 Y 的典范极化确定的卡拉比-丘结构后，度量 SYZ 猜想指出，当 t 足够小时， X_t 的很大一部分都允许一个特殊拉格朗日 $\mathbb{T}^d$ 纤维化。该纤维化的底空间预期可自然地与多面体的边界相识别

$$\Delta_h^\vee := \{n \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, n\rangle \leq h(m), \text{ for all } m \in \Delta \cap M\}.$$

特殊拉格朗日 $\mathbb{T}^d$-纤维化与 Monge-Amp`ere 方程密切相关，这些思想至少可以追溯到 [Hit97]。除此之外，这些思想还构成了 Kontsevich-Soibelman 猜想的基础，该猜想涉及

Date: 2023年7月6日。

X_t 的 Gromov-Hausdorff 极限（参见 [GW00, KS01, Leu05]）。近年来，Y. Li [Li22a, Li20] 的研究成果使 Monge-Amp`ere 方程成为 SYZ 猜想的核心。概括而言，[Li22a, Li20]将度量 SYZ 猜想归结为 Monge-Amp`ere 方程的解所具有的结构性质。在一般情形下，这涉及非阿基米德 Monge-Amp`ere 方程，而所寻求的结构性质是一种微妙的正则性条件。在环面情形中，相关的 Monge-Amp`ere 方程是定义在 $\Delta_h^\vee$的开面上的经典实 Monge-Amp`ere 方程，所寻求的结构性质是向 $N_{\mathbb{R}}$延拓的性质。更确切地说，令 $\mathcal{P}(\Delta)$ 表示 $N_{\mathbb{R}}$ 上满足以下条件的凸函数 Ψ

$$\sup_{n\in N_{\mathbb{R}}} |\Psi(n) - \sup_{m\in\Delta\cap M} \langle m,n\rangle| < \infty.$$

注意，根据经典环面几何，$\mathcal{P}(\Delta)$ 对应于 Y 上反典范线丛的环面不变连续半正度量（例如参见 [BB13]）。我们用 A 和 B 表示 Δ 和 $\Delta_h^\vee$ 的边界，并用 A° 和 B° 表示 Δ 和 $\Delta^\vee$ 的各面相对内部的并集。集合 A° 和 B° 从 $M_{\mathbb{R}}$ 和 $N_{\mathbb{R}}$ 继承了热带仿射结构（见第 3 节）。这些热带仿射结构在 A° 和 B° 上诱导出典范的整数型“勒贝格型”测度 μ_M，ν_N。如果 $\Delta_h^\vee$ 的一个面为 τ，其相对内部为 τ°，且 $\Psi\in\mathcal{P}(\Delta)$，那么 $\Psi|_{\tau^\circ}$ 关于该热带仿射结构是凸的，因此我们可以在 τ° 上得到良定义的 Monge-Amp`ere 测度 $\mathrm{MA}(\Psi|_{\tau^\circ})$。

为了利用环境托里克簇和 Li [Li22a, Li20] 中的方法，为 X 建立度量 SYZ 猜想，需要一个解 $\Psi\in\mathcal{P}(\Delta)$ 来满足 Monge-Amp`ere 方程

$$\mathrm{MA}\left(\Psi|_{B^\circ}\right) = c\nu_N \tag{1}$$

其中 $c=\mu_M(A)/\nu_N(B)$ 是由 Δ和 h确定的常数。我们的主定理给出了此类解存在的充要条件。该充要条件适用于数据 $(\Delta,\ h,\ \nu)$，其中 ν 是一个总质量为 $\mu_M(A)$ 的一般正测度，用以替代 (1) 的右端；该条件以从 μ_M 到 ν 、关于 $-\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 在 $A\times B$上的代价函数的最优传输计划来表述，即 μ_M和 ν的耦合 γ使下列量最小

$$C(\gamma) := -\int_{A\times B}\langle m,n\rangle\gamma \tag{2}$$

（见第 6 节）。对于 $m\in\Delta\cap M$，令 τ_m 表示与 m对偶的 $\Delta_h^\vee$的面，即

$$\tau_m = \{n\in\Delta_h^\vee, \langle m,n\rangle = h(m)\},$$

并且 $\mathrm{St}(m)$ 是 m 的闭星，即所有包含 m 的 A 闭面的并集。

定义1。 我们称(Δ, h, ν)是稳定的，如果存在一个从 μ_M 到 ν 的最优传输计划，其支撑在

$$\cup_{m\in A\cap M}\left(\mathrm{St}(m)\times\tau_m\right). \tag{3}$$

定理 1. 设 ν 是定义在 B° 上的一个正测度，其总质量为 $\mu_M(A)$。那么存在一个函数 $\Psi\in\mathcal{P}(\Delta)$ 满足

$$\mathrm{MA}\left(\Psi|_{B^\circ}\right)=\nu \tag{4}$$

当且仅当 (Δ, h, ν) 稳定时成立。此外，若 $\Psi, \Psi'\in\mathcal{P}(\Delta)$ 都满足 (4)，则 $\Psi-\Psi'$ 为常数。

注 1. 在具有丰富离散对称变换的例子中，例如标准单位单纯形和单位立方体，我们证明该解在开面上光滑（见定理 3、引理 16 和引理 17）。然而，一般而言，方程 1 和方程 4 应作弱意义下的解释。更确切地说，若 $\beta:\tau^\circ\to\mathbb{R}^d$ 是一个坐标函数，且与面 τ°内部的热带仿射结构相容，则当

$$\partial(\Psi\circ\beta^{-1})(\beta(E))=\nu(E)$$

对于任意可测集 $E\subset\tau^\circ$，其中 ∂ 表示（多值）梯度。

注 2. 我们称 (Δ, h) 是稳定的，若 (Δ, h, ν_N) 是稳定的；我们称 Δ 是稳定的，若 (Δ, h_0) 是稳定的，其中 h_0 是由 $h(0)=0$ 和 $h(m)=1$（$m\in\Delta\cap M\setminus\{0\}$）给出的平凡高度函数。

当 Δ 是标准单位单纯形（即 $Y=\mathbb{P}^{d+1}$）时，若 $h=h_0$ 和 ν 在 $\Delta_h^\vee$ 顶点的置换下保持不变，则 (4) 已由[HJMM22]解决。此外，若 ν 集中于 B°，则可证明 (Δ, h_0, ν) 是稳定的。

至少在 Y 光滑且 h 平凡的情形下，方程 (1) 存在解 $\Psi\in\mathcal{P}(\Delta)$ 蕴含 X 的度量 SYZ 猜想成立。最初，这种方法由 [Li22a] 采用，用于证明费马族的度量 SYZ 猜想（即 $Y=\mathbb{P}^n$ 和 $h=h_0$）。在 [HJMM22], 中，作者说明了如何利用方程 (4) 的一个解，直接验证 [Li201]中的条件。这将 [Li22a] 中的结果推广到了 $\mathbb{P}^{d+1}$中更广泛的一类（可能非对称）族。 [PS22] 也独立完成了一项推广。此外， [Li23]研究了某些更一般的托里克 Fano 流形中的超曲面族。定理 1 有如下推论（关于该推论如何由上述定理 1 得出，详见[Li23], 第 3 节）：

推论1. 假设 Y 光滑， $h=h_0$ 且 Δ 稳定。那么，对于每个 $\delta>0$，存在某个 $\epsilon=\epsilon_\delta>0$，使得只要$|t|<\epsilon$， X_t 就在归一化卡拉比-丘体积为 $1-\delta$ 的子集上具有特殊拉格朗日$\mathbb{T}^d$ 纤维化。

注3. 一般而言，推论1中存在特殊拉格朗日环面纤维化的子集并未明确给出。不过，对于$\mathbb{P}^{d+1}$ 和（$\mathbb{P}^1$）$^{d+1}$中的超曲面，可以利用上述标准单位单纯形和单位立方体的正则性结果提取更精确的信息（见下文推论 2）。

[HJMM22] 的一个关键思想是针对（4）提出了一种新的变分原理。这一变分原理将在本文中发挥关键作用。[Li23] 的一项显著特点是，它不依赖于 Δ 的对称变换，这与 [Li22a、HJMM22、PS22]不同。不过， [Li23] 依赖于 Δ 和 $\Delta^\vee$的顶点所满足的一个条件，而这一条件似乎相当严格（见第 9.4 节）。

考察定义1中的稳定性条件可知，若 n 是 B 的一个面 τ 上的点，则代价函数 $-\langle \cdot,\ n\rangle$ 在 m_τ处取得最小值。因此，可以合理地预期，只要 Δ 和 h 不太极端，最优传输计划就会支撑在（3）上，并且（$\Delta,\ h,\ \nu_N$）是稳定的。第9节将说明，如何利用 Δ 和 h 中的对称变换来证明（$\Delta,\ h,\ \nu_N$）的稳定性。然而，有些出人意料的是，在许多情况下稳定性会失效，且（1）不具有解，即使 $\nu = \nu_N$也是如此。我们将在此简要总结这些发现。更多细节见第9节。请注意， $\Delta^\vee_{h_0}$ 是 Δ的通常对偶 $\Delta^\vee$ 。

- 设 Δ 为标准二维单纯形，因此 $Y = \mathbb{P}^2$。存在一个高度函数 h ，使得方程（1）不存在解（第9节中的例1）。
- 设 $h = h_0$ 为平凡高度函数。在4319个三维反射多胞体中，至少有1542个无法为方程（1）找到解（第9节中的表2）。
- 设 $h = h_0$ 为平凡高度函数。在4319个三维反射多胞体中，有145个存在方程的解，但非常接近不稳定（见定义6）。正如接下来的两段所解释的，这些例子展现了与相关热带仿射结构的奇异集有关的出乎意料的行为。

一般而言，通过考虑 Y的一般极化，可以放宽方程（4）的条件。上面第一条要点很有意思，因为它描述了一种放宽条件并未带来额外自由度的情形。不过，我们强调，方程（1）可解只是度量SYZ猜想对 X成立的充分条件。第一条要点告诉我们，若要采用类似于 [Li22a] 的方法处理例1所定义的族，就必须考虑不同于 $\mathbb{P}^2$ 的环境托里克簇。

通常认为，Monge-Amp`ere 方程 (4) 的解可以延拓到一个比 B°更大的集合，特别是应当能够延拓到一个集合 $B \setminus \Sigma$ ，其中 Σ 的余维为二。这必然需要选择一种热带仿射结构，使其延拓 B°上的热带仿射结构。先验看来，这种结构似乎没有规范的选择。特别是，延拓热带仿射结构时，需要看似任意地选择其奇异集的位置。在

第8节中，我们通过论证奇异集的位置必须根据 Monge-Amp`ère 方程来选择，从而在偏微分方程理论中起到自由边界的作用，来处理这一问题。我们给出了热带仿射结构延拓的精确定义（定义 4），并证明若 (4) 存在解，则它可以延拓为该热带仿射结构正则部分上的解（定理 2）。在标准单位单纯形和单位立方体这两个例子中，我们还证明，所诱导的热带仿射结构的奇异集 Σ_Ψ 的余维为 2，并且解（或者更准确地说，(3) 中的势）在 $B \setminus \Sigma_\Psi$上光滑（定理 3、引理 16 和引理 17）。

对于一般数据 Δ，h，ν，由于缺乏针对 Ψ 的正则性理论，Σ 的精确定义颇为技术性。不过，Ψ定义了一个多值映射 $\partial^c\Psi : B \to A$（c-梯度）；若假设该映射是同胚，则 Σ 的定义可简化为

$$\Sigma = \Sigma_\Psi = B_{d-1} \cap (\partial^c\Psi)^{-1}(A_{d-1}) \tag{5}$$

其中 $A_{d-1} = A \setminus A^\circ$ 和 $B_{d-1} = B \setminus B^\circ$ 是 A 和 B 的（$d-1$）骨架。若利用 $\partial^c\Psi$ 将 A 与 B 识别起来，这与许多作者提出的观点十分契合：奇异集应当是单位球面上两个对偶多面体结构的余维 1 骨架的交集（例如参见 [KS06], 第 2.2 节末尾，以及 [Li23], 第2.10节）。假设 B_{d-1} 与 $(\partial^c\Psi)^{-1}(A_{d-1})$ 横截相交，则这给出一个余维二集合 Σ_Ψ，这正是 SYZ 猜想通常预期的情形。

与此相关的三个有趣问题是

- 大小：Σ_Ψ有多大？具体而言，是否存在合适的条件，使得 Σ_Ψ 的余维为 2？
- 极小性：Σ_Ψ 是否是极小的？或者，是否存在 Σ_Ψ 的一个闭真子集Σ'，使得热带仿射结构可延拓至 $B \setminus \Sigma'$，并且 Monge-Amp`ere 方程在这个更大的集合上成立
- 唯一性：假设 Σ_Ψ 是极小的，是否存在一个不包含 Σ_Ψ的闭集合 $\Sigma' \subset B$，使得 B° 上的热带仿射结构可延拓至 $B \setminus \Sigma'$，并且 Monge-Amp`ere 方程在这个更大的集合上成立

在考察上面的第二和第三条时，我们将假设Σ_Ψ 和 Σ' 是热带仿射结构的奇异集，其坐标函数由 Δ 的面定义（见第 3 节）。改变仿射结构归结为改变这些坐标函数的定义域。在这一约束下，第8节为第三条提供了有力证据。更确切地说，假设 Σ_Ψ 是极小的，我们证明，对于任意不包含 Σ_Ψ的 Σ'，集合 $B \setminus \Sigma'$ 必然包含解不可微的点（见引理 15）。这至少对解光滑的 $d = 2$ 回答了第三条。另一方面，在第9节中，我们给出了一大类例子，其中（4）有解，但 $\partial^c\Psi$将 B_{d-1} 的整个（$d-1$）维面映入 A_{d-1}。特别是，这意味着如上所定义的 Σ_Ψ余维为 1。事实上，在这些例子中

$B \setminus \Sigma_\Psi$ 不连通。这些例子是稳定的，但非常接近不稳定（见定义6），我们认为上面的第二条很可能不适用于这些例子。更确切地说，似乎可以将 Σ_Ψ 替换为一个更小的余维为 2 的子集 Σ'（见例 4 和注 11）。有趣的是， Σ' 包含 B的（$d-2$）维面。结合 [HJMM22], 中奇异集诱导出（$d-1$）维面的重心细分这一情况，这启发我们形成一种启发式图景：当 ν （或者，如果令 h 在 $\mathbb{R}$中取值，则 h）趋向于不稳定的数据时，奇异集会被推向某些（$d-1$）维面的边界。

推论1中允许特殊拉格朗日环面纤维化的 X_t 的确切子集并未明确给出。粗略地说，它位于解 Ψ开面中的光滑轨迹上。由于实 Monge-Amp`ere 方程局部解的奇异集可能相当复杂，若没有关于 Ψ的正则性结果，就很难对其作出更明确的描述。此外，由于底空间包含在 $\Delta^\vee$的开面中，推论1给出的子集肯定不是连通的。另一方面，上文提到的标准单位单纯形和单位立方体的正则性结果，蕴含了推论1的一个更精确版本。为陈述该版本，令 $T_\mathbb{C} \subset Y$为复（$d+1$）环面，并令 $\mathrm{Log}_s : T_\mathbb{C} \to N_\mathbb{R}$ 为如下映射：它将 $x \in T_\mathbb{C}$ 映至唯一满足以下条件的 $\mathrm{Log}_s(x) = n \in N_\mathbb{R}$

$$\langle m, \mathrm{Log}_s(x)\rangle = \frac{1}{s}\log|f_m(x)|$$

对所有 $m \in M$。若我们固定 $m_0, \dots, m_d$ 的生成元，则这些生成元确定 M 上的坐标 $(\langle m_0, \cdot\rangle, \dots, \langle m_d, \cdot\rangle)$，并且

$$(z_0, \dots, z_d) = (f_{m_0}, \dots, f_{m_d})$$

在 $T_\mathbb{C}$ 上，Log_s 具有如下形式

$$\mathrm{Log}_s(z_0, \dots, z_d) = \frac{1}{s}(\log|z_0|, \dots, \log|z_d|).$$

分别令 $\Delta_{simplex}$ 和 Δ_{cube} 为 $M_\mathbb{R}$ 中的标准单位单纯形和单位立方体。对于 $\Delta_{simplex}$ 和 Δ_{cube} 的每个面 σ，令 $\mathrm{SmSt}(n_\sigma)^\circ$ 表示 n_σ 在 $\Delta_{simplex}$ 或 Δ_{cube} 的重心细分中的开星。

˜推论 2。令 K_{faces} 为 B° 的紧子集，$U_{faces} = R_{\geq 0}K_{faces}$ 为由 K_{faces} 生成的锥。对于 Δ_{sim} （或 Δ_{cube}）的每个面 σ，令 K_σ 为 $\mathrm{SmSt}(n_\sigma)^\circ$ 的紧子集。令

$$\tilde{U}_{stars} = \cup_\tau([0,1]\cdot K_\sigma + \mathbb{R}_{\geq 0}n_\sigma).$$

于是当 t 足够小时， X_t 在 上存在一个特殊拉格朗日环面纤维化

$$\mathrm{Log}_t^{-1}\left(\tilde{U}_{faces} \cup \tilde{U}_{stars}\right).$$

我们将在附录中说明，推论 2 如何由定理 2，以及定理 3、引理 16 和引理 17 中针对标准单位单纯形与单位立方体的正则性结果推出。简而言之，论证见 [Li 201],

这构成了 [HJMM22] 中论证的基础，而 [Li23]，的附录只涉及 $\Delta^\vee$ 的开面。为处理低维面（的部分情形），我们采用 [Li22a] 的框架。该论证依赖于 [Li20b] 中一致的 Skoda 估计，以及 [Li201] 中对 L^1-稳定性的应用。不过，它避开了所有非阿基米德几何（包括非阿基米德卡拉比-丘问题的解、其富比尼-施图迪逼近及其正则化）。与 [Li22a] 相比，这一论证也稍为简单，因为它依赖于定理 2 中解的存在性，而不是将卡拉比-丘势的平均值经过（双重勒让德正则化）后取极限来构造解。因此，这一阐述或许也具有独立的价值。

概要。 第 2 节回顾反射多胞体的一些基本性质，其中最重要的是关于 Δ 和 Δ_h的投影性质。第 3 节解释如何借鉴 [GS06、HZ01] 中的思想，在 A 和 B的大子集上构造自然的热带仿射结构。第 4 节展示这些仿射结构如何保持 $M_{\mathbb{R}}$ 和 $N_{\mathbb{R}}$ 之间的配对；第 5 节说明如何利用这一点来控制函数 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$的 c-梯度。第 6 节回顾最优传输理论中的一些事实，尤其是这样一条原理：当且仅当传输计划支撑在某个 c-凸函数的 c-梯度上时，该传输计划才是最优的。第 7 节综合这些思想，证明定理 1。第8节定义 Σ_Ψ ，并说明如何将 B° 上的仿射结构延拓到 $B\backslash\Psi$ ，进而证明方程 (4) 的解在这个更大的集合上满足蒙日-安培方程（见定义 3）。我们还讨论上文关于 Σ_Ψ 的第三条要点。

在第9节中，我们给出一些例子，以凸显我们结果的重要特征。具体而言，第 9.1 节给出了利用对称性得到的正向存在性结果；第 9.2 节给出了式 (4) 无解的例子；第 9.3 节给出了热带仿射结构的延拓具有异常奇异集的例子；第 9.4 节则给出了定量结果，表明这些例子所呈现的性质在反射多胞体中经常出现。

致谢。作者感谢 Yang Li 对论文草稿提出的宝贵意见。第二作者感谢 Mattias Jonsson、Enrica Mazzon 和 Nick McCleerey 就这一主题展开的诸多富有成果的讨论。第二作者的研究得到了克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会的资助，资助编号为 2018-0357。

2. 反射多胞体

反射多胞体是一个格多胞体 Δ，其对偶 $\Delta^\vee$ 也是格多胞体。等价地， Δ 可以写成

$$\{m : \langle m, n_i\rangle \leq 1\}$$

对于若干格向量 n_1，……， n_k（ $\Delta^\vee$的顶点）。反射多胞体的定义，以及在镜像对称中研究它们的想法，

可追溯至 [Bat94]。这一条件对 Δ施加了严格限制。由于 n_i是一个格向量，我们得到，对于每个 $m \in M$，$\langle m,\ n_i\rangle \in \mathbb{Z}$；因此，若 $m \in \Delta \cap M$且 $\langle m,\ n_i\rangle > 0$对某个 i成立，则 $\langle m,\ n_i\rangle = 1$。由此可得：

- 如果 σ 是 Δ的一个面，那么由 σ 张成的仿射子空间与经过原点且与之平行的子空间之间没有格点。
- 每个 n_i 都是本原的，即不存在满足 $n_i/q \in N$的 $q > 1$ 。

稍加努力，我们还可以得到关于 Δ 和 $\Delta_h^\vee$的投影的以下两个结论。

引理 1（另见 [Nil05], 命题 2.2 1）。设 $m_0 \in (\Delta \cap M) \setminus \{0\}$ 且π_{m_0}：$M_\mathbb{R} \to M_\mathbb{R}/\mathbb{R}m_0$ 为投影映射。则 $\pi_{m_0}(\mathsf{St}(m_0)) = \pi_{m_0}(\Delta)$。

证明。设

$$V_{m_0} = \{m \in \Delta : m + \epsilon m_0 \notin \Delta \text{ for all } \epsilon > 0\}$$

并注意到，在上述投影下，Δ的像包含于 V_{m_0}的像中。我们断言 $V_{m_0} = \mathsf{St}(m_0)$。为此，先设 $m \in \mathsf{St}(m_0)$。于是 m 和 m_0 位于同一个面上，即存在某个 n使得 $\langle m,\ n_i\rangle = \langle m_0,\ n_i\rangle = 1$。我们得到$(m + \epsilon m_0)n_i = 1 + \epsilon$，因此对任意 $\epsilon > 0$都有 $m + \epsilon m_0 \notin \Delta$。反过来，假设$m \in V_{m_0}$。那么存在 i 使得

$$1 < \langle m + \epsilon m_0, n_i\rangle = \langle m, n_i\rangle + \epsilon\langle m_0, n_i\rangle$$

对所有 ϵ均成立。因此 $\langle m,\ n_i\rangle = 1$ 且 $\langle m_0,\ n_i\rangle > 0$，并由上述观察 n 由上文可知 $\langle m_0,\ n_i\rangle = 1$。因此，$m_0$ 和 m 位于 Δ的面上，该面由 n_i 和 $m \in \mathsf{St}(m_0)$定义。□

与前一个引理密切相关，我们有以下关于 $\Delta_h^\vee$ 的投影的引理。

引理 2. 设 σ 是 Δ 的一个面，$n_\sigma \in N$ 是其本原外法向量。设 π_{n_σ}：$N_\mathbb{R} \to N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$ 是投影映射。那么

$$\pi_{n_\sigma}(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m) = \pi_{n_\sigma}(\Delta_h^\vee).$$

证明。与引理 1 的证明中一样，设

$$V_{n_\sigma} = \{n \in \Delta_h^\vee : n + \epsilon n_\sigma \notin \Delta_h^\vee \text{ for all } \epsilon > 0\}$$

并注意到 $\pi_{n:\sigma}(V_{n_\sigma}) = \pi_{n:\sigma}(\Delta_h^\vee)$。仿照引理 1 的证明进行类似计算可得，$V_m$ 是 $\Delta_h^\vee$中满足其本原外法向量 m_τ满足 $\langle m_\tau,\ n_\sigma\rangle > 0$的那些面 τ的并集，因此 $\langle m_\tau,\ n_\sigma\rangle = 1$，也就是说，$\Delta_h^\vee$ 中本原外法向量属于 σ的面的集合。因此，$V_{n_\sigma} = \cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$。□

3. Tropical affine structures

设 M 是一个维数为 d的拓扑流形。 M 上的仿射结构是一个特殊图册 $\{U_i, \beta_i : U_i \to \mathbb{R}^d\}_{i=1}^k$ ，满足对于所有 i， j，转移函数 $\beta_i \circ \beta_j|_{U_i \cap U_j}^{-1}$ 都是仿射的，即具有如下形式： $y \to A_{ij}y + b_{ij}$，其中 $A_{ij} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 且 $b_{ij} \in \mathbb{R}^d$。此外，若对于所有 i， j， $A_{ij} \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$，则 $\{U_i, \beta_i : U_i \to \mathbb{R}^d\}_{i=1}^k$在 M上定义了一个热带仿射结构 。注意，由于仿射结构的转移函数是光滑的，它会在 M 上确定一个光滑结构；与上述定义等价地，热带仿射结构由一个仿射结构以及 M的切空间中的一个格定义。

设 σ 是 Δ 的一个面，其本原外法向量为 n_σ ；设 τ 是 $\Delta_h^\vee$ 的一个面，其本原外法向量为 m_τ。作为分别位于 $M_\mathbb{R}$ 和 $N_\mathbb{R}$ 中的仿射子空间的开子集， σ° 和 τ° 继承了仿射结构。此外，子格 $n_\sigma^\perp \cap M = \{m \in M : \langle m, n_\sigma\rangle = 0\}$ 和 $m_\tau^\perp \cap N = \{n \in N : \langle m_\tau, n\rangle = 0\}$ 分别在 σ° 和 τ°的切空间上定义了格，进而在 σ° 和 τ° 上定义了热带仿射结构。

设 $m_1, \ldots, m_d$ 是 $n_\sigma \cap M$ 的生成元，且 $\beta_\sigma : \Delta_h^\vee \to \mathbb{R}^d$ 是由下式给出的映射

$$\beta_\sigma = (m_1(n), \ldots, m_d(n)).$$

注意， β_σ取决于生成元 $m_1, \ldots, m_d$的选择，但仅相差一个 $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ 中映射的（左）复合。更确切地说， $m_1, \ldots, m_d$定义了 $N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$ 与 $\mathbb{R}^d$ 之间的一个识别 ι ，而 β_σ 是 ι 与投影映射 $\pi_\sigma : N_\mathbb{R} \to N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$ 的复合。我们将在下一小节看到，选择某些生成元集合有时是有利的。由于$\langle m, n_\sigma\rangle = 1 > 0$ 对所有 $m \in \sigma$ 都成立，因此 β_σ在 σ中本原外法向量所在的 Δ 的每个面 τ' 上都是单射。由此可得， β_σ 在 $\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$上是单射。若对所有 $m \in A \cap M$ 都有 $h(m) = 1$，则 $n_\sigma \in \Delta_h^\vee = \Delta^\vee$ 且$\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m = \mathrm{St}(n_\sigma)$。

类似地，选取 $m_\tau^\perp \cap N$ 的一组生成元 n_1、……、 n_d，定义映射 $\alpha_\tau : \Delta \to \mathbb{R}^d$，其定义如下

$$\alpha_\tau(m) = (\langle m, n_1\rangle, \ldots, \langle m, n_d\rangle)$$

它在 $\cup_{\sigma:m_\tau\in\sigma}\sigma = \mathrm{St}(m_\tau)$ 上是一一映射。

引理 3。 $\{\tau^\circ, \beta_\sigma|_{\tau^\circ}\}_{(\tau,\sigma)\in B_d,\ A_d:m_\tau\in\sigma}$是 B° 上热带仿射结构的图册，而 $\{\sigma^\circ, \alpha_\tau|_{\sigma^\circ}\}_{(\tau,\sigma)\in B_d,\ A_d:m_\tau\in\sigma}$是 A° 上热带仿射结构的图册。

证明。设 τ和 σ满足 $m_\tau \in \sigma$。首先，由于 $\langle m_\tau, n_\sigma\rangle = 1 \neq 0$，可知 β_σ 定义了一个非退化仿射映射，它将由 τ 张成的仿射子空间映至 $\mathbb{R}^d$。由此可知， β_σ 保持了 τ°上的仿射结构。

因此，要证明引理的第一部分，只需证明 β_σ遵循 τ 的切空间上的格结构；换言之，若 $n \in$affinespan(τ)，则 $\beta_\sigma(n) \in \mathbb{Z}^d$ 当且仅当 $n \in N$。首先，若$n \in N$，则 $\beta_\sigma(n) \in \mathbb{Z}^d$，因为定义中使用的 $n_\sigma^\perp$ 的生成元 m_1、…、 m_d 属于 $n_\sigma^\perp$。

。对于逆向证明，设 e_0、. . . 、 e_d为M的生成元。根据下文的引理4，我们有

$$m \wedge m_1 \wedge \ldots \wedge m_d = \langle m, n_\sigma \rangle e_0 \wedge \ldots \wedge e_d = e_0 \wedge \ldots \wedge e_d$$

因此， m， m_1，.....， m_d生成 M。由于 N与 M互为对偶，可知若 $n \in$ affinespan(τ)（换言之， $\langle m_\tau, n \rangle = h(m_\tau) \in \mathbb{Z}$），且 $\beta_\sigma(n)$ =($\langle m_1, n \rangle$, ...， $\langle m_d, n \rangle$) $\in \mathbb{Z}^d$，则 $n \in N$。类似的论证可证明引理的第二部分。

□

引理4。设 e_0、.....、 e_d是 M的一组生成元， $n \in N$是本原的，且 m_1、.....、 m_d是 $n^\perp \cap M$的一组生成元。那么

$$m \wedge m_1 \wedge \ldots \wedge m_d = \langle m, n \rangle e_0 \wedge \ldots \wedge e_d \tag{6}$$

对所有 $m \in M_\mathbb{R}$均成立。

证明。首先，只需对某组生成元e_0、.....、 e_d以及某组生成元 m_1、.....、 m_d证明该引理，因为更换这些生成元不会影响式（6）的右边或左边。

由于 n 是本原的，我们可以选取 N 的一组生成元 f_0，.....， f_d，使得 $n = f_0$。设 e_0，.....， e_d 是 M 的对偶生成元集合。那么 e_1，.....， e_d 生成 $n_\sigma^\perp \cap M$，因此我们可以令 $m_i = e_i$，其中 $i = 1$，.....， d。记 $m = \sum_{i=0}^d \alpha_i e_i$，得到

$$\begin{aligned} m \wedge m_1 \wedge \ldots \wedge m_d &= \left(\sum_{i=0}^d \alpha_i e_i \right) \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_d \\ &= a_0 e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_d \\ &= \langle m, f_0 \rangle e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_d \\ &= \langle m, n \rangle e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_d. \end{aligned}$$

□

引理5。设 σ 是 Δ 的一个面， τ 是 $\Delta_h^\vee$ 的一个面，并且 α_τ 和 β_σ 如上所定义。则

$$\alpha_\tau(\Delta) = \alpha_\tau(\mathrm{St}(m_\tau)) \text{ and } \beta_\sigma(\Delta_h^\vee) = \beta_\sigma(\cup_{m \in \sigma \cap M} \tau_m).$$

证明。如上所述， $\beta_\sigma = \iota \circ \pi_\sigma$，其中 π_σ： $N_\mathbb{R} \to N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$ 是投影映射， ι 是对 $N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$ 和 $\mathbb{R}^d$ 的识别。由此，引理的第二部分可由引理 2 推出。引理的第一部分可通过类似地应用引理 1 得出。□

注意，如果 τ 是 $\Delta_h^\vee$ 的一个面，那么 $\Psi|_\tau$，因此对于任何满足 $m_\tau \in \sigma$ 的 σ，$\Psi|_\tau \circ \beta_\sigma^{-1}$ 都是凸的，因为它是凸函数在仿射子空间上的限制。事实证明，至少在用线性函数修改 Φ 后，对于更大的集合也有类似的结论，其中 β_σ 是单射。

引理 6. 令 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$， σ 是 Δ 和 $m_0 \in \sigma$ 的一个面。假设 β 如上所定义。那么$(\Psi - m_0) \circ \beta_\sigma^{-1}$在 $\beta_\sigma(\cup_{m \in \sigma} \tau_m)$上是凸的。

证明。我们可以将 $\Psi = \Phi^*$ 写作 $\Phi = \Psi^* \in L^\infty(\Delta)$。这意味着

$$(\Psi - m_0) \circ \beta^{-1}(y) = \sup_{m\in\Delta} \langle m - m_0, \beta^{-1}(y)\rangle - \Phi(m)$$

对所有 $y \in \beta(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)$ 都成立，因此只需证明

$$(m - m_0) \circ \beta_\sigma^{-1}(y) = \langle m - m_0, \beta^{-1}(y)\rangle$$

对于任意 $m \in \Delta$，$\beta(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)$ 上的函数是凸的。为此，回想上文，$\beta_\sigma = \iota \circ \pi_\sigma$，其中 $\pi_\sigma\colon N_\mathbb{R} \to N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$ 是投影映射，而 ι 是对 $N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$ 和 $\mathbb{R}^d$ 的识别。固定 $N_\mathbb{R}$ 中一个不包含 n_σ 的超平面 H，并以自然方式将其识别为 $N_\mathbb{R}/\mathbb{R}n_\sigma$，我们得到 $\beta^{-1} = l \circ \iota'$，其中 $\iota'\colon \mathbb{R}^d \to H$ 是一个可逆线性映射，而 $l\colon H \to \cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$ 具有如下形式：对于某个分段仿射函数 $h\colon H \to \mathbb{R}$，有 $l(n) = n - n_\sigma h(n)$，其不可微轨迹恰为 $\cup_{m'\in\sigma\cap M}\tau_{m'}$ 的余维 1 骨架。我们断言 h 是凸的。反设不然，则存在 n_0、$n_1 \in H$，使得 $(h(n_0) + h(n_1))/2 < h((n_0 + n_1)/2)$。由于 $n - n_\sigma h(n) \in \cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$，因此

$$\sup_{m\in\sigma\cap M} \langle m, n - n_\sigma h(n)\rangle = 1$$

对于任意 $n \in H$，我们都会得到矛盾

$$\begin{aligned}
1 &= \sup_{m\in\sigma}\langle m, (n_0 + n_1)/2 - n_\sigma h((n_0 + n_1)/2)\rangle \\
&< \sup_{m\in\sigma} \frac{1}{2}\langle m, n_0 - n_\sigma h(n_0)\rangle + \frac{1}{2}\langle m, n_1 - n_\sigma h(n_1)\rangle \\
&\le \sup_{m\in\sigma} \frac{1}{2}\langle m, n_0 - n_\sigma h(n_0)\rangle + \sup_{m\in\sigma} \frac{1}{2}\langle m, n_1 - n_\sigma h(n_1)\rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
\langle m - m_0, l(n)\rangle &= \langle m - m_0, n - n_\sigma h(n)\rangle \\
&= \langle m - m_0, n\rangle + \langle m - m_0, n_\sigma\rangle h(n).
\end{aligned}$$

其中第一项关于 n 是线性的，而第二项关于 n 是凸的，因为

$$\langle m - m_0, n_\sigma\rangle = \langle m, n_\sigma\rangle - \langle m_0, n_\sigma\rangle \le 1 - 1 = 0.$$

由此可知 $(m - m_0) \circ \beta_\sigma^{-1}(y) = \langle m - m_0,\ l(\iota'(y))\rangle$ 关于 y 是凸的。 □

4. Compatibility with pairings

设 σ 是 Δ 的一个面，τ 是 $\Delta_h^\vee$的一个面。α_τ 和β_σ 的定义分别取决于对 $m_\tau^\perp \cap N$ 生成元的选择以及对 $n_\sigma^\perp \cap M$生成元的选择。本节将说明，通过以适当的方式选择这些生成元集合，我们可以得到一些对（α_τ，β_σ），它们与 $M_\mathbb{R} \times N_\mathbb{R}$ 上的配对相容，具体而言：

定义2. 设 σ 是 Δ 的一个面， τ 是 $\Delta_h^\vee$的一个面。一对 $\alpha_\tau\colon\ \Delta\to\mathbb{R}^d$和 $\beta_\sigma\colon\ \Delta_h^\vee\to\mathbb{R}^d$ 称为（ σ,τ ）- 相容的，如果

$$\langle m-m_\tau,n\rangle=\langle\alpha_\tau(m),\beta_\sigma(n)\rangle \tag{7}$$

对所有 $m,n\in\sigma\times\Delta_h^\vee$。以及

$$\langle m,n-h(m_\tau)n_\sigma\rangle=\langle\alpha_\tau(m),\beta_\sigma(n)\rangle \tag{8}$$

对所有 $m,n\in\Delta\times\tau$。

引理7. 设 σ 是 Δ 的一个面， τ 是 $\Delta_h^\vee$ 的一个面，且满足 $m_\tau\in\sigma$。假设 β_σ 是按上一节所述定义的映射。那么存在一个坐标映射 α_τ，使得 $(\alpha_\tau,\beta_\sigma)$与 (σ,τ)相容。

类似地，若 α_τ 是按上一节所述定义的映射，则存在一个坐标映射 β_σ，使得 $(\alpha_\tau,\beta_\sigma)$与 (σ,τ)相容。

证明。设 $m_1,\dots,m_d$ 是定义 β_σ 的 $n_\sigma^\perp\cap M$ 的生成元。正如引理 3 的证明中所解释的， $m_\tau,m_1,\dots,m_d$ 生成 M。由于对于所有 $i,\langle m_\tau,n_\sigma\rangle=1$， $\langle m_i,n_\sigma\rangle=0$，且对于任意 $n\in m_\tau^\perp$， $\langle m_\tau,n\rangle=0$，因此 $m_\tau^\perp\cap N$ 对偶于由 $m_1,\dots,m_d$ 生成的格。因此，我们可以选取 $m_\tau^\perp\cap N$ 的生成元 $n_1,\dots,n_d$，使其对偶于 $m_1,\dots,m_d$，即若 $i=j$ 则 $\langle m_i,n_j\rangle=1$ ，且若 $i\neq j$ 则 $\langle m_i,n_j\rangle=0$ 。将元素 $m\in\sigma$ 写作 $m=m_\tau+\sum_{i=1}^d\alpha_im_i$ ，将元素 $n\in\Delta_h^\vee$ 写作 $n=\beta_0n_\sigma+\sum_{j=1}^d\beta_jn_j$，其中系数为 $\alpha_1,\dots,\alpha_d,\beta_0,\dots,\beta_d$，可得 $\alpha_\tau(m)=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$， $\beta_\sigma(n)=(\beta_1,\dots,\beta_d)$ 以及

$$\begin{aligned}\langle m-m_\tau,n\rangle &= \langle\sum_{i=1}^d\alpha_im_i,\beta_0n_\sigma+\sum_{j=1}^d\beta_jm_j\rangle\\ &= \sum_{i,j=1}^d\alpha_i\beta_j\langle m_i,n_j\rangle\\ &= \sum_{i}^d\alpha_i\beta_i\\ &= \langle\alpha_\tau(m),\beta_\sigma(n)\rangle.\end{aligned}$$

这就证明了 (7)。类似地，将一个元素 $m\in\Delta$ 写作$\alpha_0m_\tau+\sum_{i=1}^d\alpha_im_i$ ，将一个元素 $n\in\tau$写作 $n=h(m_\tau)n_\sigma+\sum_{j=1}^d\beta_jn_j$，便可通过类似的计算证明 (8)。引理中的第二个结论也可用同样的方法得出。□

5. The c-gradient

与 [HJMM22]，中一样，函数 $\Phi\in\mathcal{P}(\Delta)$ 的 c-梯度将发挥重要作用。设 $\Phi\in\mathcal{P}(\Delta)$ 且 $n\in B$。 Ψ 在 n 处的 c-梯度是满足以下条件的 $m\in A$ 的集合:

$$\Psi(n')\geq\Psi(n)+\langle m,n'-n\rangle$$

对所有 $n' \in B$ 均成立。类似地，若我们将 $\mathcal{P}(\Delta_h^\vee)$ 定义为 Φ 上满足以下条件的凸函数空间：

$$\sup_{m\in M_{\mathbb{R}}} |\Phi(m) - \sup_{n\in\Delta_h^\vee} \langle m, n\rangle| < \infty,$$

c-梯度在点 $m \in A$ 处的 Φ 是满足以下条件的 $n \in B$ 集合

$$\Phi(m') \geq \Phi(m) + \langle m' - m, n\rangle$$

对所有 $m' \in A$ 均成立。

将 c-梯度与凸函数 f 在 $(\mathbb{R}^d)^*$ 上通常的多值梯度 ∂ 进行比较，或许会有所帮助。 f 在点$y \in (\mathbb{R}^d)^*$ 处的梯度是满足 $f(y') \geq f(y) + \langle x, y' - y\rangle$ 对所有$y' \in(\mathbb{R}^d)^*$ 均成立的 $x \in \mathbb{R}^d$ 集合。 c-梯度具有许多相同的性质。尤其是， c-梯度是（c-）单调的，也就是说，如果 $m \in \partial^c\Psi(n)$ 且 $m' \in \partial^c\Psi(n')$，其中$m$， $m' \in A$ 且 n， $n' \in B$，那么

$$\langle m' - m, n' - n\rangle \geq 0.$$

此外，正如下文的引理 9 和推论 4（本节的重点）所阐释的，在有利的条件下， Ψ 的 c-梯度可以认定为凸函数 $\Psi|_\tau^\circ$的通常梯度，其中τ 是 B中的一个面。

令 σ 为 Δ 的一个面。对于 $n \in \Delta$，令 $p_\sigma(n) = n + \rho n_\sigma$，其中

$$\rho = \rho_{\sigma,n} := \sup \rho' : n + \rho' n_\sigma \in \Delta_h^\vee.$$

类似地，给定 $\Delta_h^\vee$ 的一个面 τ 和 $m \in \Delta$，令 $p_\tau(m) = m + \rho m_\tau$，其中

$$\rho = \rho_{\tau,m} := \sup \rho' : m + \rho' m_\tau \in \Delta.$$

由引理 1 和引理 2 可知， p_σ 和 p_τ 分别定义了从 $\Delta_h^\vee$ 和 Δ 到 $\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$ 和 $\mathrm{St}(m_\tau)$ 的投影。这些投影具有关于 c-梯度的良好性质。

引理 8。令 τ 为 $\Delta_h^\vee$ 和 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$ 的一个面。假设 $m \in A$、 $n \in \tau$ 和 $m \in \partial^c\Psi(n)$。则 $p_\tau(m) \in \partial^c\Psi(n)$。

类似地，令 σ 为 Δ 和 $\Phi \in \mathcal{P}(\Delta_h^\vee)$ 的一个面。假设 $m \in \sigma$、 $n \in B$ 和 $n \in \partial^c\Phi(m)$。则 $p_\sigma(n) \in \partial^c\Phi(m)$。

证明。令 $n' \in B$。我们有

$$\begin{aligned}
\Psi(n') &\geq \Psi(n) + \langle m, n' - n\rangle \\
&= \Psi(n) + \langle p_\tau(m), n' - n\rangle - \langle m - p_\tau(m), n' - n\rangle \\
&= \Psi(n) + \langle p_\tau(m), n' - n\rangle + \rho(\langle m_\tau, n'\rangle - \langle m_\tau, n\rangle) \\
&\geq \Psi(n) + \langle p_\tau(m), n' - n\rangle
\end{aligned}$$

因为 $\langle m_\tau, n\rangle = h(m_\tau) = \sup_{n'\in B}\langle m_\tau, n'\rangle$. 因此 $m' \in \partial^c\Phi(n)$。第二个结论的证明方法相同。□

推论 3. 假设 τ是 $\Delta_h^\vee$和 $n \in \tau$的一个面。则 $\partial^c\Psi(n) \cap \mathrm{St}(m_\tau)$非空。

证明。由 Δ的紧致性，$\partial^c\Psi(n)$ 包含某个 $m \in \Delta$。根据引理 8，$p_\tau(m) \in \mathrm{St}(m_\tau)$包含于 $\partial^c\Psi(n)$ 中。□

现在我们转向本节的主引理。

引理 9 (比较 ∂ 和 ∂^c 在 B°上)。令 σ 为 Δ的一个面，τ 为 $\Delta_h^\vee$的一个面，并且 $(\alpha_\tau, \beta_\sigma)$ 与 (σ, τ)相容。假设 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$ 且 $n \in \tau^\circ$。那么

$$\partial(\Psi \circ \beta^{-1})(\beta(n)) \subset \alpha(\mathrm{St}(m_\tau)).$$

此外，以下两个蕴含关系成立：

$$(9) \quad m \in \partial^c\Psi(n) \implies \alpha(m) \in \partial(\Psi \circ \beta^{-1})(\beta(n))$$

$$(10) \quad m \in \partial^c\Psi(n) \impliedby \alpha(m) \in \partial(\Psi \circ \beta^{-1})(\beta(n)) \text{ 和 } m \in \mathrm{St}(m_\tau)。$$

类似地，假设 $\Phi \in \mathcal{P}(\Delta_h^\vee)$ 且 $m \in \sigma^\circ$。那么

$$\partial(\Phi \circ \alpha^{-1})(\alpha(m)) \subset \beta(\cup_{m' \in \sigma \cap M} \tau_{m'}).$$

此外，以下两个蕴含关系成立：

$$n \in \partial^c\Phi(m) \implies \beta(n) \in \partial(\Phi \circ \alpha^{-1})(\alpha(m))$$

$$n \in \partial^c\Phi(m) \impliedby \beta(n) \in \partial(\Phi \circ \alpha^{-1})(\alpha(m)) \text{ and } n \in \cup_{m' \in \sigma} \tau_{m'}.$$

在证明这个引理之前，我们先说明以下显而易见的推论：

推论 4。设 $\sigma, \tau, \alpha, \beta$如引理 *9* 中所述，$n \in \tau$且 $\partial^c\Psi(n) \subset \mathrm{St}(m_\tau)$。那么 α 定义了从 $\partial^c\Psi(n)$ 到 $\partial(\Psi \circ \beta^{-1})(\beta(n))$的一个双射。

引理 *9* 的证明。为证明该引理中的第一个断言，我们令 $\Psi = \Phi^*$表示 $\Phi = \Psi^* \in L^\infty(\Delta)$。这意味着

$$\Psi(n) = \sup_{m \in \Delta} \langle m, n \rangle - \Phi(m).$$

由此可知，对于任意 $n \in \tau^\circ$

$$\begin{aligned} \Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n)) &= \Psi(n) \\ &= \sup_{m \in \Delta} \langle m, n \rangle - \Phi(m) \\ &= \sup_{m \in \Delta} \langle m, n - h(m_\tau) n_\sigma \rangle + \langle m, h(m_\tau) n_\sigma \rangle - \Phi(m) \\ &= \sup_{m \in \Delta} \langle \alpha_\tau(m), \beta_\sigma(n) \rangle + h(m_\tau) \langle m, n_\sigma \rangle - \Phi(m) \end{aligned}$$

其中第四个等号用到了引理7。这意味着 $\Psi \circ \beta^{-1}$可以表示为一族仿射函数的逐点上确界，这些函数的线性部分属于 $\alpha_\tau(\Delta) = \alpha_\tau(\mathrm{St}(m_\tau))$，从而证明了该引理中的第一个断言。

现在我们来证明 (9)。令 $n \in \tau^\circ$ 和 $m \in \partial^c\Psi(n)$。这意味着

$$\Psi(n') \geq \Psi(n) + \langle m, n' - n \rangle$$

对所有 $n' \in B$ 均成立。因此，

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n')) &= \Psi(n') \\
&\geq \Psi(n) + \langle m, n' - n\rangle \\
&= \Psi(n) + \langle m, n' - h(m_\sigma)n_\tau\rangle - \langle m, n - h(m_\sigma)n_\tau\rangle \\
&= \Psi(n) + \langle \alpha_\tau(m), \beta_\sigma(n')\rangle - \langle \alpha_\tau(m), \beta_\sigma(n)\rangle \\
&= \Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n)) + \langle \alpha_\tau(m), \beta_\sigma(n') - \beta_\sigma(n)\rangle \qquad (11)
\end{aligned}$$

对所有 $n' \in \sigma^\circ$，因此 $\alpha_\tau(m) \in \partial\Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n))$.

为证明 (10)，令 $n \in \tau^\circ$ and $m \in \mathrm{St}(m_\tau)$ 且 $\alpha_\tau(m) \in \partial(\Psi \circ \beta_\sigma^{-1})(\beta_\sigma(n))$. 那么

$$\Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n')) \geq \Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n)) + \langle \alpha_\tau(m), \beta_\sigma(n') - \beta_\sigma(n)\rangle$$

对所有 $n' \in \tau^\circ$. 。由此可得

$$\begin{aligned}
\Psi(n') &= \Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n')) \\
&\geq \Psi \circ \beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n)) + \langle \alpha_\tau(m), \beta_\sigma(n') - \beta_\sigma(n)\rangle \\
&= \Psi(n) + \langle m, n' - n_\sigma\rangle - \langle m, n - n_\sigma\rangle \\
&= \Psi(n) + \langle m, n' - n\rangle. \qquad (12)
\end{aligned}$$

对所有 $n' \in \tau^\circ$。

为得出 (10)，我们需要证明 (12) 对所有 $n' \in B$ 都成立。为此，取 $\mathrm{St}(m_\tau)$ 中一个包含 m 的面 σ'。取 $\beta_{\sigma'}$，使得 $(\alpha_\tau, \beta_{\sigma'})$ 与 (σ', τ) 相容。利用 (12) 对所有 $n' \in \tau^\circ$ 都成立这一事实，类似于 (11) 中对引理7的应用可得

$$(\Psi - m_\tau) \circ \beta_{\sigma'}^{-1}(\beta_{\sigma'}(n')) \geq (\Psi - m_\tau) \circ \beta_{\sigma'}^{-1}(\beta_{\sigma'}(n)) + \langle \alpha_\tau(m), \beta_{\sigma'}(n') - \beta_{\sigma'}(n)\rangle \qquad (13)$$

对所有 $n' \in \tau^\circ$ 都成立。由于根据引理 6，$(\Psi - m_\tau) \circ \beta_{\sigma'}^{-1}$ 在 $\beta_{\sigma'}(\cup_{m\in\sigma'}\tau_m)$ 上是凸的，且 (13) 对所有 $n' \in \tau^\circ$ 都成立，因此我们得到 (13) 对所有 $n' \in \cup_{m\in\sigma'}\tau_m$ 都成立。类似于 (12) 中对引理7的应用，这意味着

$$\Psi(n') \geq \Psi(n) + \langle m, n' - n\rangle$$

对所有 $n \in \cup_{m\in\sigma'}\tau_m$ 都成立。

现在，假设 $n' \in A$ 并选取 $m' \in \partial^c\Psi(\pi_{\sigma'}(n'))$，其中 $\pi_{\sigma'}(n') \in \cup_{m\in\sigma'}\tau_m$ 是 n' 在本节开头定义的投影下的像。我们得到

$$\begin{aligned}
\Psi(n') &\geq \Psi(\pi_{\sigma'}(n')) + \langle m', n' - \pi_{\sigma'}(n')\rangle \\
&\geq \Psi(n) + \langle m, \pi_{\sigma'}(n') - n\rangle + \langle m', n' - \pi_{\sigma'}(n')\rangle \\
&= \Psi(m) + \langle m, n' - n\rangle + \langle m' - m, n' - \pi_{\sigma'}(n')\rangle \\
&= \Psi(m) + \langle m, n' - n\rangle - \rho\langle m' - m, n_{\sigma'}\rangle \\
&\geq \Psi(m) + \langle m, n' - n\rangle,
\end{aligned}$$

因此 $m \in \partial^c\Psi(n)$。关于 Φ 的相应结论可用同样的方法证明。□

6. Optimal Transport Plans

现在我们回顾最优传输文献中的一些记号和事实。详情请参阅任意一本著作 [Vil09、AG13、Fig99]。最优传输的标准设定由两个（波兰）概率空间以及定义在其乘积空间上的下半连续代价函数 构成。我们的设定包括 A ，其上赋有正的有限测度 μ_M；以及 B ，其上赋有与 μ_M总质量相同的正测度 ν ；此外还有代价函数 $c\colon A\times B\to\mathbb{R}$ ，定义为

$$c(m,n)=-\langle m,n\rangle.$$

尽管 ν 和 μ_M 并非概率测度，但经过无关紧要的缩放后，我们的设定等价于标准设定。

从 ν 到 μ_M 的传输计划是 ν 和 μ_M的耦合，即在乘积 $A\times B$ 上的一个正测度，使得 γ的推前测度

$$(q_A)\#\Gamma=\mu_M \text{ and } (q_B)_\#\gamma=\nu. \tag{14}$$

其中， $q_A\colon A\times B\to A$和 $q_B\colon A\times B\to B$分别表示从 $A\times B$投影到第一和第二个因子的投影，

我们将从 ν到 μ_M的传输计划集合记为 $\Pi(\nu,\ \mu_M)$。最优传输问题是求最小化

$$I(\gamma)=\int_{A\times B}c\gamma$$

在 $\Pi(\nu,\mu_M)$ 上。由 I 关于弱拓扑的下半连续性以及普罗霍罗夫定理可知，I 存在一个极小化子。最优传输计划 是使 I 最小化的传输计划。

最优传输最有用的特性之一，是它与对偶表述之间引人注目的相互作用。为了解释这一点，我们回顾最优传输文献中的以下术语。对于连续函数 $\Psi\colon\Delta_h^\vee\to\mathbb{R}$ 和 $\Phi\colon\Delta\to\mathbb{R}$， Ψ 和 Φ 的 c-变换是由下式给出的连续函数 $\Psi^c\colon A\to\mathbb{R}$ 和 $\Phi^c\colon B\to\mathbb{R}$：

$$\Psi^c(m)=\sup_{n\in B}\langle m,n\rangle-\Psi(n) \text{ and } \Phi^c(n)=\sup_{m\in A}\langle m,n\rangle-\Phi(m). \tag{15}$$

由形式性质可知，任意上述 Ψ 和 Φ 都满足 $((\Psi^c)^c)^c=\Psi^c$ 和 $((\Phi^c)^c)^c=\Phi^c$。那些属于 c-变换像集、因而满足 $(\Psi^c)^c=\Psi$ 和 $(\Phi^c)^c=\Phi$ 的连续函数 Ψ 和 Φ ，称为 c- 凸函数。

一个由形式推导得出的非常有用的性质是：如果 Ψ 是 c-凸的，并且 $(m,\ n)\in A\times B$，那么 $m\in\partial^c\Psi(n)$当且仅当 $n\in\partial^c\Psi^c(m)$。根据定义，$\partial^c\Psi$的梯度图是满足这两个性质的有序对 $(m,\ n)\in A\times B$的集合。利用不等式也可以给出梯度图的等价定义

$$\Psi(n)+\Psi^c(m)\geq\langle m,n\rangle \tag{16}$$

该不等式对所有（m， n） $\in A \times B$都成立。梯度图恰好由使（16）取等号的那些（m， n） $\in A \times B$ 构成。

最小化 I 的对偶问题 consiste 的是最大化以下量

$$J(\Psi) = -\int_A \Psi^c \mu_M - \int_B \Psi\nu$$

在所有 c-凸函数 Ψ 上。具体而言，利用 (14) 以及 (16) 成立取等号当且仅当 (m, n) 位于 $\partial^c\Psi$ 的图上这一事实，我们得到

(17)

$$I(\gamma) = -\int \langle m, n\rangle\gamma \geq -\int (\Psi(n) + \Psi^c(m))\gamma = -\int \Psi\nu - \int \Psi^c\nu = J(\Psi)$$

等号成立（这意味着 γ 和 Ψ 均为最优）当且仅当 γ 支撑在 $\partial\Psi$ 的图上。此外，强对偶性成立，而且这一条件实际上是最优性的必要条件。由此我们得到最优传输计划的以下刻画，后文将多次用到：

事实： 传输计划是最优的，当且仅当它支撑在某个 c-凸函数 Ψ 的 $\partial\Psi$ 图上（例如，参见 [维尔09]中的定理 5.10）。

注 4. 注意， Ψ^c 是满足以下条件的唯一函数：

$$\Psi(n) + \Psi^c(m) \geq \langle m, n\rangle$$

对于所有的（m， n） $\in A\times B$，以及每个 $m \in A$，某个 $n \in B$ 都能使等式成立。因此，要证明传输计划 γ 映射是最优的，只需构造一对函数（Φ， Ψ），使得 Ψ（n） $+\Phi$（m） $\geq \langle m$， $n\rangle$ 在 $A \times B$ 上处处成立，并且在 γ 的支撑上取等号。

注意，(15) 中的公式可用于分别将 Ψ^c 和 Φ^c 延拓到 $M_{\mathbb{R}}$ 和 $N_{\mathbb{R}}$。我们将这些延拓分别记为 Ψ^c 和 Φ^c，并在方便时将它们视为定义在 $M_{\mathbb{R}}$ 和 $N_{\mathbb{R}}$ 上的函数。注意，由于对于 c-凸函数，（Ψ^c）$^c = \Psi$ 且（Φ^c）$^c = \Phi$，因此可以将任意定义在 B 或 A 上的 c-凸函数规范地延拓到 $N_{\mathbb{R}}$ 或 $M_{\mathbb{R}}$。反过来，定义在 $N_{\mathbb{R}}$ 和 $M_{\mathbb{R}}$ 上的任意函数都可以分别限制为定义在 B 和 A 上的函数。事实证明，这些操作将定义在 B 和 A 上的 c-凸函数集合分别与 $\mathcal{P}$（Δ）和 $\mathcal{P}$（$\delta_h^\vee$）对应起来，正如下一个引理所证明的那样。

引理 10。 Ψ 上的下半连续函数： $B \to \mathbb{R}$ 是 c-凸的，当且仅当它是(Δ)中某个函数在 B 上的限制。

证明。假设 Ψ 是 c-凸的，即 $\Psi = \Phi^c$ 对于某个 $\Phi \in L^\infty(A)$。令$C = \sup_A |\Phi|$。那么

$$\Psi(n) = \sup_{m\in A} \langle m, n\rangle - \Phi(m) \leq \sup_{m\in A} \langle m, n\rangle + C$$

and

$$\Psi(n) = \sup_{m\in A} \langle m, n\rangle - \Phi(m) \geq \sup_{m\in A} \langle m, n\rangle - C$$

因此 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$。

反之，假设 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$，并令 $\Phi : M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 为凸下半连续函数 $\Psi|_{\Delta_h^\vee}$ 的勒让德变换，即

$$\Phi(m) = \sup_{n \in \Delta_h^\vee} \langle m, n\rangle - \Psi(n). \tag{18}$$

根据勒让德变换的对合性质，我们得到

$$\Psi(n) = \sup_{m \in M_{\mathbb{R}}} \langle m, n\rangle - \Phi(m). \tag{19}$$

我们声称，对每个 $n' \in B$，都存在 $m' \in A$，使得 n' 在 (18) 中取得上确界。为此，令 $n' \in B$, τ 为包含 n' 的 $\Delta_h^\vee$ 的一个面，且令 $m' \in \Delta$ 为 Ψ 在 n' 处的一个次梯度。由此可得，m' 是 $\Psi|_{\Delta_h^\vee}$ 在 n' 处的一个次梯度。根据 $\mathcal{P}(\Delta)$ 的标准性质，$m' \in \Delta$。对任意 $n \in \Delta_h^\vee$，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle p_\tau(m'), n\rangle - \Psi(n) &= \langle m', n\rangle - \Psi(n) + \langle p_\tau(m') - m', n\rangle \\
&= \langle m', n\rangle - \Psi(n) + \rho\langle m_\tau, n\rangle \\
&\le \langle m', n'\rangle - \Psi(n') + \rho\langle m_\tau, n'\rangle \\
&= \langle \pi_\tau(m'), n'\rangle - \Psi(n')
\end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为 $n' \in B$ 在 (18) 中取得上确界，且 $\langle m_\tau,\ n\rangle \le h(m_\tau) = \langle m_\tau,\ n'\rangle$。

根据上述断言，由勒让德变换的性质可知，对于任意 $n \in B$，存在 $m \in A$ 在（19）中达到上确界。因此，

$$\begin{aligned}
\Psi(n) &= \sup_{m \in m_{\mathbb{R}}} \langle m, n\rangle - \Phi(m) \\
&= \sup_{m \in A} \langle m, n\rangle - \Phi(m)
\end{aligned}$$

对于任意 $n \in B$。由此可得 $\Psi|_B = (\Phi|_A)^c$，因此 $\Psi|_B$ 是 c-凸的，从而完成引理的证明。□

由于 $\mathcal{P}(\Delta)$ 是凸的，引理 10 的一个推论是，c-凸函数空间是凸的。这在下面的引理中至关重要。

引理 11。若 Ψ 和 Ψ' 是 c-凸的，且满足

$$J(\Psi) = J(\Psi') = \sup J(\Psi)$$

则 $\Psi - \Psi'$ 是常数。

泛函 J 有时被称为 I 的康托罗维奇对偶，以纪念其最初的提出者。我们将 J 的唯一极大化者称为 ν 的康托罗维奇势。

引理 *11* 的证明。设 $\Psi_t = t\Psi' + (1-t)\Psi$ 和 $\Phi_t = \Psi_t^c$。注意，固定$m \in A$,

$$\Phi_t(m) = \sup_{n \in \Delta_h^\vee} \langle m, n\rangle - \Psi_t(n)$$

是仿射函数（关于 t）的上确界。因此， $\Phi_t(m)$ 关于t是凸的。此外， $\Phi_t(m)$ 关于 t 是仿射的，当且仅当存在 $n_m \in \Delta_h^\vee$ 使得

$$\Phi_t(m) = \langle m, n_m \rangle - \Psi_t(n_m)$$

对所有的 t，即 $\partial^c\Phi_0(m) \cap \partial^c\Phi_1(m)$ 非空。由于 Ψ 和 Ψ' 都是 J的最大化者，因此 $J(\Psi_t)$ 在 t中是仿射的，进而 $\partial^c\Phi_0(m) \cap \partial^c\Phi_1^c(m)$ 对几乎所有 m （关于 ν）都非空。

设 σ和 τ分别是 A和 B的面，且 α和 β是（σ, τ）-相容坐标图。由引理 9可知，对几乎所有 $m \in \sigma$， $\partial(\Phi_0 \circ \alpha^{-1})(\alpha(m)) \cap \partial(\Phi_1 \circ \alpha)(\alpha(m))$ 非空。由于 $\Phi_0 \circ \alpha^{-1}$ 和 $\Phi_1 \circ \alpha$是凸的，它们的次梯度几乎处处单值。因此，对几乎所有 $m \in \sigma^\circ$， $\partial(\Phi_0 \circ \alpha^{-1})(\alpha(m)) = \partial(\Phi_1 \circ \alpha)(\alpha(m))$。由此可知（例如参见 [HJMM22], 引理 5.3）， $\Phi_0 \circ \alpha - \Phi_1 \circ \alpha$ 为常数。将此应用于 Δ 的所有面 σ，由 Φ_0 和Ψ_1 的连续性可得 $\Phi_0 - \Psi_1$ 为常数，故 $\Psi - \Psi'$ 为常数。□

7. Monge-Ampère Equation

注意，若 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$，且 σ 是 Δ的一个面，则 Ψ^c 在 σ°上定义了一个凸函数。给定 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$，我们将 $R_\Psi \subset A^\circ$ 记为满足以下条件的 $m \in \sigma^\circ \subset A^\circ$ 所构成的集合： $\partial\Psi^c|_{\sigma^\circ}$ 是单值的。注意，由于凸函数几乎处处可微，我们得到 $|\nu(R_\Psi \cap \sigma)| = |\alpha(R_\Psi \cap \sigma)| = |\alpha(\sigma)| = \nu(\sigma)$，因此 $\nu(R_\Psi) = \nu(A)$。

引理 12. 存在一个可测函数 $T_\Psi : R_\Psi \to (\Delta_h^\vee)_d$，其图是 $R_\Psi \times (\Delta_h^\vee)_d$、(3) 与 $\partial^c\Psi$的图的交集。

证明。设 σ 是 Δ 的一个面，且 $m \in R_\Psi \cap \sigma^\circ$。根据引理 9，若 $n \in \cup_{m' \in \sigma \cap M} \tau_{m'}$，则 $n \in \partial^c\Psi^c(m)$ 当且仅当

$$\beta_\sigma(n) \in \partial(\Psi|_\sigma \circ \alpha^{-1})(\alpha(n)).$$

根据推论 3， $\partial^c\Psi^c(m) \cap (\cup_{m' \in \sigma \cap M} \tau_{m'})$ 非空。由于 $\partial(\Psi|_\sigma \circ \alpha^{-1})$ 在 $\alpha(R_\Psi \cap \sigma^\circ)$ 上是单值的，我们得到该表达式

$$T_\Psi(m) = \beta_\sigma^{-1}(\partial(\Psi^c \circ \alpha^{-1})(\alpha(m))$$

是良定义的。

根据构造， $T_\Psi(m) \in \cup_{m' \in \sigma \cap M} \tau_{m'}$ if $m \in \sigma \cap R_\Psi$，因此 T_Ψ 的图包含于 (3) 中。此外，根据引理 9， $m \in \partial^c\Psi(n)$ if $\partial(\Psi^c \circ \alpha^{-1})(\alpha(m)) = n$，因此 T_Ψ 的图包含于 $\partial\Psi$ 的图中。显然， T_Ψ 的图包含于 $R_\Psi \times B$ 中。

反之，假设 (m, n) 属于 (3) 与 $\partial^c\Psi$ 的图和 $R_\Psi \times B$ 的交集。由 $m \in R_\Psi$，我们得到 T_Ψ 在 m 处有定义，且对于某个 $\sigma \in A_d$，有 $m \in \sigma$。由于 $(m, n) \in$ (3)，我们得到 $n \in \cup_{m' \in \sigma \cap M} \tau_{m'}$；又由于 $n \in \partial\Psi^c(m)$，我们可以应用引理 9，选取与 (σ, τ) 相容的 $(\alpha_\tau, \beta_\sigma)$，从而得到 $\beta_\sigma(m) \in \partial(\Psi^c \circ \alpha^{-1})(\alpha_\tau(m))$。由此可得 $n = T_\Psi(m)$，因此 (m, n) 属于 T_Ψ 的图。□

推论 5。 假设 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$，并且 γ 是一个从 ν 到 μ_M、支撑在 (3) 与 $\partial^c\Psi^c$ 的图的交集上的传输计划。那么

$$(T_\Psi)_{\#}\mu_M = \nu.$$

证明。 注意到

$$\gamma(R_\Psi \times B) = \nu(R_\Psi) = \mu_M(A) = \gamma(A \times B),$$

因此 γ 集中于 $R_\Psi \times B$。结合引理 9 和上述假设，γ 集中于 T_Ψ的图。设 $E \subset \tau^\circ$ 为一个可测集。对于图中的任意 $(m,\ n)$，若 T_Ψ，则当且仅当 $m \in T^{-1}(E)$ 时有 $n \in E$，因此

$$\nu(E) = \gamma(A \times E) = \gamma(T_\Psi^{-1}(E) \times B) = \nu(T_\Psi^{-1}(E))$$

从而证明了该推论。 □

定理 *1* 的证明。 设 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$ 为 ν 的康托罗维奇势，并假设存在一个从 μ_M 到 ν、集中于 (3) 的最优传输计划 γ。现在我们将证明 Ψ 满足 (4)。设 T_Ψ 为引理 12 给出的映射。

假设 $\sigma \in A_d$、$\tau \in B_d$ 和 $(\alpha_\tau,\ \beta_\sigma)$ 是 $(\sigma,\ \tau)$-相容的。设 $E \subset \tau^\circ$为一个可测集。根据引理 9，我们得到

$$\partial(\Psi \circ \beta^{-1})(\beta(E)) = \alpha(\partial^c\Psi(E) \cap \mathrm{St}(m_\tau))$$

因此

$$\begin{aligned} |\partial(\Psi \circ \beta^{-1})(\beta(E))| &= \mu_M(\partial^c\Psi(E) \cap \mathrm{St}(m_\tau)) \\ &= \mu_M(\partial^c\Psi(E) \cap \mathrm{St}(m_\tau) \cap R_\Psi) \quad (20) \\ &= \mu_M(T_\Psi^{-1}(E)) \quad (21) \\ &= \nu(E) \quad (22) \end{aligned}$$

其中，(20) 和 (21) 由引理 12 得出，而 (22) 由推论 5 得出。

反过来，假设 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$ 满足 (4)。我们需要证明 ν 存在一个集中于 (3) 上的最优传输计划。设 T_Ψ 为引理 12 给出的映射。取 $\sigma \in A_d,\ \tau \in B_d$，使得 $m_\tau \in \sigma$，且存在一个可测集 $E \subset \tau^\circ$。如上应用引理 12，得到

$$\begin{aligned} \nu(E) &= |\partial(\Psi \circ \beta^{-1})(\beta(E))| \\ &= \mu_M(\partial^c\Psi(E) \cap \mathrm{St}(m_\tau)) \\ &= \mu_M(\partial^c\Psi(E) \cap \mathrm{St}(m_\tau) \cap R_\Psi) \\ &= \mu_M(T_\Psi^{-1}(E)). \quad (23) \end{aligned}$$

由于 ν 不给 B_{d-1} 赋正测度，因此

$$\nu = (T_\Psi)_{\#}\mu_M|_{B^\circ}$$

并且由于 ν 和 $(T_\Psi)_{\#}\mu_M$ 具有相同的总质量，我们可以得出$\nu = (T_\Psi)_{\#}\mu_M$，因此 $\gamma := (id,\ T_\Psi)_{\#}\mu_M$是从 ν到 μ_M的传输计划。此外，γ 支撑在 T_Ψ 的图上，而该图包含于

$\partial^c\Psi$ 的图中，这是由 T_Ψ的构造得出的，因此 γ 是最优的。最后，由于 T_Ψ 的图包含于 (3)，γ 支撑在 (3) 上。

关于唯一性，设 Ψ，$\Psi' \in \mathcal{P}(\Delta)$ 是方程 (4) 的两个解。根据上述构造，存在从 ν 到 μ_M 的最优传输计划 γ 和 γ'，分别支撑在 $\partial^c\Psi$ 和 $\partial^c\Psi'$ 的图上，因此 Ψ 和 Ψ' 都是 ν 的康托罗维奇势，即 J 的极大化者。根据引理 11，$\Psi - \Psi'$ 是常数。□

注 5. 注意，对于任意 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$，映射 T_Ψ 都存在，并且几乎处处单值。因此，它起到了通常的 c-梯度 Ψ^c 的一个更正则版本的作用。定理 1 证明中的主要技术要点是，$(T_\Psi)_\#\mu_M = \nu$ 当且仅当 (Δ, h, ν) 稳定。

8. Tropical Affine Structure and Monge-Ampère Equation Outside B°

现在我们将说明如何把热带仿射结构和 Monge-Amp`ere 方程 (4) 延拓到比 B° 更大的集合上。正如第 3 节所述，对于 Δ 的任一面 σ，都有一个定义在

$$\cup_{m\in\sigma}\tau_m \subset B \tag{24}$$

（见第 3 节）上的自然坐标函数 $\beta_{\sigma'}$。这些坐标函数与 B° 上的热带仿射结构相容。然而，如果 Δ 的另一个面是 σ'，那么一般而言，$\beta_\sigma \circ \beta_{\sigma'}^{-1}$ 在 $\beta_{\sigma'}($$B_{d-1}$) 上并非仿射，其中 $B_{d-1} = B \setminus B^\circ$ 是 B 的 $d-1$ 维面的并集。尽管如此，给定一族两两不交集 $\{U_\sigma\}_{\sigma\in A_d}$，其中 A_d 是 Δ 的面集，且每个 U_σ 都是 (24) 的一个（可能为空的）开子集，我们便可在 $B^\circ \cup(\cup_{\sigma\in B_d}U_\sigma)$ 上得到一个热带仿射结构。我们将此集合的补集称为奇异集，并将其记作

$$\Sigma = B_{d-1} \setminus (\cup_{\sigma\in A_d}U_\sigma)$$

此外，若 $\Phi \in \mathcal{P}(\Delta)$，则根据引理 6，任意 $\sigma \in A_d$ 和 $m \in \sigma$ 都会在 U_σ 上定义一个函数 $(\Phi - m)|_{U_\sigma}$，该函数相对于 $B \setminus \Sigma$上的热带仿射结构是凸的。这确定了一个 Monge-Amp`ere 测度 $\mathrm{MA}((\Phi - m)|_{U_\sigma})$，对于 $\Delta_h^\vee$的任意面 $\tau$，该测度在 $\tau^\circ \cap U_\sigma$上与 $\mathrm{MA}(\Phi|_{\tau^\circ})$一致。给定数据 $\nu$、$\{U_\sigma\}_{\sigma\in B_d}$ 和 $\Sigma$，这促使我们在 $B \setminus \Sigma$上考虑以下 Monge-Amp`ere 方程：

定义 3. 设 ν 是 B 上的一个正测度，$\{U_\sigma\}_{\sigma\in A_d}$ 是如上所述的一组坐标图，其奇异集为 Σ。那么，若 $\Phi \in \mathcal{P}(\Delta)$满足

$$\mathrm{MA}(\Psi|_{B^\circ}) = \nu|_{B^\circ}$$

并且对于 Δ 和 $m \in \sigma$的每个面 σ，

$$\mathrm{MA}((\Psi - m)|_{U_\sigma}) = \nu|_{U_\sigma}. \tag{25}$$

原则上， $\{U_\sigma\}_{\sigma\in A_d}$的选择有很大的自由度。当 Δ 是标准单位单纯形时， $h=h_0$ 和 ν 在 n_0的顶点置换下保持不变， $\dots n_{d+1}$ $\Delta_h^\vee=\delta^\vee$ ，因此，利用对称性， $\{U_\sigma\}_{\sigma\in A_d}$ 和 Σ 的一个自然选择是

$$U_{\sigma_j}:=\left\{\sum_{i=0}^{d+1}\beta_i n_i\in B,\beta_j>\beta_i \text{ for all } i\neq j\right\}$$

其中，对于每个 i， σ_i 是与顶点 n_i 对偶的 Δ 的面（参见 Li22a，HJMM22] 中的 [) 。当 $d=2$ 时，这一选择使得 Σ 为 $\Delta_h^\vee$ 的边的中点 $\{(n_i+n_j)/2\}_{i\neq j}$; 而对于 $d\geq 2$， Σ 是余维 2 的集合

$$\Sigma=\left\{\sum_{i=0}^{d+1}\beta_i n_i\in B_{d-1},\beta_j=\beta_k=\max\beta_i,\ \text{for some distinct } i,j\right\}.$$

当 $d=3$ 时，会出现所谓的 Y 形奇点。在所有这些例子中， Σ的余维都是 2。

本文的一个目的在于指出，在缺乏对称性的情况下， $\{U_\sigma\}_{\sigma\in B_d}$ 和 Σ 需要根据 ν 来选择，因此 Σ 在定义 3 的偏微分方程问题中起到自由边界的作用。基于这一思路，给定 ν，我们提出一种基于 ν 的康托罗维奇势来选择 $\{U_\sigma\}_{\sigma\in B_0}$ 和 Σ 的方案，即 I 的唯一极小化子（参见第 6 节）。

定义 4. 设 ν 是定义在 B 上的正测度，其质量为 $\mu_M(A)$。我们将$\{U_\sigma\}_{\sigma\in A_d}$ 和 Σ 定义为

$$U_\sigma=U_{\sigma,\Psi}:=B\setminus\partial^c\Psi^c(A\setminus\sigma_n^\circ)$$

以及 $\Sigma=\Sigma_\Psi:=B_{d-1}\setminus(\cup U_\sigma)$，其中 Ψ 是 ν的康托罗维奇势。

由 Ψ、Ψ^c 的连续性以及 Δ 的紧致性可知， $\partial^c\Psi^c(A\setminus\sigma_n^\circ)$ 是闭集，因此 U_n 是开集。此外，根据 c-梯度的单调性性质， $U_n\subset\mathrm{St}(n)^\circ$ （见引理 13）。我们选择 $\{U_\sigma\}_{\sigma\in B_d}$ 和 Σ的主要动机由下文的引理 15 和定理 2 给出。前者指出，方程 (4) 的解可以延拓为 $B\setminus\Sigma$上的一个解，其意义见定义 3； 后者则讨论了引言中关于 Σ_Ψ 的第二个要点。

引理 13. 令 $\Phi\in\mathcal{P}(\Delta)$， σ 为 Δ 的一个面， U_σ 为定义 *4* 中相应的坐标图。则 $U_\sigma\subset\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$。

证明。假设 $n\notin\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$。这意味着对于某个 τ，有 $n\in\tau$，且满足$m_\tau\notin\sigma$。由此可知， σ 不是 $\mathrm{St}(m_\tau)$ 的子集。另一方面，根据推论 3， $\partial^c\Psi(n)$ 包含某个 $m'\in\mathrm{St}(m)$。因此，对于某个 $\sigma'\neq\sigma$，有 $m'\in\sigma'$，从而 $n\notin U_\sigma$。□

定理 2. 设 ν 是 B 上的一个正测度， Ψ 是其 *Kantorovich* 势。若存在一个从 μ_M 到 ν、且支撑于

$$\cup_{m\in A\cap M}\left(\mathrm{St}(m)\times\tau_m\right) \tag{26}$$

则 Ψ 在 $B\setminus\Sigma_\Psi$上满足定义 *3* 中的 ***Monge-Amp`ere*** 方程。此外，若 $\Psi\in\mathcal{P}(\Delta)$ 满足定义 *3* 中的 ***Monge-Amp`ere*** 方程，且ν 不赋予 Σ_Ψ 正测度，则存在一个从 μ_M 到 ν、支撑于 (26)的最优传输计划；若 Ψ' 是定义 *3* 的另一个解，且 ν不赋予 $\Sigma_{\Psi'}$正测度，则 $\Sigma_\Psi=\Sigma_{\Psi'}$ 与 $\Psi-\Psi'$ 相差一个常数。

为证明定理 2，我们将先陈述并证明一个引理。对于坐标图 U_σ，该引理将发挥与引理 9 对开面 τ° 所起作用相同的作用。

引理 14（比较 ∂与 ∂^c 在 U_σ上）。假设 $\Phi\in P(\Delta)$，σ 是Δ 的一个面，且 τ 是 $\Delta_h^\vee$ 的一个面。取定义 *4* 中的 U_σ，以及相容的（α_τ，β_σ）和（σ，τ）。假设 $m_0\in\sigma$ 和 $n\in U_\sigma$。那么 α_τ 定义了从 $\partial^c\Psi(n)$ 到 $\partial((\Psi-m_\tau)\circ\alpha_\tau^{-1})$ 的一个双射。

证明。首先，根据定义，$U_\sigma=B\setminus\partial^c\Psi^c(A\setminus\sigma^\circ)$，因此 $n\in U_\sigma$ 当且仅当不存在满足 $\partial^c\Psi^c(m)\ni n$ 的 $m\in A\setminus\sigma^\circ$；等价地，$m\in\partial^c\Psi(n)$。由此可得 $\partial^c\Psi(U_\sigma)\subset\sigma^\circ$。

如引理 9 的第一个断言所示，对于任意 $n\in U_\sigma$，可得 $\partial((\Psi-m_\tau)\circ\alpha_\tau^{-1})(\alpha(n))\subset\alpha(\sigma^\circ)$。为此，令 $\Psi=\Phi^*$ 表示 $\Phi\in L^\infty(\Delta)$，并注意到由于 $\partial^c\Psi(U_\sigma)\subset\sigma^\circ$

$$\begin{aligned}(\Psi-m_\tau)\circ\alpha_\tau^{-1})(n) &= \Psi(n)-\langle m_0,n\rangle\\ &= \sup_{m\in\Delta}\langle m-m_\tau,n\rangle-\Phi(m)\\ &= \sup_{m\in\Delta}\langle\alpha_\tau(m),\beta_\sigma(n)\rangle-\Phi(m),\end{aligned}$$

因此，$(\Psi-m_\tau)\circ\alpha_\tau^{-1})$ 可以写成仿射函数的逐点上确界，其线性部分属于 $\alpha_\tau(\sigma^\circ)$。

现在只需证明，若 $m\in\sigma^\circ$ 和 $n\in U_\sigma$，则 $\partial((\Psi-m_\tau)\circ\alpha_\tau^{-1})(\alpha(n))$ 当且仅当 $m\in\partial^c\Psi(n)$。这与引理 9 的证明类似。更确切地说，令 $m\in\partial^c\Psi(n)$。我们有

$$\begin{aligned}(\Psi-m_\tau)\circ\beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n')) &= \Psi(n')-\langle m_\tau,n'\rangle\\ &\geq \Psi(n)-\langle m_\tau,n\rangle+\langle m,n-n'\rangle-\langle m_\tau,n'-n\rangle\\ &= \Psi(n)-\langle m_\tau,n\rangle+\langle m-m_\tau,n'\rangle-\langle m-m_\tau,n\rangle\\ &= (\Psi-m_\tau)\circ\beta_\sigma^{-1}(\beta_\sigma(n))+\langle\alpha_\tau(m),\beta_\sigma(n')-\beta_\sigma(n)\rangle,\end{aligned}$$

因此 $\alpha(m)\in\partial((\Psi-m_\tau)\circ\beta_\sigma^{-1})(\beta_\sigma(n))$。反向结论也可用同样的方法证明。□

定理 *2* 的证明。假设 ν 存在一个最优传输计划 γ 至 μ_M，其支撑包含于 (3) 上。仿照定理 1 的证明进行类似计算，可由方程 (20)、(21) 和 (22) 得出，康托罗维奇势 Ψ满足 (4)。接下来只需验证 (25)。设 $\sigma\in A_d$，$\tau\in B_d$ 使得 $m_\tau\in\sigma$和 $E\subset U_\sigma$ 可测。由引理 14 可得

$$\partial((\Psi-m_0)\circ\beta)(\beta(E))=\alpha(\partial^c(E))$$

因此

$$
\begin{aligned}
|\partial((\Psi - m_0)\circ\beta)(\beta(E))| &= \mu_M(\partial^c\Psi(E)) \\
&= \mu_M(\partial^c\Psi(E)\cap R_\Psi) \qquad (27)\\
&= \mu_M(T^{-1}(E)) \qquad (28)\\
&= \nu(E). \qquad (29)
\end{aligned}
$$

现在假设 $\Psi \in \mathcal{P}(\Delta)$ 满足定义 3 中的 Monge-Amp`ere 方程，且 ν 不赋予 Σ_Ψ质量。与定理 1 的证明一样，令 T_Ψ为引理 12 给出的映射。对于可测集 $E \subset U_n$，我们有

$$
\begin{aligned}
\nu(E) &= |\partial((\Psi - m)\circ\beta^{-1})(\beta(E))| \\
&= \mu_M(\partial^c\Psi(E)) \\
&= \mu_M(\partial^c\Psi(E)\cap R_\Psi) \\
&= \mu_M(T_\Psi^{-1}(E)).
\end{aligned}
$$

由于 ν 不赋予 Σ_Ψ质量，因此

$$\nu = (T_\Psi)_\#\mu_M|_{B^\circ}$$

又因为 ν 和 $(T_\Psi)_\#\mu_M|_{B^\circ}$ 具有相同的总质量，我们得出$\nu = (T_\Psi)_\#\mu_M$ 和 $\gamma := (id, T_\Psi)_\#\mu_M$ 如定理 1 的证明中所述，给出了一个支撑在 (3) 上的最优传输计划。

为证明唯一性，设 $\Psi, \Psi' \in \mathcal{P}(\Delta)$ 是定义 3 中 Monge-Amp`ere 方程的两个解，使得 ν 不赋予 Σ_Ψ 或 $\Sigma_{\Psi'}$质量。根据上述构造，存在从 ν 到 μ_M 的最优传输计划，分别支撑在 $\partial^c\Psi$ 和 $\partial^c\Psi'$的图上，因此 Ψ 和 Ψ' 都是 ν的 Kantorovich 势函数，即 J的最大化者。由引理 11，$\Psi - \Psi'$ 为常数。□

现在我们将陈述并证明一个引理，它基本上回答了引言中关于 Σ_Ψ 的第二个要点（假设极小性时的唯一性）。该引理指出，若 Σ_Ψ 是极小的，而 Σ' 是另一个按定义 3 前文讨论所述方式定义的热带仿射结构的奇异集，那么尽管弱 Monge-Amp`ere 方程可能在 $B \setminus \Sigma$上成立，该解仍不可微。

引理 15。假设 Σ_Ψ 是极小的，即不存在闭集 $\Sigma' \subset \Sigma_\Psi$，使得 $B \setminus \Sigma$ 上的热带仿射结构可延拓至 $B \setminus \Sigma'$，且 ***Monge-Amp`ere*** 方程在 $B \setminus \Sigma'$上成立。设 $\{U'_\sigma\}_{\sigma\in A_d}$和 Σ' 分别为一组坐标图和一个奇异集，且 Σ_Ψ 不是 Σ'的子集。那么存在 σ 和 $n \in U'_\sigma$，使得$(\Psi - m_0)|_{U'_\sigma}\circ\beta_\sigma^{-1}$在 n 处不可微，其中$m_0 \in \sigma$。

证明。由引理的假设可知，存在一个由 σ 构成的面 Δ 和 $n \in U'_\sigma \cap \Sigma_\Psi \subset B_{d-1}$。现在，要么 n 在 B_{d-1} 中有一个邻域 U_n，使得 $\partial\Psi(U_n) \subset \sigma$；要么存在 $n' \in U'_\sigma$ 和 $m \in \partial^c\Psi(n)$，使得 $m \notin \sigma$。若前者成立，则对于任何不同于 σ 的面 σ'，U_n 都不与 $U_{\sigma'}$ 相交。此外，按照证明定理 2 时的相同方法应用引理 14，

可以证明，$(\Psi - m) \circ \alpha_\sigma^{-1}|_{U_n}$ 在 U_n 上满足 Monge-Amp`ere 方程，因此可以将 U_n 加入 U_σ，这与 Σ_Ψ 的极小性矛盾。

在后一种情况下，我们有 $m \in \partial^c\Psi(n')$。我们将使用引理 6 的证明中的记号。令 $m_0 \in \sigma$。注意，$(\Psi - m_0) \circ \beta^{-1} \geq (m - m_0) \circ \beta^{-1}$，且在 $\beta(n')$ 处取等，因此只需证明 $(m - m_0) \circ \beta^{-1}$ 是凸的，并且在 $\beta(n')$ 处不可微；或者等价地，证明 $(m - m_0) \circ l$ 在 $n' \in H$ 处不可微。但这显然成立，因为

$$\begin{aligned}(m - m_0) \circ l(n) &= \langle m - m_0, n - h(n')n_\sigma\rangle \\ &= \langle m - m_0, n'\rangle - h(n')\langle m - m_0, n_\sigma\rangle,\end{aligned}$$

h 是一个分段仿射凸函数，其不可微轨迹恰好是 $\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$ 的余维 1 骨架，因此包含 n'，并且$\langle m - m_0,\ n_\sigma\rangle < 0$ 因为 $m \notin \sigma$。□

注 6. 控制 Σ_Ψ 的大小与Ψ的正则性理论有关。关于 Monge- Amp`ere 方程解的正则性与镜像对称之间关系的有趣进展，见 [Moo21, MR22]。

现在我们将陈述并证明一个定理，该定理给出了保证解在 $B \setminus \Sigma_\Psi$ 上光滑的充分条件。

定理 3. 考虑稳定数据 (Δ, h_0, ν_N)（或者更一般地，(Δ, h_0, ν)，使得对于 Δ 的所有面 σ，$(\beta_\sigma)_\#\nu|_{\mathrm{St}(\sigma)}$ 都绝对连续，且其密度光滑、一致非负并且一致有界）。

假设对于 $\Delta^\vee$ 的任意面 τ，

$$\alpha_\tau\left(\overline{\partial^c\Psi(\tau^\circ)}\right)$$

是凸的。那么 Ψ 在 B° 上光滑。

此外，若对于 Δ 的任意面 σ，集合

$$F_\sigma := \overline{\partial^c\Psi^c(\sigma^\circ)}$$

满足 $F_\sigma \subset \mathrm{St}(n_\sigma)$、$\partial^c\Psi(F_\sigma^\circ) \subset \sigma$ 且 $\beta_\sigma(F_\sigma)$ 为凸，则 $U_\sigma = F_\sigma^\circ$ 且 $\Psi - m$ 在 U_σ 上光滑；对于 Δ 的每个面 σ 以及 $m \in \sigma$，也就是说，Ψ 在 $B \setminus \Sigma_\Psi$上定义了一个光滑的 *Hessian* 度量。

注 7. 我们将在引理 16 和引理 17 中说明，如何利用数据（Δ, h, ν）的对称变换来验证定理 3 中的条件。

定理 3 的证明。 对于第一部分，请注意，数据的稳定性意味着 $u := \Psi \circ \beta_\sigma^{-1}$限制在 $\beta_\sigma(\tau)$ 上时满足 Monge-Amp`ere 方程，其意义如注 1 所述，即在亚历山德罗夫意义下。此外，根据引理 9

$$\overline{\partial u(\beta_\sigma(\tau^\circ))} = \alpha_\tau\left(\overline{\partial^c\Psi(\tau^\circ) \cap \mathrm{St}(m_\tau)}\right) = \alpha_\tau(\overline{\partial\Psi(\tau^\circ)}),$$

其中第二个等式由引理 1 给出。根据假设，该集合是凸的。因此，由 [Caf97] 可知，u 在 $\beta_\sigma(\tau^\circ)$ 上光滑，且 Ψ 在 τ° 上光滑。

对于第二部分，注意到由于 $F_\sigma \subset \mathrm{St}(n_\sigma)$，按照定理 1 的证明中相同的方式应用引理 9，可得 $\Phi = \Psi^c$ 满足一个 Monge-Amp`ere 方程，其在 σ° 上具有光滑、一致非负且一致有界的密度。此外，由于 $\beta_\sigma(F_\sigma)$ 是凸的，$v := \Phi \circ \alpha_\tau^{-1}$ 光滑且严格凸。又由于 $\partial^c\Psi(F_\sigma^\circ) \subset \sigma$，由引理 9 和引理 14 可知，$\partial^c\Psi$ 在 F_σ° 上是单值且单射的。此外，由于 $\partial^c\Psi(F_\sigma^\circ) \subset \sigma$，按照定理 2 的证明中相同的方式应用引理 14，可得

$$u_\sigma = (\Psi - m) \circ \beta_\sigma^{-1}$$

在亚历山德罗夫意义下满足 Monge-Amp`ère 方程于 $\beta_\sigma(F_\sigma^\circ)$ 上。由于 $\partial^c\Psi$ 在 F_σ° 上是单值且单射的，我们可以应用引理 14 得出 u_σ 是严格凸的，因此在 F_σ° 上光滑。

为证明 $U_\sigma = F_\sigma^\circ$，假设 $n \in F_\sigma^\circ$，并注意到由 u_σ 的光滑性，$\partial^c\Psi(n)$ 是单值的且包含于 σ°，因此 $n \in U_{\sigma\circ}$。反过来，假设 $n \in U_{\sigma\circ}$。可得 $\partial^c\Psi(n) \subset \sigma^\circ$。令 $m \in \partial^c\Psi(n) \cap \sigma^\circ$。由于 u_σ 的勒让德变换的梯度将 $\alpha_\tau(\sigma^\circ)$ 同胚映射到 $\beta_\sigma(F_\sigma^\circ)$，我们得到 $\beta_\sigma(n) \in \beta_\sigma(F_\sigma^\circ)$，因此 $n \in F_\sigma^\circ$。□

9. Examples

与前几节一样，我们令 $e_0, \dots, e_d$ 为 M 的一组生成元，令 $f_0, \dots, f_d$ 为 N 的一组生成元。我们用 h_0 表示由 $h_0(0) = 0$ 和 $h_0(m) = 1$（$m \neq 0$）定义的平凡高度函数。为便于进行明确计算，我们还将 μ_M 的总质量归一化为 1，因此 ν_N 也为 1。

9.1.离散对称性下的存在性与光滑性。 如果 (Δ, h, ν) 具有较强的对称性，通常就可以验证稳定性，进而验证解的存在性。接下来的两个引理将说明如何将这一点应用于标准单位单纯形和单位立方体。此外，在这些例子中，对称性对梯度提供了足够的控制，因此当 $\nu = \nu_N$ 时，可以利用定理 3 证明解是光滑的。Li22a、HJMM22] 中也以类似方式利用对称性，证明了单位单纯形上（弱）解的存在性。

引理 16. 令 Δ 为标准单位单纯形

$$\Delta = \mathrm{conv}\left\{(d+1)e_0 - \sum_{i\neq 0} e_i, \dots, (d+1)e_d - \sum_{i\neq d} e_i, -\sum_{i=0}^{d} e_i\right\}$$

且 $h = h_0$。假设 ν 在 B 的顶点置换下不变，且不赋予 B_{d-1}质量。则 *Monge-Amp`ere* 方程 (4) 有解。

此外，如果 $\nu = \nu_N$（或者更一般地，对于任意 $\sigma \in \mathcal{V}(\Delta^\vee)$，$(\beta_\sigma)_\# \nu|_{\mathrm{St}(\sigma)}$绝对连续，且密度光滑、均匀非负并且一致有界），那么该解在集合之外是光滑的

$$\Sigma_s := \{x \in B : \beta_k = \beta_l = 0, \beta_i = \beta_j = \max_p \beta_p, k \neq l \neq i \neq j\}$$

其中 β_i 的定义是将 x 唯一地写成 $\Delta^\vee$的顶点的凸组合，即 $x = \sum_{i=0}^{d+1} \beta_i n_i$，其中 n_i是 $\Delta^\vee$ 的顶点，且$\sum_{i=0}^{d} \beta_i = 1, \beta_i \geq 0 \forall i$ （当 $d = 1$, Σ_s 为空，且当 $d = 2$, Σ_s 是每条边的中点时）。此外 $\Sigma_s = \Sigma_\Psi$。

证明。设 $m_0, \ldots, m_{d+1}$ 是引理陈述中所述顺序的 Δ 的顶点，并设 $n_0, \ldots, n_{d+1}$ 是 $\Delta^\vee$ 的顶点，按下文描述的顺序排列:

$$\Delta^\vee = \operatorname{conv}\left\{-f_0, \ldots, -f_d, \sum_{i=0}^{d} f_i\right\}.$$

若 $i \neq j$，且对每个 i 都有 $\langle m_i, n_i \rangle = -(d+1)$，则 $\langle m_i, n_j \rangle = 1$。

现在，令 Ψ 为 ν 的康托罗维奇势。由于 J 的极大化者唯一， Ψ 是对称的。因此， $\partial^c \Psi$ 的图是对称的。我们声称， $\partial^c \Psi$ 的图包含于集合

$$\cup_{i=0}^{d} \tau_{m_i} \times \mathrm{St}(m_i). \tag{30}$$

为此，假设 (m, n) 属于 $\partial^c \Psi$ 的图，但不属于 (30)。不失一般性，假设 $n \in \tau_{m_0} = \mathsf{conv}\{n_1, \ldots, n_d\}$ 且 $m \in \sigma_{n_0}^\circ = \mathsf{conv}\{m_1, \ldots, m_d\}^\circ$。由此可得

$$m = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i m_i \quad n = \sum_{i=1}^{d} \beta_i n_i$$

对某些 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d > 0$ 以及 $\beta_1, \ldots, \beta_d \geq 0$，使得 $\sum \alpha_i = \sum \beta_i = 1$。对于某个 j，我们有 $\beta_j > 0$。令 F_{0j} 和 G_{0j} 分别为作用在 A 和 B 上的映射，分别交换 m_0 与 m_j，以及 n_0 与n_j。由对称性可知，点对 $(F_{0j}(m)\ G_{0j}(n))$ 也在 $\partial^c \Psi$ 的图中。然而，

$$\begin{aligned} \langle F_{0j}(m) - m, G_{0j}(n) - n \rangle &= \langle \alpha_j(m_0 - m_j), \beta_j(n_0 - n_j) \rangle \\ &= -\alpha_j \beta_j (2d + 4) \\ &< 0 \end{aligned}$$

这与 $\partial^c \Psi$ 的单调性矛盾。关于在各面内部存在 Monge-Amp´ere 方程 4 的解，请参见定理 1。

关于正则性问题，我们将参照定理 3。具体而言，我们断言，对于每个面 τ_{m_i}

$$\partial^c \tau_{m_i}^\circ \subset \{x \in \mathrm{St}(m_i) : \alpha_i \geq \alpha_j, \forall j\} := \mathrm{SmSt(m_i)}. \tag{31}$$

这里， α_i 的定义是将 $x = \sum_{i=0}^{d+1} \alpha_i m_i$ 唯一地写成 $\sum_{i=0}^{d} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0 \forall i$。为证明这一结论，反设点（$n$, m）处结论不成立。

不失一般性，可分为两种情况。第一种情况下， $n \in \tau_{m_0} =$conv$\{n_1, \ldots, n_d\}$ 且 $m \in \sigma^\circ_{n_0} =$ conv$\{m_1, \ldots, m_d\}^\circ$，但这与 $\partial^c\Psi$ 的图的单调性矛盾，这一点可由前面的论证得出。

在第二种情况下，我们假设 $n \in \tau_{m_0} =$conv$\{n_1, ..., n_d\}^\circ$ and$m \in$conv $\{m_0, m_1, ..., m_{d-1}\}$，并进一步假设在写成

$$m = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i m_i$$

我们有 $\alpha_0 < \alpha_j$，其中 $j \in \{1, \ldots d-1\}$、 $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i = 1$ 和 $\alpha_i \geq 0\ \forall i =$ 0，1， $\ldots d$。我们还记

$$n = \sum_{i=1}^{d} \beta_i n_i$$

其中 $\sum_{i=1}^{d} \beta_i = 1$，且 $\beta_i > 0\ \forall i = 1,$ ....., d。令 F_{0j} 和 G_{0j} 如前定义。根据对称性可知，数对 $(F_{0j}(m)\ G_{0j}(n))$ 也在 $\partial^c\Psi$ 的图中，此外 $F_{0j}($ $m) \in \tau^\circ_{m_j}$。然而，

$$\begin{aligned}\langle F_{0j}(m) - m, G_{0j}(n) - n\rangle &= \langle \alpha_0(m_j - m_0) + \alpha_j(m_0 - m_j), \beta_j(n_0 - n_j)\rangle \\ &= -(\alpha_j - \alpha_0)\beta_j(2d+4) < 0\end{aligned}$$

这与 $\partial^c\Psi$ 的单调性矛盾。接下来注意到，集合 $\tau^\circ_{m_i}$ 和 SmSt$(m_i)^\circ$ 由于对称性而具有相同的质量，并且 ν 和 μ 都不在余维 1 的集合上赋予质量。因此

$$\overline{\alpha_{m_i}(\partial^c\Psi(\tau^\circ_{m_i}))} = \alpha_{m_i}(\mathrm{SmSt}(m_i))$$

它是凸的；其证明推迟到引理 18，因此我们可以使用定理 3 的第一部分。

为了在更大的集合上获得正则性，我们利用标准单纯形情形下额外存在的一种对称性。虽然 Δ 不是幺模自对偶的，却是仿射自对偶的。更进一步，将 Δ 双射到 $\Delta^\vee$ 的仿射映射，会将每个面的格诱导的体积元乘以同一个常数。通过这种对称性互换 Δ 和 $\Delta^\vee$ 的角色，我们由此证明，对于 Δ 的任意面 σ，集合

$$\beta_\sigma(\overline{\partial^c\Psi^c(\sigma^\circ)})$$

是凸的，并且稍加思考还可得出，

$$\partial^c(\overline{\partial^c\Psi^c(\sigma^\circ)}^\circ) \subset \sigma.$$

因此，根据定理 3 的第二部分，我们得到解在 $B \setminus \Sigma_\Psi$ 上光滑；直接检查我们已证明光滑的 B 的哪一部分后，可得 $\Sigma_\Psi = \Sigma_s$，如所述。□

引理 17. 令 Δ 为标准单位立方体

$$\Delta = \mathrm{conv}\,\{\pm e_0 \ldots \pm e_d\}$$

且 $h = h_0$。假设 ν 在 $\Delta^\vee$ 的所有对称变换下保持不变，且不对 B_{d-1} 赋予质量。那么 (4) 有解。此外，若 $\nu = \nu_N$ （或者更一般地，对于任意 $\sigma \in \mathcal{V}(\Delta^\vee)$，$(\beta_\sigma)_\# \nu|_{\mathrm{St}(\sigma)}$ 绝对连续，且其密度光滑、一致非负并一致有界），则该解在集合之外光滑

$$\Sigma_s := \{n \in B : \beta_j = 0, |\beta_k| = |\beta_l| = \max_i |\beta_i|, j \neq k \neq l\}$$

其中，通过写成 $n = \sum_i \beta_i f_i$ （当 $d = 1$、Σ_s 为空，且当 $d = 2$、Σ_s 为每条边的中点时），可唯一确定 β_0、…、β_d。此外，$\Sigma_s = \Sigma_\Psi$。

证明。 注意到

$$\Delta^\vee = \mathrm{conv}\{\pm f_0, \ldots, \pm f_d\}.$$

设 $I \in \{-1, 1\}^{d+1}$ 和 $m_0 = I_0 e_0 + \ldots + I_d e_d$ 是 Δ 的对应顶点。我们用 $\mathrm{SmSt}(m_0)$ 表示 m 的小闭星形邻域

$$\mathrm{SmSt}(m_0) = \left\{ m = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i e_i \in \mathrm{St}(m_0), I_i \alpha_i \geq 0 \forall i \right\}.$$

类似地，对于 $j = 0$，…，d，我们用 $\mathrm{SmSt}(f_j)$ 表示 f_i 的小闭星形邻域

$$\mathrm{SmSt}(f_j) = \left\{ n = \sum_{i=0}^{d} \beta_i f_i \in \mathrm{St}(f_i), |\beta_j| \geq |\beta_i| \forall i \right\}$$

并用 $\mathrm{SmSt}(-f_j)$ 表示 $-f_i$ 的小闭星形邻域

$$\mathrm{SmSt}(-f_j) = \left\{ n = \sum_{i=0}^{d} \beta_i f_i \in \mathrm{St}(-f_i), |\beta_j| \geq |\beta_i| \forall i \right\}.$$

我们断言，对于 Δ 的所有顶点 m_0，$\partial^c \Psi(\tau^\circ_{m_0}) \subset \mathrm{SmSt}(m_0)$，并且对所有 $j = 0, \ldots, d$，$\partial^c \Psi^c(\sigma^\circ_{f_j}) \subset \mathrm{SmSt}(f_j)$ 且 $\partial^c \Psi^c(\sigma^\circ_{-f_j}) \subset \mathrm{SmSt}(-f_j)$。为证明这一点，首先假设 (m, n) 与第一个断言矛盾。由对称性，不妨假设 $m_0 = \sum_{i=0}^{d} e_i$。因此，对于$\beta_i > 0$，有 $n = \sum_{i=0}^{d} \beta_i f_i$，且 $m = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i e_i$，其中 $\alpha_j < 0$ 对某个 j 成立。令 F_j 为 Δ 的对称性，它将 e_j 映射到 $-e_j$，并对所有 $i \neq j$ 保持 e_i。类似地，令 G_j 为 $\Delta^\vee$ 的对称性，它将 f_j 映射到 $-f_j$，并对所有 $i \neq j$ 保持 f_i。由对称性，$(F_j(m)\ G_j(n))$ 位于 $\partial^c \Psi$ 的图上。我们得到

$$\begin{aligned} \langle F_j(m) - m, G_j(n) - n \rangle &= \langle -2\alpha_j e_j, -2\beta_j f_j \rangle \\ &= 4\alpha_j \beta_j \\ &< 0 \end{aligned}$$

这与 $\partial^c \Psi$ 的单调性相矛盾。反之，假设 $(m,\ n)$ 与第二个断言相矛盾。根据对称性，不失一般性地假设 $j = 0$。因此，对于 $\alpha_i \in (-1,\ 1)$，有 $m = e_0 + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i$；并且 $n = \sum_{i=0}^{d} \beta_i f_i$，其中或者对于某个 j，有$|\beta_j| > |\beta_0|$，或者 $n \in \mathrm{St}(f_0)$，从而 $\beta_0 < 0$。在第一种

情形下，令 F_{0j} 和 G_{0j} 分别为 Δ 和 $\Delta^\vee$ 的对称变换，它们交换配对 $\{e_0, \mathrm{sgn}(\beta_j)e_j\}$ 和 $\{e_0, \mathrm{sgn}(\beta_j)e_j\}$，其中 $\mathrm{sgn}(\beta_j)$ 是 β_j 的符号，同时保持所有其他生成元不变。于是得到

$$\begin{aligned} F_{0j}(m) - m &= \mathrm{sgn}(\beta_j)\alpha_j e_0 - e_0 + e_j - \mathrm{sgn}(\beta_j)\alpha_j e_j \\ &= (\mathrm{sgn}(\beta_j)\alpha_j - 1)(e_0 - e_j) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} G_{0j}(n) - n &= \mathrm{sgn}(\beta_j)\beta_j f_0 - \beta_0 f_0 + \beta_0 f_j - \mathrm{sgn}(\beta_j)\beta_j f_j \\ &= (\mathrm{sgn}(\beta_j)\beta_j - \beta_0)(f_0 - f_j), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \langle F_{0j}(m) - m, G_{0j}(n) - n\rangle &= (\mathrm{sgn}(\beta_j)\alpha_j - 1)(\mathrm{sgn}(\beta_j)\beta_j - \beta_0)\langle e_0 - e_j, f_0 - f_j\rangle \\ &< 0. \end{aligned}$$

这与 $\partial^c\Psi$ 的单调性矛盾。在第二种情况下，我们有

$$\begin{aligned} \langle F_0(m) - m, G_0(n) - n\rangle &= \langle -2e_0, -2\beta_0 f_0\rangle \\ &= 4\beta_0 \\ &< 0, \end{aligned}$$

其中，如上所述，F_0 和 G_0 是对称变换，它们分别将 e_0 映射到 $-e_0$，将 f_0 映射到 $-f_0$，同时对所有 $i \neq 0$ 保持 e_i 和 f_i 不变。第三个结论的证明方式与第二个结论相同。应用定理 3 即可证明该引理。□

在下面的引理中，我们固定反射多胞体 Δ 在 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 格中的一个给定表示。给定 Δ 的一个顶点 n，我们定义小星形

$$\mathrm{SmSt}(n) := \{x \in \mathrm{St}(n) : ||x - n|| \leq ||x - n_j|| \forall j\}. \tag{32}$$

这里，$\{n_j\}_j$ 是 Δ 的顶点，$||\cdot||$ 是 $\mathbb{Z}^{d+1} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1}$ 上的欧几里得距离。我们固定该表示，使欧几里得距离有明确定义。不过请注意，将抽象格与 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 等同后，此定义与引理 16 和 17 中给定表示下的小星形定义一致。在这种情况下，我们有如下引理，从而完成引理 16 和 17 的证明。

引理 18. 设 Δ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的一个格多胞体，并满足以下假设：对于任意顶点 v，Δ中位于开半平面 $\{x : \langle v, x\rangle > 0\}$内的唯一顶点是 v，其中 $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$上的标准内积。那么，顶点 v 在投影$\pi_v : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}/\mathbb{R}v$ 下的 $\mathrm{SmSt}(v)$ 的像是凸的。

证明. 设 $v_0, ..., v_N$是 Δ的顶点，且不失一般性，设$v = v_0$。用 N 表示 Δ的顶点数。定义

$$C := \{x \in \Delta : |x - v_0| \leq |x - v_j| \forall j\}$$

其中 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^d$上的标准范数。这个集合显然是凸的，因此它在投影下的像也如此。我们的目标是定义一个从 C 到

SmSt(v_0)的映射，它在投影后变得平凡。对于任意 $p \in C$，定义$F(p) := p + sv_0$，其中 s是满足 $F(p) \in \Delta$的最大数。

断言 1： F 缩短了到 v_0的距离。为此，写作 $p = b_0 v_0 + \sum_{i=1}^{d} b_i e_i$，其中 e_i满足（v_0，e_1，.....，e_d）是一个正交归一基。于是 $|p-v_0|^2 = |1-b_0|^2 + \sum_{i=1}^{d} |b_i|^2$，而 $|F(p) - v_0|^2 = |1-b_0-s|^2 + \sum_{i=1}^{d} |b_i|^2$。只需注意到 $1 - b_0 \geq 1 - b_0 - s \geq 0$即可。这利用了如下事实：开半空间 x： $\langle v, x - v\rangle > 0$ 不包含 Δ的任何顶点，这由假设可知。

断言 2： F 增大了到所有其他顶点的距离。为此，选取一个不同于 v_0 的顶点 v_k，并写作 $v_k = c_0 n_0 + \sum_{i=1}^{d} c_i e_i$。然后像之前一样，在所选基下将 p 写出，我们有 $|p - v_k|^2 = |b_0 - c_0|^2 + \sum_{i=1}^{d} |b_0 - c_0|^2$，而 $|F(p) - v_k|^2 = |b_0 + s - c_0|^2 + \sum_{i=1}^{d} |b_0 - c_0|^2$。注意到 $b_0 + s_0 - c_0 \geq b_0 - c_0 \geq 0$后，即可得出该断言。

由此可得 $F(p) \in C$，此外， $F(p)$ 位于 $\partial\Delta$，因此事实上 $F(p) \in$ SmSt(v_0)。由于 $\pi_v \circ F = \pi_v$，我们得出 $\pi_v(C) \subset \pi_v$(SmSt(v_0))。由于 $C \subset$SmSt(v_0) 显然成立，我们发现 π_v(SmSt(v_0)) $= \pi_v(C)$ 是凸的。

□

备注 8. 当 Δ 是单位立方体且 $\nu = \nu_N$ 时，也可由 [Li23] 中的结果得出存在弱解。

9.2. **结构不稳定性与解的不存在性**。 现在我们转向一些例子，在这些例子中，定义1给出了存在解的障碍。以下例子说明了主要思想。

引理19. 设 Δ 为标准单位单纯形（如引理 *16* 中所述），且 $h = h_0$。设 n 是 $\Delta_h^\vee$ 的一个面 τ 内部的一点，且 $\nu = \delta_n$ 是位于 n 的点质量。那么 (4) 不允许存在解。

证明。 我们将证明 (Δ, h_0, ν) 不稳定。假设 γ 是一个传输计划。由此可得

$$\gamma(A \times \tau^\circ) \geq \gamma(A \times \{n\}) = \mu(A) = 1.$$

另一方面， $A \times \tau^\circ$ 与 (3) 的交集包含于 St(m_τ)$\times\tau^\circ$，因此

$$\begin{aligned} \gamma((A \times \tau^\circ) \cap (3)) &\leq \gamma(\mathrm{St}(m_\tau) \times \tau^\circ) \\ &\leq \gamma(\mathrm{St}(m_\tau) \times B) \\ &= \mu_M(\mathrm{St}(m_\tau)) \\ &< 1. \end{aligned}$$

由此可得， γ 不支撑在 (3) 上，因此 (Δ, h_0, ν) 不稳定。 □

通过证明唯一的可容许计划是 $\gamma = \mu \times \delta_n$，且它不支撑在 (3) 上，可以给出引理19的另一种证明。不过，我们选择上述证明，因为它突显了一个更普遍的障碍：当 ν 分配给某个面过多（或不足）的质量时，这一障碍便显而易见。

在这些情况下，不存在任何支撑在 (3) 上的传输计划（无论其是否最优）。这一思路将成为证明 (4) 无解的主要工具。在本节余下部分，我们将聚焦于 $\nu = \nu_N$ 的情形。

定义 5. 设 Δ 是一个反射多胞体，$h\colon \Delta \cap M \to \mathbb{Z}$ 是一个高度函数。若以下条件至少有一个成立，我们称数据 (Δ, h) 结构不稳定：

- 存在 $\Delta_h^\vee$ 的某个面 τ，使得 $\nu_N(\tau) > \mu_M(\mathrm{St}(m_\tau))$
- 存在 Δ 的某个面 σ，使得 $\mu_M(\sigma) > \nu_N(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)$

若 (Δ, h_0) 结构不稳定，我们就称反射多胞体结构不稳定，其中 h_0 是平凡高度函数。

结构不稳定性比不稳定性更强。

引理 20. 设 $\nu = \nu_N$。若 (Δ, h) 结构不稳定，则 (4) 不存在解。

证明。只需证明，若 (Δ, h) 结构不稳定，则它不稳定。为此，设 γ 是 ν_N 与 μ_M 之间任意一个支撑于

$$\cup_{m\in A\cap M}\left(\mathrm{St}(m)\times\tau_m\right).$$

设 τ 是 $\Delta_h^\vee$ 的任意一个面，并考虑 $\eta(\cdot) = \gamma(\cdot\times\tau)$ 在 A 上的测度。根据假设，η 支撑于 $\mathrm{St}(m_\tau)$。η 的总质量为 $\nu_N(\tau)$，因此 $\eta(\mathrm{St}(m_\tau)) = \nu_N(\tau)$。但我们还有测度意义下的 $\eta \le \mu_M$，因此 $\eta(\mathrm{St}(m_\tau)) \le \mu_M(\mathrm{St}(m_\tau))$，从而得到

$$\nu_N(\tau) \le \mu_M(\mathrm{St}(m_\tau))$$

对任意面 τ（其中 τ 是 $\Delta_h^\vee$ 的面）。接下来注意到

$$\cup_{m\in A\cap M}\left(\mathrm{St}(m)\times\tau_m\right) = \cup_{n\in\mathcal{B}_0}\sigma_n \times \cup_{m\in\sigma_n\cap M}\tau_m.$$

利用这一点，类似于上面的论证，可以证明对任意面 σ（其中 σ 是 Δ 的面）

$$\mu_M(\sigma) \le \nu_N(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m).$$

□

例1. 设 Δ 是 $\mathbb{P}^2$ 的矩多面体，因此

$$\Delta = \mathrm{conv}\{-e_0+2e_1, 2e_0-e_1, -e_0-e_1\}.$$

令 h_0 为平凡高度函数，并定义 $h\colon \Delta\cap M\to\mathbb{Z}$ 如下：

$$h(n) = \max\{h_0(n), \langle(-1,4), n\rangle, \langle(1,5), n\rangle\},$$

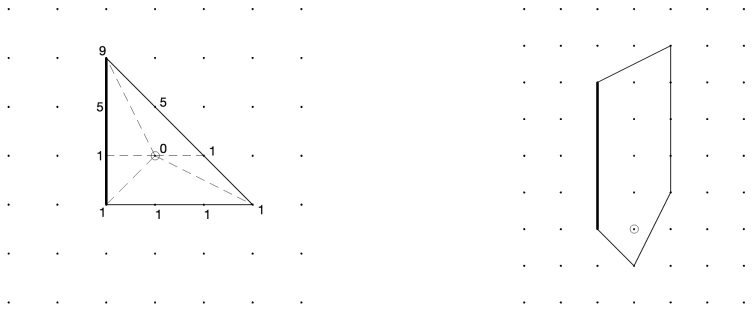
即 $h(0,\ 0) = 0$ 和

$$\begin{aligned}
&h(-e_0+2e_1) = 9\\
&h(-e_0+e_1) = 5,\ h(e_1) = 5\\
&h(-e_0) = 1,\ h(e_0) = 1\\
&h(-e_0-e_1) = 1,\ h(-e_1) = 1,\ h(e_0-e_1) = 1,\ h(2e_0-e_1) = 1
\end{aligned}$$

于是， h 延拓为定义在 $N_{\mathbb{R}}$ 上的分段仿射凸函数，其不可微点轨迹定义了 Δ 的三角剖分。由此可得

$$\Delta_h^\vee = \mathrm{conv}\{f_0 + 5f_1, f_0 + f_1, -f_1, -f_0, -f_0 + 4f_1\}.$$

情况如图1所示。



(A) 主多胞体 Δ　　(B) 对偶多胞体 $\Delta_h^\vee$

FIGURE 1. 来自例1的多面体 Δ 及其相对于 h的对偶 $\Delta_h^\vee$分别见子图（A）和（B）。在（A）中，数字表示附近格点处 h 的值。点线表示诱导三角剖分。粗线段对应于 $\mathrm{St}(-e_0)$。在（B）中，粗线段对应于面 τ_{-e_0}。两个图中的小圆圈均表示原点。

引理21. 设 Δ 和 h 及 $\nu = \nu_N$如例*1*所示。则(4) 不承认解。

证明. 我们检验与 $-e_0 \in \Delta$对偶的 $\Delta_h^\vee$之面 τ_{-e_0} 的结构稳定性条件。相应的 $\mathrm{St}(-e_0)$ 就是 Δ 中包含 $-e_0$的那个面，图1中用一条加粗的黑线标出。计算相关体积后，我们得到

$$\nu_N(\tau_{-e_0}) = \frac{4}{11} > \frac{1}{3} = \mu_M(\mathrm{St}(-e_0))$$

因此，(Δ, h) 是结构不稳定的。

□

备注9. 一般而言，可以通过考虑 Y的一般极化来放宽方程 **(4)**。例1和引理21尤其值得关注，因为它们代表了这样一种情形：考虑 Y 的一般极化并不会带来额外的自由度。

接下来是两个具有平凡高度函数的结构不稳定例子。

例2。设

$$\Delta = \mathrm{conv}\{e_0 + e_1, e_0, -e_1, -e_0 + e_1\}$$

且 $h = h_0$，因此

$$\Delta_h^\vee = \Delta^\vee = \mathrm{conv}\{f_1, f_0, f_0 - f_1, -2f_0 - f_1\}.$$

引理22. 设 Δ 和 h 如例*2*及 $\nu = \nu_N$中所述。则方程(4) 无解。

证明。 考虑 Δ 的顶点 $v = -e_1$ ，并注意到

$$\nu_N(\tau_v) = 3/7 > 2/5 = \mu_M(\mathrm{St}(v)).$$

□

例3. 设 Δ 为三维反射多面体

$$\Delta = \mathrm{conv}\{e_0, e_1, e_2, -2e_0 - e_1 - e_2, -e_0 + e_1\}$$

（Kreuzer- Skarke 的三维反射多面体数据库中的 ID 16 [KrSk97]）且 $h = h_0$, 因此

$$\Delta^\vee = \mathrm{conv}\{-f_0+f_2, f_1-2f_2, f_1+f_2, f_0+f_1+f_2, f_0-4f_1+f_2, f_0+f_1-4f_2\}.$$

引理23. 设 Δ 和 h 如例*3*和 $\nu = \nu_N$中所述。那么 (4) 无解。

证明. 计算面体积的方法是求出幺模三角剖分，即完全由顶点构成 $\mathbb{Z}$-格基的单形组成的三角剖分。于是，对于面 σ ， $\mu_M(\sigma)$ 只需将 σ 的三角剖分中的三角形数量除以 A 的幺模三角剖分中的三角形总数即可。 $\Delta^\vee$ 的一个面的体积也可以用类似方法计算，而 τ_{e_0} 的一个三角剖分如图2所示，其中 $\Delta^\vee$ 。

检查 $\Delta^\vee$ 的面 τ_{e_0} 的结构稳定性条件，我们得到

$$\mu_M(\mathrm{St}(e_0)) = \frac{3}{8} < \frac{25}{58} = \nu_N(\tau_{e_0}).$$

□

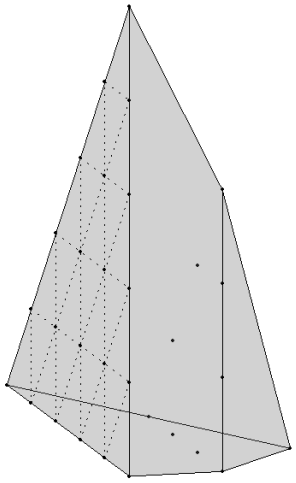


FIGURE 2. 例3中的多面体 $\Delta^\vee$ 。图中左侧的面 τ_{e_0}由幺模单形三角剖分而成。注意， τ_{e_0} 的三角剖分中单形的数量为25。

9.3. **结构严格半稳定性与异常奇点**。现在我们将探讨结构不稳定性的一种极限变体，并说明它对所提出的热带仿射结构的奇点有何影响。

定义6。 设 Δ 是一个反射多胞体， $h:\ \Delta\cap M\to\mathbb{Z}$ 是一个高度函数。如果数据(Δ, h)不是结构不稳定的，但满足以下条件之一，则称其为结构严格半稳定:

- 存在 $\Delta_h^\vee$的某个面 τ，使得 $\nu_N(\tau)=\mu_M(\mathrm{St}(m_\tau))$
- 存在 Δ 的某个面 σ，使得 $\mu_M(\sigma)=\nu_N(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)$

若反射多胞体 Δ 满足(Δ, h_0) 结构严格半稳定，则称其为结构严格半稳定。

引理 24. 假设(Δ, h) 结构严格半稳定，且(4) 存在解 Ψ。则 $B\setminus\Sigma_\Psi$ 不连通。

证明。 分两种情况。首先，假设存在 Δ 的某个面 σ，使得 $\mu_M(\sigma)=\nu_N(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)$。根据定理 1，由于方程 (4) 存在解，因此存在一个支撑于

$$\cup_{m\in A\cap M}\left(\mathrm{St}(m)\times\tau_m\right)=\cup_{n\in\mathcal{B}_0}\sigma_n\times\cup_{m\in\sigma_n\cap M}\tau_m.$$

在 B 上定义测度 $\gamma_\sigma(\cdot) = \gamma(\sigma \times \cdot)$。 γ_σ 的总质量为 $\mu_M(\sigma)$，且 $\mathrm{Supp}(\gamma_\sigma) \subset \cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$。因此

$$\mu_M(\sigma) = \gamma_\sigma(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m) \le \gamma(A \times \cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m) = \nu_N(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m).$$

但左右两边相等，因此我们得出 $\mathrm{Supp}(\gamma_\sigma) = \cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$。因此，对于任意 $n \in B \setminus (\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)^\circ$，存在 $m \in A \setminus \sigma^\circ$ 使得 $(n, m) \in \mathrm{Supp}(\gamma) \subset \partial^c\Psi^c$。因此

$$B \setminus (\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)^\circ \subset \partial^c\Psi^c(A \setminus \sigma^\circ).$$

回顾定义 4 中 U_σ 的定义，我们发现 $U_\sigma \subset (\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)^\circ$。通过与上述类似的论证，我们可以得出

$$\mathrm{Supp}(\gamma_{A\setminus\sigma^\circ}) = B \setminus (\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)^\circ.$$

由此可知，对于 Δ 的任意面 $\sigma' \neq \sigma$，$\mathrm{Supp}(\gamma_{\sigma'}) \subset B\setminus(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)^\circ$，因此 $(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m) \subset \mathrm{Supp}(\gamma_{A\setminus\sigma'})$。我们可以用与上述类似的方式得出

$$(\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m) \subset \partial^c\Psi^c(A \setminus \sigma'^\circ),$$

因此，对于任意其他面 σ'， $U_{\sigma'} \subset B \setminus (\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m)$。

由于所有坐标图 U_σ 和 $U_{\sigma'}$ 都是开且互不相交的，我们得出 $\cup_{m\in\sigma\cap M}\tau_m$ 的边界包含于奇异集

$$\Sigma = B_{n-1} \setminus (\cup_{\sigma'\in\mathcal{A}_d} U_{\sigma'}).$$

总之， $B \setminus \Sigma$ 不连通。

另一种情形是，存在 $\Delta_h^\vee$的一个面 τ，使得 $\nu_N(\tau) = \mu_M(\mathrm{St}(m_\tau))$；此情形可用类似的方法证明。更准确地说，采用与上文类似的论证可得

$$B \setminus \tau \subset \partial^c\Psi^c(A \setminus \mathrm{St}(m_\tau)^\circ),$$

因此，对于包含于 $\mathrm{St}(m_\tau)$ 中的所有面 σ， $U_\sigma \subset \tau$，并且

$$\tau^\circ \subset \partial^c\Psi^c(\mathrm{St}(m_\tau)),$$

因此，对于所有不包含于 $\mathrm{St}(m_\tau)$ 中的面 σ'， $U_{\sigma'} \subset B \setminus \tau^\circ$。由此可知， τ 的边界包含于 Σ，因此 $B \setminus \Sigma$ 不连通。□

正如我们将看到的，在维数 2 和 3 的反射多胞体中，有许多结构严格半稳定的多面体。但一般而言，验证它们是否稳定、因而是否存在方程 (4) 的解，可能并不容易。不过， [Li23] 提出了一个易于检验的条件，该条件可保证 Monge-Amp`ère 方程 (4) 存在解。

定义7. 如果不存在一对顶点 $v \in \Delta$ 和 $w \in \Delta^\vee$ 满足$\langle v, w\rangle = 0$，我们就称反射多胞体 Δ是 *Li* 意义下的可容许多胞体。

例 4。设

$$\Delta = \mathrm{conv}\{e_0, e_1, e_2, -3e_0 - e_1 - e_2\}$$

（分类 [KrSk97] 中三维反射多面体的编号 2），因此

$$\Delta^\vee = \mathrm{conv}\{-f_0+f_1+f_2, f_0-5f_1+f_2, f_0+f_1-5f_2, +f_0+f_1+f_2\}.$$

引理 25. 设 Δ 如例 *4* 所示。那么，具有高度 h_0 的 Δ 存在一个满足 *Monge-Amp`ere* 方程(4) 的解，但 $B\setminus\Sigma$ 不连通。

证明。 考察顶点 $v\in\Delta$ 和 $w\in\Delta^\vee$的所有可能配对（v,w），可知 Δ 在 Li 意义下可容许。因此，根据 [Li23], 中的定理 2.31，方程(4)存在一个解。体积的计算与例3类似，我们得到

$$\nu_N(\tau_{e_0}) = 36/72 = 3/6 = \mu_M(\mathrm{St}(e_0)).$$

因此 Δ 是结构严格半稳定的，并且根据引理 24， $B\setminus\Sigma$ 不连通。□

注 10. 在 4319 个三维自反多面体中，有 145 个是结构严格半稳定且在 Li 意义下可容许的，因此表达了与例 4 相同的异常奇点集合。

注 11. 如引言中所述，一个自然的问题是：例 4 中这个出人意料地大的集合 Σ_Ψ 能否缩小，同时仍保证存在定义 3 中 Monge-Amp`ère 方程的解。回想一下，我们不知道集合 $B\setminus\Sigma$ 是否是能够延拓 Monge-Amp`ère 方程的解的热带仿射结构的最大可能定义域。对于例 4 中的多面体，在对解 Ψ 作出自然假设的情况下，似乎可以扩展热带结构的正则集，使奇点的余维为 2。然而，奇异集将包含 $\Delta^\vee$的三个顶点，这与奇点位于边内部的预期相悖（参见标准单纯形 [的情形，Li22a、HJMM22]）。下面我们将对此作简要说明。

首先，仔细查看引理 24 的证明，可以发现 $\tau_{e_0}^\circ \subset\partial^c\Psi^c$(St($e_0$)°)以及

$$B\setminus\tau_{e_0}\subset\partial^c\Psi^c(A\setminus\mathrm{St}(e_0)) = \partial^c\Psi^c(\sigma^\circ_{-f_0+f_1+f_2}).$$

设 U 是 τ_{e_0}的一个顶点的邻域。由此可得， U包含 n' ，使得 $\partial^c\Psi$(n') 与 St(e_0)° 相交；并且包含 n'' ，使得 $\partial^c\Psi$(n') 与 $\sigma^\circ_{-f_0+f_1+f_2}$ 相交。按照引理 15 的证明可知，对于任意 σ 和 $m_0\in\sigma$， ($\Psi-m_0$) $\circ\beta_\sigma^{-1}$在 n' 和 n'' 处均不可微，因此，热带仿射结构以及 Monge-Amp`ere 方程的解都无法延拓到 τ_{e_0}的任何一个顶点上。

另一方面，假设 $\partial^c\Psi$ 是一个同胚，那么很可能 τ_{e_0} 的每条边都包含一个映射到 $\Delta^\vee$某个顶点的点，并且该点将 τ_{e_0} 分成两部分，每部分都映射到 $\Delta^\vee$ 的一个面上。假设其中一部分映射到 σ。然后，按照定理 2 的

证明中的做法， U_σ 可以在这部分上延拓。因此，如果本段开头所作的假设成立，我们就得到一种热带仿射结构，其中 τ 的每个顶点处各有一个奇点，且 τ_{e_0}的每条边的内部各有一个奇点。

9.4. 反射多边形和多面体的分类。维数不超过 4 [KrSk97] 的反射多胞体已被完全分类。因此，可以对它们进行数值计算，并通过数值方法检验结构不稳定性条件以及 Li 可容许性。第一作者使用 Sage 对维数 2 和 3 的自反多胞体进行了这项工作，结果列于表 1 和表2。特别是，维数为 3 的自反多胞体中，超过三分之一在结构上不稳定，且不满足方程 (4) 的解的存在条件。如下表所示，维数为 3 的自反多胞体中，约有十分之一在结构上严格半稳定。其中一半是 Li 意义下可容许的，因此存在解，其异常奇异集如例 4 和引理 25 中所示。

TABLE 1. 表格列出了二维反射多胞体的总数，以及其中满足本节所讨论条件的多胞体数量。结构不稳定的多胞体无法得到方程 (4) 的解。Li 意义下可容许的多胞体可以得到方程 (4) 的解。结构严格半稳定且符合 Li 意义下可容许条件的多胞体可以得到一个解 Ψ，使得 $B \setminus \Sigma_\Psi$ 不连通，如例 4 和引理 25 所示。

$\mathbf{d = 1}$	
维数为 d+1 的反射多胞体	16
结构严格半稳定	5
结构不稳定	2
Li 意义下可容许	7
结构严格半稳定且 Li 意义下可容许	3

TABLE 2. 表格列出了三维反射多面体的总数，以及其中满足本节所讨论条件的多面体数量。请注意，结构不稳定的多胞体不存在方程 (4) 的解。Li 意义下可容许的多胞体存在方程 (4) 的解。在结构上严格半稳定且 Li 意义下可容许的多胞体存在解 Ψ，使得 $B \setminus \Sigma_\Psi$ 不连通，如例 4 和引理 25 中所示。维数为 3 的反射多胞体分类以及用于分析格多胞体的各种工具由 Sage 中的 PALP 软件包提供，而体积计算则使用 Normaliz 后端完成。详情请参见 git 仓库：'https://doi.org/10.5281/zenodo.7615747'。

维数 $\mathbf{d=2}$	
维数为 d+1 的反射多胞体	4319
结构严格半稳定	461
结构不稳定	1542
Li 意义下可容许	238
结构严格半稳定且在 Li 意义下可容许	145

注 12。 在二维多边形中，有两个 Delzant 多面体在 Li 意义下可容许，即 $\mathbb{P}^2$ 和 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。在三维中，18 个 Delzant 多面体中有四个在 Li 意义下可容许，即 $\mathbb{P}^3$、$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$、$(\mathbb{P}^1)^3$ 和 $\mathrm{Bl}_0\mathbb{P}^3$；最后一个是对某个环面不动点处的 $\mathbb{P}^3$ 进行爆破所得。二维和三维中的 Delzant 多面体均非结构不稳定，也非结构严格半稳定。二维中的两个结构不稳定反射多胞体分别是对 $\mathbb{P}^2$ 进行 (1,2)-加权爆破所得的多胞体（例2）及其对偶。

APPENDIXA. SYZ-FIBRATION

本附录旨在证明:

定理4。 假设(Δ, h_0)是稳定的，且 $\nu_N(\cup U_\sigma) = \nu_N(\Delta^\vee)$。设$K_{faces}$是 B° 的一个紧子集，使得 $\Psi|_{\tau^\circ}$ 在 K_{faces} 的某个邻域˜内光滑，并设 $U_{faces} = R_{\geq 0}K_{faces}$ 为由 K_{faces}生成的锥。对于 Δ 的每个面 σ，令 K_σ 为 U_σ 的一个紧子集，使得$(\Psi - m)|_{\mathrm{St}(n_\sigma)}$ 在 K_σ 的某个邻域内光滑，对某个（因而对所有） $m \in \sigma$均如此。令

$$\tilde{U}_{stars} = \cup_\tau([0,1] \cdot K_\sigma + \mathbb{R}_{\geq 0} n_\sigma).$$

那么当 t足够小时， X_t 在.....上具有特殊拉格朗日环面纤维化

$$\mathrm{Log}_t^{-1}\left(\tilde{U}_{faces} \cup \tilde{U}_{stars}\right).$$

注13。 </style>$\nu_N(\cup U_\sigma) = \nu_N(\Delta^\vee)$这一假设可能是人为的，但为简化阐述而予以保留。

A.1. **对数映射**。 假设 $h = h_0$，因此

$$X = \{(x,t) \in Y \times \mathbb{C}^* : f_0(x) + t\sum f_m(x) = 0.$$

令 $T_{\mathbb{C}} \subset Y$为复（$d+1$）环面。在整个附录中，我们令 $s = \log|t| \gg 0$。存在一个映射 $\mathrm{Log}_s : T_{\mathbb{C}} \to N_{\mathbb{R}}$，其定义为将$x \in T_{\mathbb{C}}$ 映射到唯一满足以下条件的 $\mathrm{Log}_s(x)$ $= n \in N_{\mathbb{R}}$

$$\langle m, \mathrm{Log}_s(x)\rangle = \frac{1}{s}\log|f_m(x)|$$

对所有 $m \in M$均成立。若固定 M的生成元 $m_0, \ldots, m_d$，则它们确定 $N_{\mathbb{R}}$ 上的坐标 $(\langle m_0, \cdot\rangle, \ldots, \langle m_d, \cdot\rangle)$，并且

$$(z_0, \ldots, z_d) = (f_{m_0}, \ldots, f_{m_d})$$

在 $T_{\mathbb{C}}$ 上，Log_s 具有如下形式

$$\mathrm{Log}_s(z_0, \ldots, z_d) = \frac{1}{s}(\log|z_0|, \ldots, \log|z_d|).$$

X_t 在 Log_s 下的像一致收敛到 $N_{\mathbb{R}}$中的一个热带超曲面。更准确地说，令 $\mathcal{A}$ 为 h_0的勒让德变换的非仿射轨迹，即

$$\mathcal{A} = \{n : \max_{m\in M\cap\Delta}\langle m,n\rangle - h_0(m) = \langle m_i,n\rangle - h_0(m_i) \text{ for two distinct } m_1, m_2 \in M\cap\Delta\}.$$

其补集 $N_{\mathbb{R}}\setminus\mathcal{A}$ 恰有一个有界连通分支，其边界为

$$\{n \in \mathcal{A} : \max_{m\in M\cap\Delta}\langle m,n\rangle - h_0(m) = \langle 0,n\rangle - h_0(0) = 0\rangle\} = \partial\Delta^\vee.$$

每个面 F 都位于 F的顶点所张成的子空间内、包含 $\mathcal{A}$的某个无界连通分支的边界上。

引理 26. *(*[Li22a，命题 3.2]*)*。

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{N_{\mathbb{R}}}(x, \mathcal{A}) &\leq \frac{C}{s} \text{ for all } x \in \mathrm{Log}_s(X_t) \\ \mathrm{dist}_{N_{\mathbb{R}}}(\mathrm{Log}_s(X_t), x) &\leq \frac{C}{s} \text{ for all } x \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

证明。 该引理的证明方式与 Δ为单位单纯形时相同（见 [Li22a，命题 3.2]）。一个关键点是，若多项式$f_0(x)+t\sum f_m(x)$为零，则其中最大的两项必须大小相近；当 t 较小时，这意味着 $\mathrm{Log}_s(x)$接近 $\mathcal{A}$。□

A.2. **全纯坐标图**。对于 σ 的一个面 Δ 和 $\delta \gg 0$，令

$$V^\sigma_{t,\delta} = \{x \in X_t : t|f_m(x)| < e^{-\delta}|f_0(x)| \text{ for all } m \in M\cap\Delta\setminus(\sigma\cup\{0\})\}.$$

选取 $m_0, \ldots, m_d$生成 M，使得 $\{m_1, \ldots, m_d\} \subset n_\sigma^\perp$，并令 $z_0, \ldots, z_d$为相应的坐标 $z_i(x) = f_{m_i}(x)$。对 F_t :=求导

关于 z_0 对 $f_0(x) + t\sum f_m(x)$ 求导，得到

$$\frac{\partial F_t}{\partial z_0} = c_0 f_{-m_0} + t \sum_{\{m\in V(\Delta)\setminus\sigma\}} c_m f_{m-m_0}$$

对于常数 c_0 和 c_m，$m \in N\cap\Delta\setminus(\sigma\cup\{0\})$。由于对每个 $m\in N\cap\Delta\setminus(\sigma\cup\{0\})$，$\left|\begin{smallmatrix} f_0 \\ f_{m_0}\end{smallmatrix}\right| >> t\left|\begin{smallmatrix} f_m \\ f_{m_0}\end{smallmatrix}\right|$，因此这不为零。于是，隐函数定理给出了坐标

$$\tilde{\beta}^{-1} : (z_1,\ldots,z_d) \mapsto (z_0(z_1,\ldots,z_m), z_1,\ldots,z_m)$$

在 $V_{t,\delta}^{\sigma}$ 上。

此外，$x \in V_{t,\delta}^{\sigma}$ 当且仅当

$$-s + \langle m, sn\rangle < -\delta,$$

或者等价地

$$\langle m, n\rangle \le 1 - \delta/s,$$

对所有 $m\in N\cap\Delta\setminus(\sigma\cup\{0\})$ 都成立。由于 $s\to+\infty$，这个集合覆盖了开星 n_σ 中越来越大的部分。

与 [Li22a] 中一样，我们将使用两种不同的坐标图：固定一个小参数 $\rho>0$，对于 $n\in N_{\mathbb{R}}$，令 $B_\rho(N)$ 表示以 n 为中心、半径为 ρ 的球（相对于 $N_{\mathbb{R}}$ 上的某个范数）。

- 对于 Δ 的每个面 σ，星形图表

$$\tilde{U}_{t,\delta,\rho}^{\sigma} = \{x\in V_{t,\delta}^{\sigma} : B_\rho(\mathrm{Log}_s(x)) \in [0,1]\cdot K_\sigma + \mathbb{R}_{\ge 0} n_\sigma)\}.$$

- 对于 Δ 的每个面 σ 以及 σ 的每个顶点 m，面状图表

$$\tilde{U}_{t,\delta}^{\sigma,m} = \{x\in V_{t,\delta}^{\sigma} : B_\rho(\mathrm{Log}_s(x)) \in \mathbb{R}_{\ge 0}(\tau_m^\circ \cap K_{faces})\}.$$

V_t^σ 上的全纯体积形式，$\delta\subset X_t$ 为

$$\Omega_t = \pm\frac{d\log z_0\wedge\ldots\wedge d\log z_d}{dF_t} \approx d\log z_1\wedge\ldots\wedge d\log z_d. \tag{33}$$

由于 $\nu_N(\cup U_\sigma) = \nu_N(\partial\Delta^\vee)$，我们得出，对于足够小的 t 和 ρ，星形图表几乎覆盖了 X_t 的全部卡拉比-丘体积。

A.3. 局部环面作用。 除 Y 上 $T_{\mathbb{C}}$ 的作用外，在 $\tilde{V}_{t,\delta}^{\sigma}\subset X_t$ 上还存在一个局部 $(\mathbb{C}^*)^d$-作用，其坐标表达式为

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)\cdot(z_0(z_1,\ldots,z_d),z_1,\ldots,z_d) = (z_0(\lambda_1 z_1,\ldots,\lambda_d z_d),\lambda_1 z_1,\ldots,\lambda_d z_d).$$

该作用的 S^{1d}-轨道在 Log_s 下的像包含于形如 $n+\mathbb{R}n_\sigma$ 的集合中，其中 $n\in N_{\mathbb{R}}$。

A.4. **模型度量**。令 $\nu = \nu_N$ 和 Ψ 为定义 3 中 Monge-Amp`ere 方程的解。根据标准理论，$(\Psi - m_0) \circ \mathrm{Log}_s$ 在 $-K_Y$ 上定义了一个连续的半正度量。还要注意，$(\Psi - m_0) \circ \mathrm{Log}_s$ 在 $T_{\mathbb{C}}$ 上的对数坐标中是利普希茨连续的。

引理27. 设 σ 是 Δ 的一个面，且 m 是 σ的一个顶点。那么，对于足够小的 t

$$((\Psi - m_0) \circ \mathrm{Log}_s)|_{\tilde{U}^{\sigma}_{t,\delta,\rho}}$$

是$(S^1)^d$-不变的，且其复 *Monge-Amp`ere* 测度为

$$d\log z_1 \wedge d\log \bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\log z_d \wedge d\log \bar{z}_d \approx \Omega_t \wedge \overline{\Omega_t}$$

˜证明。我们声称，对于足够小的 t，$U^{\sigma}_{t,\ \delta}$ 包含于

$$\{n \in N_{\mathbb{R}} : \Psi(n) = \langle m, n\rangle - \Psi^c(m) \text{ for some } m \in \sigma\}. \tag{34}$$

为此，注意到如果

$$\Psi(n) = \sup_{m' \in \partial\Delta} \langle m', n\rangle - \Psi^c(m') = \langle m, n\rangle - \Psi^c(m)$$

对于某个 $m \in \sigma$，那么

$$\begin{aligned} \Psi(n + \lambda n_\sigma) &= \sup_{m' \in \partial\Delta} \langle m', n + \lambda n_\sigma\rangle - \Psi^c(m') \\ &= \langle m, n + \lambda n_\sigma\rangle - \Psi^c(m) \end{aligned}$$

对于任意 $\lambda \geq 0$，由于 $\langle m,\ n_\sigma\rangle = 1 \geq \langle m',\ n_\sigma\rangle$ 对所有 $m' \in \partial\Delta$。

引理的第一部分由下文的引理28以及以下事实推出：K_σ 包含在开集

$$\{n \in N_{\mathbb{R}} : \Psi(n) > \langle m, n\rangle - \Psi(m) \text{ for all } m \notin \sigma^\circ\}$$

该开集包含于（34）中。

引理的第二部分由第一部分以及复环面作用下 $(S^1)^d$-不变度量对应的实与复 Monge-Amp`ere 算子之间的经典对应推出。□

特别地，由于根据假设 $\cup_\sigma U_\sigma$ 涵盖了 ν_N 的全部质量，故由（33）可知，星形图表 $\cup_\sigma U^{\sigma}_{t,\ \delta,\ \rho}$ 涵盖了几乎全部的 Monge-Amp`ere 质量 $\tilde{\nu}_\Psi$ of $(\Psi - m_0) \circ \mathrm{Log}_s$。特别地，由此可知，当 t 和 ρ 较小时，$\Omega_t \wedge \Omega_t - \tilde{\nu}_\Psi$ 的全变差可以任意小

引理28. 令 $n \in \partial^c \Psi^{-1}(\sigma)$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，并假设 $n + \lambda n_\sigma \in \partial^c \Psi^{-1}(\sigma)$。那么

$$\Psi(n + \lambda n_\sigma) = \Psi(n) + \lambda.$$

证明。由于 $\langle m,\ n_\sigma\rangle = 1$ 对于任意 $m \in \sigma$，我们有

$$\begin{aligned} \Psi(n + \lambda n_\sigma) &= \sup_{m \in \partial\Delta} \langle m, n + \lambda n_\sigma\rangle - \Psi^c(m) \\ &= \sup_{m \in \sigma} \langle m, n + \lambda n_\sigma\rangle - \Psi^c(m) \\ &= \sup_{m \in \sigma} \langle m, n\rangle - \Psi^c(m) + \lambda \\ &= \Psi(n) + \lambda. \end{aligned}$$

□

最后，在面状图表 $U^{\sigma,\ t\ \delta}{}^{m}{}_{,\ ,\ \rho}$上，映射 $p_\sigma \circ \mathrm{Log}_s$：$U^{\sigma,\ t\ \delta}{}^{m}{}_{,\ ,\ \rho} \to \tau_m^\circ$（参见第 4 节）可用于拉回局部势函数 $\Psi \circ p_\sigma \circ \mathrm{Log}_s$。根据引理 26 以及 Ψ 上的 Lipschitz 界，它与 $\Psi \circ \mathrm{Log}_s$ 相差一个 C^0-扰动。

A.5. **局部 C^0估计**。与 [Li201], 中一样，该论证依赖于 [Li20b] 中针对 Calabi-Yau流形的极大退化的极化族的统一 Skoda 估计，以及以下 L^1-稳定性估计：

定理 5。*(*[Li201，定理 2。6]*)* 设(Z,ω) 为紧致 *K¨ahler* 流形，且 $u \in \mathrm{PSH}(Z,\omega) \cap C^0(Z)$。假设

- 存在一个 *Skoda* 估计，即存在常数 α 和 A 使得

$$\int_Z e^{-\alpha v}\omega^d \le A \text{ for all } v \in \mathrm{PSH}(Y,\omega), \sup v = 0. \tag{35}$$

- 负值集 $\{u \le 0\}$ 有一个质量下界

$$\int_{\{u\le 0\}} \omega^d \ge \lambda.$$

- $\omega^d - (\omega + i\partial\bar\partial u)^d$ 的全变差由 $s^{2n+3} < 1$ 控制，对某个常数 s'而言。
- u 在一个零 ω^d-测度的闭子集 S 之外是光滑的。
- $||u||_{C^0} \le A'$。

那么，当 s'足够小时，有如下统一估计：

$$\sup u \le Cs'$$

其中 C仅依赖于 λ、d、α、A、A'。

设 $\omega_t = \omega_{FS}|_{X_t}/s$，其中 ω_{FS} 是由 $-K_Y$ 的某个倍数诱导的射影嵌入所对应的 Fubini-Study度量。令 $\omega_{CY,\ t}$ 为类 ω_t 中的 Calabi-Yau 度量，并令 $\phi_{CY,\ t}$ 为其相对于 ω_t 的势函数，¯即 $\omega_{CY,\ t} = \omega_t + i\partial\partial\phi_{CY,\ t}$。现在，$X$ 定义了 Li20b 意义下的极化代数 Calabi-Yau 退化族，因此根据 Li20b 定理 1，3]，（X_t，ω_t）关于 $\omega^d_{CY,\ t}$ 满足 Skoda 不等式。

$$\int_{X_t} e^{-\alpha v}\omega^d_{CY,t} \le A \text{ for all } v \in \mathrm{PSH}(X_t,\omega_t), \sup v = 0.$$

其中常数 α，A 与 t 无关。因此（见 Li20b 定理 1，4]），$\phi_{CY,\ t}$ 满足关于 t 一致的 L^∞-界。将常数 A 调整为仅依赖于 $||\phi_{CY,\ t}||_{L^\infty}$ 的形式后，我们得到一个新的 Skoda不等式。

$$\int_{X_t} e^{-\alpha v}\omega^d_{CY,t} \le A \text{ for all } v \in \mathrm{PSH}(X_t,\omega_{CY,t}), \sup v = 0.$$

¯最后，令 ψ_t 满足 $\omega_t + i\partial\partial\psi_t = i\partial\partial(\Psi \circ \text{对数}_s)|_{X_t}$。注意到 $||\psi_t||_{C^0(X_t)} \trianglelefteq ||\psi||_{C^0(Y)} < +\infty$ 并且，根据 A.4 节的讨论，全变差

$(\omega_t + i\partial\bar{\partial}\phi_{CY,\ t})^d - (\omega_t + i\partial\bar{\partial}\psi_t)^d$ 可以通过取足够小的 t 和 ρ 而任意小。于是，上述L^1-稳定性估计有如下推论：

定理6. $\psi_t - \phi_t^{CY}$以较高概率接近其最大值，即对于所有 $\epsilon > 0, \lambda > 0$ $\tilde{\nu}_t(\{\psi_t - \phi_t^{CY} \leq -\epsilon\}) < \lambda$，当 t 足够小时。

证明. 假设 $c > 0$ 满足

$$\mu_t(\{\psi_t - \phi_t^{CY} < -c\}) \geq \lambda.$$

那么根据 L^1-稳定性估计定理 5

$$c = \sup \psi_t - \phi_t^{CY} + c.$$

其上界为一个随 $t \to 0$ 趋于零而消失的量，这就证明了该引理。□

在任意全纯图表上，由定理6和平均值不等式的简单应用可得局部 C_0-收敛（在略小一些的图表上）。

推论6。 设 K 是星形图表$U_{t,\ \delta,\ 2\rho}^{\sigma}$ 或面状图表 $\tilde{U}^{\sigma,\ t\ \delta}{}^{m}{}_{,,2\rho}$中的一个紧子集，则

$$\sup_{\mathrm{Log}_t^{-1}(K)} |\psi_t - \phi_t^{CY}| \to 0$$

当 $t \to 0$时。

证明。 对于$x \in U_{t,\ \delta,\ 2\rho}^{\sigma}$，设 $B_\rho(x)$为对数坐标下以 x 为中心、半径为 ρ 的球，其中$V_{t,\ \delta}^{\sigma}$，并注意到 $B_\rho(x) \subset U_{t,\ \delta,\ \rho}^{\sigma}$。令 $0 < \epsilon << 1$和 $0 < \lambda << |B_\delta|$，并应用定理6。注意，由于 $\Psi \circ \mathrm{Log}_t$ 满足利普希茨界 L，我们得到

$$\psi(x) \geq -\delta L + \frac{1}{|B_\delta(x)|} \int_{B_\delta} \psi.$$

由平均值不等式和定理6，对充分小的 t

$$\begin{aligned} \psi(x) - \phi_t^{CY} &\geq -\delta L + \frac{1}{|B_\delta(x)|} \int_{B_\delta(x)} \left(\psi(x) - \phi_t^{CY}\right) \\ &\geq -\delta L - \frac{\lambda}{|B_\delta(x)|} \left(||\psi||_{C^0} + ||\phi_t^{CY}||_{C^0}\right) - (1-\lambda)\epsilon. \end{aligned}$$

面状图表 $U^{\sigma,\ t\ \delta}{}^{m}{}_{,,2\rho}$ 的情形可用同样的方法证明。 □

A.6. **高阶收敛与 SYZ纤维化。** 根据上述 C^0- 估计，我们得出，卡拉比–丘度量在星形图表上可由 $\Psi \circ \mathrm{Log}_s$ 以 C^0 阶精度逼近 $U_{t,\ \delta,\ 2\rho}^{\sigma}$ 而在面状图表上可由 $\Psi \circ p_\sigma \circ \mathrm{Log}_s$ 逼近$U^{\sigma,\ t\ \delta}{}^{m}{}_{,\ ,2\rho}$。这两者都是半平坦的，其 Monge-Amp`ere 测度能够逼近卡拉比–丘体积形式。高阶估计以及特殊拉格朗日环面纤维化的存在性，随后可仿照 [Li23，第 5.2 节和第 5.4] 节中的论证，由 Savin小扰动定理 [Sav07]以及 Zhang 关于特殊拉格朗日环面纤维化的结果 [Zha17]得出。

References

[AG13] L. Ambrosio 和 N. Gigli。

A user's guide to optimal transport Modelling。载于 。数学讲义，。 *and Optimisation of Flows on Networks* 2062
施普林格出版社，柏林-海德堡，2013年。[Bat94] Victor Batyrev。 *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties* 3 1994 493 545 J.Alg.Geom. ( ) - 。[BB13] R. Berman 和 B. Berndtsson。*Real Monge-Ampère equations and Kähler-Ricci solitons on toric log Fano varieties.* ´ 图卢兹科学学院年刊 (0240-2963)。第 22 卷，第 4 期 (2013)：649-711。[Caf97] Caffarelli, Luis A.。

The Regularity of Mappings with a Convex Potential. 美国数学会杂志 5，第 1 期 (1992年)：99–104。https://doi.org/10.2307/2152752。[Fig99] A. Figalli。

The Monge–Ampère equation and its applications。苏黎世高等数学讲座。欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2017年。[GS06] 通过对数退化数据实现镜像对称。I，微分几何杂志 72 (2006年)，169–338。MR 2213573。Zbl 1107.14029。可见于 http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1143593211。[GW00] Mark Gross 和 P. Wilson。 *Large Complex Structure Limits of K3 Surfaces*。微分几何杂志。55。(2000年) .10.4310/jdg/1090341262。[HZ01] Christian Haase 和 Ilia Zharkov。

Integral affine structures on spheres and torus fibrations of Calabi-Yau toric hypersurfaces I [97] Hit Nigel J. Hitchin。

The moduli space of special lagrangian submanifolds。比萨高等师范学校年刊，科学系，第 4 系列，第 25 卷，第 3 4 1997 503 515 - 期 ( )，第 - 页 HJMM Jakob Hultgren、[22] Mattias Jonsson、Enrica Mazzon、Nicholas McCleerey。 *Trop-ical and non-Archimedean Monge-Ampère equations for a class of Calabi-Yau hypersurfaces.* 2208 13697 arXiv: 。 。[KrSk97]

Kreuzer, M. 和 H. Skarke。 *On the Classification of Reflexive Polyhedra.* 数学物理通讯，第 185 卷，第 2 期，1997年5月，第 495–508 页。Crossref，https://doi.org/10.1007/s002200050100。[KS01] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman。*Homological Mirror Symmetry and Torusa Fibrations* 203 263 2001 《辛几何与镜像对称》，第 - 页 ( ) [KS06] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman。 *Affine structures and non-Archimedean analytic spaces The unity of mathematics* 244, 321 385 。载于 。数学进展 – 。波士顿比克豪瑟出版社，波士顿，马萨诸塞州，2006年。[Leu05] Naichung Conan Leung。

Mirror symmetry without corrections.《分析与几何通讯》第 13 卷，第 2 期，287-331，2005年。[Li201] Yang Li。*Metric SYZ conjecture and non-archimedean geometry*。arXiv:2007.01384。[Li20b] Yang Li。

Uniform Skoda integrability and Calabi-Yau degeneration arXiv:2006.16961。[Li22a] Yang Li。 *Strominger–Yau–Zaslow conjecture for Calabi–Yau hypersurfaces in the Fermat family* 。《数学学报》( )，– **229** 2022 1 53 。[Li22b] Yang Li。 *Survey on the metric SYZ conjecture and non-archimedean geometry*。《现代物理学国际杂志A》第 37 卷，第 17 期，2230009 (2022年) [Li23] Yang Li。

Metric SYZ conjecture for certain toric Fano hypersurfaces arXiv:2301.12983。[Moo21] C. Mooney。 *Solutions to the Monge–Ampère equation with polyhedral and Y-shaped singularities* 。几何分析 **31** 2021 9509 9526 杂志 ( )，– 。[MR22] C. Mooney 和 A. Rakshit。

Singular structures in solutions to the Monge–Ampère equations with point masses 。arXiv: 。 。 2204 11365

[Nil05] Nill, B. *Gorenstein toric Fano varieties.*《数学手稿》116, 183–210 (
2005 10 1007 00229 004 0532 3). https://doi.org/ . /s - - - PS Leonard
[22] ´ *Hybrid toric varieties and the non-archimedean SYZ*
Pille-Schneider. *fibration on Calabi-Yau hypersurfaces.* 2210 05578 arXiv: . . [
Sav07] O. Savin. *Small perturbation solutions for elliptic equations.*《偏微分方程通讯》, 32 (2007),
557-578. [SYZ96] A. Strominger, S.-T. Yau, E. Zaslov. *Mirror Symmetry is T-duality.*《核物理》
B479:243–259, 1996. [Vil09] C. Villani. *Optimal Transport.* 数学科学基础丛书，第338卷，施普林格，
（2009）。旧与新。[Zha17] Y. Zhang. *Collapsing of Calabi-Yau manifolds and special Lagrangian submanifolds* 2017 53 78 .《雅盖隆大学数学学报》，
( ) , - 。

Dept of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology, Göteborg,Sweden*Email address*: rolfan@chalmers.se

Dept of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå University, 90187 Umeå, Sweden*Email address*: jakob.hultgren@umu.se